Erklärung der Farbenerscheinungen pleochroitischer Krystalle.

Von

W. Voigt in Göttingen.

Auf die eigenthümlichen Erscheinungen, die man in Platten aus pleochroitischen Krystallen wahrnimmt, wenn man mit oder ohne Polarisationsapparaten in Richtungen hindurchblickt, welche wenig von denen der optischen Axen abweichen, hat neuerdings Bertin wieder aufmerksam gemacht [1], nachdem die Entdeckung derselben mehrere Jahrzehnte fast vergessen schien. Eine befriedigende Erklärung dieser Erscheinungen ist aber, soviel ich weiss, bisher nicht gegeben worden.

Bei der Ausarbeitung einer allgemeinen Lichttheorie für durchsichtige und absorbirende Medien, deren Resultate ich in einer Reihe von Abhandlungen dargelegt habe [2], kam ich auch auf das Problem der pleochroitischen Krystalle und die Discussion der erhaltenen Formeln zeigte, dass dieselben die Gesetze der fraglichen Erscheinungen in einer solchen Vollständigkeit enthalten, dass sie von allen Details vollkommen Rechenschaft geben. Ich erlaube mir im Folgenden die Grundgedanken der Theorie und die wichtigsten Folgerungen für die Erscheinungen in pleochroitischen Krystallen auseinanderzusetzen.

---

[1] A. Bertin, Ann. de chimie (5) Bd. 15, p. 396, 1878.

[2] W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 873, 1883. Nachrichten v. d. K. G. d. W. zu Göttingen, 1884, No. 6, p. 137, No. 7, p. 259, No. 9, p. 337.

Alle neueren Theorien nehmen an, dass die Fortpflanzung des Lichtes durch die Schwingungen des hypothetischen Lichtäthers, der von Einigen in den verschiedenen Körpern gleichartig, von Andern ungleichartig angenommen wird, stattfindet. Die Kräfte, welche bei diesen Schwingungen erregt werden, werden theils als innere Kräfte des Äthers gedacht, theils als von den ponderabeln Molekülen auf den Äther ausgeübt. Für erstere kann man die Gesetze als durch die gewöhnliche Elasticitätstheorie gegeben ansehen, indem man sich den Äther von ähnlichem (nur quantitativ verschiedenem) Verhalten denkt, als die ponderabeln Körper, und demgemäss die bei jenen erprobten Formeln auf ihn anwendet. Für letztere ist ein solches Hülfsmittel nicht vorhanden und man hat bisher ausschliesslich Annahme auf Annahme probirt und diejenige beibehalten, welche am besten mit der Erfahrung stimmende Resultate liefert. Dieses Verfahren, welches aus dem Grunde unbefriedigend genannt werden muss, dass bei dem complicirten Zusammenhang, in welchem die Elementarkräfte mit den Gesetzen der beobachtbaren Erscheinungen stehen, sehr verschiedene Annahmen mit nahe gleich günstigem Erfolg verwendet werden können, ist in der neuen Theorie verlassen, und ein Gesichtspunkt aufgesucht, welcher von vorn herein über diese Gesetze eine gewisse Sicherheit giebt.

Wir kennen eine grosse Anzahl von Körpern (z. B. Bergkrystall, Kalkspath u. s. f.), welche die Beobachtung als fast vollständig durchsichtig erweist und können daher annehmen, dass streng durchsichtige Körper existiren. Die Beobachtungen über optische Phänomene beziehen sich indess ausschliesslich auf periodische Ätherschwingungen und sagen nichts über das Verhalten nicht periodischer Ätherbewegungen aus. Es ist aber offenbar sehr wenig wahrscheinlich, dass die letzteren sich anders verhalten sollten, als die ersteren, — etwa absorbirt werden, während jene ungeschwächt durchgehen — und darum wird die folgende erste Hypothese, welche die eine Grundlage der neuen Theorie bildet, kaum Widerspruch finden:

I. Medien, welche die Energie periodischer Ätherschwingungen nicht merklich vermindern, verhalten sich ebenso nicht periodischen gegenüber.

Diese Hypothese sagt aus, dass in streng durchsichtigen Medien und solchen, die wir dem sehr nahekommend finden, nur solche Kräfte seitens der ponderabeln auf die Äthertheilchen wirkend angenommen werden können, welche unter allen Umständen die Energie einer hindurchgehenden Welle, enthalte sie nun periodische Schwingungen oder nur einen einzelnen Impuls, ungeändert lassen, weder vermehren noch vermindern.

Verfolgt man diesen Gedanken mit der Rechnung und benutzt das Beobachtungsresultat, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von seiner Intensität unabhängig ist, so gelangt man zu dem Resultat[1], dass mit unserer Hypothese (I) im Ganzen nur acht (paarweise verknüpfte) Gattungen von Kräften zwischen ponderabler Materie und Äther vereinbar sind, von welchen man durch eine gewisse Betrachtung mit grosser Wahrscheinlichkeit noch die Hälfte ausscheiden kann[2].

Diese vier (resp. acht) Arten von Kräften, welche durch das obige Princip nur ihrer Form nach bestimmt werden, aber eine grosse Anzahl unbekannter Constanten behalten, zu deren Bestimmung neue Kriterien oder die Beobachtungen zu Hülfe zu nehmen sind, in die Bewegungsgesetze für ein Äthertheilchen eingeführt, ergeben die Gesetze der einfachen und der Doppelbrechung, der circularen und elliptischen Polarisation in isotropen und krystallinischen, als durchsichtig anzusehenden Medien in Übereinstimmung mit der Beobachtung[3].

Ausser durchsichtigen Körpern kennen wir absorbirende, d. h. solche, welche die Intensität einer Lichtwelle beim Hindurchgehen schwächen. Auch hier beziehen sich die Beobachtungen nur auf periodische Ätherbewegungen, aber wiederum ist es sehr unwahrscheinlich, dass die nicht-periodischen sich anders verhalten, d. h. im absorbirenden Körper entweder unverändert bleiben oder gar verstärkt werden sollten, und darum wird auch unsere zweite Fundamental-Hypothese wohl unbeanstandet bleiben, welche lautet:

II. Medien, welche die Energie periodischer Ätherschwingungen durch Absorption verringern, verhalten sich ebenso nicht-periodischen gegenüber.

---

[1] W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 873, 1883.

[2] W. Voigt, Gött. Nachr. 1884, No. 9, p. 338.

[3] W. Voigt, Wied. Ann. Bd. 19, p. 873, 1883.

Verfolgt man diesen Gedanken ebenso wie den früheren mit der Rechnung, so ergeben sich nur zwei Gattungen von Kräften möglich, welche unter allen Umständen eine Absorption verursachen; von diesen lässt sich wiederum die eine mit grosser Wahrscheinlichkeit durch die oben erwähnte Betrachtung ausscheiden. Die so erhaltene Energie-vermindernde Kraft, welche wie die früheren Energie-erhaltenden zunächst nur der Form nach bestimmt ist, ist mit jenen Kräften in die Bewegungsgleichungen einzuführen, um zu den allgemeinsten Gesetzen des Lichtes für absorbirende isotrope oder krystallinische Körper zu gelangen.

Mit diesen beiden Grundhypothesen sind in meiner Theorie einige Hülfsannahmen verbunden, welche die Natur des Lichtäthers betreffen.

Da wir auf keine Weise merkliche Longitudinal-Wellen erhalten können, welche von abwechselnden Verdünnungen und Verdichtungen begleitet sein würden, nehmen wir noch Carl Neumann's Vorgang[1] erstens den Lichtäther als nahezu incompressibel an.

Da der Lichtäther den bewegten Himmelskörpern, wie auch schwingenden irdischen ponderabeln Massen keinen merklichen Widerstand leistet, nehmen wir zweitens seine Dichtigkeit als verschwindend an gegenüber derjenigen aller ponderabeln Massen. Dies hat zur Folge, dass letztere durch eine Lichtwelle nur in unmerkliche Schwingungen versetzt werden, wie ich auch durch eine besondere Betrachtung erwiesen habe[2].

Um endlich plausibel zu machen, wie der Lichtäther frei zwischen den Intervallen der ponderabeln Massen fluctuirt, nehmen wir drittens (was übrigens nebensächlich ist) seine Natur in allen Körpern als identisch an.

Nachdem ich somit die Grundlagen der neuen Theorie erörtert habe, gehe ich zu der Besprechung der Folgerungen über, die sie für das specielle Problem der pleochroitischen Krystalle ergiebt.

Es folgt aus ihr, dass eine normal auf eine Krystallfläche auffallende Welle sich in dem Krystalle so fortpflanzt, dass die Elongationen gegeben sind durch:

---

[1] C. Neumann, Die magnet. Drehung d. Polarisationsebene. Halle 1863.

[2] W. Voigt, Gött. Nachr. 1884, No. 7, p. 261.

$$u = A e^{-\frac{\varkappa \varrho}{\tau \omega}} \sin \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\varrho}{\omega}\right),$$

worin ϱ der von der Grenze zurückgelegte Weg ist, A die beim Eintritt durch die Grenze stattfindende Amplitude, ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $\varkappa$ der Absorptionsindex, von welchem die Geschwindigkeit der Intensitätsabnahme abhängt, und $2\pi\tau$ für T, d. i. die Schwingungsdauer, geschrieben ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω und der Absorptionsindex $\varkappa$ variiren mit der Richtung, in welcher die Fortpflanzung stattfindet, nach durch die Theorie gegebenen Gesetzen. Das Gesetz für ω findet sich auch bei verschwindender Absorption bei allgemeinster Fassung der Theorie zunächst wesentlich complicirter als von Fresnel angegeben, enthält aber letzteres als speciellen Fall in sich. Um zu demselben zu gelangen, hat man also die Kräfte, welche auf den Äther wirken, noch weiter zu specialisiren. Es zeigt sich, dass man durch zwei ganz verschiedene Verfügungen, über die durch die bisherigen Kriterien unbestimmt gebliebenen Constanten zu dem Fresnel'schen Gesetz geführt wird; aber die eine von ihnen erscheint sehr unwahrscheinlich, weil sie Kräften, welche parallel krystallographisch verschiedenen Richtungen wirken, gleiche Grössen ertheilt, so dass die andere sich ungleich mehr empfiehlt; diese führt auf die Neumann'sche Anschauung, nach welcher Polarisations- und Schwingungsebene zusammenfallen, die erstere auf die Fresnel'sche, nach welcher sie normal zu einander sind. Vom Standpunkt der neuen Theorie aus wird man sich hiernach zweifellos für die Neumann'sche Annahme erklären müssen, zumal andere Folgerungen dasselbe Resultat ergeben. Ich benutze die Gelegenheit zu betonen, dass die Versuche, durch Beobachtungen zwischen diesen beiden Anschauungen zu entscheiden, sämmtlich zu schwerwiegenden Einwänden Veranlassung gaben, so dass von dieser Seite gewiss kein Grund vorliegt, wie es jetzt fast allgemein geschieht, die Fresnel'sche Anschauung der Neumann'schen vorzuziehen. Der berühmt gewordene Haidinger'sche Beweis aus dem Verhalten der pleochroitischen Krystalle[1] ist gar nur ein Aperçu, und unsere Theorie giebt,

[1] Haidinger, Pogg. Ann. Bd. 86, p. 131, 1872.

wie sich zeigen wird, gerade die entgegengesetzte Folgerung aus der Beobachtung. Es gebietet sich daher von selbst, in experimentellen Arbeiten statt des zweideutigen Ausdrucks der „Schwingungsebene" den bestimmten der „Polarisationsebene" zu benutzen. Ich werde im Folgenden, den theoretischen Resultaten entsprechend, den Ausdruck „Schwingungsebene" benutzen müssen und sie, wie gesagt, mit der „Polarisationsebene" zusammenfallen lassen. —

Verfügt man über die absorbirenden Kräfte nach demselben Princip, wie über die nicht absorbirenden, so gelangt man zu den Resultaten, die ich nunmehr im Zusammenhang erst für optisch einaxige, dann für zweiaxige Krystalle mittheilen will.

1. Optisch-einaxige Krystalle.

Für mässige Absorption, wie sie bei Krystallen, die man im durchgehenden Licht beobachtet, stets stattfindet, ist das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω für die ordinäre und extraordinäre Welle:

$$m\omega_o^2 = B_1, \quad m\omega_e^2 = B_1 \cos^2 c + B_3 \sin^2 c \qquad \Big| \; 1.$$

worin c der Winkel der Fortpflanzungsrichtung gegen die Hauptaxe ist und B_1, B_3 eine Art Elasticitäts-Constanten des Krystalles sind, die von der Farbe, d. h. τ, abhängen, m hingegen die Ätherdichtigkeit bedeutet. Der Absorptionsindex für diese beiden Wellen ist gegeben durch:

$$2\tau\varkappa_o = \frac{C_1}{B_1}, \quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1 \cos^2 c + C_3 \sin^2 c}{B_1 \cos^2 c + B_3 \sin^2 c} \qquad \Big| \; 2.$$

worin C_1 und C_3 die Constanten der absorbirenden Kräfte sind, welche gleichfalls mit der Farbe variiren, und wie oben $2\pi\tau = T$, d. h. der Schwingungsdauer ist. Variirt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der extraordinären Welle nur wenig mit der Richtung, wie dies fast bei allen Krystallen stattfindet, so kann man in diesen letzten Formeln für B_1 und B_3 einen mittleren Werth B einführen und schreiben:

$$2\tau\varkappa_o = \frac{C_1}{B}, \quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1 \cos^2 c + C_3 \sin^2 c}{B}. \qquad \Big| \; 2^a.$$

Diese Formeln enthalten das der Beobachtung entsprechende Resultat, dass die ordinäre Welle in jeder Richtung ebenso stark absorbirt wird, wie das gewöhnliche Licht parallel der optischen Axe, oder, da die $\varkappa$ von der Farbe abhängen, dass bei einfallendem weissen Lichte die ordinäre Welle in jeder Richtung dieselbe Farbe zeigt, welche man in der Richtung der optischen Axe wahrnimmt, und zwar findet sich dieses Resultat vereinbar mit der Neumann'schen Definition der Polarisationsebene.

Wir wollen nun das Verhalten einer Platte von der Dicke L aus einem einaxigen absorbirenden Krystall im divergenten polarisirten Lichte untersuchen und dabei in vielbenutzter Weise annehmen, die Platte sei so klein, dass man sie als ein Stück einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Kugelschale ansehen kann, aus deren Mittelpunkt die Lichtstrahlen ausgehen.

Setze ich dann die gegenseitige Verzögerung des ordinären und extraordinären Strahles in einer Richtung, welche den Winkel c mit der optischen Axe macht, gleich δ, — den Winkel, den in dieser Richtung die Schwingungsebene des Polarisators mit dem Hauptschnitt macht α, — den analogen für die Schwingungsrichtung des Analysators β, — die einfallende Amplitude A, so wird, da die austretenden Amplituden resp. $A e^{-\varkappa_o l_o}$ und $A e^{-\varkappa_e l_e}$ sind, nach dem bekannten Fresnel'schen Satz parallel der Schwingungsebene des Analysators nach dem Austritt aus dem Krystall eine Intensität erhalten werden, welche ist:

$$J = A^2 \Big[\cos^2\alpha \cos^2\beta\, e^{-2\varkappa_o l_o} + \sin^2\alpha \sin^2\beta\, e^{-2\varkappa_e l_e} + 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta \cos\delta\, e^{-(\varkappa_o l_o + \varkappa_e l_e)} \Big] \qquad 3.$$

Hierin ist kurz gesetzt:

$$\frac{L}{\tau\omega_o} = l_o, \quad \frac{L}{\tau\omega_e} = l_e,$$

und von dem Verlust durch die innere und äussere Reflexion abgesehen.

Da δ mit wachsendem c selbst wächst, so folgt, dass sich im Allgemeinen abwechselnd helle und dunkle Ringe um die Axe zeigen müssen. Ist dies, trotzdem parallel der optischen Axe die Absorption gering ist, nicht der Fall — wie es Herr Lommel im blauen Licht am Magnesiumplatincyanür beobachtet hat[1], — so folgt daraus, dass in einiger Entfernung von der Axe das δ enthaltende Glied unmerklich werden, d. h. der Absorptionsindex $\varkappa_e$ mit c wachsen muss. Wegen der Natur der Exponentialgrösse ist dabei noch kein besonders schnelles Wachsen nöthig, um in kleiner Entfernung schon das Glied vernachlässigen zu können.

Führt man diese Eigenschaft von $\varkappa_e$ ein, welche nach dessen Werth (2^a) nur verlangt, dass $C_1 > C_3$ ist, so enthält obige Formel (3) die vollständige Erklärung der Lommel'schen Beobachtungen am Magnesiumplatincyanür.

Nehmen wir zunächst die der Axe unmittelbar benachbarten Richtungen, so ergibt sich, da dort $\varkappa_e = \varkappa_o$, $l_e = l_o$ ist, die gewöhnliche Formel für durchsichtige Medien und demgemäss bei gekreuzten Schwingungsebenen Dunkelheit, bei parallelen Helligkeit.

Schon in kleiner Entfernung von der Axe ist aber die Formel gültig:

$$J = A^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \, e^{-2\varkappa_o l_o} \qquad | \quad 4.$$

Diese sagt den Inhalt von Herrn Lommel's Beobachtung[2] aus:

„Bei gekreuzten Schwingungsebenen sieht man ein rechtwinkliges Kreuz ohne Interferenzringe."

„Dreht man nun das Polariscop, so bleibt der zu der Schwingungsrichtung des Polarisators senkrechte Balken des Kreuzes unverändert stehen, während der andere Balken sich mit dem Polariscop dreht, indem er zu der Schwingungsebene desselben normal bleibt."

„Man erhält also ein schiefwinkliges Kreuz, dessen Arme wie vorher vollkommen dunkel sind," d. h. J ist gleich Null für $\alpha = \pi/2$ und $\beta = \pi/2$. „Zugleich erscheinen die spitzwinkligen Quadranten dunkler als die stumpfwinkligen."

[1] E. Lommel, Wied. Ann. Bd. 9, p. 108, 1880.

[2] Lommel, l. c. p. 109. In den citirten Sätzen ist nur gemäss unserer Auffassung, dass Schwingungs- und Polarisationsrichtung zusammenfallen, das Wort „parallel" überall durch „normal" ersetzt.

„Stellt man endlich die Schwingungsebene des Polariscops parallel zu derjenigen des Polarisators, so bleiben nur noch die auf dieser gemeinsamen Richtung normalen Kreuzarme übrig als zwei dunkle Sectoren, welche durch einen schmalen gegen die Sectoren scharf begrenzten, hellen Zwischenraum von einander getrennt sind."

Wie aus der Erscheinung im blauen polarisirten Lichte die im weissen sich ableitet, hat Herr Lommel selbst erörtert.

Für den Fall, dass natürliches blaues Licht einfällt und nach dem Durchgang durch einen Analysator betrachtet wird[1] ergiebt sich die Formel aus (3) indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α bildet. Man erhält dann:

$$J = \frac{A^2}{2} \cos^2 \beta \, e^{-2\varkappa_0 l_0} \qquad 5.$$

d. h. „man gewahrt im blauen Lichte bei jeder Stellung des Polariscops und stets normal zu dessen Schwingungsebene zwei dunkle Büschel . . . ohne Interferenzringe"[2], aber mit hellem Axenbild.

Fällt unpolarisirtes blaues Licht ein und wird mit blossem Auge beobachtet, so ist auch für alle Werthe β das Mittel in Formel (5) zu nehmen. Die Büschel verschwinden dann und es bleibt nur ein hellerer Fleck in der Richtung der Axe übrig (Bertrand l. c.). Dass mit der starken Absorption des extraordinären Strahles für blaues Licht die theilweise Polarisation des durchgegangenen in dem Hauptschnitt, sowie die blaue Farbe des von einfallendem weissen Lichte herrührenden reflectirten direct zusammenhängt, ist aus unserer Theorie leicht nachzuweisen.

Die bisher erörterten Phänomen entsprechen dem Falle, dass in dem Werthe von $\varkappa_e$ die Grösse $C_3 > C_1$ war. Im umgekehrten Falle

$$C_1 > C_3$$

folgen etwas andere Erscheinungen. $\varkappa_0$ ist dann gross und $\varkappa_e$ nimmt mit wachsendem c ab, so dass in der Richtung der Axe aus (3) stets Dunkelheit folgt und erst in einiger, möglicherweise ziemlich bedeutender Entfernung das Glied

[1] Analoges gilt für den Fall polarisirtes Licht einfällt und ohne Analysator mit blossem Auge beobachtet wird.

[2] Lommel l. c. p. 111, schon früher beobachtet von Bertrand, Zeitschr. f. Kryst. Bd. 3, p. 645. 1879.

$$J = A^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha \, e^{-2\varkappa_e l_e}$$

merkliche Werthe bekömmt. Hier würden also zwei dunkle Büschelpaare parallel zur Schwingungsebene des Polarisators und Analysators liegen, desgleichen wenn natürliches Licht einfällt ein Büschelpaar parallel der Schwingungsebene des Analysators auftreten. Auch diese Erscheinung ist stets von Dunkelheit in der Richtung der Axe begleitet. Die Voraussetzung $C_1 > C_3$ ist beim Turmalin erfüllt und demgemäss der dunkle Fleck in der Richtung der Axe auch beobachtet worden (Bertrand l. c.); eine Notiz über die Büschel bei Anwendung polarisirten Lichtes habe ich nicht finden können. —

2. Optisch-zweiaxige Krystalle.

Für diese erhält man unter der oben gemachten Annahme mässiger Absorption ebenfalls zwei lineär polarisirte Wellen; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω sind gegeben durch die beiden Wurzeln der bekannten Fresnel'schen Gleichung:

$$\frac{\cos^2 a}{B_1 - m\omega^2} + \frac{\cos^2 b}{B_2 - m\omega^2} + \frac{\cos^2 c}{B_3 - m\omega^2} = 0, \qquad 6.$$

in welcher a, b, c die Winkel der Fortpflanzungsrichtung mit den optischen Symmetrieaxen $X\,Y\,Z$ und B_1, B_2, B_3 drei dem Krystalle individuelle, übrigens von der Farbe abhängige Grössen sind. Der Absorptionsindex $\varkappa$ bestimmt sich sehr umständlich, wenn die Richtungen der grössten und kleinsten Absorption nicht mit den obigen optischen Symmetrieaxen zusammenfallen[1]; ich habe mich daher für die Discussion auf den einfachsten Fall beschränkt, den man als den Fall des rhombischen Systems bezeichnen kann. Für diesen wird, wenn man ausser den schon definirten Grössen die drei (von der Farbe abhängigen) Absorptionsconstanten C_1, C_2, C_3 einführt, der Absorptionsindex für die ordinäre und extraordinäre Welle durch die Formel:

$$2\iota\varkappa = \frac{\cos^2 a\,[C_3(B_2 - m\omega^2) + C_2(B_3 - m\omega^2)] + \cos^2 b\,[C_1(B_3 - m\omega_2) + C_3(B_1 - m\omega_2)] + \cos^2 c\,[C_2(B_1 - m\omega^2) + C_1(B_2 - m\omega_2)]}{\cos^2 a\,[B_3(B_2 - m\omega^2) + B_2(B_3 - m\omega^2)] + \cos^2 b\,[B_1(B_3 - m\omega^2) + B_3(B_1 - m\omega^2)] + \cos^2 c\,[B_2(B_1 - m\omega^2) + B_1(B_2 - m\omega^2)]} \qquad 7.$$

[1] Vergl. H. Laspeyres, Z.-S. f. Kryst. 4, p. 435, 1880, Beiblätter 4, p. 791, 1880.

gegeben, in welcher rechts für ω^2 die eine oder andere Wurzel der Gleichung (6) einzusetzen ist.

Von diesen Formeln (6) und (7) machen wir zunächst eine Anwendung auf die Richtungen der Hauptaxen XYZ; die für jede von ihnen sich ergebenden beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und Absorptionsindices seien durch die Indices $_1$ und $_2$ an ω und $\varkappa$ unterschieden.

$$X\text{-Axe, d. h. } a = 0,\ b = \frac{\pi}{2},\ c = \frac{\pi}{2},$$

$$m\omega_1^2 = B_2,\quad 2\tau\varkappa_1 = \frac{C_2}{B_2}$$

$$m\omega_2^2 = B_3,\quad 2\tau\varkappa_2 = \frac{C_3}{B_3}$$

$$Y\text{-Axe, d. h. } a = \frac{\pi}{2},\ b = 0,\ c = \frac{\pi}{2},$$

$$m\omega_1^2 = B_3,\quad 2\tau\varkappa_1 = \frac{C_3}{B_3}$$

$$m\omega_2^2 = B_1,\quad 2\tau\varkappa_2 = \frac{C_1}{B_1}$$

$$Z\text{-Axe, d. h. } a = \frac{\pi}{2},\ b = \frac{\pi}{2},\ c = 0,$$

$$m\omega_1^2 = B_1,\quad 2\tau\varkappa_1 = \frac{C_1}{B_1}$$

$$m\omega_2^2 = B_2,\quad 2\tau\varkappa_2 = \frac{C_2}{B_2}.$$

Diese Zusammenstellung zeigt, dass in den 3 Hauptrichtungen der gleichen Geschwindigkeit (gegeben durch ein bestimmtes B) auch die gleiche Absorption entspricht. Oder mit andern Worten: diejenigen Wellen, welche bei zu einander senkrechter Fortpflanzungsrichtung auch zu einander senkrechte Schwingungen haben, werden gleich stark absorbirt, zeigen also die gleiche Farbe.

Damit ist das experimentelle Resultat, welches zuerst von Haidinger[1] und nach ihm von Anderen fälschlich gegen die Neumann'sche Definition der Polarisationsebene geltend gemacht ist, als mit dieser Definition durchaus verträglich streng

[1] Haidinger, Pogg. Ann., Bd. 86, p. 131, 1852, reproducirt von Mousson, Physik, Bd. II, p. 630, 1872. Müller-Pouillet, Physik, Bd. I, p. 804, 1864.

aus der Theorie abgeleitet, und anscheinend sogar wahrscheinlicher gemacht, als das entgegengesetzte[1].

Ferner sei eine der Hauptebenen betrachtet.

Für die XZ-Ebene ist $b = \pi/2$, $a + c = \pi/2$, also folgendes System gültig:

$$\left.\begin{aligned} m\omega_1^2 &= B_2, & 2\tau\varkappa_1 &= \frac{C_2}{B_2}, \\ m\omega_2^2 &= B_1 \cos^2 c + B_3 \sin^2 c, & 2\tau\varkappa_2 &= \frac{C_1 \cos^2 c + C_3 \sin^2 c}{B_1 \cos^2 c + B_3 \sin^2 c}; \end{aligned}\right| \quad 8.$$

das für die übrigen Hauptebenen gültige folgt hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices.

Ist $B_3 > B_2 > B_1$ so enthält die XZ-Ebene die optischen Axen; ihre Winkel χ mit der Z-Axe sind gegeben durch:

$$\cos^2 \chi = \frac{B_3 - B_2}{B_3 - B_1}, \quad \sin^2 \chi = \frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}. \qquad \Big| \quad 9.$$

Man bemerkt, dass sich bei absorbirenden optisch zweiaxigen Krystallen in der Richtung der optischen Axen in der benutzten Annährung zwar für die Geschwindigkeiten nur ein Werth ergiebt, nicht aber für die Absorptionsindices. Bezeichnet man die parallel der XZ-Ebene schwingende Welle in der Richtung der optischen Axe mit o, die normal dazu mit e, so wird

$$2\tau\varkappa_o = \frac{C_2}{B_2}, \quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1 (B_3 - B_2) + C_3 (B_2 - B_1)}{B_2 (B_3 - B_1)}. \qquad \Big| \quad 10.$$

Bei stark verschiedenen Werthen C_1, C_2, C_3 wird also auch das parallel einer optischen Axe fortgepflanzte Licht mehr oder weniger polarisirt sein. Dass dies der Wirklichkeit entspricht, kann man leicht z. B. am Epidot wahrnehmen.

---

[1] Ich kann den Beweis, welchen Herr Lommel (Wied. Ann. Bd. 8, p. 634, 1879) für die Fresnel'sche Ansicht anführt, nicht für sicherer halten, als den Haidinger's. Bei den angezogenen Fluorescenz-Erscheinungen dringt das Licht doch in endliche Tiefen des fluorescirenden Mediums ein und tritt aus endlichen Tiefen aus; es erscheint demnach durchaus nicht selbstverständlich, dass die Fluorescenz derselben Krystallfläche nur von der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes abhängt. Wie aber die theoretische Behandlung einer zu erklärenden Erscheinung die entgegengesetzte Entscheidung wahrscheinlich machen kann, als die direkte Anschauung der Erscheinung selbst, wird durch das oben behandelte Problem bedeutungsvoll illustrirt.

Wir wollen nun die Formeln (6) und (7) für die weitere Anwendung umformen.

Da die Wurzeln der ersteren sich bekanntlich in rationaler Form gesondert darstellen lassen, wenn man statt der Winkel der Wellennormale gegen die Symmetrieaxen des Krystalls diejenigen gegen die optischen Axen einführt, so kann man in der benutzten Annäherung dasselbe mit den zugehörigen Absorptionsindices $\varkappa$ thun.

Nennt man die Winkel der Wellennormale mit den beiden optischen Axen u und v, so ist bekanntlich für die sogenannte ordinäre und extraordinäre Welle:

$$\left.\begin{aligned} m\omega_o^2 &= B_1 + (B_3 - B_1)\sin^2\frac{u-v}{2}, \\ m\omega_e^2 &= B_1 + (B_3 - B_1)\sin^2\frac{u+v}{2}. \end{aligned}\right| \quad 11.$$

Ausserdem ist:

$$\cos a \,.\, \sqrt{\frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}} = \sin\frac{u-v}{2} \cdot \sin\frac{u+v}{2},$$

$$\cos c \,.\, \sqrt{\frac{B_3 - B_2}{B_3 - B_1}} = \cos\frac{u-v}{2} \cdot \cos\frac{u+v}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2\tau\varkappa_o &= \frac{\left|\begin{array}{l} (B_3-B_1)\sin^2\frac{u-v}{2}\cdot\cos^2\frac{u-v}{2}\left(\frac{C_1-C_2}{B_1-B_2}\sin^2\frac{u+v}{2}+\frac{C_2-C_3}{B_2-B_3}\cos^2\frac{u+v}{2}\right) \\ + C_1\cos^2\frac{u-v}{2}\cdot\sin^2\frac{u+v}{2} - C_3\sin^2\frac{u-v}{2}\cdot\cos^2\frac{u+v}{2} \end{array}\right|}{\left(B_3\sin^2\frac{u-v}{2}+B_1\cos^2\frac{u-v}{2}\right)\left(\cos^2\frac{u-v}{2}-\cos^2\frac{u+v}{2}\right)} \\ 2\tau\varkappa_e &= \frac{\left|\begin{array}{l} (B_3-B_1)\sin^2\frac{u+v}{2}\cdot\cos^2\frac{u+v}{2}\left(\frac{C_1-C_2}{B_1-B_2}\sin^2\frac{u-v}{2}+\frac{C_2-C_3}{B_2-B_3}\cos^2\frac{u-v}{2}\right) \\ + C_1\cos^2\frac{u+v}{2}\sin^2\frac{u-v}{2} - C_3\cos^2\frac{u-v}{2}\sin^2\frac{u+v}{2} \end{array}\right|}{\left(B_3\sin^2\frac{u+v}{2}+B_1\cos^2\frac{u+v}{2}\right)\left(\cos^2\frac{u+v}{2}-\cos^2\frac{u-v}{2}\right)} \end{aligned}\right| \quad 12.$$

Diese Formeln geben die Absorption beider Wellen in beliebigen Richtungen. Setzt man hinein $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, $u = v$, so gelangt man zu:

$$2\tau\varkappa_o = \frac{C_1}{B_1}, \quad 2\tau\varkappa_e = \frac{C_1 \cos^2 u + C_3 \sin^2 u}{B_1 \cos^2 u + B_3 \sin^2 u},$$

d. h. zu den obigen Formeln (2) für einaxige Krystalle.

Besondere Wirkungen der Absorption werden in optisch zweiaxigen Krystallen in der unmittelbaren Umgebung der optischen Axen beobachtet. Um die Formeln dafür abzuleiten, will ich eine Richtung betrachten, die den gegen 2χ kleinen Winkel u mit der einen optischen Axe macht und in einer Ebene liegt, die um den Winkel ψ gegen die Ebene XZ, d. h. die der optischen Axen, geneigt ist. Dabei mag $\psi = 0$ sein, wenn die betrachtete Richtung nach der Z-Axe hin liegt. Da 2χ der Winkel der optischen Axen ist, so folgt:

$$v = 2\chi - u \cos \psi$$

und, wenn man die Quadrate von u vernachlässigt, erhält man aus den Formeln (12) die für Richtungen in der Nähe der einen optischen Axe gültigen:

$$\left.\begin{aligned} 2\tau\varkappa_o &= \frac{[C_1(B_3-B_2)+C_3(B_2-B_1)]\cos^2\frac{\psi}{2}+C_2(B_3-B_1)\sin^2\frac{\psi}{2}}{B_2(B_3-B_1)} \\ 2\tau\varkappa_e &= \frac{[C_1(B_3-B_2)+C_3(B_2-B_1)]\sin^2\frac{\psi}{2}+C_2(B_3-B_1)\cos^2\frac{\psi}{2}}{B_2(B_3-B_1)} \end{aligned}\right| \quad 13.$$

oder in anderer Form:

$$\left.\begin{aligned} 2B_2\,\tau\varkappa_o &= (C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi) \cos^2 \frac{\psi}{2} + C_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ 2B_2\,\tau\varkappa_e &= (C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi) \sin^2 \frac{\psi}{2} + C_2 \cos^2 \frac{\psi}{2}. \end{aligned}\right| \quad 13^a.$$

Sie ergeben $\varkappa_o$ und $\varkappa_e$ von ψ, nicht aber von u abhängig, und zeigen, dass wenn man aus der XZ-Ebene heraus in einem engen Kreiskegel um die optische Axe herumgeht bis wieder in die XZ-Ebene, $\varkappa_o$ sich ebenso ändert, als $\varkappa_e$ beim Gehen in der entgegengesetzten Richtung.

Für die optische Axe selbst, welche Richtung durch den Index ′ angedeutet werden mag, werden diese Formeln unbestimmt, weil dort ψ seine Bedeutung verliert; man muss daher für diese Richtung die Formeln (8) benutzen, welche ergeben, dass der in der XZ-Ebene schwingenden Welle entspricht:

$$\left.\begin{aligned} 2\tau\varkappa_o' &= \frac{C_2}{B_2} \\ \text{der senkrecht dazu:} & \\ 2\tau\varkappa_e' &= \frac{C_1\,(B_3-B_2)+C_3\,(B_2-B_1)}{B_2\,(B_3-B_1)} \end{aligned}\right| \quad 8.$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} 2B_2\tau\varkappa_o' &= C_2 \\ 2B_2\tau\varkappa_e' &= C_1\cos^2\chi + C_3\sin^2\chi \end{aligned}\right| \quad 8^a.$$

Man kann hiernach die Werthe $\varkappa$ für die optischen Axen aus den allgemeinen Ausdrücken (13) erhalten, indem man $\psi = \pi$ setzt.

Für die Discussion bieten sich ausser dem singulären Fall constanter Absorption, für welchen $C_1 = C_2 = C_3 = C$ und daher $2\tau\varkappa_o = 2\tau\varkappa_e = C/B_2$ ist, besonders die zwei speciellen Fälle, dass in den Gleichungen (13) entweder der erste oder der zweite Factor des Zählers den anderen an Grösse bedeutend übertrifft, so dass man jenen verschwindend setzen kann. Wir unterscheiden sie in folgender Weise:

I. Specialfall: $C_2 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und ihr p a r a l l e l schwingende Welle wird nur unmerklich absorbirt, wie dies angenährt beim Andalusit stattfindet. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_o &= k\cos^2\frac{\psi}{2}, \quad \varkappa_e = k\sin^2\frac{\psi}{2} \quad \text{und} \\ k &= \frac{C_1\,(B_3-B_2)+C_3\,(B_2-B_1)}{2\tau B_2\,(B_3-B_1)}. \end{aligned}\right| \quad 14.$$

In der Richtung der optischen Axe ist nach der obigen Regel:

$$\varkappa_o' = 0, \quad \varkappa_e' = k.$$

II. Specialfall: $C_1 = C_3 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und dazu n o r m a l schwingende Welle wird nur unmerklich absorbirt, wie dies für gewisse Farben angenährt beim Epidot der Fall ist[1]. Dann ist:

[1] Der Epidot ist zwar nicht rhombisch sondern monoklinisch, die obigen Entwickelungen sind also nicht streng auf ihn anwendbar. Indessen dürfte es, so lange die Winkel zwischen den Elasticitäts- und Absorptionsaxen nur klein sind, unbedenklich sein auf ihn zu exemplificiren, zumal wenn es sich nicht um die Aufstellung und Prüfung quantitativer Gesetze handelt.

$$\varkappa_o = k \sin^2\frac{\psi}{2}, \quad \varkappa_e = k \cos^2\frac{\psi}{2} \text{ und} \qquad 15.$$
$$k = \frac{C_2}{2\tau B_2},$$

also in der Richtung der optischen Axe:

$$\varkappa_o' = k, \; \varkappa_e' = 0.$$

Betrachtet man eine Platte von der Dicke L senkrecht zu einer optischen Axe geschnitten in einer so kleinen Ausdehnung, dass man sie wiederum als Stück einer Kugelschale um die Lichtquelle als Mittelpunkt ansehen kann, im Polarisationsapparat, bezeichnet mit α den Winkel der Schwingungsebene des Polarisators mit der Ebene der optischen Axen, mit β den analogen Winkel für den Analysator, so ist die beobachtete Intensität gegeben durch:

$$J = A^2\Big[\sin^2\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\sin^2\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)e^{-2\varkappa_o l_o}+\cos^2\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\cos^2\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)e^{-2\varkappa_e l_e}$$
$$+2\sin\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\psi}{2}\right)\cos\delta\, e^{-(\varkappa_o l_o+\varkappa_e l_e)}\Big] \qquad 16.$$

Hierin ist δ der Gangunterschied der beiden in der durch u und ψ gegebenen Richtung fortgepflanzten Wellen, deren Schwingungsebenen resp. die Winkel $-(\pi-\psi)/2$ und $\psi/2$ mit der Ebene der optischen Axen machen. Ferner ist kurz gesetzt:

$$L/\tau\omega_o = l_o, \quad L/\tau\omega_e = l_e.$$

In der Richtung der optischen Axe selbst aber gilt, da auch da zwei Componenten in verschiedener Intensität fortgepflanzt werden:

$$J' = A^2\left(\cos\alpha\cos\beta\, e^{-\varkappa_o' l_o'}+\sin\alpha\sin\beta\, e^{-\varkappa_e' l_e'}\right)^2 \qquad 16_a.$$

Man kann also auch auf die Intensität J die obige Regel anwenden, dass man den für die Richtung der optischen Axen gültigen Werth durch Einführung von $\psi = \pi$, ausserdem von $\delta = 0$ erhält.

Da $\cos\delta$ mit wachsender Entfernung u von der optischen Axe periodisch Maxima und Minima erreicht, so erhält man im Allgemeinen helle und dunkle Ringe um die Axe. Der

Einfluss der Absorption auf die Erscheinung stellt sich am klarsten heraus, wenn man die Platte so dick nimmt, dass das Ringsystem verschwindet, indem die in cos δ multiplicirte Exponentialgrösse in Formel (16) sehr klein wird.

Dann sind trotzdem die beiden ersten Glieder in (16) beizubehalten, weil ihre Exponenten in gewissen Richtungen sehr klein werden können, der des dritten nach seiner Bedeutung (13) — (15) aber nicht.

Zunächst sei Polarisator und Analysator gekreuzt, also

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2},$$

dann folgt:

$$J = \frac{A^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi)\left(e^{-2\varkappa_o l_o} + e^{-2\varkappa_e l_e}\right)$$

oder in derselben Annäherung

$$J = \frac{A^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi)\left(e^{-\varkappa_o l_o} + e^{-\varkappa_e l_e}\right)^2 \qquad 17.$$

daraus durch Einführung von $\psi = \pi$:

$$J' = \frac{A^2}{4} \sin^2 2\alpha \left(e^{-\varkappa_o' l_o'} + e^{-\varkappa_e' l_e'}\right)^2 \qquad 17^a.$$

Da α der Winkel der einfallenden Schwingungsebene, ψ das Azimuth der betrachteten Richtung gegen die Ebene der optischen Axen ist, so giebt der erste Factor von J die Intensität Null in Ebenen, die durch $\psi = 2\alpha$ definirt sind, d. h. für $\alpha = 0$ oder $\pi/2$ (Normallage) in die Ebene der optischen Axen fallen und bei einer Drehung des Krystalles gegen die Schwingungsebene des Polarisators sich doppelt so schnell gegen diesen drehen, bei $\alpha = \pi/4$ (Diagonallage) also normal gegen die Ebene der optischen Axen stehen u. s. f.

Dies sind die gewöhnlichen dunkeln Curven, welche auch durchsichtige Krystalle im Polarisationsapparat zeigen. Doch erscheinen sie in der Richtung der optischen Axe durch die Absorption modificirt, denn Formel (17^a) zeigt, dass sie in der Diagonallage des Krystalls ($\alpha = \pi/4$) dort unterbrochen sind durch eine helle Stelle und nur in der Normallage ($\alpha = 0$ oder $\pi/2$) sich durch die optische Axe fortsetzen. Diese Erscheinung ist bei vielen Krystallen zu beobachten, die zu schwach absorbiren, um das Folgende auch zu zeigen.

J hängt nämlich auch noch von dem zweiten Factor in (35) ab, welcher, wie man leicht nachweisen kann, ganz allgemein für alle Werthe der Absorptionsconstanten C

ein Maximum für $\psi = 0$ und π,

ein Minimum für $\psi = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$

besitzt. Es ergeben sich demnach allgemein für alle Lagen der Krystallplatte im Polarisationsapparat dunkle Büschel in der Richtung normal zur Ebene der optischen Axen. Man erkennt dieselben am deutlichsten, wenn sie in den Raum zwischen die intensiveren Minima fallen, welche durch den ersten Factor gegeben sind, d. h. in der Normallage der Krystallplatte, aber sie sind auch in den andern Lagen zu bemerken. Sie drehen sich zusammen mit der Krystallplatte.

Die Beobachtung bestätigt diese Schlüsse in allen Einzelheiten. —

Stehen Polarisator und Analysator parallel, so ist $\alpha = \beta$, also unter der Annahme beträchtlicher Dicke der Platte:

$$J = A^2 \left[\sin^4\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right) e^{-2\varkappa_o l_o} + \cos^4\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right) e^{-2\varkappa_e l_e}\right], \qquad 18.$$

in der Richtung der optischen Axe

$$J' = A^2 \left[\cos^4 \alpha\, e^{-2\varkappa_o' l_o'} + \sin^4 \alpha\, e^{-2\varkappa_e' l_e'}\right]. \qquad 18^a.$$

Dieser Fall wird am bequemsten mit dem folgenden zusammengefasst, dass entweder der Polarisator oder der Analysator beseitigt ist, man z. B. nur eine Turmalinplatte vor oder hinter die Krystallplatte hält. Die Formel hierfür folgt aus (34), indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α oder β nimmt, und lautet:

$$J = \frac{A^2}{2} \left[\sin^2\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right) e^{-2\varkappa_o l_o} + \cos^2\left(\alpha - \frac{\psi}{2}\right) e^{-2\varkappa_e l_e}\right] \qquad 19.$$

$$J' = \frac{A^2}{2} \left[\cos^2 \alpha\, e^{-2\varkappa_o' l_o'} + \sin^2 \alpha\, e^{-2\varkappa_e' l_e'}\right]. \qquad 19^a.$$

Die Vergleichung der Gleichungen (18) und (19) zeigt zunächst das Resultat:

Die Erscheinung bei parallelen Polarisationsebenen ist im Wesentlichen identisch mit derjenigen, welche man nach Entfernung des Polarisators oder Analysators erhält.

Auch dies merkwürdige Resultat bestätigt die Beobachtung.

Ferner zeigt sich bei näherem Eingehen, dass in diesen Fällen (18) und (19) verschiedenartig absorbirende Krystalle verschiedene Erscheinungen geben.

Wir betrachten demgemäss die beiden Typen Andalusit und Epidot gesondert.

I. Für den Typus Andalusit ist nach (14):

$$\varkappa_o = k\cos^2\frac{\psi}{2}, \quad \varkappa_e = k\sin^2\frac{\psi}{2},$$

also wird, für die zwei Hauptfälle, dass die Ebene des Polarisators parallel oder normal zur optischen Axen-Ebene ist ($\alpha = 0$ oder $= \pi/2$):

$$J_0 = \frac{A^2}{2}\left(\sin^2\frac{\psi}{2}\, e^{-2l_o k\cos^2\frac{\psi}{2}} + \cos^2\frac{\psi}{2}\, e^{-2l_e k\sin^2\frac{\psi}{2}}\right), \qquad 20.$$

in der Richtung der optischen Axe aber, falls man k und L hinreichend gross nimmt um

$e^{-2\varkappa l}$ neben 1 zu vernachlässigen:

$$J_0' = \frac{A^2}{2}. \qquad 20^a.$$

Ferner analog:

$$J_{\frac{\pi}{2}} = \frac{A^2}{2}\left(\cos^2\frac{\psi}{2}\, e^{-2l_o k\cos^2\frac{\psi}{2}} + \sin^2\frac{\psi}{2}\, e^{-2l_e k\sin^2\frac{\psi}{2}}\right), \qquad 21.$$

$$J'_{\frac{\pi}{2}} = 0. \qquad 21^a.$$

II. Für den Typus Epidot ist nach (15):

$$\varkappa_o = k\sin^2\frac{\psi}{2}, \quad \varkappa_e = k\cos^2\frac{\psi}{2},$$

also für dieselben Hauptfälle und unter denselben Voraussetzungen über k und L:

$$J_0 = \frac{A^2}{2}\left[\sin^2\frac{\psi}{2}\, e^{-2l_o k\sin^2\frac{\psi}{2}} + \cos^2\frac{\psi}{2}\, e^{-2l_e k\cos^2\frac{\psi}{2}}\right], \qquad 22.$$

$$J_0' = 0, \qquad 22^a.$$

$$J_{\frac{\pi}{2}} = \frac{A^2}{2}\left[\cos^2\frac{\psi}{2}e^{-2l_o k\sin^2\frac{\psi}{2}} + \sin^2\frac{\psi}{2}e^{-2l_e k\cos^2\frac{\psi}{2}}\right], \qquad 23.$$

$$J'_{\frac{\pi}{2}} = \frac{A^2}{2}. \qquad 23^a.$$

Die Vergleichung dieser Formelsysteme (20)—(23) zeigt das weitere durch die Beobachtung bestätigte Resultat:

Die Krystalle, deren Absorption dem Typus Epidot entspricht, verhalten sich, wenn ihre optische Axenebene parallel der Schwingungsebene des Polarisators ist, ebenso, wie die des Typus Andalusit bei gekreuzten Ebenen und umgekehrt[1].

Die beiden Grunderscheinungen selbst wollen wir aus (20) und (21) erschliessen.

Da e^{-2lk} neben 1 vernachlässigt wird, so wird für Werthe von ψ nahe gleich 0 die erste Exponentialgrösse zu vernachlässigen sein, für Werthe nahe π die zweite. Für mittlere Werthe werden beide sehr kleine nahe gleiche Werthe besitzen.

Im Falle der Gleichung (20), wo also $\alpha = 0$ ist, nehmen die Factoren der Exponentialgrössen zugleich mit diesen selbst den grössten und kleinsten Werth an, man erhält also einen dunkeln Büschel normal zur Ebene der optischen Axen ($\psi = \pi/2$) und ein helles Feld ihr parallel, welches sich auch durch das Bild der optischen Axe hin fortsetzt.

Im Falle der Gleichung (21), entsprechend $\alpha = \pi/2$, nehmen die Factoren der Exponentialgrössen aber ihr Maximum in denjenigen Richtungen an, wo diese ihr Minimum haben, und umgekehrt; beide wirken sich also entgegen. In Folge dessen wird man mässig dunkele Büschel sowohl normal als parallel zur Ebene der optischen Axen wahrnehmen; das Bild der optischen Axe selbst ist dunkel.

Die erste Erscheinung entspricht ungefähr der im Polarisationsapparat bei gekreuzten Schwingungsebenen erhaltenen, wenn der Krystall in der Diagonallage liegt, die letztere, wenn er in der Normallage liegt. Aber während bei gekreuzten

[1] A. Bertin, Ann. de chimie (5) Bd. 15, p. 396, 1878.

Schwingungsebenen jedes der beiden Bilder bei einer Drehung des Krystalls um 360° viermal auftritt, zeigt es sich bei parallelen Schwingungsebenen oder nach Entfernung des einen polarisirenden Theiles, nur zweimal. Auch dies bestätigt das Experiment vollkommen. —

Beobachtet man endlich die Krystallplatten ganz ohne Polarisationsapparat, so gilt die Formel, welche aus (19) durch Bildung des Mittelwerthes für alle α hervorgeht:

$$J = \frac{A^2}{4}\left(e^{-2\varkappa_o l_o} + e^{-2\varkappa_e l_e}\right) \qquad 24.$$

und falls die eine der beiden in der Richtung der optischen Axen fortgepflanzten Wellen stark, die andere nur unmerklich absorbirt wird, für jene Richtung:

$$J' = \frac{A^2}{4}. \qquad 24^a.$$

Diese Formeln geben für alle Gattungen ungleich absorbirender Krystalle dunkle Büschel normal zur Ebene der optischen Axen mit hellen Axenbildern, wie sie bereits von Brewster[1] beobachtet sind und beim Andalusit, Epidot u. A. leicht wahrgenommen werden können, wenn man durch eine geeignet geschnittene Platte nach dem hellen Himmel blickt.

Was die schwachen Ringe anbetrifft, welche man nach Beobachtungen von Bertin[2] und Anderen um die Richtung der optischen Axen mitunter wahrnehmen kann, auch wenn man durchaus mit natürlichem Lichte arbeitet, so ist ohne Weiteres klar, dass sie kein reines Absorptionsphänomen sein können, sondern auf Interferenz beruhen. Dazu ist nöthig, dass auf irgend eine Weise die beiden den Krystall in derselben Richtung durchlaufenden, senkrecht zu einander polarisirten Wellen aus ursprünglich polarisirtem Lichte entstanden sind und zuletzt auf eine gemeinsame Polarisationsebene zurückgeführt werden, denn bekanntlich kommt unter anderen Umständen keine Interferenz zu Stande. Herr Mallard[3] legt um dies zu erklären der Oberflächenschicht der Krystallplatte

---

[1] Brewster, Phil. Trans. Bd. I, p. 11, 1819.

[2] Bertin, l. c. p. 412.

[3] S. Mallard, Z.-Schr. f. Kryst. Bd. 3, p. 646, 1879.

eine polarisirende Wirkung bei, aber eine solche ist direkt nicht nachgewiesen und daher würde ihre Annahme die Schwierigkeit nicht lösen, sondern nur verlegen: es wäre dann eben diese polarisirende Wirkung zu erklären.

In vielen Fällen dürfte sich die Erscheinung durch die in Folge mehrfacher innerer Reflexion die Platten öfter als ein Mal durchsetzenden Wellen in folgender Weise erklären.

Da bei jedem Durchgang durch Absorption, und bei jeder Reflexion durch Theilung der Welle eine neue Schwächung eintritt, so genügt es, die Wellen zu betrachten, die nur drei Mal die Platte passirt haben, also nächst der direct durchgegangenen die grösste Intensität haben.

Von der direkt durchgegangenen ordinären Welle (o), welche ich zunächst betrachte, rühren in dem im Innern im Allgemeinen schief reflectirten Licht zwei nahe senkrecht zu einander polarisirte Wellen her, die ich (oo) und (oe) nenne. Sie gewinnen auf den Rückweg zur ersten Grenze einen Gangunterschied, entsprechend ihrer verschiedenen Geschwindigkeit. Dort werden sie abermals reflectirt und geben vier Componenten nach zwei nahe zu einander senkrechten Polarisationsrichtungen: (ooo), (ooe), (oeo), (oee). Die erste und dritte, die zweite und vierte, als parallel schwingend, vermögen zu interferiren und geben also zwei senkrechte Componenten:

$$[(ooo) + (oeo)] \text{ und } [(ooe) + (oee)].$$

Von der direct durchgehenden extraordinären Welle (e) rühren ähnlich zwei Componenten her:

$$[(eoo) + (eeo)] \text{ und } [(eoe + (eee)];$$

es treten also im Ganzen vier Wellen aus.

Im convergenten Licht würde, weil jede dieser Wellen aus zwei Theilen mit einem von der Neigung abhängigen Gangunterschied besteht, jede ein Ringsystem um die optische Axe geben, und zwar die erste und vierte Welle eines, wie es im Polarisationsapparat bei parallelen Nicols, die zweite und dritte eines, wie es bei gekreuzten erhalten werden würde. Absorbirt der Krystall nicht oder doch gleichmässig, so werden sich beide Arten gegenseitig zerstören, auch wenn man einen Polarisator anwendet; absorbirt aber der Krystall ungleich, so werden die verschiedenen Wellen verschiedene Stärke haben und sich demnach nicht völlig neutralisiren, sondern es wird ein schwaches Ringsystem nach Art des bei parallelen Nicols im Polarisationsapparat auftretenden übrig bleiben, und zwar auch mit jenem gleiche Distanz der Ringe zeigen. Ich habe die Erscheinung nie gesehen, aber nach der Beschreibung Herrn Bertin's[1] möchte ich glauben, dass die vorstehende Erklärung in den von ihm beobachteten Fällen der Wirklichkeit entspricht. Die Epidotkrystalle, an welchen ich durch die Freundlichkeit Herrn Prof. C. Klein's die oben entwickelte Theorie der Büschel prüfen konnte, zeigen im natürlichen Licht keine Spur von Ringen, sondern nur wenn ein Polarisator benutzt wird, z. B. wenn man vom Polarisationsapparat den oberen Nicol entfernt. Aber diese Ringe haben bedeutend grössere Abstände als die, welche man nach Anbringung des oberen Nicols wahrnimmt, sie können also nicht durch Interferenz zweier Wellen, die während des Passirens der ganzen Plattendicke verschiedene Geschwindigkeiten hatten, hervorgebracht werden. Es erscheint daher wahrscheinlich, dass eine Zwillingslamelle, wie sie Herr Klein früher schon zur Erklärung angenommen hat, in diesem Falle die Erscheinung verursacht. Diese Annahme wird durch die Beobachtung bestätigt, dass die Präparate die Ringe nur an einzelnen Stellen zeigen.

Ausser diesen Erscheinungen in der Nähe der optischen Axen können noch besondere Folgen der Absorption in der Richtung der Absorptionsaxen, welche beim rhombischen System den Elasticitätsaxen parallel sind, merklich werden, da der Absorptionsindex $\varkappa$ in denselben seinen grössten und kleinsten Werth annimmt. In der That sind in diesen Richtungen helle und dunkle Flecken bemerkt worden[2].

[1] A. Bertin, l. c. p. 415.

[2] Vergl. A. Bertin, l. c. p. 400.