

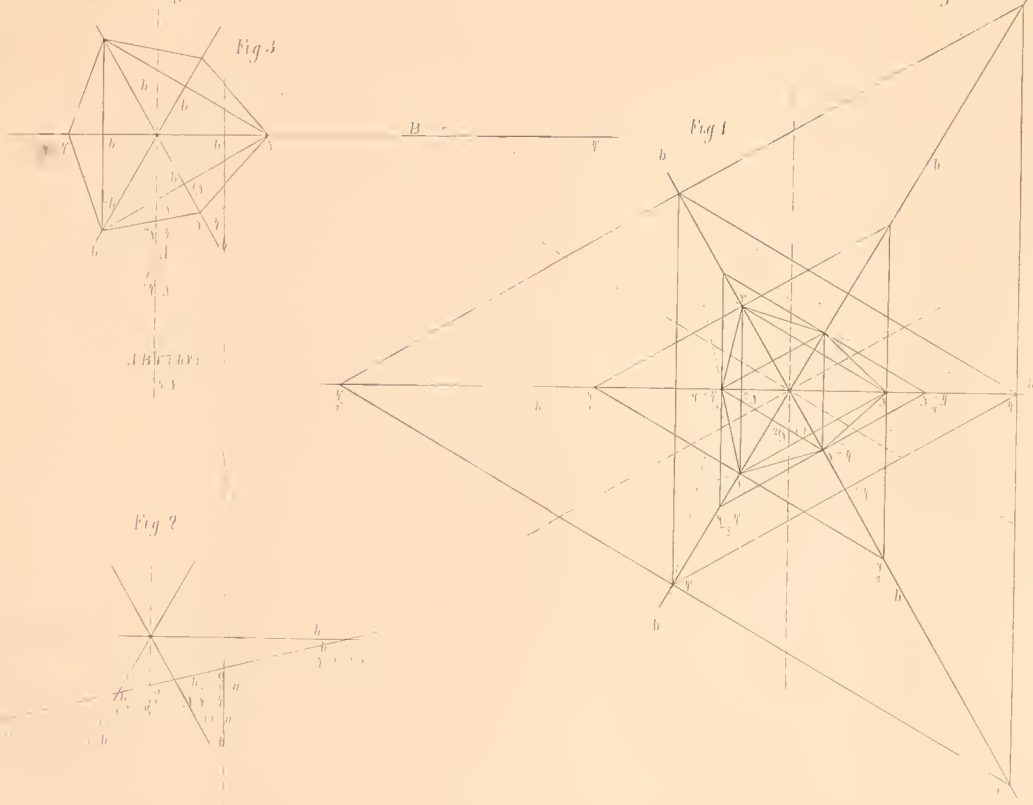
Ueber das Axensystem der drei- und sechsgliedrigen Krystalle.

Von

† G. Werner in Stuttgart.

Mit Tafel IV.

Die Aufstellung eines Systems von Axen in den Krystallen als von geraden Linien, welche man sich durch den Mittelpunkt des Krystalls gezogen denkt, um darauf seine einzelnen Flächen zu beziehen, hat zunächst einen praktischen Zweck. Es soll für die Flächen ein mathematischer Ausdruck (Formel, Zeichen) gefunden werden, der ihre Richtung angibt und der daher einerseits zu ihrer unzweideutigen Bezeichnung, andererseits zur Grundlage bei krystallographischen Berechnungen dienen soll. Jener Ausdruck besteht in seiner leichtverständlichsten Form in der Darstellung des Verhältnisses jener vom Axenmittelpunkt aus gemessenen Stücke (Parameter), welche durch die betreffende Fläche von den einzelnen Axen abgeschnitten werden. Diese Stücke werden angegeben als (Vielfache oder zweckmässiger als) Bruchtheile der für jede Axe angenommenen Einheit. Der Ausdruck $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\xi}$ bezeichnet demnach eine Fläche, deren Richtung gegeben ist durch drei Punkte, welche ihre Durchschnittspunkte mit drei ihrer Richtung nach als bekannt vorausgesetzten Axen sind und welche vom Axenmittelpunkt beziehungsweise um die Stücke $\frac{a}{\mu}$, $\frac{b}{\nu}$, $\frac{c}{\xi}$ entfernt sind.



$A B C D E F G$

Schon im Interesse der Übersichtlichkeit liegt die Forderung, dass der genannte mathematische Ausdruck für alle physikalisch gleichen Flächen, also solche Flächen, deren Inbegriff eine einfache Krystallform genannt wird, gleichlautend sein soll, und damit hängt die weitere Nothwendigkeit zusammen, dass das einem Krystall zu Grunde gelegte Axensystem ein Ausdruck desjenigen Symmetriegesetzes sein sollte, welches nicht allein seine morphologischen, sondern auch alle seine physikalischen Eigenschaften beherrscht. Nur ein solches Axensystem, welches diese Forderung erfüllt, verdient den Namen eines natürlichen in einem ähnlichen Sinn, wie man in den systematischen Theilen der Naturgeschichte von natürlichen Systemen, natürlicher Eintheilung u. dgl. spricht.

In jedem Krystallsystem sind verschiedene solche Axensysteme denkbar, welche sämmtlich in gleich präciser Weise der letztgenannten Forderung genügen. So könnte man z. B. im regulären System an sich ebenso gut die vier Normalen der Oktaëderflächen (trigonale Axen) oder die sechs der Granatoëderflächen (digonale Axen), wie die drei der Würfelflächen (tetragonale Axen) benützen. Ganz ähnlich in den anderen Systemen. Welchem unter solchen an sich gleichberechtigten Axensystemen der Vorzug zu geben sei, darüber entscheidet die grössere Übersichtlichkeit, wie ihre praktische Verwendbarkeit für die Aufstellung der mathematischen Formeln oder Zeichen, und für die Berechnungen. Und weil zur Bestimmung der Richtungen einer Ebene drei ihrer Punkte — in unserem Fall die Schnittpunkte mit drei Axen — hinreichend sind, so ist es im regulären System am einfachsten, die Normalen der Würfelflächen, die tetragonalen Axen zu wählen, die überdiess den Vortheil darbieten, dass sie durch ihre rechtwinklige Stellung zu einander die Berechnung am meisten erleichtern.

Die oben genannte Forderung, dass die aufgestellten Axen ein Ausdruck des dem Krystall zu Grunde liegenden Symmetriegesetzes sein müssen, ist im Allgemeinen nur für die holoëdrischen Formen erfüllbar, da ja die hemiëdrischen nur in Bezug auf die Richtungen, nicht aber auf die physikalischen Eigenschaften der vorhandenen Flächen, jedenfalls nicht in Bezug auf die Zahl der unter sich gleichwerthigen Flächen, beziehungsweise Kanten demselben Symmetriegesetz folgen wie die holoëdrischen, von denen

sie sich ableiten. Man ist daher genöthigt, bei den Zeichen der hemiëdrischen Formen noch bestimmte Andeutungen über ihr Verhältniss zu dem für sie benützten, nach dem Symmetriegesetz der holoëdrischen Krystalle gewählten Axensystem hinzuzufügen.

Eine besondere Gestalt gewinnt die Frage nach der richtigen Wahl des Axensystems bei den drei- und sechsgliedrigen Formen. Das von WEISS aufgestellte und von den meisten Krystallographen bis heute beibehaltene Axensystem bezieht sich zunächst auf die sechsgliedrigen Gestalten und besteht aus drei (in Einer Ebene liegenden, einander unter 60° schneidenden Queraxen a , welche in dem hexagonalen Querschnitt der einen (ersten) sechsseitigen Säule und der sechsseitigen Pyramiden der einen (ersten) Ordnung den Seiten parallel gehen, dagegen in dem der andern zu den Seiten rechtwinklig stehen. Dazu kommt die zur Ebene der Queraxen rechtwinklige Hauptaxe c . Dieses Axensystem ist also ein vollständig richtiger Ausdruck der Symmetrieverhältnisse der sechsgliedrigen Formen und muss also mit Rücksicht auf diese ein natürliches genannt werden. Es muss aber hervorgehoben werden, dass in gleicher Weise, wie im viergliedrigen System auch hier keine innere Nöthigung vorliegt, wodurch bestimmt würde, welche von den beiden Ordnungen von Pyramiden und Säulen gewählt wird, um parallel mit deren Seiten die Queraxen anzunehmen.

Anders liegt die Sache bei den dreigliedrigen (rhomboëdrischen) Gestalten. Ihr Symmetriegesetz wird durch das beschriebene Axensystem nicht zum Ausdruck gebracht, so wenig als das der tetraëdrisch-regulären Körper durch das Axensystem der holoëdrisch-regulären. Von den Flächen, welche durch das auf die WEISS'schen Axen bezogene Zeichen ausgedrückt werden, sind nur diejenigen gleichwerthig, welche in den abwechselnden Sextanten der oberen, wie der unteren Hälfte des Krystalls liegen, und dieses Verhältniss muss noch irgend wie zum Ausdruck gebracht werden. Soweit würden sich die dreigliedrigen Körper ebenso verhalten wie die hemiëdrischen Formen anderer Systeme. Allein der Fall ist hier doch ein anderer als bei letzteren; denn die rhomboëdrischen Körper unterscheiden sich in mehreren wesentlichen Punkten von den ächten Halbflächen.

Bekanntlich lassen sich alle übrigen Krystallsysteme aus dem regulären ableiten, indem man die Körper des letzteren der Reihe

nach auf eine Würfel-, Oktaëder-, Granatoëder-, Vierundzwanzigflächner-, Achtundvierzigflächner-Fläche legt und jedesmal in der Richtung der nun vertical stehenden Normale different werden lässt im Vergleich mit den übrigen sonst gleichen Richtungen. Wie in den vier übrigen Fällen das vier-, zwei-, zweiundein- und das eingliedrige System, so erhält man, wenn die gewählte Fläche die Oktaëderfläche ist, dreigliedrige Formen, nicht aber sechsgliedrige, welche unter allen Krystallformen allein nicht auf eine Analogie mit den regulären zurückgeführt werden können.* Hiermit sind die dreigliedrigen Körper als ächte Vollflächner gekennzeichnet und es wird hieran nichts dadurch geändert, dass es neben ihnen auch noch sechsgliedrige Krystalle gibt. Eine solche selbstständige Stellung der dreigliedrigen Formen kennzeichnet sich auch darin, dass sie, was eben eine Folge ihrer Ableitbarkeit aus dem regulären System ist, fähig sind in völlig ungezwungener Weise auf ein eigenes, ihr Symmetriegesetz ausdrückendes Axensystem bezogen zu werden. Dazu kommt, dass die zweifellos dreigliedrigen Krystalle weit häufiger sind als die zweifellos sechsgliedrigen. Aus letzterem Grund sieht sich ja sogar die NAUMANN'sche Bezeichnungsweise der Formen des Hexagonalsystems veranlasst, für die sechsgliedrigen und dreigliedrigen Formen verschiedene Flächenausdrücke aufzustellen, von denen die einen, wenigstens für die zwölfseitigen Pyramiden und Skalenoëder, nur durch eine verhältnissmässig umständliche Operation in die entsprechenden der andern Reihe überzuführen sind.

Aus all diesem geht hervor, dass die Aufstellung eines besonderen, den rhomboëdrischen Krystallformen zu Grunde gelegten Axensystems volle Berechtigung hat. Ein solches ist bekanntlich schon längst von MILLER aufgestellt und consequent in Anwendung gebracht worden. Es kann einerseits mit den tetragonalen, andererseits mit den trigonalen Axen des regulären Krystallsystems verglichen werden. Denn da die rhomboëdrischen Formen eine genaue Analogie zeigen mit den regulären, wenn man diese auf eine Würfecke oder, was dasselbe heisst, auf eine Oktaëderfläche stellt und in Richtung der nunmehr vertikal stehenden trigonalen Axe different werden lässt im Vergleich

* Ausführlicher wurde dies von dem Verf. dargelegt in dies. Jahrbuch 1870. S. 290 ff. „Zur Theorie des sechsgliedrigen Krystallsystems.“

mit den übrigen drei trigonalen Axen, so kann man entweder jene vertikale ganz weglassen und nur diese drei übrig lassen; oder man kann die tetragonalen Axen, die nunmehr alle drei gleich schief gegen die vertikale stehen, beibehalten und erhält in beiden Fällen ein System von drei gleichen Axen, welche beziehungsweise gleich geneigt sind gegen die Vertikale und unter sich gleiche Winkel mit einander bilden. Diess sind die MILLER'schen Axen, von denen man sofort erkennt, dass sie das Symmetriegesetz der rhomboëdrischen Formen vollständig zum Ausdruck bringen, und die man daher als natürliche Axen derselben bezeichnen kann.

Indessen ist dieses Axensystem zur Anwendung in der Rechnung minder bequem, wie auch das WEISS'sche Axensystem sich für diesen Zweck weniger gut empfiehlt, als ein rechtwinkliges. Ausserdem gestattet es nicht die nahe Verbindung zwischen den dreigliedrigen und sechsgliedrigen Körpern (an welchen letzteren die einfachen Formen als Combinationen dargestellt werden müssten), und noch weniger die Analogie zwischen den sechsgliedrigen und viergliedrigen Körpern zum Ausdruck zu bringen. Aus solchen Gründen, sowie auch mit Rücksicht auf die optischen Verhältnisse ist nicht allein zum Zweck der Berechnung, sondern von SCHRAUF* auch zur Bezeichnung der Formen im Flächen Ausdruck ein rechtwinkliges Axensystem in Anwendung gebracht worden, welches aus dem WEISS'schen abgeleitet ist und aus der Hauptaxe c , einer Queraxe a und der zu dieser rechtwinkligen Halbirungslinie b des Winkels der beiden andern Queraxen besteht. Diese Axen bringen aber, wenigstens für die meisten Formen die Nothwendigkeit mit sich, einfache Krystallformen im Flächen Ausdruck als Combinationen darzustellen und können daher nur als ein freilich sehr willkommenes Hilfsmittel bei den Berechnungen, nicht aber als natürliche Axen angesehen werden, wesshalb im Weitern von denselben ganz abgesehen wird.

Hat das MILLER'sche Axensystem den Vorzug, dass es den Symmetrieverhältnissen der rhomboëdrischen Körper ebenso vollständig Rechnung trägt, wie das WEISS'sche den vollflächig

* Lehrbuch der physikalischen Mineralogie. 1. Theil. S. 134 f.

hexagonalen, so dass diese beiden Systeme je für ihr Gebiet als wirklich natürliche angesehen werden müssen, so fehlt dagegen beiden eine nahe Beziehung zu einander, wie sie doch bei der innigen Verwandtschaft zwischen den dreigliedrigen und sechsgliedrigen Körpern entschieden wünschenswerth erscheint. Es wäre höchst unnatürlich, wenn man neben einander WEISS'sche Zeichen oder wenigstens solche, welche sich auf das WEISS'sche Axensystem beziehen, für die sechsgliedrigen, und MILLER'sche Zeichen für die dreigliedrigen Körper gebrauchen würde. Glücklicherweise ist jedoch das MILLER'sche Axensystem nicht das einzige, welches das Symmetriegesetz der dreigliedrigen Formen ausdrückt.

Bei der Anwendung der WEISS'schen Axen auf dreigliedrige Körper pflegen die Queraxen a so gewählt zu werden, dass sie zu den Seitenkanten derjenigen sechsseitigen Pyramiden parallel gehen, welche bei diesen Krystallen aus zwei physikalisch differenten Rhomboëdern bestehen. Diesen kommt daher das Zeichen

$\frac{a}{o} : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{c}{\xi}$ zu, wobei die drei aufeinanderfolgenden Buch-

staben a sich auf drei aufeinanderfolgende von den sechs horizontalen Halbaxen beziehen, deren jede mit der vorhergehenden in gleichem Sinn gemessen einen Winkel von 60° macht. Diese Queraxen stehen demnach rechtwinklig zu den Seitenkanten der sechsseitigen Pyramiden der andern Ordnung, welche bei den dreigliedrigen Formen vollflächig vorhanden und hier als specielle Fälle von Skalenoëdern zu betrachten sind, da sie zweierlei krystallographisch verschiedene, obwohl sämmtlich gleich lange Endkanten haben. Diese Pyramiden erhalten daher das Zeichen

$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{2\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{c}{\xi}$.

Zur Darstellung eines einzigen Rhomboëders durch einen Flächenausdruck ist also, da dieser zunächst ihm und seinem Gegenrhomboëder gemeinsam ist, eine Beschränkung seiner Giltigkeit auf die Hälfte der oberen und unteren Flächen erforderlich. Zur Kennzeichnung dieser Einschränkung sind zweierlei Methoden eingeführt worden. Bei beiden werden auf jeder der drei Queraxen a von den zwei vom Mittelpunkt ausgehenden Axenzweigen (Halbaxen) der eine als positiv (a), der andere als negativ

($a' = -a$) unterschieden, und ebenso auf der Hauptaxe der eine (obere) Zweig als positiv (c), der andere (untere) als negativ ($c' = -c$) angesehen. Oder mit andern Worten: auf jeder Axe wird die eine Richtung, in welcher vom Axenmittelpunkt aus die positiven Werthe gemessen werden, von der entgegengesetzten unterschieden in gleicher Weise, wie diess in der analytischen Geometrie geschieht.

Nach der einen längst eingeführten (WEISS'schen) Methode erhält man nun, da dem einen Rhomboëder die Bezeichnung

$\frac{a}{o} : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{c}{\xi}$ gelassen wird, die sich auf drei aufeinander unter

Winkeln von 60° folgende positive Axenrichtungen bezieht, das andere (Gegenrhomboëder), von dem je eine Fläche der obern Hälfte einer solchen des ersten gerade gegenüberliegt, die Be-

zeichnung $\frac{a'}{o} : \frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{\mu} : \frac{c}{\xi}$. In entsprechender Weise werden die

Skalenoëder mit ihren Gegenskalenoëdern durch die Formeln

$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{c}{\xi}$ und $\frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a'}{\nu - \mu} : \frac{c}{\xi}$ dargestellt. Genau

genommen wird hier die Unterscheidung der positiven und negativen Axenzweige nur im einzelnen Fall mit Rücksicht auf die Lage der einzelnen Krystallflächen durchgeführt. Denn wenn im Axensystem selbst wirklich die positiven und negativen Zweige in der erwähnten Weise angenommen würden, so würde man beim Herumgehen um dasselbe drei positive Axenrichtungen nach einander und dann drei negative nacheinander treffen; das ganze Axensystem hätte demnach einen monosymmetrischen Charakter, was den dreigliedrigen Krystallen nicht entspricht.

Die andere Methode nimmt auf den Queraxen unter den sechs vom Mittelpunkt ausgehenden Richtungen die unter 120° sich schneidenden als positiv an (a); zwischen je zweien derselben erscheint dann als Rückwärtsverlängerung der dritten eine negative (a'). Jede Fläche, welche die drei Queraxen schneidet, trifft also entweder zwei derselben auf der positiven Seite und in deren Mitte die dritte auf der negativen, oder zwei derselben auf der negativen Seite und zwischen diesen die dritte auf der positiven. Diese Auffassung der Axenrichtungen stammt

von BRAVAIS. Wie GROTH* und schon vor ihm Andere (was aber GROTH bei Abfassung seines betr. Aufsatzes unbekannt war, obgleich diese Schreibweise sogar schon in DES CLOIZEAUX' Mineralogie zu finden ist) auf die WEISS'schen Zeichen die abgekürzte Schreibweise MILLER's (eigentlich WHEWELL's) angewandt hat, nach welcher statt der ganzen Flächenausdrücke nur die Indices (d. h. die Zahlenwerthe μ , ν etc., welche in die Axeneinheiten dividiren) aneinander gereiht werden, so geschieht diess jetzt vielfach mit den vier Indices nach der BRAVAIS'schen Auffassung der Axenrichtungen. Und zwar werden dieselben so geordnet, dass zuerst die auf die beiden getroffenen positiven, sodann der auf die zwischen jenen liegende negative Richtung der Queraxen, endlich der auf die Hauptaxe bezügliche Index genannt wird. Aus den Flächenzeichen der Skalenoëder z. B., wie es oben angegeben worden ist: $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{c}{\xi}$ wäre also zunächst das neue: $\frac{a}{\nu - \mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{c}{\xi}$ zu bilden, was die abgekürzte Bezeichnung: $(\nu - \mu, \mu, \bar{\nu}, \xi)$ gäbe. Die beiden Ordnungen von Skalenoëdern werden sodann dadurch unterschieden, dass das Zeichen der einen die obengenannte Form erhält, das der andern die in der Anordnung der Indices abweichende: $(\mu, \nu - \mu, \bar{\nu}, \xi)$, wobei vorausgesetzt ist, dass $\nu > \nu - \mu > \mu$; und ebenso bei den beiden Ordnungen der Rhomboëder.

Auch dieses Axensystem drückt offenbar die Symmetrieverhältnisse der dreigliedrigen Formen nicht wirklich aus. Zwar hat dasselbe einen entschieden dreigliedrigen Charakter, sofern durch dasselbe nur drei vertikale Symmetrieebenen, die sich unter Winkeln von 60° schneiden, angedeutet sind; allein diese Symmetrieebenen, von denen je eine durch die Haupt- und eine Queraxe geht, fallen gar nicht mit den Symmetrieebenen der auf sie bezogenen dreigliedrigen Formen zusammen, sondern schneiden sie unter Winkeln von 30° . Es lässt sich dieses Missverhältniss in einfacher Weise an jedem Rhomboëder klar machen. Ein solches wird stets durch eine vertikale Ebene, welche zu

* Mineralog. Mittheilungen v. G. TSCHERMAK. 1874. S. 223 ff.

einer seiner Flächen rechtwinklig steht, symmetrisch halbirt. Diese Ebene halbirt aber im Axensystem den Winkel zweier Queraxen, so dass nach der BRAVAIS'schen Bezeichnung mit der positiven Axenrichtung der einen die negative der andern correspondirt, also keine wirkliche Symmetrie herrscht.

Es ist hiernach klar, dass man nur das Axensystem um 30° um die Hauptaxe zu drehen braucht, um seine Symmetrieebenen mit denen der dreigliedrigen zusammenfallen zu lassen. Oder, was dasselbe heisst, man hat statt der WEISS'schen Queraxen die Halbierungslinien ihrer spitzen Winkel (Taf. IV Fig. 1 und 3) die sonst wohl auch sogenannten Zwischenaxen b einzuführen und an diesen in der Weise der BRAVAIS'schen Darstellung unter den 6 vom Mittelpunkt ausgehenden Axenrichtungen drei, unter 120° sich schneidende als positiv (b), die andere als negativ (b') anzusehen. Ebenso ist auf der Hauptaxe die eine Richtung als positiv (c), die andere als negativ (c') zu unterscheiden. Dieses Axensystem ist ein natürliches für die dreigliedrigen Körper und hat den Vorzug, zugleich die nahen Beziehungen derselben zu den sechsgliedrigen zum Ausdruck zu bringen. Denn man braucht in demselben nur $b' = b$ und $c' = c$ zu setzen, so treten zu den drei Symmetrieebenen der dreigliedrigen Körper die vier übrigen der sechsgliedrigen hinzu.

Die Annahme dieses Axensystems ist so naheliegend, dass es sich eigentlich Jedem von selbst darbietet, der sich mit diesem Gegenstand beschäftigt. Wenn es trotzdem bis daher nicht wirklich in den Gebrauch aufgenommen worden ist, so erklärt sich dies wohl dadurch, dass es bedenklich erscheinen muss, zu den ohnehin schon mannigfaltigen Arten der Bezeichnung der dreigliedrigen Formen (die sechsgliedrigen blieben ja völlig unberührt) eine weitere hinzuzufügen. Am bedeutendsten würde die Umgestaltung dadurch, dass für alle dreigliedrigen Körper das numerische Axenverhältniss ein anderes würde, wenn auch zwischen dem bis jetzt angenommenen $a : c$ und dem neuen $b : c$ die Relation bestünde: $b = a\sqrt{3}$. Immerhin aber erscheint es nicht ohne Interesse, die Aenderungen, welche die Flächenausdrücke und Anderes in Folge der Einführung des genannten Axensystems erleiden würden, zu verfolgen und zu untersuchen,

ob dieselben gegenüber der gewöhnlichen Wahl der Axen eine Vereinfachung erfahren und dadurch sonstige Vortheile gewährt werden oder nicht.

Zunächst greifen wir nochmals zurück zum regulären System. Projicirt man Würfel, Oktaëder und Granatoëder (nach QUENSTEDT's Methode) auf die Oktaëderfläche, so steht eine trigonale Axe senkrecht auf der Projektionsebene im Mittelpunkt der Zeichnung, in welchem sich drei digonale Axen unter Winkeln von 60° schneiden. Diese stehen rechtwinklig auf den 6 Granatoëderflächen, deren Sektionslinien durch den Mittelpunkt gehen, und entsprechen den WEISS'schen Queraxen a , wie man sofort an der Stellung der Projektionen von Würfel und Oktaëder sieht, die sich hier wie Rhomboëder verschiedener Ordnung verhalten. Jene sechs Granatoëderflächen entsprechen der $\left. \begin{array}{l} \text{zweiten} \\ \text{ersten} \end{array} \right\}$ Säule, während die sechs in ihrer Zone liegenden, ihre Kanten gerade abstumpfenden Flächen des Ikositetraëders $\frac{a}{2} : a : a$ die $\left. \begin{array}{l} \text{erste} \\ \text{zweite} \end{array} \right\}$ Säule repräsentiren. Die Normalen zu diesen letzteren (die mit den Sektionslinien jener sechs Granatoëderflächen zusammenfallen), sind die Analoga unserer Queraxen b . Wie man bei Vergleichung deutlich sieht, bieten nur sie, wenn man auf jeder eine positive und eine negative Richtung so unterscheidet, dass die positiven unter Winkeln von 120° auseinander gehen, einen adäquaten Ausdruck für die Art der symmetrischen Gruppierung der Flächen um die trigonale Axe dar, nicht aber die Queraxen a , die in die Richtungen der Sektionslinien der genannten 6 Ikositetraëderflächen: $\frac{a}{2} : a : a$ fallen und bei denen jede Andeutung davon fehlt, dass ringsherum nur je dreimal, nicht je sechsmal die Richtungen gleicher Ausbildung wiederkehren.

Wir legen also im Folgenden den dreigliedrigen Formen ausser einer Hauptaxe c drei dazu rechtwinklige Queraxen b zu Grund, deren positive Axenrichtungen unter Winkeln von 120° auseinander gehen, so dass zwischen je zweien derselben der negative Zweig der dritten erscheint. Jede Fläche wird also im Allgemeinen, d. h. wenn sie nur keiner der Queraxen parallel geht, entweder zwei Axen auf der positiven Richtung und in

ihrer Mitte die negative der dritten schneiden, oder aber zwei auf der negativen und zwischen ihnen die dritte auf der positiven. Im Flächenausdruck lassen wir die Queraxen so auf einander folgen, dass diejenige, deren Index das abweichende Vorzeichen hat, zwischen die beiden andern zu stehen kommt. Dadurch wird die Lage der Fläche zu den Symmetrieebenen schon äusserlich im Flächenausdruck direkt erkennbar. Derselbe heisst demnach für den allgemeinsten Fall (Skalenoëder) entweder:

$$\frac{b}{+\varphi} : \frac{b}{-\chi} : \frac{b}{+\psi} : \frac{c}{+\xi} \text{ oder } \frac{b}{-\varphi} : \frac{b}{+\chi} : \frac{b}{-\psi} : \frac{c}{+\xi}.$$

Der Index des vierten Gliedes ist gleich dem entsprechenden in dem auf die WEISS'schen Axen bezogenen Flächenausdruck. Sodann kürzen wir die obigen Formeln nach Art der MILLER'schen Bezeichnung ab, indem wir in gleicher Reihenfolge nur die Indices angeben, und negative Indices durch einen darüber gesetzten Horizontalstrich andeuten: $\varphi \overline{\chi} \psi \xi$ und $\overline{\varphi} \chi \overline{\psi} \xi$. Nach einer bekannten Regel (Kantenzonengesetz) ist jeder der drei Queraxenindices gleich der negativen Summe der beiden andern, da die Einheit jeder Queraxe mit ihrer negativen Verlängerung nach Richtung und Länge zusammenfällt mit der kurzen Diagonale des aus den Einheiten der beiden andern Axen gebildeten Rhombus, also: $\overline{\chi} = -(\varphi + \psi)$; $\varphi = -(\overline{\chi} + \psi)$; $\psi = -(\varphi + \overline{\chi})$; also kurz: $\chi = \varphi + \psi$. Die genannten Zeichen gelten zunächst für die Flächen der oberen Hälfte des Krystalls; die für die Flächen der unteren Hälfte heissen $\overline{\varphi} \chi \overline{\psi} \xi$ und $\varphi \overline{\chi} \psi \overline{\xi}$. Sie sind mit den obigen identisch, da sie nur mit derselben Grösse (nämlich -1) durchmultiplicirt zu werden brauchen, um in diese verwandelt zu werden, was bekanntlich ein Ausdruck für Parallelität zweier Flächen ist. Im Folgenden benützen wir nur die für die oberen Flächen geltenden Zeichen.

Zweckmässig ist es, unter den beiden Indices φ und ψ , wenn sie verschieden sind, mit φ stets den grösseren und mit ψ den kleineren zu bezeichnen.

Die Ermittlung der Werthe der Indices für eine Anzahl verschiedener Flächen eines Krystalls aus ihrem Zonenzusammenhang unter Zugrundlegung einer bestimmten Form mit ge-

gebenen Zeichen geschieht natürlich mit Hilfe einer Projektionsfigur eben so leicht, wie für die WEISS'schen oder BRAVAIS'schen Zeichen.

Um die neuen Zeichen aus den Weiss'schen abzuleiten, braucht man nur den vollständigen Flächenausdruck für sämtliche Axen a , b und c in der Weise anzuschreiben, dass man die Axen a und b in dieselbe Reihenfolge stellt, wie man sie nach einander rings um die Axe c angeordnet findet. Er lautet (Tab. IV Fig. 2):

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\varphi} : \frac{a}{\nu} : \frac{-b}{\chi} : \frac{a}{\nu-\mu} : \frac{b}{\psi} : \frac{c}{\xi}.$$

Die Axeneinheit von b setzen wir gleich der (grossen) Diagonale des Rhombus, der aus den Einheiten der benachbarten (unter 60° sich schneidenden) Axen a sich construiren lässt, also $= a \sqrt{3}$. Unter dieser Voraussetzung gilt nach dem Kantenzonengesetz die Regel, dass alsdann jeder Index, der sich auf eine Axe b bezieht, gleich ist der Summe der auf die beiden benachbarten Axen a bezüglichen Indices; ebenso gilt umgekehrt, dass jeder Index einer Axe a gleich ist einem Drittel der Summe der auf die beiden benachbarten Axen b bezüglichen Indices der gleichen Fläche. Es gilt also:

$$1) \varphi = \mu + \nu ; \chi = 2\nu - \mu = \varphi + \psi ; \psi = \nu - 2\mu.$$

$$2) \mu = \frac{\varphi - \psi}{3} ; \nu = \frac{\varphi + \chi}{3} = \frac{2\varphi + \psi}{3} ; \nu - \mu = \frac{\varphi + 2\psi}{3}.$$

Diese Gleichungen gelten natürlich in gleicher Weise auch für die Ableitung aus den BRAVAIS'schen Zeichen, deren allgemeine Form ist $\nu - \mu \cdot \mu \cdot \bar{\nu} \cdot \xi$, da μ , ν und ξ hier die gleichen Werthe haben, wie in dem WEISS'schen Ausdruck. — In Betreff der Rhomboëder von der WEISS'schen Formel $\frac{a}{o} : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{c}{\xi}$ darf nicht vergessen werden, dass hier μ des allgemeinen Zeichens $= o$, und ν des allgemeinen Zeichens $= \mu$ ist; also φ nicht $= 2\mu$, sondern $= \mu$, $\chi = 2\mu = 2\varphi$, $\psi = \mu = \varphi$ gesetzt werden muss.

In der folgenden Tabelle sind für sämtliche Gestalten der dreigliedrigen Krystalle die WEISS'schen, BRAVAIS'schen und die

neuen* Zeichen zusammengestellt; die letzteren sind auf einfache Weise aus den beiden ersteren abzuleiten.

	WEISS.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.
Endfläche	$\frac{a}{o} : \frac{a}{o} : \frac{a}{o} : c$	$o . o . o . 1$	$o . o . o . 1$
Rhomboëder 1. Ordn.	$\frac{a}{o} : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{c}{\sqrt{\mu}}$	$\mu . o . \bar{\mu} . \xi$	$\varphi . 2\bar{\varphi} . \varphi . \xi$
„ 2. „	$\frac{a'}{o} : \frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{\mu} : \frac{c}{\sqrt{\mu}}$	$o . \mu . \bar{\mu} . \xi$	$\bar{\varphi} . 2\varphi . \bar{\varphi} . \xi$
Erste sechsseit. Säule	$\frac{a}{o} : a : a : \frac{c}{o}$	$1 . o . \bar{1} . o$	$1 . \bar{2} . 1 . o$
Skalenoëder 1. Ordn.	$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{v} : \frac{a}{v-\mu} : \frac{c}{\sqrt{\mu}}$	$v - \mu . \mu . \bar{v} . \xi$	$\varphi . \bar{\varphi} + \bar{\psi} . \psi . \xi$
Dihexaëder (Grenzfall beider Skalen. Ordn.)	$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{2\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{c}{\sqrt{\mu}}$	$\mu . \mu . 2\bar{\mu} . \xi$	$\varphi . \bar{\varphi} . o . \xi$
Skalenoëder 2. Ordn.	$\frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{v} : \frac{a'}{v-\mu} : \frac{c}{\sqrt{\mu}}$	$\mu . v - \mu . \bar{v} . \xi$	$\bar{\varphi} . \varphi + \psi . \bar{\psi} . \xi$
Zweite sechsseit. Säule	$a : \frac{a}{2} : a : \frac{c}{o}$	$1 . 1 . \bar{2} . o$	$1 . \bar{1} . o . o$
6 + 6kant. Säulen	$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{v} : \frac{a}{v-\mu} : \frac{c}{o}$	$v - \mu . \mu . \bar{v} . o$	$\varphi . \bar{\varphi} + \bar{\psi} . \psi . o$

Der Unterschied zwischen beiden Rhomboëder- und Skalenoëderordnungen wird in den WEISS'schen Zeichen durch das Vorzeichen der drei Axen a angedeutet. Eine solche Unterscheidung wird aber illusorisch, sobald man den Ausdruck für weitere Flächen des gleichen Rhomboëders bzw. Skalenoëders anschreibt. Dagegen ist der Unterschied zwischen beiden Ordnungen in diesen, wie in den BRAVAIS'schen Formeln gegeben durch die Grösse der Werthe μ und v . Der Sextant, in welchem die betreffende Fläche liegt, ist der zwischen den beiden Axen a , auf welche sich die zwei grössten unter den drei Indices μ , v und $v - \mu$ beziehen. Da man aber diesen in der allgemeinen Formel, in welche keine speziellen Werthe eingesetzt

* Die Indices sind keineswegs neu. Sie sind bekanntlich schon längst von QUENSTEDT in dem „vollständigen Flächenzeichen“ der dreigliedrigen Körper nebst den auf die Axen a bezüglichen aufgeführt und benützt worden. Wenn wir ihre Zusammenstellung ohne diese, aber nach MILLER'scher Art und unter Verwendung der positiven und negativen Vorzeichen nach BRAVAIS'scher Art „neue Zeichen“ heissen, so geschieht es nur, um für sie im Gegensatz zu den sonstigen Flächenausdrücken nach WEISS, NAUMANN, MILLER, BRAVAIS u. s. w. einen Namen zu haben.

sind, ihre relative Grösse nicht ansehen kann, so wird die Unterscheidung hier nur dadurch möglich, dass man stets den kleinsten der drei Indices mit μ , den grössten mit ν bezeichnet, wodurch $\nu > \nu - \mu > \mu$, also $\nu > 2\mu$ wird.

Viel einfacher ist die Unterscheidung der beiden Ordnungen nach den neuen Zeichen, indem solche mit einem negativen und zwei positiven Indices unter den auf die Queraxen bezüglichen die erste Ordnung andeuten, solche mit einem positiven und zwei negativen die zweite. Diejenige Axe b , auf welche sich der Index mit dem abweichenden Vorzeichen bezieht, ist nach derselben Richtung gewendet, wie die betreffende Rhomboöder- oder Skalenoöderfläche.

Das Vorstehende wird noch deutlicher in die Augen springen, wenn wir in der folgenden Tabelle die Spezialzeichen für alle einzelnen Flächen eines Skalenoöders $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{c}{\xi}$ $= \nu - \mu \cdot \mu \cdot \bar{\nu} = \varphi \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \psi \cdot \xi$, sowie des Gegenskaloöders $\frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a'}{\nu - \mu} : \frac{c}{\xi} = \mu \cdot \nu - \mu \cdot \bar{\nu} = \overline{\varphi} \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \bar{\psi} \cdot \xi$ je mit den dreierlei Flächenausdrücken zusammenstellen. Wir beziehen jede Fläche auf die gleichen drei Axenrichtungen, gehen bei jedem der beiden Körper in der Reihenfolge der einzelnen Flächen rings um die Hauptaxe herum, und deuten auf eine leicht ersichtliche Art an, wo sich zwischen die Flächen des einen Körpers je zwei in den zwischenliegenden Sextanten liegende Flächen des Gegenkörpers einschieben. Die Formeln für die Flächen der untern Krystallhälfte lassen wir weg, da dieselben sich aus denen für die oberen einfach ergeben, wenn man in den Ausdrücken der Flächen des Gegenkörpers c' statt c setzt. Aus diesem Grund können wir auch das vierte Glied $\frac{c}{\xi}$, bzw. ξ , das in allen Formeln gleichlautend ist, zur Vereinfachung ganz weglassen. Wir unterscheiden in den WEISS'schen Zeichen die drei Axen als a_1, a_2, a_3 .

(s. Tabelle S. 69.)

In den WEISS'schen Zeichen erscheinen bei jedem der beiden Skalenoöder einmal alle drei, zweimal je zwei, zweimal je eine Axe a auf der negativen Seite; in den BRAVAIS'schen ist

WEISS.

BRAVAIS.

Neue Zeichen.

$$\frac{a_1}{\mu} : \frac{a_2}{v} : \frac{a_3}{v-\mu}$$

$$\frac{a'_1}{\mu} : \frac{a_2}{v-\mu} : \frac{a_3}{v}$$

$$\frac{a'_1}{v} : \frac{a'_2}{v-\mu} : \frac{a_3}{\mu}$$

$$\frac{a'_1}{v-\mu} : \frac{a'_2}{v} : \frac{a'_3}{\mu}$$

$$\frac{a_1}{v-\mu} : \frac{a'_2}{\mu} : \frac{a'_3}{v}$$

$$\frac{a_1}{v} : \frac{a_2}{\mu} : \frac{a'_3}{v-\mu}$$

$$v-\mu, \mu, \bar{v}$$

$$v, \bar{\mu}, v-\mu$$

$$\mu, \bar{v}, v-\mu$$

$$\bar{\mu}, v-\mu, v$$

$$\bar{v}, v-\mu, \mu$$

$$\bar{v}-\mu, v, \bar{\mu}$$

$$\varphi, \varphi+\psi, \psi$$

$$\psi, \varphi+\psi, \varphi$$

$$\varphi+\psi, \psi, \varphi$$

$$\varphi+\psi, \varphi, \psi$$

$$\psi, \varphi, \varphi+\psi$$

$$\varphi, \psi, \varphi+\psi$$

WEISS.

BRAVAIS.

Neue Zeichen.

$$\frac{a'_1}{v-\mu} : \frac{a'_2}{v} : \frac{a'_3}{\mu}$$

$$\left\{ \frac{a'_1}{v-\mu} : \frac{a_2}{\mu} : \frac{a_3}{v} \right.$$

$$\left. \frac{a'_1}{v} : \frac{a'_2}{\mu} : \frac{a_3}{v-\mu} \right\}$$

$$\left\{ \frac{a'_1}{\mu} : \frac{a'_2}{v} : \frac{a'_3}{v-\mu} \right.$$

$$\left. \frac{a_1}{\mu} : \frac{a'_2}{v-\mu} : \frac{a'_3}{v} \right\}$$

$$\frac{a_1}{v} : \frac{a_2}{v-\mu} : \frac{a'_3}{\mu}$$

$$\mu, v-\mu, \bar{v}$$

$$v, v-\mu, \bar{\mu}$$

$$v-\mu, \bar{v}, \mu$$

$$\bar{v}-\mu, \mu, v$$

$$\bar{v}, \mu, v-\mu$$

$$\bar{\mu}, v, v-\mu$$

$$\varphi+\varphi, \bar{\varphi}, \bar{\psi}$$

$$\bar{\psi}, \varphi, \varphi+\psi$$

$$\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \varphi+\psi$$

$$\bar{\varphi}, \varphi+\psi, \bar{\psi}$$

$$\bar{\psi}, \varphi+\psi, \bar{\varphi}$$

$$\varphi+\varphi, \bar{\psi}, \bar{\varphi}$$

unter den drei auf die Axen a bezüglichen Indices immer nur einer mit negativem Vorzeichen; in den neuen hat das eine (positive) Skalenoëder durchweg einen, das Gegenskaloenoëder zwei negative auf die Axen b bezügliche Indices. Zugleich zeigt in den neuern Flächenausdrücken jedesmal der Index mit abweichendem Vorzeichen diejenige Axe b an, welche von der in der betreffenden Fläche liegenden stumpferen Endkante des Skalenoëders getroffen wird. Ganz Ähnliches gilt von den Rhomboëdern; für diese darf ja nur in die genannten Ausdrücke $\mu = 0$, bezw. $\varphi = \psi$ gesetzt werden. Wie man deutlich sieht, sind in den genannten Beziehungen die neuen Zeichen entschieden übersichtlicher als die andern.

Vergleichen wir nun für die thatsächlich vorkommenden dreigliedrigen Formen die Indices, die sich auf die Axen b beziehen, mit den auf die Axen a bezüglichen.

Wir wählen als Beispiel die Formen des Kalkspaths und zwar nach der Zusammenstellung von IRBY,* wobei wir die dort besonders aufgeführten, weil unsicher bestimmten, weglassen. Von jeder Form wird zuerst der BRAVAIS'sche Flächenausdruck genannt und daneben der neue gesetzt.

(s. Tabellen S. 71—73.)

Es ist kein Zweifel, dass die neuen Indices im Allgemeinen etwas grösser sind, als die WEISS'schen. Die höchsten Zahlen finden sich bei den als 156 und 117 aufgeführten Skalenoëdern zweiter Ordnung. Jene hat als grössten Index im neuen Zeichen 173, bei WEISS nur 104, diese im neuen Zeichen 131, bei WEISS 80. Die Nothwendigkeit dieses Verhältnisses bei den Rhomboëdern ergibt sich aus deren Zeichen $\varphi \cdot \overline{2\varphi} \cdot \varphi \cdot \xi$ und $\overline{\varphi} \cdot 2\varphi \cdot \overline{\varphi} \cdot \xi$, worin $\varphi = \mu$, also $2\varphi = 2\mu$, so dass also hier das neue Zeichen stets einen doppelt so grossen Queraxenindex enthalten muss als das WEISS'sche. Kleinere Werthe für die neuen Indices als für die alten lassen sich also nur für die Skalenoëder und zwar dann erwarten, wenn die nach den S. 66 genannten Gleichungen aus den alten berechneten neuen Indices, sowie der von c durch die gleiche Zahl sich dividiren

* On the crystallography of calcite. Inaug.-Diss. der Univ. Göttingen. Bonn, Marcus 1878. Hier ist benützt das Referat von P. GROTH in der Zeitschr. für Krystallographie etc. 1879, pg. 613 ff.

1. Rhomboëder (inclus. Endfläche und erste Säule).

No.	BRAVAIS.		Neue Zeichen.		No.	BRAVAIS.		Neue Zeichen.		No.	BRAVAIS.		Neue Zeichen.	
1	1. 0. 1. 1		1. 2. 1. 1		18	0. 8. 8. 7		8. 16. 8. 7		35	0. 8. 8. 1		8. 16. 8. 1	
2	2. 0. 2. 3		2. 4. 2. 3		19	0. 6. 6. 7		6. 12. 6. 5		36	0. 11. 11. 1		11. 22. 11. 1	
3	4. 0. 4. 7		4. 8. 4. 7		20	0. 5. 5. 4		5. 10. 5. 4		37	0. 14. 14. 1		14. 28. 14. 1	
4	1. 0. 1. 2		1. 2. 1. 2		21	0. 4. 4. 3		4. 8. 4. 3		38	1. 0. 1. 0		1. 2. 1. 0	
5	2. 0. 2. 5		2. 4. 2. 5		22	0. 7. 7. 5		7. 14. 7. 5		39	28. 0. 28. 1		28. 56. 28. 1	
6	1. 0. 1. 4		1. 2. 1. 4		23	0. 3. 3. 2		3. 6. 3. 2		40	18. 0. 18. 1		18. 36. 18. 1	
7	0. 0. 0. 1		0. 0. 0. 1		24	0. 11. 11. 7		11. 22. 11. 7		41	16. 0. 16. 1		16. 32. 16. 1	
8	0. 1. 1. 10		1. 2. 1. 10		25	0. 13. 13. 8		13. 26. 13. 8		42	13. 0. 13. 1		13. 26. 13. 1	
9	0. 1. 1. 5		1. 2. 1. 5		26	0. 2. 2. 1		2. 4. 2. 1		43	10. 0. 10. 1		10. 20. 10. 1	
10	0. 7. 7. 20		7. 14. 7. 20		27	0. 9. 9. 4		9. 18. 9. 4		44	7. 0. 7. 1		7. 14. 7. 1	
11	0. 2. 2. 5		2. 4. 2. 5		28	0. 5. 5. 2		5. 10. 5. 2		45	6. 0. 6. 1		6. 12. 6. 1	
12	0. 1. 1. 2		1. 2. 1. 2		29	0. 11. 11. 4		11. 22. 11. 4		46	11. 0. 11. 2		11. 22. 11. 2	
13	0. 3. 3. 5		3. 6. 3. 5		30	0. 7. 7. 2		7. 14. 7. 2		47	5. 0. 5. 1		5. 10. 5. 1	
14	0. 2. 2. 3		2. 4. 2. 3		31	0. 4. 4. 1		4. 8. 4. 1		48	4. 0. 4. 1		4. 8. 4. 1	
15	0. 4. 4. 5		4. 8. 4. 5		32	0. 9. 9. 2		9. 18. 9. 2		49	3. 0. 3. 1		3. 6. 3. 1	
16	0. 7. 7. 8		7. 14. 7. 8		33	0. 5. 5. 1		5. 10. 5. 1		50	5. 0. 5. 2		5. 10. 5. 2	
17	0. 1. 1. 1		2. 2. 1. 1		34	0. 6. 6. 1		6. 12. 6. 1						

2. Skalenöeder (incl. Dihexaöeder, zweite Säule und 6 + 6kant. Säulen).
 a) Kantenzone des Hauptrhomböders (0111 Br. = 1211 n. Z.).

No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.	No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.	No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.
51	1. 2. 3. 5	4. 5. 1. 5	64	8. 1. 9. 10	10. 17. 7. 10	77	5. 3. 8. 2	11. 13. 2. 2
52	2. 3. 5. 8	7. 8. 1. 8	65	13. 1. 14. 15	5. 9. 4. 5	78	8. 5. 13. 3	6. 7. 1. 1
53	1. 1. 2. 3	1. 1. 0. 1	66	17. 2. 19. 15	7. 12. 5. 5	79	3. 2. 5. 1	7. 8. 1. 1
54	4. 3. 7. 10	10. 11. 1. 10	67	7. 1. 8. 6	3. 5. 2. 2	80	19. 13. 32. 6	15. 17. 2. 2
55	7. 4. 11. 15	5. 6. 1. 5	68	6. 1. 7. 5	8. 13. 5. 5	81	10. 7. 17. 3	8. 9. 1. 1
56	2. 1. 3. 4	4. 5. 1. 4	69	5. 1. 6. 4	7. 11. 4. 4	82	11. 8. 19. 3	9. 10. 1. 1
57	5. 2. 7. 9	3. 4. 1. 3	70	4. 1. 5. 3	2. 3. 1. 1	83	4. 3. 7. 1	10. 11. 1. 1
58	3. 1. 4. 5	5. 7. 2. 5	71	7. 2. 9. 5	11. 16. 5. 5	84	5. 4. 9. 1	13. 14. 1. 1
59	7. 2. 9. 11	11. 16. 5. 11	72	3. 1. 4. 2	5. 7. 2. 2	85	6. 5. 11. 1	16. 17. 1. 1
60	4. 1. 5. 6	2. 3. 1. 2	73	5. 2. 7. 3	3. 4. 1. 1	86	13. 11. 24. 2	35. 37. 2. 2
61	5. 1. 6. 7	7. 11. 4. 7	74	2. 1. 3. 1	4. 5. 1. 1	87	7. 6. 13. 1	19. 20. 1. 1
62	6. 1. 7. 8	8. 13. 5. 8	75	17. 9. 26. 8	35. 43. 8. 8	88	9. 8. 17. 1*	25. 26. 1. 1
63	7. 1. 8. 9	3. 5. 2. 3	76	7. 4. 11. 3	5. 6. 1. 1	89	1. 1. 2. 0	1. 1. 0. 0

b) Kantenzone des ersten schärferen Rhomböders (0221 Br. = 2421 n. Z.).

90	4. 2. 6. 5	8. 10. 2. 5	95	1. 2. 3. 2	4. 5. 1. 2	100	1. 5. 6. 2	7. 11. 4. 2
91	3. 2. 5. 4	7. 8. 1. 4	96	4. 10. 14. 9	6. 8. 2. 3	101	2. 8. 10. 3	4. 6. 2. 1
92	2. 2. 4. 3	2. 2. 0. 1	97	1. 4. 5. 3	2. 3. 1. 1	102	1. 3. 4. 1	5. 7. 2. 1
93	3. 4. 7. 5	10. 11. 1. 5	98	2. 10. 12. 7	14. 22. 8. 7	103	2. 4. 6. 1	8. 10. 2. 1
94	4. 6. 10. 7	14. 16. 2. 7	99	1. 6. 7. 4	8. 13. 5. 4	104	3. 5. 8. 1	11. 13. 2. 1

* In dem Referat der Zeitschr. für Kryst. u. s. w. a. a. O. steht hier 10. 7. 17. 1, daneben aber das NAUMANN'SCHE Zeichen R17, das auf 9. 8. 17. 1 Br. führt. Nur dieses Skalenöeder, nicht aber ersteres fällt in die Kantenzone des Hauptrhomböders.

c) Endkantenzone der Combination des Hauptrhomböders (0111 Br. = 1211 n. Z.)
mit seinem Geuehrhomböder (1011 Br. = 1211 n. Z.).

No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.	No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.
105	5. 1. 6. 1	7. 11. 4. 1	108	1. 6. 7. 1	8. 13. 5. 1
106	2. 3. 5. 2	7. 8. 1. 2	109	1. 9. 10. 1	11. 19. 8. 1
107	1. 2. 3. 1	4. 5. 1. 1			

d) Anderweitige Formen.

No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.	No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.	No.	BRAVAIS.	Neue Zeichen.
110	7. 7. 14. 12	7. 7. 0. 4	126	4. 8. 12. 5	16. 20. 4. 5	142	15. 5. 20. 4	25. 35. 10. 4
111	3. 13. 16. 11	19. 29. 10. 11	127	5. 13. 18. 7	23. 31. 8. 7	143	14. 2. 16. 3	6. 10. 4. 1
112	2. 7. 9. 5	11. 16. 5. 5	128	4. 4. 8. 3	4. 4. 0. 1	144	8. 8. 16. 3	8. 8. 0. 1
113	8. 16. 24. 13	32. 40. 8. 13	129	8. 12. 20. 7	28. 32. 4. 7	145	9. 14. 23. 4	32. 37. 5. 4
114	6. 11. 17. 19	23. 28. 5. 19	130	18. 49. 67. 21	85. 116. 31. 21	146	4. 2. 6. 1	8. 10. 2. 1
115	10. 7. 17. 9	8. 9. 1. 3	131	12. 32. 44. 13	56. 76. 20. 13	147	3. 3. 6. 1	9. 9. 0. 1
116	14. 26. 40. 21	18. 22. 4. 7	132	3. 4. 7. 2	10. 11. 1. 2	148	6. 7. 13. 2	19. 20. 1. 1
117	29. 51. 80. 41	109. 131. 22. 41	133	7. 28. 35. 9	14. 21. 7. 3	149	4. 16. 20. 3	8. 12. 4. 1
118	3. 5. 8. 4	11. 13. 2. 4	134	2. 2. 4. 1	6. 6. 0. 1	150	42. 13. 55. 8	68. 97. 29. 8
119	3. 7. 10. 5	13. 17. 4. 5	135	5. 8. 13. 3	6. 7. 1. 1	151	6. 2. 8. 1	10. 14. 4. 1
120	6. 4. 10. 5	14. 16. 2. 5	136	4. 5. 9. 2	13. 14. 1. 2	152	4. 4. 8. 1	12. 12. 0. 1
121	8. 5. 13. 6	6. 7. 1. 2	137	24. 8. 32. 7	40. 56. 16. 7	153	8. 4. 12. 1	16. 20. 4. 1
122	2. 9. 11. 5	13. 20. 7. 5	138	7. 7. 14. 3	7. 7. 0. 1	154	3. 1. 4. 0	5. 7. 2. 0
123	2. 7. 9. 4	11. 16. 5. 4	139	16. 8. 24. 5	32. 40. 8. 5	155	2. 1. 3. 0	4. 5. 1. 0
124	4. 12. 16. 7	20. 28. 8. 7	140	2. 3. 5. 1	7. 8. 1. 1	156	35. 69. 104. 56	139. 173. 34. 56
125	2. 5. 7. 3	3. 4. 1. 1	141	9. 11. 20. 4	29. 31. 2. 4			

lassen, das neue Zeichen also eine Vereinfachung erfahren kann, deren das alte unfähig ist. In der That ist dies bei einer ziemlichen Anzahl von Formen möglich. Unter 39 Skalenoëdern der Tabelle aus der Endkantenzone des Hauptrhomboëders ist es bei 15, also bei etwa zwei Fünfteln der Fall, unter den übrigen in der Tabelle aufgeführten Skalenoëdern freilich ziemlich seltener. Eine weitere Vereinfachung wäre denkbar, wenn für b eine andere Axeneinheit als $a\sqrt{3}$ gewählt würde. Dies wäre aber nur dann von Werth, wenn die Mehrzahl der grösseren Queraxenindices durch eine und dieselbe Zahl dividirbar wäre. Dies ist aber, wie die Tabelle zeigt, beim Kalkspath nicht der Fall.

Untersuchen wir nun, wie der **Zonenzusammenhang** zwischen Rhomboëdern und Skalenoëdern in den neuen Zeichen zum Ausdruck kommt. Jedes Skalenoëder bestimmt bekanntlich sechs Rhomboëder, nämlich zwei durch die schärferen, zwei durch die stumpferen Endkanten, zwei durch die Seitenkanten (bezw. deren durch die Spitze des Skalenoëders gelegten Parallelen)*. Das eine der beiden Rhomboëder ist dasjenige, welches mit dem Skalenoëder die betreffenden Kanten gemein hat. Je zwei Skalenoëderflächen liegen in seiner Kantenzone oder, was dasselbe heisst, seine Fläche geht durch zwei der betreffenden Skalenoëderkanten; oder endlich, je zwei Skalenoëderflächen schärfen die Rhomboëderkanten zu, und zwar entweder die End- oder die Zickzackkanten desselben. Das andere Rhomboëder ist dasjenige, welches die betreffende Kante des Skalenoëders abstumpft. Da es mithin auch die Endkante des erstgenannten Rhomboëders abstumpft, so ist es das nächste stumpfere zu diesem; seine auf die Queraxen bezüglichen Indices müssen also bei gleichem Hauptaxenindex halb so gross sein und entgegengesetztes Vorzeichen haben. Hieraus ergibt sich unmittelbar die einfache Art und Weise, wie die genannten Beziehungen in unsern Zeichen zum Ausdruck

* Schon früher sind die Beziehungen eines Skalenoëders zu den von ihm bestimmten Rhomboëdern durch die auf die Axen b bezüglichen Indices zum Ausdruck gebracht worden. s. v. QUENSTEDT, Handb. d. Min. III. Aufl. p. 481 ff. C. KLEIN, Einl. in die Krystallberechnung, p. 332. Wie viel übersichtlicher dieselben aber zur Anschauung kommen, wenn sie unmittelbar aus den einfachen Flächenzeichen selbst abgelesen werden können, zeigt die obige Darstellung.

kommen, da die Rhomboëder- und Skalenoëderkanten in die die Axenebenen bildenden Hauptschnitte fallen. Auch ohne eine Projektionsfigur, noch leichter freilich mit Hilfe einer solchen (Taf. IV Fig. 1) lassen sich die Zeichen der sechs Rhomboëder direkt aus dem des Skalenoëders ablesen, wobei die gewonnenen Zahlen im concreten Fall sich nicht selten mittelst Durchdividiren vereinfachen lassen.

A. Die drei Rhomboëder, deren Kanten mit den betreffenden Skalenoëderkanten zusammenfallen*, erhalten folgende Zeichen:

a) für ein Skalenoëder erster Ordnung ($\varphi \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \psi \cdot \xi$):

1. $\frac{\varphi}{\varphi + \psi} \cdot \frac{2\varphi}{2(\varphi + \psi)} \cdot \frac{\varphi}{\varphi + \psi} \cdot \xi$
2. $\frac{\varphi}{\varphi + \psi} \cdot 2(\varphi + \psi) \cdot \frac{\varphi}{\varphi + \psi} \cdot \xi$
3. $\psi \cdot 2\psi \cdot \psi \cdot \xi$

b) für ein Skalenoëder zweiter Ordnung ($\overline{\varphi} \cdot \varphi + \psi \cdot \overline{\psi} \cdot \xi$):

1. $\frac{\overline{\varphi}}{\varphi + \psi} \cdot \frac{2\varphi}{2(\varphi + \psi)} \cdot \frac{\overline{\varphi}}{\varphi + \psi} \cdot \xi$
2. $\overline{\varphi} + \psi \cdot 2(\varphi + \psi) \cdot \overline{\varphi} + \psi \cdot \xi$
3. $\overline{\psi} \cdot 2\psi \cdot \overline{\psi} \cdot \xi$

Unter der Voraussetzung, dass $\varphi > \psi$, liegt von den drei hier genannten Rhomboëdern jedesmal das erste in je zwei schärferen, das zweite in je zwei stumpferen Endkanten, das dritte in je zwei Seitenkanten, wie man aus der Projektionsfigur erkennt. Hiernach ergeben sich in einfachster Weise für jedes Skalenoëder aus seinem Zeichen die der drei Rhomboëder, wie folgende ganz willkürlich aus obiger Tabelle herausgegriffenen Beispiele zeigen.

Skalenoëder Nr. 115. 8. $\overline{9} \cdot 1 \cdot 3$

in den schärferen Endkanten: 1. Rhomboëder: 8: $\overline{16}$. 8 . 3

in den stumpferen Endkanten: 2. Rhomboëder: $\overline{9} \cdot 18$. $\overline{9} \cdot 3 = \overline{3} \cdot 6 \cdot \overline{3} \cdot 1$

in den Seitenkanten: 3. Rhomboëder: 1 . 2 . 1 . 3

Skalenoëder Nr. 129. $\overline{28} \cdot 32 \cdot \overline{4} \cdot 7$

in den schärferen Endkanten: 1. Rhomboëder: $\overline{28} \cdot 56 \cdot \overline{28} \cdot 7 = \overline{4} \cdot 8 \cdot \overline{4} \cdot 1$

in den stumpferen Endkanten: 2. Rhomboëder: $32 \cdot \overline{64} \cdot 32 \cdot 7$

* Nach ZIPPE (Übersicht der Krystallgestalten des rhomboëdrischen Kalkhaloids. Denkschr. der k. k. österr. Akad. d. Wissensch. in Wien. III. 1850) werden die derartigen Rhomboëder in den Skalenoëderkanten „verhüllt“, jedoch mit Beschränkung auf die Endkanten des Skalenoëders.

Skalenoëder Nr. 129. $\bar{2}8 . 32 . 4 . 7$

in den Seitenkanten: 3. Rhomboëder: $\bar{4} . 8 . \bar{4} . 7$

Skalenoëder Nr. 136. $\bar{1}3 . 14 . \bar{1} . 2$

in den schärferen Endkanten: 1. Rhomboëder: $\bar{1}3 . 26 . \bar{1}3 . 2$

in den stumpferen Endkanten: 2. Rhomboëder: $14 . \bar{2}8 . 14 . 2 = 7 . \bar{1}4 . 7 . 1$

in den Seitenkanten: 3. Rhomboëder: $\bar{1} . 2 . \bar{1} . 2$

Ein nicht zu unterschätzender Vortheil ist die Sicherheit, mit der man sich auf die Vorzeichen verlassen kann, die zugleich auf einen Blick die Unterscheidung ermöglicht, welcher Ordnung ein Rhomboëder oder Skalenoëder angehört. Dies zeigen auf eine andere Weise die folgenden Beispiele.

Stellt man sich die Aufgabe für ein gegebenes Rhomboëder, z. B. das Hauptrhomboëder $\bar{1}2\bar{1}1$ diejenigen Skalenoëder zu suchen, welche in seiner Kantenzone liegen, so ist, wie man sieht, im Rhomboëder das Verhältniss des ersten Queraxenindex zu dem der Hauptaxe $= 1 : 1$, es kommen also, da beide gleiches Vorzeichen haben, von den sechs oben genannten Rhomboëderzeichen die unter a) 1, b) 2 und a) 3 aufgeführten in Betracht. Es muss also im Skalenoëderzeichen a) $\varphi . \overline{\varphi + \psi} . \psi . \xi$ oder b) $\overline{\varphi} . \varphi + \psi . \overline{\psi} . \xi$, wenn das Hauptrhomboëder in den schärferen Endkanten desselben liegt, (nach Rhomboëder a) 1) die Proportion gelten $\varphi : \xi = 1 : 1$, also $\varphi = \xi$. Dies sind die in obiger Tabelle unter 54—65 aufgeführten Skalenoëder. Liegt es in den stumpfen Endkanten, so gilt (nach Rhomboëder b) 2): $\varphi + \psi : \xi = 1 : 1$, also $\varphi + \psi = 1$. Dies ist der Fall bei den Skalenoëdern 51 und 52. Liegt es endlich in den Seitenkanten, so gilt (nach Rhomboëder a) 3): $\psi : \xi = 1 : 1$, also $\psi = \xi$. So finden wir es bei den Skalenoëdern 66—88.

Liegt dagegen das Skalenoëder in der Kantenzone des Gegenrhomboëders: $\bar{1}2\bar{1}1$, so ist das eine Mal $\varphi : \xi$, das andere Mal $\varphi + \psi : \xi$, das dritte Mal: $\psi : \xi = -1 : 1$ und es liegt also im ersten Fall mit je zwei die schärferen, im zweiten Fall mit je zwei die stumpferen Endkanten und im dritten Fall mit je zwei die Seitenkanten bildenden Flächen in der Kantenzone des Gegenrhomboëders. Beispiele zum dritten Fall bilden die Rhomboëder 112, 125, 135 und 140. — In den (neuen) Zeichen der Skalenoëder 90—104 finden wir je einen auf eine Quer-

axe b bezüglichen Index gleich dem doppelten des Hauptaxenindex, aber negativ, weil sie alle in der Kantenzone des ersteren schärferen Rhomboëders liegen und in dessen Zeichen $24\bar{2}1$ $\varphi = -2\xi$ ist. Die Endkanten des letzteren fallen in die schärferen Endkanten des Skalenoëders bei 93—99, in die stumpferen bei 90 und 91, in die Seitenkanten bei 100—104, wie man direkt in der Tabelle aus den Zeichen abliest, da man nur zu beobachten braucht, welcher Queraxenindex $= -2\xi$ ist.

Beim Skalenoëder 92, das ein Dihexaëder ist, sind bekanntlich die Endkanten gleichwinklig.

B. Wir kommen an die drei andern Rhomboëder, welche durch ein Skalenoëder bestimmt werden, nämlich diejenigen, welche seine dreierlei Kanten abstumpfen (statt der Seitenkanten deren Parallelen durch die Spitze des Skalenoëders, während die Seitenkanten selbst bei allen Skalenoëdern und Rhomboëdern durch die zweite Säule abgestumpft werden). Dieselben sind, wie oben gesagt, die nächsten stumpferen zu den drei ersten Rhomboëdern und zwar je zu dem auf die gleichen Skalenoëderkanten bezüglichen. Ihre Zeichen lassen sich daher ebenso leicht wie die der ersten auch ohne Projektionsfigur direkt aus dem Zeichen des Skalenoëders ablesen. Sie heissen

c) für ein Skalenoëder der ersten Ordnung ($\varphi \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \psi \cdot \xi$):

$$1. \quad \frac{\varphi}{2} \cdot \overline{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{2} \cdot \xi = \overline{\varphi} \cdot 2\varphi \cdot \overline{\varphi} \cdot 2\xi$$

$$2. \quad \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \xi = \varphi + \psi \cdot 2(\overline{\varphi + \psi}) \cdot \varphi + \psi \cdot 2\xi$$

$$3. \quad \frac{\psi}{2} \cdot \overline{\psi} \cdot \frac{\psi}{2} \cdot \xi = \overline{\psi} \cdot 2\psi \cdot \overline{\psi} \cdot 2\xi$$

d) für ein Skalenoëder der zweiten Ordnung ($\overline{\varphi} \cdot \varphi + \psi \cdot \overline{\psi} \cdot \xi$):

$$1. \quad \frac{\varphi}{2} \cdot \overline{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{2} \cdot \xi = \varphi \cdot \overline{2\varphi} \cdot \varphi \cdot 2\xi$$

$$2. \quad \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \xi = \overline{\varphi + \psi} \cdot 2(\varphi + \psi) \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot 2\xi$$

$$3. \quad \frac{\psi}{2} \cdot \overline{\psi} \cdot \frac{\psi}{2} \cdot \xi = \psi \cdot \overline{2\psi} \cdot \psi \cdot 2\xi$$

Setzen wir wieder voraus, dass $\varphi > \psi$, so stumpft jedesmal das erste Rhomboëder die schärferen, das zweite die stumpferen und das dritte die Parallelen der Seitenkanten ab. Die oben

beispielsweise genannten Skalenoëder liefern also folgende Rhomboëder:

- Skal. Nr. 115: $8. \bar{9}. 1. 3$, durch Abstumpfung der schärferen Endkanten:
1. Rhomboëder $\bar{8}. 16. \bar{8}. 6 = \bar{4}. 8. \bar{4}. 3$.
- Skal. Nr. 115: $8. \bar{9}. 1. 3$, durch Abstumpfung der stumpferen Endkanten:
2. Rhomboëder $9. \bar{18}. 9. 6 = 3. \bar{6}. 3. 2$.
- Skal. Nr. 115: $8. \bar{9}. 1. 3$, durch Abstumpfung der Seitenkanten:
3. Rhomboëder $\bar{1}. 2. \bar{1}. 6$.
- Skal. Nr. 129: $\bar{28}. 32. \bar{4}. 7$, durch Abstumpfung der schärferen Endkanten:
1. Rhomboëder $28. \bar{56}. 28. 14 = 2. \bar{4}. 2. 1$.
- Skal. Nr. 129: $\bar{28}. 32. \bar{4}. 7$, durch Abstumpfung der stumpferen Endkanten:
2. Rhomboëder $\bar{32}. 64. \bar{32}. 14 = \bar{16}. 32. \bar{16}. 7$.
- Skal. Nr. 129: $\bar{28}. 32. \bar{4}. 7$, durch Abstumpfung der Seitenkanten:
3. Rhomboëder $4. \bar{8}. 4. 14 = 2. \bar{4}. 2. 7$.
- Skal. Nr. 136: $\bar{13}. 14. \bar{1}. 2$, durch Abstumpfung der schärferen Endkanten:
1. Rhomboëder $13. \bar{26}. 13. 4$.
- Skal. Nr. 136: $\bar{13}. 14. \bar{1}. 2$, durch Abstumpfung der stumpferen Endkanten:
2. Rhomboëder $\bar{14}. 28. \bar{14}. 4 = \bar{7}. 14. \bar{7}. 2$.
- Skal. Nr. 136: $\bar{13}. 14. \bar{1}. 2$, durch Abstumpfung der Seitenkanten:
3. Rhomboëder $1. \bar{2}. 1. 4$.

Für ein Skalenoëder, dessen Kanten durch das Hauptrhomboëder $1\bar{2}11$ abgestumpft werden, kommen, da in seinem Zeichen das Verhältniss des ersten Queraxenindex zum Hauptaxenindex $= 1:1$ ist, die drei unter c) 2, d) 1 und d) 3 genannten Rhomboëderzeichen in Betracht. Stumpft das Hauptrhomboëder die schärferen Endkanten ab, so muss nach Rhomboëder d) 1 sein: $\varphi : 2\xi = 1:1$, also $\varphi = 2\xi$, also für das unter d) genannte Skalenoëderzeichen: $\bar{\varphi} = -2\xi$. Demnach gehören hierher die in der Tabelle als Nr. 93—99 aufgeführten Skalenoëder. In gleicher Weise findet man für die Abstumpfung der stumpferen Endkante nach Rhomboëder c) 2: $\varphi + \psi : 2\xi = 1:1$, $\psi + \psi = 2\xi$, also für das Skalenoëderzeichen unter c) $\bar{\varphi} + \bar{\psi} = -2\xi$, Rhomboëder 90, 91 und für die Abstumpfung der Parallelen der Seitenkanten nach Rhomboëder d) 3: $\psi : 2\xi = 1:1$; $\psi = 2\xi$, also für das Rhomboëderzeichen unter d) $\bar{\psi} = -2\xi$, Rhomboëder 100—104.

Um zu beurtheilen, wie viel leichter insbesondere auch bezüglich der Unterscheidung der beiden Ordnungen der Zonenzusammenhang der Rhomboëder und Skalenoëder in den neuen Zeichen zu übersehen ist, als in der WEISS'schen, resp. BRAVAIS'-

schen, braucht man nur für die sechs durch ein Skalenoëder bestimmten Rhomboëder zur Vergleichung die BRAVAIS'schen Zeichen analog den obigen Zusammenstellungen anzuschreiben:

ad A.

a) Skalenoëder erster Ordnung

$$(\nu - \mu . \mu . \bar{\nu} . \xi):$$

1. $\mu + \nu . 0 . \overline{\mu + \nu} . \xi$
2. $0 . 2\nu - \mu . \overline{2\nu - \mu} . \xi$
3. $\nu - 2\mu . 0 . \overline{\nu - 2\mu} . \xi$

b) Skalenoëder zweiter Ordnung

$$(\mu . \nu - \mu . \bar{\nu} . \xi):$$

1. $0 . \mu + \nu . \overline{\mu + \nu} . \xi$
2. $2\nu - \mu . 0 . \overline{2\nu - \mu} . \xi$
3. $0 . \nu - 2\mu . \overline{\nu - 2\mu} . \xi$

(Beispiele dieselben wie oben).

Skalenoëder Nr. 115: 10. 7. $\bar{17}$. 9.

1. Rhomboëder 24. 0. $\bar{24}$. 9 = 8. 0. $\bar{8}$. 3

2. " 0. 27. $\bar{27}$. 9 = 0. 3. $\bar{3}$. 1

3. " 3. 0. $\bar{3}$. 9 = 1. 0. $\bar{1}$. 3

" Nr. 129: 8. 12. $\bar{20}$. 7.

1. " 0. 28. $\bar{28}$. 7 = 0. 4. $\bar{4}$. 1

2. " 32. 0. $\bar{32}$. 7

3. " 0. 4. $\bar{4}$. 7

" Nr. 136: 4. 5. $\bar{9}$. 2.

1. " 0. 13. $\bar{13}$. 2

2. " 14. 0. $\bar{14}$. 2 = 7. 0. $\bar{7}$. 1

3. " 0. 1. $\bar{1}$. 2

ad B.

a) Skalenoëder erster Ordnung.

$$(\nu - \mu . \mu . \bar{\nu} . \xi):$$

1. $0 . \mu + \nu . \overline{\mu + \nu} . 2\xi$
2. $2\nu - \mu . 0 . \overline{2\nu - \mu} . 2\xi$
3. $0 . \nu - 2\mu . \overline{\nu - 2\mu} . 2\xi$

b) Skalenoëder zweiter Ordnung.

$$(\mu . \nu - \mu . \bar{\nu} . \xi):$$

1. $\mu + \nu . 0 . \overline{\mu + \nu} . 2\xi$
2. $0 . 2\nu - \mu . \overline{2\nu - \mu} . 2\xi$
3. $\nu - 2\mu . 0 . \overline{\nu - 2\mu} . 2\xi$

Beispiele:

Skalenoëder No. 115. 10. 7. $\bar{17}$. 9.

1. Rhomboëder 0. 24. $\bar{24}$. 18 = 0. 4. $\bar{4}$. 3

2. " 27. 0. $\bar{27}$. 18 = 3. 0. $\bar{3}$. 2

3. " 0. 3. $\bar{3}$. 18 = 0. 1. $\bar{1}$. 6

" No. 129. 8. 12. $\bar{20}$. 7.

1. " 28. 0. $\bar{28}$. 14 = 2. 0. $\bar{2}$. 1

2. " 0. 32. $\bar{32}$. 14 = 0. 16. $\bar{16}$. 7

3. " 4. 0. $\bar{4}$. 14 = 2. 0. $\bar{2}$. 7

" No. 136. 4. 5. $\bar{9}$. 2.

1. " 13. 0. $\bar{13}$. 4

2. " 0. 14. $\bar{14}$. 4 = 0. 7. $\bar{7}$. 2

3. " 1. 0. $\bar{1}$. 4

Wie man sieht, lassen sich weder die allgemeinen Zeichen der Rhomboëder, noch die speziellen Zahlenwerthe so direkt aus dem Zeichen des Rhomboëders ablesen bei Anwendung der WEISS'schen Indices, wie bei den neuen. Noch viel umständlicher wird die Aufgabe, aus einer grösseren Reihe von Skalenoëdern die-

jenigen herauszufinden, welche mit einem gegebenen Rhomboëder in einem bestimmten Zonenzusammenhang stehen, während dieses oben unter Benützung der neuen Zeichen mit der grössten Leichtigkeit geschehen ist. Der Beweis hiefür ist leicht zu erbringen. Würde es sich z. B. darum handeln, unter den beim Kalkspath vorkommenden Skalenoëdern diejenigen aufzusuchen, welche in der Kantenzone des Hauptrhomboëders so liegen, dass 1) ihre schärferen, 2) ihre stumpferen Endkanten, 3) ihre Seitenkanten mit den Rhomboëderkanten zusammenfallen, so müsste in ihrem Zeichen gelten im ersten Fall: $\mu + \nu = \xi$, im zweiten $2\nu - \mu = \xi$, im dritten $\nu - 2\mu = \xi$. Dass das erste bei den Skalenoëdern 54—65 der obigen Tabelle, das zweite bei 51 und 52, das dritte bei 66—88 der Fall ist, davon kann man sich zwar nachträglich überzeugen, aber von vornherein die betreffenden Skalenoëder auf den ersten Blick erkennen, ist nicht möglich, um so weniger, da der Index μ bald der erste, bald der zweite ist, während bei der Anwendung unserer Zeichen die Lösung einer solchen Aufgabe wie von selbst in den Schooss fällt. Überdiess bringt die Unterscheidung der beiden Ordnungen besondere Schwierigkeiten, die bei den neuen Zeichen sich von selbst heben.

Untersuchen wir noch kurz das Verhältniss der Skalenoëder zu der Endkante der Dirhomoëder,* d. h. also eine Combinationskante eines Rhomboëders mit seinem Gegenrhomboëder.

* Leider ist der Ausdruck „Dirhomoëder“, den QUENSTEDT schon in den früheren Auflagen seines Handbuchs der Mineralogie in dem hier gebrauchten Sinn in Vorschlag gebracht hat und der noch in der dritten Auflage von 1877, pag. 30, in diesem Sinne zu lesen ist, zweideutig geworden, dadurch dass von demselben Krystallographen diese Bezeichnung in seinem Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie 1873, pag. 314, in einem ganz andern Sinne, nämlich für die Skalenoëder verwendet worden ist. Und doch sollte gerade im Gegensatz zu den eigentlichen Dihexaëdern, die auch bei den dreigliedrigen Formen vollständig auftreten, die Combination von Rhomboëder und Gegenrhomboëder durch eine besondere Bezeichnung unterschieden werden, wozu sich kaum ein anderer Ausdruck gleich gut eignen würde. Erst bei den sechsgliedrigen Formen wird ja das Dirhomoëder zu einem wirklichen Dihexaëder, wodurch erst dort zwei Ordnungen von Dihexaëdern zur Unterscheidung kommen.

Auch hier ist ein dreifaches Verhältniss möglich. Die genannte Kante, welche in die Ebene einer Skalenoëderfläche fällt, kann ihrer Richtung nach entweder zwischen die schärfere und stumpfere Endkante des Skalenoëders fallen, oder zwischen die schärfere Endkante und die Seitenkante, oder zwischen diese und die stumpfere Endkante. Man kann sich diess durch eine Projektionsfigur klar

machen, wo die Sektionslinie $\frac{b}{\varphi} : \frac{-b}{\varphi + \psi} : \frac{b}{\psi}$ des Skalenoëders durch einen Eckpunkt des von den Sectionslinien der beiden Rhomboëder gebildeten Sechsecks geht, und zwar entweder so, dass dieser Punkt zwischen die Axenschnitte $\frac{b}{\varphi}$ und $\frac{-b}{\varphi + \psi}$ oder zwischen $\frac{b}{\varphi}$ und $\frac{-b}{\psi}$ oder zwischen $\frac{-b}{\varphi + \psi}$ und $\frac{b}{\psi}$ fällt. Auf einem Skalenoëder-Modell kann man die in eine seiner Flächen fallende Kante oder vielmehr eine Parallele zu derselben in den drei Fällen entweder durch die eine oder durch die zweite oder durch die dritte ihrer Ecken ziehen. Hat das Skalenoëder das Zeichen $\varphi \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \psi \cdot \xi$, so werden die drei Doppelzeichen für das Dirhomoëder:

1. $\left\{ \begin{array}{l} 2\varphi + \psi \cdot 2(\overline{2\varphi + \psi}) \cdot 2\varphi + \psi \cdot 3\xi \\ 2\varphi + \psi \cdot 2(2\varphi + \psi) \cdot 2\varphi + \psi \cdot 3\xi \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{l} \varphi - \psi \cdot 2(\overline{\varphi - \psi}) \cdot \varphi - \psi \cdot 3\xi \\ \varphi - \psi \cdot 2(\varphi - \psi) \cdot \varphi - \psi \cdot 3\xi \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{l} \varphi + 2\psi \cdot 2(\overline{\varphi + 2\psi}) \cdot \varphi + 2\psi \cdot 3\xi \\ \varphi + 2\psi \cdot 2(\varphi + 2\psi) \cdot \varphi + 2\psi \cdot 3\xi \end{array} \right.$

Hieraus ergibt sich die Regel für jeden speziellen Fall. Ist das fragliche Dirhomoëder z. B. die Combination des Hauptrhomoëders $1\bar{2}11$ mit seinem Gegenrhomboëder $\bar{1}2\bar{1}1$, so muss, da hier das Verhältniss des ersten Queraxenindex zum Hauptaxenindex = 1:1 ist, im ersten Fall gelten: $2\varphi + \psi = 3\xi$, im zweiten: $\varphi - \psi = 3\xi$, im dritten $\varphi + 2\psi = 3\xi$. Hieraus ersieht man, dass die in obiger Tabelle unter 105–109 genannten Skalenoëder sämmtlich der zweiten Art angehören.

Die Dirhomoëderendkanten fallen in die durch die Axen a gehenden Hauptschnitte. Deshalb ist in diesem Fall, wo ohnedies eine Unterscheidung der beiden Ordnungen von Rhom-

boëdern und Skalenoëdern gar nicht in Betracht kommt, der Zonenzusammenhang einfacher auszudrücken unter Benützung der WEISS'schen Indices. Die genannten Bedingungsgleichungen erhalten hier für das Beispiel des Hauptrhomböeders die einfache Gestalt: $\nu = \xi$; $\mu = \xi$; $\nu - \mu = \xi$, d. h. einer der drei Queraxenindices muss gleich dem Hauptaxenindex werden. Für das erste stumpfere und sein Gegenrhomböeder 1012 BRAVAIS würden sie heissen $\nu = 2\xi$; $\mu = 2\xi$; $\nu - \mu = 2\xi$ u. s. w. Es ist aber klar, dass die Bedeutung der Kantenzonen der Rhomböeder und Skalenoëder selbst viel wichtiger ist, als die der Zonen von Combinationskanten und daher beweist das eben Gesagte nichts gegen die grössere praktische Brauchbarkeit der neuen Zeichen im Allgemeinen.

Was die Winkelberechnung betrifft, so ist es unter allen Umständen bei dreigliedrigen Krystallen zu empfehlen, für diesen besondern Zweck ein rechtwinkliges Hilfsaxensystem in Anwendung zu bringen und man wählt hierzu bekanntlich ausser der Hauptaxe eine Axe a und eine Axe b . Für ein solches bieten aber die neuen Zeichen genau dieselben Vortheile dar wie die WEISS'schen. Wenn es vortheilhaft gefunden worden ist, unter den in dem allgemeinen Flächenausdruck $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\varphi} : \frac{a}{\nu} : \frac{-b}{\chi} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\psi} : \frac{c}{\xi}$ vorkommenden Queraxen die zweite und fünfte Axe, die mit einander einen rechten Winkel einschliessen, zu wählen, wodurch man, da $\varphi = \mu + \nu$, das auf die rechtwinkligen Axen bezogene Flächenzeichen $\frac{b}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{c}{\xi}$ erhält, mit dem man die Winkelrechnungen ausführt, so kann man hier ebenso gut statt dessen die erste und vierte Axe wählen und erhält dann, da $\mu = \frac{\varphi - \psi}{3}$, das auf rechtwinklige Axen bezogene Flächenzeichen $\frac{3a}{\varphi - \psi} : \frac{-b}{\varphi + \psi} : \frac{c}{\xi}$. Man kann mit diesem Zeichen ohne Weiteres die Berechnungen führen, indem man ein für alle Mal die Werthe $3a$ und $-b$ als Axeneinheiten auffasst, zwischen denen die Relation $b = a\sqrt{3}$ besteht, oder aber, um Irrungen vorzubeugen, das Zeichen noch dadurch abändern, dass man diese

Axeneinheiten mit besonderen Buchstaben bezeichnet: $A = 3a$
 $= b\sqrt{3}$ und $B = -b$. So erhält man für die Fläche $\varphi \cdot \overline{\varphi + \psi}$
 $\psi \cdot \xi$ (n. Z.) den zur Rechnung zu verwendenden Ausdruck
 $\frac{A}{\varphi - \psi} : \frac{B}{\varphi + \psi} : \frac{c}{\xi}$, wofür jedoch auch, da es sich hier nur um
 die absolute Länge handelt, $B = b$ gesetzt werden kann.

Übrigens kann man ebenso gut zwei andere zu einander
 rechtwinklige Axen a und b zur Berechnung benützen. Den
 auf dieselbe bezogenen Flächenausdruck wird man stets mit
 Rücksicht auf die Projektion, indem man die Fläche durch den
 Endpunkt der Axeneinheit der Hauptaxe gehen lässt, auf die
 Form $\frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu} : c$ bringen.

Auf dieses Zeichen lässt sich unmittelbar die für recht-
 winklige ungleiche Axen giltige „Tangentenformel“ anwenden,
 welche die Tangente des Winkels angibt, den eine Fläche mit
 der Ebene eines durch einen bestimmten Punkt ihrer Sektions-
 linie $\frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu}$ gehenden Hauptschnittes macht. Ihre allgemeine
 Form:

$$\frac{AB \sqrt{m^2 n^2 + m^2 B^2 + n^2 A^2}}{m \mu B^2 - n \nu A^2}$$

vereinfacht sich hier, da $A = b\sqrt{3}$ und $B = b$ gesetzt werden
 kann, in

$$\frac{\sqrt{3} \sqrt{m^2 n^2 + (m^2 + 3n^2) b^2}}{m \mu - n \nu}$$

Geben wir einige Beispiele. Da die Winkel der Rhombo-
 öder und Skalenoöder beziehungsweise gleich sind mit denen ihrer
 Gegenkörper, so können je nach Bequemlichkeit die einen oder
 die andern der Berechnung zu Grund gelegt werden. Zieht man,
 um die halben Kantenwinkel einer solchen Form aus dem ge-
 gebenen Axenverhältniss und den Indices zu berechnen, je eine
 solche Kante in Betracht, deren Zonenpunkt auf die Axe B fällt,
 so hat dieser die Coordinaten $m = \infty$ und $n = \nu$ und die Formel
 erhält die noch einfachere Gestalt: $\frac{\sqrt{3} \sqrt{\nu^2 + b^2}}{\mu}$. Es erhalten
 dann für ein gegebenes Rhomboöder $\varphi \cdot \overline{2\varphi} \cdot \varphi \cdot \xi$ und Skaleno-
 öder $\varphi \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \psi \cdot \xi$ die Grössen μ und ν , und die daraus be-
 6*

rechnet Tangentenformel die nachstehend zusammengestellten Werthe. (s. Taf. IV Fig. 3, worin der Einfachheit wegen nur die Indices statt der ganzen Axenschnitte eingetragen sind.)

	Rhomboëder ($\varphi \cdot 2\varphi \cdot \varphi \cdot \xi$)	Skalenoëder ($\varphi \cdot \overline{\varphi + \psi} \cdot \psi \cdot \xi$)		
		schärf. Endk.	stumpf. Endk.	Parall. zur Seitenkante
μ	$\frac{3\varphi}{\xi}$	$\frac{\varphi + 2\psi}{\xi}$	$\frac{\varphi - \psi}{\xi}$	$\frac{2\varphi + \psi}{\xi}$
ν	$\frac{\varphi}{\xi}$	$\frac{\varphi}{\xi}$	$\frac{\varphi + \psi}{\xi}$	$\frac{\psi}{\xi}$
Tangen- ten- formel	$\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\xi^2 b^2}{3\varphi^2}}$	$\frac{\sqrt{3} \sqrt{\varphi^2 + \xi^2 b^2}}{\varphi + 2\psi}$	$\frac{\sqrt{3} \sqrt{(\varphi + \psi)^2 + \xi^2 b^2}}{\varphi - \psi}$	$\frac{\sqrt{3} \sqrt{\psi^2 + \xi^2 b^2}}{2\varphi + \psi}$

Für den Kalkspath wird $b = 2,0275$, $b^2 = 4,1106$.

Für das Hauptrhomboëder $1\bar{2}11$ wird $\varphi = 1$, $\xi = 1$, die Tangente des halben Endkantenwinkels $= \sqrt{\frac{1 + b^2}{3}} = \sqrt{1,7035}$, der halbe Winkel $= 52^\circ 32',5 = \frac{1}{2} \cdot 105^\circ 5'$.

Für das Skalenoëder $a : \frac{a}{3} : \frac{a}{2} : c$ WEISS = 21 $\bar{3}$ 1 Br. = 4511 n. Z. wird $\varphi = 4$, $\psi = 1$, $\xi = 1$, die drei Tangenten und die daraus berechneten halben Kantenwinkel erhalten also folgende Werthe:

$$\text{Schärfere Endk.} \quad \frac{\sqrt{3} \sqrt{4^2 + b^2}}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{6,7035}; \quad 52^\circ 19'$$

$$\text{Stumpfere „} \quad \frac{\sqrt{3} \sqrt{5^2 + b^2}}{3} = \sqrt{9,7035}; \quad 72^\circ 12'$$

$$\text{Parall. d. Seitenk.} \quad \frac{\sqrt{1 + b^2}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{1,7035}; \quad 23^\circ 31'$$

(Der letztgenannte Winkel ist die Hälfte des Winkels in der Kante, welche mit einer Seitenkante parallel durch den Endpunkt der Axeneinheit der Hauptaxe geht, er ergänzt also die Hälfte des wahren Seitenkantenwinkels zu 90° .)

Ganz analog ist die Behandlung derjenigen Fälle, in denen die Kante, um die es sich handelt, in einen Hauptschnitt mit einer Queraxe a fällt, deren Richtung man in diesem Fall für die Axe A in der Rechnung verwendet. Auch die Winkel derjenigen Combinationskanten, welche weder mit einer Axe a noch mit einer Axe b in Einen Hauptschnitt fallen, werden in ganz ähn-

licher Weise durch zweimalige Anwendung der Tangentenformel berechnet; in diesen Fällen sind für den in Betracht kommenden Zonenpunkt die Coordinaten m und n nach der Sektionslinienformel zu berechnen. Alle solche Rechnungen, wie andererseits die Bestimmung der Indices aus gegebenen Winkeln oder des Axenverhältnisses aus gegebenen Winkeln und Indices geschieht in so vollständig gleicher Weise wie bei Benützung der gewöhnlichen Zeichen, dass diess gar keiner weiteren Ausführung bedarf. Dasselbe ist der Fall bei Winkelberechnungen auf anderem Wege, z. B. mit Benützung der Cosinusformel, welche den Cosinus eines Winkels zweier Flächen angibt als Funktion der Indices und Axeneinheiten derjenigen Ausdrücke, welche ihre Sektionslinien bezogen auf rechtwinklige Axen bezeichnen. Wir begnügen uns daher, nur noch die Form der Cosinusformel für die Anwendung der genannten Axen A und B anzugeben. Sie lautet, wenn die beiden Sektionslinien $\frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu}$ und $\frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu}$ sind,

$$-\frac{3b^2 + \mu\mu + \nu\nu}{\sqrt{3b^2 + \mu^2 + 3\nu^2} \sqrt{3b^2 + \mu^2 + 3\nu^2}}.$$

Wenden wir die neuen Zeichen noch auf die **sechsgliedrigen Formen** an. Für diese wird $b = -b$ und man unterscheidet daher die Zeichen für diese Formen von denen für die dreigliedrigen an dem Nichtvorhandensein negativer Indices. Die Indices des neuen Zeichens für ein Dihexaëder oder für eine sechsseitige Säule sind übereinstimmend mit denen des WEISS'schen Zeichens für den Gegenkörper. Man könnte zwar ebenso gut bei diesen Formen die WEISS'schen Axen annehmen und die Indices demgemäss ganz übereinstimmend mit den WEISS'schen Zeichen anschreiben; allein wegen der theilweise gleichlautenden Nomenclatur dreigliedriger und sechsgliedriger Formen geht dies nicht an. Denn da nun einmal z. B. diejenige Säule, die bei den dreigliedrigen Körpern als die erste bezeichnet wird und die hier eine andere morphologische Bedeutung hat, als die zweite, das neue Zeichen $1\bar{2}10$ erhält, so muss man derjenigen, die bei den sechsgliedrigen Körpern als erste Säule angenommen wird, das Zeichen 1210 geben, während die Indices derselben im WEISS'schen Zeichen 0110 heissen. (Dass die beiden Säulen bei den dreigliedrigen Körpern morphologisch verschiedene Be-

deutung haben, d. h. nicht als Körper und Gegenkörper aufgefasst werden dürfen, wird daraus klar, dass die erste als unendlich steiles Rhomboëder, das andere als spezieller Fall eines unendlich steilen Skalenoëders aufzufassen ist. Noch deutlicher wird es, wenn man die Combinationen mit anderen Formen bei beiden vergleicht. In der Combination mit einem Rhomboëder erscheint die Fläche der ersten Säule als 1 + 2 + 2-seitiges Fünfeck, dagegen die der zweiten als 2 + 2 + 2-seitiges Sechseck.)

Die neuen Zeichen der sechsgliedrigen Formen sind demnach folgende:

	Neue Zeichen.
Endfläche	0 . 0 . 0 . 1
Dihexaëder erster Ordnung	φ . 2φ . φ . ξ
„ zweiter „	φ . φ . 0 . ξ
Sechseit. Säule erster „	1 . 2 . 1 . 0
„ „ zweiter „	1 . 1 . 0 . 0
Zwölfseitige Pyramiden	φ . $\varphi + \psi$. ψ . ξ
„ Säulen	φ . $\varphi + \psi$. ψ . 0

Die ächten Halbfächner der dreigliedrigen wie der sechsgliedrigen Formen finden natürlich in den neuen Zeichen eben so wenig einen adäquaten Ausdruck, als in den WEISS'schen, da für sie ein ihre Symmetrieverhältnisse darstellendes Axensystem überhaupt nicht aufgestellt werden kann. Sie verhalten sich hierin genau wie die hemiëdrischen Formen des regulären Krystallsystems. Es bleibt daher nichts anderes übrig als zu der empirischen Bezeichnung zu greifen, wornach den Zeichen ein $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ vorgesetzt wird.

Fassen wir zum Schluss die Ergebnisse der vorstehenden Blätter zusammen:

1) Die dreigliedrigen Formen sind im Gegensatz zu den ächten Hemiëdrien aller Krystallsysteme fähig, auf ein eigenes natürliches, d. h. ihr Symmetriegesetz vollständig ausdrückendes Axensystem bezogen zu werden.

2) Derartige Axensysteme gibt es verschiedene; eines derselben ist das von MILLER angenommene, während das WEISS'sche nur für die sechsgliedrigen Formen, nicht aber für die dreigliedrigen ein Ausdruck des Symmetriegesetzes ist.

3) Mit Rücksicht auf die Berechnungen würde sich im Vergleich mit dem MILLER'schen dasjenige Axensystem besser

empfehlen, das aus den vertikalen Durchschnittslinien der drei Symmetrieebenen der dreigliedrigen Körper unter sich und als Hauptaxe und den drei horizontalen Schnittlinien derselben mit einer zu ihrer Zonenaxe rechtwinkligen Ebene als Queraxen besteht und in welchem auf jeder der 4 Axen eine positive und eine negative Richtung in der Weise unterschieden wird, dass die positiven Richtungen der Queraxen unter Winkeln von 120° auseinander gehen.

4) Der Wahl dieses Axensystems steht nur seine Ähnlichkeit mit dem, abgesehen von dem unter 2) erwähnten Punkt, vortrefflich gewählten und durch langjährige Gewohnheit eingebürgerten WEISS'schen Axensystem und die daher leicht mögliche Verwechslung entgegen, während es andererseits sich dadurch empfiehlt, dass es nicht bloß natürlicher d. h. theoretisch berechtigter ist, sondern in Folge davon auch mehrfache praktische Vortheile bietet.

5) Der Unterschied der beiden Ordnungen von Rhomboëdern und Skalenoëdern braucht im Flächenausdruck nicht auf eine mehr oder weniger künstliche Weise angedeutet zu werden, sondern spricht sich von selbst dadurch aus, dass unter den drei Queraxenindices stets bei der einen Ordnung zwei positiv und einer negativ, bei der andern Ordnung einer positiv und zwei negativ sind.

6) Die absoluten Zahlenwerthe der Indices sind im Allgemeinen, insbesondere bei den Rhomboëdern, grösser als bei den WEISS'schen Indices. Sofern dies als ein Nachtheil erscheinen mag, wird er dadurch theilweise aufgewogen, dass bei einer nicht geringen Zahl von Skalenoëdern die aus den WEISS'schen berechneten neuen Indices mittelst Durchdividiren vereinfacht werden können und dadurch kleiner werden als jene.

7) Der Zonenzusammenhang lässt sich aus den neuen Flächenausdrücken viel leichter als aus den WEISS'schen herauslesen, soweit es sich um die Zonen der Rhomboëder- und Skalenoëderkanten handelt, die ja offenbar bei weitem die wichtigsten sind, während ein umgekehrtes Verhältniss eintritt bei den Zonen der Combinationskanten eines Rhomboëders mit seinem Gegenrhomboëder.

8) Die Winkelberechnung geschieht in genau gleicher Weise und mit nicht grösserer Umständlichkeit wie unter Anwendung

der WEISS'schen Axen und Zeichen. Dieselben Vortheile wie dort gewährt auch hier die Benützung eines rechtwinkligen Hilfsaxensystems, in Bezug auf welches die einzelne zur Berechnung dienende Fläche einen Ausdruck erhält, der dem dort auf gleiche Weise erhaltenen gleich gebaut ist.

9) Die Beziehungen der dreigliedrigen zu den sechsgliedrigen Formen finden in den Flächenzeichen dadurch ihren Ausdruck, dass den sechsgliedrigen Formen dieselben Axen unterlegt werden wie den dreigliedrigen, nur mit dem Unterschied, dass auf denselben eine positive und negative Axenrichtung nicht unterschieden wird. Die Flächenzeichen der sechsgliedrigen Formen stimmen daher, was den absoluten Werth der Indices betrifft, mit denen der gleichliegenden dreigliedrigen überein, unterscheiden sich aber von ihnen durch die Abwesenheit negativer Vorzeichen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1882

Band/Volume: [1882_2](#)

Autor(en)/Author(s): Werner Gotthilf

Artikel/Article: [Ueber das Axensystem der drei- und sechsgliedrigen Krystalle. 55-88](#)