

Ueber die Totalreflexion an doppeltbrechenden Krystallen.

Von

Th. Liebisch in Königsberg i. Pr.

(Mit einem Holzschnitt.)

In einer früheren Mittheilung (in dies. Jahrbuch 1885, Bd. I, S. 245—253) habe ich aus den FRESNEL'schen Gesetzen der Doppelbrechung die Gesetze abgeleitet, nach denen bei dem Übergange des Lichtes aus einem einfach brechenden Mittel in einen schwächer brechenden optisch einaxigen Krystall an einer ebenen Grenzfläche totale Reflexion eintritt. Die Ausdehnung dieser Untersuchung auf optisch zweiaxige Krystalle bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ich wurde auf die charakteristische Eigenschaft des Grenzwinkels der totalen Reflexion geführt durch die von W. HAMILTON und J. MAC CULLAGH angegebene Construction der gebrochenen Wellennormalen und Strahlen, welche an Stelle der Strahlenfläche (FRESNEL'schen Wellenfläche) die Indexfläche benutzt. Diese Construction gewährt eine grössere Anschaulichkeit als die übliche dadurch, dass sie die Richtungen der Wellennormalen durch die Schnittpunkte einer ebenen Curve mit einer Geraden bestimmt; mit Rücksicht auf diesen Vorzug soll der ursprünglich eingeschlagene Weg im Folgenden beibehalten werden.

Die Einleitung enthält eine Zusammenstellung der hier in Betracht kommenden Eigenschaften der Indexfläche. Daran schliesst sich die geometrische Ableitung der Gesetze, denen die Richtungen der Wellennormalen und Strahlen bei der

Totalreflexion an optisch zweiaxigen Krystallen unterworfen sind, und die Aufstellung der analytischen Ausdrücke für die Abhängigkeit, welche zwischen dem Grenzwinkel der totalen Reflexion, der Geschwindigkeit im einfach brechenden Mittel, den Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls und den zur krystallographischen Orientirung der Grenzebene und der Einfallsebene erforderlichen Winkel stattfindet. Zum Schluss werden die entsprechenden Relationen für optisch einaxige Krystalle als specielle Fälle aus den vorhergehenden entnommen.

§. 1.

Construction der gebrochenen und gespiegelten Wellenebenen und Strahlen mit Hülfe der Strahlenfläche.

Nach dem Princip von HUYGHENS werden die Richtungen der gebrochenen und gespiegelten Wellenebenen und Strahlen, die bei dem Durchgange ebener Wellen homogenen Lichtes durch eine von einem einfach brechenden Mittel umgebene planparallele Platte eines optisch zweiaxigen Krystalls erzeugt werden, in folgender Weise mit Hülfe der Strahlenfläche construirt¹.

Die Grenzebenen der Platte seien bezeichnet mit \mathcal{G} und \mathcal{G}' . Auf \mathcal{G} falle in der Einfallsebene \mathcal{E} aus dem einfach brechenden Mittel der Strahl $J'O$. Um den Einfallspunkt O als Mittelpunkt construire man die Strahlenfläche dieses Mittels, d. i. eine Kugel \mathcal{B} , deren Radius die Lichtgeschwindigkeit v repräsentirt, und die Strahlenfläche \mathcal{S} des Krystalls.

Bezeichnet man die Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls mit a , b , c ($a > b > c$), so lautet die auf die optischen Symmetrieachsen bezogene Gleichung der Fläche \mathcal{S} in Punktcoordinaten:

$$(1) \quad [a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2] [x^2 + y^2 + z^2] - [a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2] + a^2b^2c^2 = 0$$

und in Ebenencoordinaten²:

¹ Vgl. J. MAC CULLAGH: Geometrical Propositions applied to the Wave Theory of Light. Trans. Roy. Irish Acad. 1833, 17, 251. — Coll. Works, 1880, 34.

² Vgl. PLÜCKER: Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. Journ. für Mathem. 1839, 19, 13.

$$(2) \quad [b^2 c^2 A^2 + c^2 a^2 B^2 + a^2 b^2 C^2] [A^2 + B^2 + C^2] \\ - [(b^2 + c^2) A^2 + (c^2 + a^2) B^2 + (a^2 + b^2) C^2] + 1 = 0$$

Die Strahlenfläche \mathfrak{S} ist also von der vierten Ordnung und der vierten Klasse. Wir nehmen an, dass a , b , c grösser als v seien; dann liegt \mathfrak{S} vollständig ausserhalb der Kugel \mathfrak{B} .

Man lege nun durch den Schnittpunkt J des einfallenden Strahles mit dem jenseits \mathfrak{G} liegenden Theile der Kugel an diese Kugel die der einfallenden Wellenebene parallele Tangentialebene, welche die Grenzebene \mathfrak{G} in der auf der Einfallsebene senkrecht stehenden Geraden D schneidet. Durch diese Gerade lege man an die Kugel die in das einfach brechende Mittel fallende Tangentialebene DF , welche die Richtung der an \mathfrak{G} reflectirten Welle hat, und an die Fläche \mathfrak{S} die vier Tangentialebenen DR , DR' , DR_1 , DR_1' , von denen die beiden ersteren, im Krystall gelegenen die Richtungen der gebrochenen Wellenebenen bestimmen. Die Wellennormalen OR , OR' , OR_1 , OR_1' , deren Längen gleich den Geschwindigkeiten r , r' , r_1 , r_1' ($r > r'$, $r_1 > r_1'$) ihrer Wellen sind, und die Normale OF der an \mathfrak{G} reflectirten Welle liegen in der Einfallsebene. Dagegen fallen die Berührungspunkte S , S' , S_1 , S_1' jener Tangentialebenen mit der Strahlenfläche und demnach auch die zu jenen Wellen gehörigen Strahlen selbst, deren Richtungen und Geschwindigkeiten \mathfrak{s} , \mathfrak{s}' , \mathfrak{s}_1 , \mathfrak{s}_1' ($\mathfrak{s} > \mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}_1 > \mathfrak{s}_1'$) durch die Radien OS , OS' , OS_1 , OS_1' repräsentirt werden, im Allgemeinen nicht in die Einfallsebene. Wir bezeichnen den Einfallswinkel mit i , den Reflexionswinkel mit f und die Neigungswinkel der Wellenebenen DR , DR' , DR_1 , DR_1' gegen die Grenzebene mit r , r' , r_1 , r_1' , wobei die an D auf der Seite des einfallenden Lichtes gelegenen Winkel negative Vorzeichen erhalten sollen. Aus der Construction ergibt sich, dass $i = f$ und der Abstand der Geraden D vom Einfallspunkte:

$$(3) \quad = \frac{v}{\sin i} = \frac{r}{\sin r} = \frac{r'}{\sin r'} = \frac{r_1}{\sin r_1} = \frac{r_1'}{\sin r_1'}$$

Nimmt der Einfallswinkel i in der Ebene \mathfrak{G} alle möglichen Werthe an, so umhüllen die Wellenebenen DR , DR' , DR_1 , DR_1' den der Strahlenfläche \mathfrak{S} umschriebenen Cylinder vierter Klasse \mathfrak{C} , dessen Erzeugende der Normale der Einfallsebene parallel laufen, und die Schnittgeraden jener Wellen-

ebenen mit der Einfallsebene umhüllen die Curve vierter Klasse \mathfrak{C}' , welche der Normalschnitt jenes Cylinders ist. Diese Curve kommt für die Construction der gebrochenen und der im Inneren der Platte gespiegelten Wellenebenen allein in Betracht.

Die beiden gebrochenen Strahlen OS , OS' treffen die Grenzebene \mathfrak{G}' in den Punkten O_1 , O_1' , wo jeder von ihnen in zwei gespiegelte Strahlen und einen austretenden Strahl zerlegt wird. Die durch O_1 gehende, dem Strahle OS zugehörige, also zu OR parallele Wellennormale liegt in einer der Einfallsebene \mathfrak{E} parallelen Ebene \mathfrak{E}_1 , in der wir nun, da die Fläche \mathfrak{S} in ihrem Mittelpunkte ein Centrum der Symmetrie besitzt, zur Construction der gespiegelten und der gebrochenen Wellennormalen eine Figur erhalten, die der Constructionsfigur in der Ebene \mathfrak{E} congruent ist. Verlängert man den Strahl OS über O_1 bis zum Schnittpunkt T mit dem äusseren Mantel der um O_1 als Mittelpunkt beschriebenen Strahlenfläche \mathfrak{S}_1 des Krystalls, so schneidet die in T an \mathfrak{S}_1 gelegte Tangentialebene die Grenzebene \mathfrak{G}' in der auf \mathfrak{E}_1 senkrecht stehenden Geraden D_1 derart, dass $O_1D_1 = OD$ ist. Die durch D_1 an die Fläche \mathfrak{S}_1 und die um O_1 als Mittelpunkt beschriebene Kugel \mathfrak{R}_1 gelegten Tangentialebenen sind den durch die Gerade D gehenden Wellenebenen parallel. Insbesondere sind die beiden in den Krystall fallenden Tangentialebenen, welche die Richtungen der im Inneren der Platte an \mathfrak{G}' reflectirten Wellenebenen haben, parallel zu DR_1 und DR_1' . Die Wellenebene D_1J_1 des austretenden Strahles ist parallel zu der Wellenebene des einfallenden Strahles $J'O$.

Dieselbe Construction ist in der durch O_1' parallel zu \mathfrak{E} laufenden Ebene \mathfrak{E}_1' auszuführen.

Daraus ist ersichtlich, dass die beiden Paare der aus der Zerlegung von OS und OS' an der Grenzebene \mathfrak{G}' hervorgehenden gespiegelten Strahlen parallel jenen Radien OS_1 , OS_1' der Strahlenfläche \mathfrak{S} laufen, die nach den Berührungspunkten der beiden durch die Gerade D gehenden und in das einfach brechende Mittel fallenden Tangentialebenen DR_1 , DR_1' gezogen sind.

Da die Strahlenfläche centrisch symmetrisch ist, so kann dieser Zusammenhang zwischen den in Rede stehenden Strahlen-

richtungen auch so ausgesprochen werden¹: Die Richtungen der durch Spiegelung von OS oder OS' an der zweiten Grenzebene \mathcal{G}' erzeugten Strahlen sind parallel den Richtungen jener beiden Strahlen, welche aus der Brechung eines in der Richtung des reflectirten Strahles OF auf die erste Grenzebene \mathcal{G} einfallenden Strahles entstehen würden.

Jeder der vier an \mathcal{G}' reflectirten Strahlen wird an der Grenzebene \mathcal{G} von neuem in ein Strahlenpaar zerlegt, welches dem Paare OS, OS' parallel ist, u. s. f. Die durch \mathcal{G} in das einfach brechende Mittel austretenden Strahlen sind dem im Einfallspunkte O reflectirten, die durch \mathcal{G}' austretenden Strahlen dem in jenem Punkte einfallenden Strahle parallel.

§. 2.

Die Indexfläche.

Die in §. 1 beschriebene Construction der gebrochenen und gespiegelten Wellenebenen und der zugehörigen Strahlen kann, wie W. HAMILTON und J. MAC CULLAGH unabhängig von einander gefunden haben, auch in der Weise ausgeführt werden, dass die Kugel \mathfrak{B} und die Strahlenfläche \mathfrak{S} durch ihre Reciprokflächen in Bezug auf eine concentrische Kugel, deren Radius gleich der Längeneinheit ist, ersetzt werden².

Wir bezeichnen die reciproken Werthe der Lichtgeschwindigkeiten v, a, b, c mit $\nu, \alpha, \beta, \gamma$:

$$\frac{1}{v} = \nu, \frac{1}{a} = \alpha, \frac{1}{b} = \beta, \frac{1}{c} = \gamma$$

Die Reciprokfläche von \mathfrak{B} ist eine Kugel mit dem Radius ν , jene der Strahlenfläche \mathfrak{S} , wie \mathfrak{S} selbst, eine Fläche vierter Ordnung und vierter Klasse \mathfrak{S} , deren Gleichung in Punktcoordinaten sofort aus (2) zu entnehmen ist³:

$$(4) \quad [b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2 + a^2 b^2 z^2] [x^2 + y^2 + z^2] - [(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2] + 1 = 0$$

¹ Vgl. J. MAC CULLAGH: On the Laws of Crystalline Reflexion and Refraction. Trans. Roy. Irish Acad. 1837, 18, 65. — Coll. Works, 1880, 126, Anm. †.

² Vgl. W. HAMILTON: Essay on the Theory of Systems of Rays. III. Suppl. Trans. Roy. Irish Acad. 1833, 17, 144. — J. MAC CULLAGH: Geometrical Propositions etc. ibid. 17, 252. — Coll. Works 36.

³ Vgl. PLÜCKER, a. a. O. 40.

Wie sich aus dieser Beziehung der Fläche \mathfrak{S} zur Strahlenfläche ergibt, werden die Richtungen und Geschwindigkeiten der Strahlen dargestellt durch die Radien der Strahlenfläche und die reciproken Werthe der vom Mittelpunkte auf die Tangentialebenen der Fläche \mathfrak{S} gefällten Senkrechten; die Richtungen und Geschwindigkeiten der Wellennormalen werden repräsentirt durch die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen der Strahlenfläche gefällten Senkrechten und die reciproken Werthe der Radien der Fläche \mathfrak{S} . Folglich besteht zwischen der Fläche \mathfrak{S} und der Wellenfläche \mathfrak{W} , deren Radien die Geschwindigkeiten der Wellenebenen darstellen, die Beziehung, dass \mathfrak{S} die inverse Fläche von \mathfrak{W} ist, d. h. aus \mathfrak{W} durch Transformation mittelst reciproker Radien hervorgeht.

Bedeutend u, v, w die auf die optischen Symmetrieachsen bezogenen Richtungscosinusse der Normale einer ebenen Welle, q die Geschwindigkeit dieser Welle, so ist die Gleichung der Wellenfläche in Polarcoordinaten:

$$(5) \quad \frac{u^2}{a^2 - q^2} + \frac{v^2}{b^2 - q^2} + \frac{w^2}{c^2 - q^2} = 0$$

Aus ihr erhalten wir die Gleichung der Fläche \mathfrak{S} in Polarcoordinaten, indem wir den Radius q durch den Werth des in dieselbe Richtung fallenden Radius $\sigma = \frac{1}{q}$ der Fläche \mathfrak{S} ausdrücken:

$$(6) \quad \frac{u^2}{a^2\sigma^2 - 1} + \frac{v^2}{b^2\sigma^2 - 1} + \frac{w^2}{c^2\sigma^2 - 1} = 0$$

Die Fläche \mathfrak{S} wurde von HAMILTON „*surface of wave slowness*“ Wellenträgheitsfläche, von MAC CULLAGH „*surface of indices*“ oder „*index surface*“ genannt¹.

Aus dem geometrischen Zusammenhange zwischen Index-

¹ Von HAMILTON wurde sie auch „*surface of components of normal slowness or simply surface of components*“ genannt (a. a. O. 142), während MAC CULLAGH ursprünglich die Bezeichnung „*surface of refraction*“ gewählt hatte (a. a. O. 17, 252. — Coll. Works 36, 96, 163). Der Entdecker dieser Fläche ist CAUCHY, dem auch ein Theil ihrer Beziehungen zur Strahlenfläche bekannt war (Exerc. de math., V. Paris 1830; Applic. des form. qui représ. le movem. d'un syst. de molec. sollicit. par des forces d'attract. ou de répuls. mut. à la théorie de la lumière, p. 36, 2. Théorème).

fläche und Wellenfläche ergibt sich, dass die erstere aus demselben Ellipsoid:

$$(E) \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

abgeleitet werden kann, welches zur Construction der letzteren dient: man erhält die Indexfläche, indem man auf den im Mittelpunkte errichteten Normalen der Centralschnitte dieses Ellipsoids nach beiden Seiten hin Längen gleich den Halbachsen der Schnittellipse abträgt. Dem inneren Mantel der Wellenfläche entspricht also der äussere Mantel der Indexfläche und umgekehrt; die optischen Axen sind für beide Flächen singuläre Radien. Jede der drei Symmetrieebenen schneidet die Indexfläche in einem Kreise und einer Ellipse:

$$YZ\text{-Ebene: } y^2 + z^2 = \frac{1}{a^2}, \quad c^2 y^2 + b^2 z^2 = 1$$

$$ZX\text{-Ebene: } z^2 + x^2 = \frac{1}{b^2}, \quad a^2 z^2 + c^2 x^2 = 1$$

$$XY\text{-Ebene: } x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}, \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = 1$$

In der YZ -Ebene umgibt die Ellipse den Kreis; in der XY -Ebene wird die Ellipse vom Kreise umschlossen; in der ZX -Ebene schneiden sich Kreis und Ellipse, die Radien nach den Schnittpunkten sind die optischen Axen.

§. 3.

Construction der gebrochenen und gespiegelten Wellenebenen und Strahlen mit Hülfe der Indexfläche.

Wir übertragen jetzt die in §. 1 angegebene Construction auf die Indexfläche und berücksichtigen dabei, dass unserer Voraussetzung gemäss $1 > a > b > c > v$ ist. Es entspricht der Kugel mit dem Radius v die Kugel mit dem Radius ν ; dem Cylinder \mathcal{C} die Schnittcurve Γ von Einfallsebene und Indexfläche; der in der Grenzebene gelegenen und auf der Einfallsebene senkrecht stehenden Geraden D die in der Einfallsebene gelegene und auf der Grenzebene senkrecht stehende Gerade \mathcal{A} , deren Entfernung vom Einfallspunkte gleich dem reciproken Werth der Entfernung der Geraden D von diesem Punkte ist. Ferner entsprechen den durch D an die Strahlenfläche \mathcal{S} gelegten Tangentialebenen die Schnittpunkte der

Geraden \mathcal{A} mit der Curve Γ in der Einfallsebene, die mit P, P', P_1, P_1' bezeichnet werden mögen, und den Berührungspunkten jener Ebenen mit der Fläche \mathfrak{S} die in P, P', P_1, P_1' an die Indexfläche gelegten Tangentialebenen. Die Verlängerungen der Wellennormalen OR, OR', OR_1, OR_1' treffen die Indexfläche in den Punkten P, P', P_1, P_1' , und es ist:

$$OP = \frac{1}{r}, \quad OP' = \frac{1}{r'}, \quad OP_1 = \frac{1}{r_1}, \quad OP_1' = \frac{1}{r_1'},$$

$$OP < OP', \quad OP_1 < OP_1'.$$

Die Verlängerungen der Strahlen OS, OS', OS_1, OS_1' stehen senkrecht auf den in P, P', P_1, P_1' an die Indexfläche gelegten Tangentialebenen und die Abstände dieser Ebenen vom Einfallspunkte sind:

$$\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s'}, \quad \frac{1}{s_1}, \quad \frac{1}{s_1'}.$$

Die Construction ist nun in folgender Weise auszuführen. Man verlängere die einfallende Wellennormale $J'O$ über den Einfallspunkt bis zum Schnittpunkt N mit der Indexfläche des einfach brechenden Mittels (der Kugel mit dem Radius ν). Durch N lege man eine Parallele \mathcal{A} zur Normale der Grenzebene, welche jene Kugel in dem Punkte Φ und die Indexfläche \mathfrak{S} des Krystalls in den Punkten P, P', P_1, P_1' schneidet. Die Gerade $O\Phi$ hat die Richtung der Normale der an der Grenzebene \mathfrak{G} gespiegelten Wellenebene; die Geraden OP, OP' liefern die Richtungen der Normalen der gebrochenen Wellenebenen; die Geraden OP_1, OP_1' sind parallel den Normalen der im Innern der Platte an der Grenzebene \mathfrak{G}' reflectirten Wellenebenen. Die zugehörigen Strahlen sind gerichtet wie die Normalen der in P, P', P_1, P_1' an die Indexfläche \mathfrak{S} gelegten Tangentialebenen¹.

§. 4.

Die Brechungswinkel der Wellennormalen.

Die Richtungen der Wellennormalen OP, OP', OP_1, OP_1' sind in der Einfallsebene bestimmt, wenn die Winkel r, r' ,

¹ Ein specieller Fall dieser Construction ist die von E. REUSCH angegebene und später mehrfach benutzte Construction für zwei einfach brechende Mittel (POGG. Ann. 1862, 117, 241). Vgl. R. RADAU: POGG. Ann. 1863, 118, 452. E. LOMMEL: Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1875, 20, 213. P. ZECH: Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1879, 24, 172.

r_1, r_1' bekannt sind, die sie mit der Normale der Grenzebene einschliessen. Es soll jetzt die Gleichung aufgestellt werden, deren Wurzeln die trigonométrischen Tangenten dieser Winkel sind.

Als gegebene Grössen sind anzusehen: 1^o die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v des einfallenden homogenen Lichtes; 2^o die Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c des Krystalles für die Wellenlänge des einfallenden Lichtes; 3^o die krystallographische Orientirung der optischen Symmetriemaxen X, Y, Z ; 4^o die Grössen, welche die Lage der Grenzebene und der Einfallsebene gegen diese Axen bestimmen; 5^o der Einfallswinkel i .

Wir legen durch den Einfallspunkt ein zweites rechtwinkliges Axensystem $X'Y'Z'$. Die Z' -Axe sei senkrecht zur Grenzebene, die Y' -Axe senkrecht zur Einfallsebene. Die positive Richtung von Z' gehe in den Krystall hinein. Der positive $Z'X'$ -Quadrant enthalte die gebrochenen Wellennormalen OP, OP' . Die positive Y' -Axe wählen wir so, dass man von ihr auf die $Z'X'$ -Ebene herabsehend die positive Z' -Axe in dem der Bewegungsrichtung des Uhrzeigers entgegengesetzten Drehungssinne auf dem kürzesten Wege in die positive X' -Axe überführt. Dann ist nach 4^o das System der Richtungs cosinusse von X', Y', Z' in Bezug auf X, Y, Z als bekannt anzusehen:

	X		Z
X'	α	β	γ
	α_1	β_1	γ_1
Z'	α_2	β_2	γ_2

Bedeutend x, y, z die Coordinaten eines Punktes bezogen auf das erste Axensystem, x', y', z' die Coordinaten desselben Punktes in dem zweiten System, so ist:

$$(7) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z' \\ y = \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z' \\ z = \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z' \end{cases}$$

und es bestehen die Relationen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \text{ u. s. w.}$$

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \text{ u. s. w.}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0, \text{ u. s. w.}$$

$$\beta \gamma + \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 = 0, \text{ u. s. w.}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Die Gleichung der Einfallsebene ist $y' = 0$. Um nun die Gleichung der Schnittcurve T von Einfallsebene und Indexfläche, bezogen auf das zweite Axensystem, zu bilden, haben wir die Werthe (7) in die Gleichung (4) der Indexfläche einzutragen und dabei $y' = 0$ zu setzen. Wir erhalten zunächst:

$$\left\{ b^2 c^2 [\alpha x' + \alpha_2 z']^2 + c^2 a^2 [\beta x' + \beta_2 z']^2 + a^2 b^2 [\gamma x' + \gamma_2 z']^2 \right\} (x'^2 + z'^2) - \left\{ (b^2 + c^2) [\alpha x' + \alpha_2 z']^2 + (c^2 + a^2) [\beta x' + \beta_2 z']^2 + (a^2 + b^2) [\gamma x' + \gamma_2 z']^2 \right\} + 1 = 0$$

oder, wenn nach z' geordnet wird:

$$(8) \quad c_0 + 4c_1 z' + 6c_2 z'^2 + 4c_3 z'^3 + c_4 z'^4 = 0$$

worin:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = x'^4 [b^2 c^2 \alpha^2 + c^2 a^2 \beta^2 + a^2 b^2 \gamma^2] \\ \quad - x'^2 [(b^2 + c^2) \alpha^2 + (c^2 + a^2) \beta^2 + (a^2 + b^2) \gamma^2] + 1 \\ 4c_1 = 2x'^3 [b^2 c^2 \alpha \alpha_2 + c^2 a^2 \beta \beta_2 + a^2 b^2 \gamma \gamma_2] \\ \quad - 2x' [(b^2 + c^2) \alpha \alpha_2 + (c^2 + a^2) \beta \beta_2 + (a^2 + b^2) \gamma \gamma_2] \\ 6c_2 = x'^2 [b^2 c^2 (\alpha^2 + \alpha_2^2) + c^2 a^2 (\beta^2 + \beta_2^2) + a^2 b^2 (\gamma^2 + \gamma_2^2)] \\ \quad - [(b^2 + c^2) \alpha_2^2 + (c^2 + a^2) \beta_2^2 + (a^2 + b^2) \gamma_2^2] \\ 4c_3 = 2x' [b^2 c^2 \alpha \alpha_2 + c^2 a^2 \beta \beta_2 + a^2 b^2 \gamma \gamma_2] \\ c_4 = b^2 c^2 \alpha_2^2 + c^2 a^2 \beta_2^2 + a^2 b^2 \gamma_2^2 \end{array} \right.$$

gesetzt ist. Es seien x' , z' die Coordinaten eines der vier Schnittpunkte P , P' , P_1 , P_1' der Geraden \mathcal{A} mit der Curve T ; r bedeute den Winkel, den die zugehörige Wellennormale mit Z' , also auch mit \mathcal{A} einschliesst; nach den Festsetzungen in §. 1 ist r von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen und positiv zu rechnen in dem Sinne, in welchem die positive Z' -Axe durch eine positive Drehung um die Y' -Axe mit jener Wellennormale zur Deckung gebracht wird. Bezeichnet man den Schnittpunkt von \mathcal{A} und X' mit C , so ergibt sich aus den Dreiecken OCN und OCP :

$$(10) \quad x' = \frac{\sin i}{v}, \quad z' = \frac{\sin i}{v} \frac{1}{\tan r}$$

Setzt man diese Werthe in (8) ein, so erhält man die gesuchte Gleichung für $\tan r$:

$$(11) \quad f(r) = a_0 \tan^4 r + 4a_1 \tan^3 r + 6a_2 \tan^2 r + 4a_3 \tan r + a_4 = 0$$

worin:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\sin^4 i}{b^4} [b^2 c^2 \alpha^2 + c^2 a^2 \beta^2 + a^2 b^2 \gamma^2] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{b^2} [(b^2 + c^2) \alpha^2 + (c^2 + a^2) \beta^2 + (a^2 + b^2) \gamma^2] + 1 \\
 4a_1 &= 2 \frac{\sin^4 i}{b^4} [b^2 c^2 \alpha \alpha_2 + c^2 a^2 \beta \beta_2 + a^2 b^2 \gamma \gamma_2] \\
 &\quad - 2 \frac{\sin^2 i}{b^2} [(b^2 + c^2) \alpha \alpha_2 + (c^2 + a^2) \beta \beta_2 + (a^2 + b^2) \gamma \gamma_2] \\
 6a_2 &= \frac{\sin^4 i}{b^4} [b^2 c^2 (\alpha^2 + \alpha_2^2) + c^2 a^2 (\beta^2 + \beta_2^2) + a^2 b^2 (\gamma^2 + \gamma_2^2)] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{b^2} [(b^2 + c^2) \alpha_2^2 + (c^2 + a^2) \beta_2^2 + (a^2 + b^2) \gamma_2^2] \\
 4a_3 &= 2 \frac{\sin^4 i}{b^4} [b^2 c^2 \alpha \alpha_2 + c^2 a^2 \beta \beta_2 + a^2 b^2 \gamma \gamma_2] \\
 a_4 &= \frac{\sin^4 i}{b^4} [b^2 c^2 \alpha_2^2 + c^2 a^2 \beta_2^2 + a^2 b^2 \gamma_2^2]
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Diese Gleichung ist vom vierten Grade in $\tan r$ und vom zweiten Grade in $\sin^2 i$; zu jedem Werthe von $\sin i$ gehören vier Werthe von $\tan r$, aber für $\sin i$ und $-\sin i$ erhält man dieselben Werthe von $\tan r$, in Übereinstimmung damit, dass die Curve F im Einfallspunkt ein Centrum der Symmetrie besitzt; zu jedem Werthe von $\tan r$ gehören zwei Werthe von $\sin^2 i$, von denen der eine der schnelleren, der andere der langsameren der beiden Wellen entspricht, deren Normale in der Einfallsebene den Winkel r mit der Normale der Grenzebene einschliesst.

Die Gleichung $f(r) = 0$ kann im Allgemeinen nur durch Näherungsmethoden aufgelöst werden. Die besonderen Fälle, in denen die Auflösung leicht gelingt, sind durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichnet.

I. Wenn die Schnittcurve F von Indexfläche und Einfallsebene symmetrisch zur Grenzebene ist, so müssen die vier Wurzeln der Gleichung $f(r) = 0$ paarweise einander entgegengesetzt gleich sein:

$$\pm \tan r, \pm \tan r';$$

d. h. $f(r)$ ist vom zweiten Grade in $\tan^2 r$, also:

$$(13) \quad a_1 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn die Grenzebene eine optische Symmetrieebene oder ihre Schnittgerade mit der Einfallsebene eine optische Symmetrieaxe ist.

II. Wenn die Schnittcurve Γ in zwei Curven zweiter Ordnung zerfällt, so ist $f(r)$ ein Product aus zwei Factoren des zweiten Grades in $\tan r$:

$$(14) \quad f(r) = \varphi(r) \cdot \psi(r).$$

Dieser Fall tritt ein, wenn die Einfallsebene eine optische Symmetrieebene ist; alsdann muss die Grenzebene der auf dieser Symmetrieebene senkrecht stehenden Symmetrieaxe parallel gehen.

Da für krystallographische Anwendungen diese ausgezeichneten Lagen der Grenzebenen und Einfallsebenen, in denen die Bedingungen (13) und (14) einzeln oder gleichzeitig erfüllt sind, vorzugsweise in Betracht kommen, stellen wir die für sie geltenden Formeln übersichtlich zusammen.

1. Grenzebene ist die YZ-Ebene.

Bezeichnet man die Neigung der Einfallsebene $Z'X'$ zur Y-Axe mit δ , so haben X' und Z' folgende Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	0	$\cos \delta$	$\sin \delta$
Z'	1	0	0

Folglich ist:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(r) = a_0 \tan^4 r + 6a_2 \tan^2 r + a_4 = 0 \\ a_0 = \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} [b^2 \sin^2 \delta + c^2 \cos^2 \delta] - 1 \right) \\ 6a_2 = \frac{\sin^4 i}{v^4} (b^2 c^2 + a^2 [b^2 \sin^2 \delta + c^2 \cos^2 \delta]) - \frac{\sin^2 i}{v^2} (b^2 + c^2) \\ a_4 = \frac{\sin^4 i}{v^4} b^2 c^2 \end{array} \right.$$

Ist $\delta = 0$, so geht die Einfallsebene der XY-Ebene parallel. Die Curve Γ besteht aus dem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{c}$ und der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = 1$. Alsdann ist:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(r) = \varphi(r) \cdot \psi(r) = 0 \\ \varphi(r) = \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 \\ \psi(r) = \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 \end{array} \right.$$

Ist $\delta = \frac{\pi}{2}$, so geht die Einfallsebene der ZX-Ebene parallel. Die Curve Γ besteht aus dem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{b}$ und der Ellipse $a^2 z^2 + c^2 x^2 = 1$. Alsdann ist:

$$(17) \quad \left. \begin{aligned} f(r) &= \varphi(r) \cdot \psi(r) = 0 \\ \varphi(r) &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 \\ \psi(r) &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 \end{aligned} \right\}$$

2. Grenzebene ist die ZX-Ebene.

Bezeichnet man die Neigung der Einfallsebene $Z'X'$ zur Z-Axe mit δ , so haben X' und Z' folgende Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	$\sin \delta$	0	$\cos \delta$
Z'	0	1	0

Folglich ist:

$$(18) \quad \left. \begin{aligned} f(r) &= a_0 \tan^4 r + 6a_2 \tan^2 r + a_4 = 0 \\ a_0 &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right) \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} [c^2 \sin^2 \delta + a^2 \cos^2 \delta] - 1 \right) \\ 6a_2 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} (c^2 a^2 + b^2 [c^2 \sin^2 \delta + a^2 \cos^2 \delta]) - \frac{\sin^2 i}{v^2} (c^2 + a^2) \\ a_4 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} c^2 a^2 \end{aligned} \right\}$$

Ist $\delta = 0$, so geht die Einfallsebene der YZ-Ebene parallel. Die Curve T besteht aus dem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{a}$ und der Ellipse $c^2 y^2 + b^2 z^2 = 1$, und es ist:

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} f(r) &= \varphi(r) \cdot \psi(r) = 0 \\ \varphi(r) &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 \\ \psi(r) &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 \end{aligned} \right\}$$

Geht die Einfallsebene einer der beiden optischen Axen parallel, so ist $\delta = \pm V$, wenn mit $2V$ der von der Z-Axe halbirte Winkel der optischen Axen bezeichnet wird, und es besteht die Relation:

$$c^2 \sin^2 V + a^2 \cos^2 V = b^2$$

Folglich ist:

$$(20) \quad \left. \begin{aligned} a_0 &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right)^2 \\ 6a_2 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} (c^2 a^2 + b^4) - \frac{\sin^2 i}{v^2} (c^2 + a^2) \\ a_4 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} c^2 a^2 \end{aligned} \right\}$$

Ist $\delta = \frac{\pi}{2}$, so geht die Einfallsebene der XY-Ebene parallel; wir erhalten die Factoren von:

$$f(r) = \varphi(r) \cdot \psi(r) = 0$$

aus (16) durch Vertauschung von a und b.

3. Grenzebene ist die XY-Ebene.

Bezeichnet man die Neigung der Einfallsebene $Z'X'$ zur X-Axe mit δ , so haben X' und Z' folgende Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	$\cos \delta$	$\sin \delta$	0
Z'	0	0	1

Folglich ist:

$$f(r) = a_0 \tan^4 r + 6a_2 \tan^2 r + a_4 = 0$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 - 1 \right) \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} [a^2 \sin^2 \delta + b^2 \cos^2 \delta] - 1 \right) \\ 6a_2 = \frac{\sin^4 i}{v^4} (a^2 b^2 + c^2 [a^2 \sin^2 \delta + b^2 \cos^2 \delta]) - \frac{\sin^2 i}{v^2} (a^2 + b^2) \\ a_4 = \frac{\sin^4 i}{v^4} a^2 b^2 \end{array} \right.$$

Ist $\delta = 0$, so geht die Einfallsebene der YZ-Ebene parallel; die Factoren $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ von $f(r)$ ergeben sich aus (19) durch Vertauschung von b und c.

Ist $\delta = \frac{\pi}{2}$, so geht die Einfallsebene der ZX-Ebene parallel und die Factoren $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ ergeben sich aus (17) durch Vertauschung von c und a.

4. Die Grenzebene ist parallel zur X-Axe.

Bezeichnet man die Neigung der Normale Z' der Grenzebene gegen die Y-Axe mit μ und die Neigung der Einfallsebene gegen die YZ-Ebene mit δ , so haben Z' und X' die Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	$\sin \delta$	$\sin \mu \cos \delta$	$\cos \mu \cos \delta$
Z'	0	$\cos \mu$	$-\sin \mu$

Folglich ist:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} [b^2 c^2 \sin^2 \delta + c^2 a^2 \sin^2 \mu \cos^2 \delta + a^2 b^2 \cos^2 \mu \cos^2 \delta] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} [(b^2 + c^2) \sin^2 \delta + (c^2 + a^2) \sin^2 \mu \cos^2 \delta + (a^2 + b^2) \cos^2 \mu \cos^2 \delta] + 1 \\
 4 a_1 &= 2 \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \frac{\sin^2 i}{v^2} (c^2 - b^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta \\
 (22) \quad 6 a_2 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} [b^2 c^2 \sin^2 \delta + c^2 a^2 (1 - \sin^2 \mu \sin^2 \delta) + a^2 b^2 (1 - \cos^2 \mu \sin^2 \delta)] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} [a^2 + b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu] \\
 4 a_3 &= 2 \frac{\sin^4 i}{v^4} a^2 (c^2 - b^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta \\
 a_4 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} a^2 (b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu)
 \end{aligned}$$

Ist $\delta = 0$, so geht die Einfallsebene der YZ-Ebene parallel und ihre Schnittcurve mit der Indexfläche zerfällt in den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{a}$ und die Ellipse mit den Halbachsen $\frac{1}{c}$ und $\frac{1}{b}$ in den Richtungen der Y- und Z-Axe. Demnach ist:

$$\begin{aligned}
 f(r) &= \varphi(r) \cdot \psi(r) = 0 \\
 (23) \quad \varphi(r) &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 \\
 \psi(r) &= A_0 \tan^2 r + 2 A_1 \tan r + A_2
 \end{aligned}$$

worin:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{\sin^2 i}{v^2} (c^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu) - 1 \\
 A_1 &= \frac{\sin^2 i}{v^2} (c^2 - b^2) \sin \mu \cos \mu \\
 A_2 &= \frac{\sin^2 i}{v^2} (c^2 \cos^2 \mu + b^2 \sin^2 \mu)
 \end{aligned}$$

gesetzt ist. Für den Werth $\delta = \frac{\pi}{2}$ geht die Einfallsebene durch die X-Axe und ihre Schnittcurve mit der Indexfläche ist symmetrisch zu dieser Axe; demnach ist:

$$\begin{aligned}
 f(r) &= a_0 \tan^4 r + 6 a_2 \tan^2 r + a_4 = 0 \\
 (24) \quad a_0 &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right) \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 - 1 \right) \\
 6 a_2 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} (b^2 c^2 + c^2 a^2 \cos^2 \mu + a^2 b^2 \sin^2 \mu) \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} (a^2 + b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu) \\
 a_4 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} a^2 (b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu)
 \end{aligned}$$

5. Die Grenzebene ist parallel zur Y-Axe.

Bezeichnet man die Neigung der Normale der Grenzebene gegen die Z-Axe mit μ und die Neigung der Einfallsebene gegen die ZX-Ebene mit δ , so haben Z' und X' die Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	$\cos \mu \cos \delta$	$\sin \delta$	$\sin \mu \cos \delta$
Z'	$-\sin \mu$	0	$\cos \mu$

Folglich ist:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} [b^2 c^2 \cos^2 \mu \cos^2 \delta + c^2 a^2 \sin^2 \delta + a^2 b^2 \sin^2 \mu \cos^2 \delta] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} [(b^2 + c^2) \cos^2 \mu \cos^2 \delta + (c^2 + a^2) \sin^2 \delta + (a^2 + b^2) \sin^2 \mu \cos^2 \delta] + 1 \\
 4 a_1 &= 2 \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right) \frac{\sin^2 i}{v^2} (a^2 - c^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta \\
 (25) \quad 6 a_2 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} [b^2 c^2 (1 - \cos^2 \mu \sin^2 \delta) + c^2 a^2 \sin^2 \delta + a^2 b^2 (1 - \sin^2 \mu \sin^2 \delta)] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} [b^2 + c^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu] \\
 4 a_3 &= 2 \frac{\sin^4 i}{v^4} b^2 (a^2 - c^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta \\
 a_4 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} b^2 (c^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu)
 \end{aligned}$$

Ist $\delta = 0$, so geht die Einfallsebene der ZX-Ebene parallel und ihre Schnittcurve mit der Indexfläche zerfällt in den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{b}$ und die Ellipse mit den Halbachsen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$ in den Richtungen der Z- und X-Axe. Demnach ist:

$$\begin{aligned}
 f(r) &= \varphi(r) \cdot \psi(r) = 0 \\
 (26) \quad \varphi(r) &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 \\
 \psi(r) &= B_0 \tan^2 r + 2B_1 \tan r + B_2
 \end{aligned}$$

worin:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{\sin^2 i}{v^2} (a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu) - 1 \\
 B_1 &= \frac{\sin^2 i}{v^2} (a^2 - c^2) \sin \mu \cos \mu \\
 B_2 &= \frac{\sin^2 i}{v^2} (a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu)
 \end{aligned}$$

gesetzt ist. Für den Werth $\delta = \frac{\pi}{2}$ geht die Einfallsebene durch die Y-Axe und ihre Schnittcurve mit der Indexfläche ist symmetrisch zu dieser Axe; man erhält:

$$\begin{aligned}
 f(r) &= a_0 \tan^4 r + 6a_2 \tan^2 r + a_4 = 0 \\
 a_0 &= \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 - 1 \right) \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \\
 6a_2 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} (b^2 c^2 \sin^2 \mu + c^2 a^2 + a^2 b^2 \cos^2 \mu) \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} (b^2 + c^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu) \\
 a_4 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} b^2 (c^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

6. Die Grenzebene ist parallel zur Z-Axe.

Bezeichnet man $(Z'X) = \mu$ und die Neigung der Einfallsebene gegen die XY-Ebene mit δ , so erhalten die Richtungscosinusse von Z' und X' folgende Werthe:

	X	Y	Z
X'	$\sin \mu \cos \delta$	$\cos \mu \cos \delta$	$\sin \delta$
Z'	$\cos \mu$	$-\sin \mu$	0

Folglich ist:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} [b^2 c^2 \sin^2 \mu \cos^2 \delta + c^2 a^2 \cos^2 \mu \cos^2 \delta + a^2 b^2 \sin^2 \delta] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} [(b^2 + c^2) \sin^2 \mu \cos^2 \delta + (c^2 + a^2) \cos^2 \mu \cos^2 \delta + (a^2 + b^2) \sin^2 \delta] + 1 \\
 4a_1 &= 2 \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 - 1 \right) \frac{\sin^2 i}{v^2} (b^2 - a^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta \\
 6a_2 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} [b^2 c^2 (1 - \sin^2 \mu \sin^2 \delta) + c^2 a^2 (1 - \cos^2 \mu \sin^2 \delta) + a^2 b^2 \sin^2 \delta] \\
 &\quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} [c^2 + a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu] \\
 4a_3 &= 2 \frac{\sin^4 i}{v^4} c^2 (b^2 - a^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta \\
 a_4 &= \frac{\sin^4 i}{v^4} c^2 (a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu)
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Für $\delta = 0$ geht die Einfallsebene der XY-Ebene parallel und ihre Schnittcurve mit der Indexfläche besteht aus dem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{c}$ und der Ellipse mit den Halbachsen $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{a}$ in den Richtungen der X- und Y-Axe. Folglich ist:

$$f(r) = \varphi(r) \cdot \psi(r) = 0$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(r) = \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 - 1 \right) \tan^2 r + \frac{\sin^2 i}{v^2} c^2 \\ \psi(r) = C_0 \tan^2 r + 2C_1 \tan r + C_2 \end{array} \right.$$

worin:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \frac{\sin^2 i}{v^2} (b^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu) - 1 \\ C_1 = \frac{\sin^2 i}{v^2} (b^2 - a^2) \sin \mu \cos \mu \\ C_2 = \frac{\sin^2 i}{v^2} (b^2 \cos^2 \mu + a^2 \sin^2 \mu) \end{array} \right.$$

gesetzt ist. Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ geht die Einfallsebene durch die Z-Axe und ihre Schnittgerade mit der Indexfläche ist symmetrisch zu dieser Axe. Demnach ist:

$$f(r) = a_0 \tan^4 r + 6a_2 \tan^2 r + a_4 = 0$$

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} a^2 - 1 \right) \left(\frac{\sin^2 i}{v^2} b^2 - 1 \right) \\ 6a_2 = \frac{\sin^4 i}{v^4} (b^2 c^2 \cos^2 \mu + c^2 a^2 \sin^2 \mu + a^2 b^2) \\ \quad - \frac{\sin^2 i}{v^2} (c^2 + a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu) \\ a_4 = \frac{\sin^4 i}{v^4} c^2 (a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu) \end{array} \right.$$

§. 5.

Die Totalreflexion an optisch zweiaxigen Krystallen.

Wächst der Einfallswinkel i von Null an, so liefert die Gerade \mathcal{A} zunächst vier reelle Schnittpunkte P, F, P_1, P_1' auf der aus zwei reellen Zweigen bestehenden Curve Γ . Für einen bestimmten Werth i_0 jenes Winkels fallen P und P_1 zusammen, d. h. \mathcal{A} berührt den inneren Zweig der Curve; von hier an werden die Schnittpunkte von \mathcal{A} mit dem inneren Zweige imaginär. Für einen grösseren Werth i_0' fallen P' und P_1' zusammen, so dass \mathcal{A} den äusseren Zweig von Γ berührt, und für noch grössere Werthe des Einfallswinkels sind alle Schnittpunkte der Geraden \mathcal{A} mit der Curve Γ imaginär.

Die Winkel i_0 und i_0' sind die Grenzwinkel der totalen Reflexion für die Grenzebene \mathcal{G} und die Einfalls-

ebene \mathfrak{E} ; i_0 ist der Grenzwinkel der schnelleren, i_0' jener der langsameren Welle ($i_0 < i_0'$). Diese Grenzwinkel sind also dadurch charakterisirt, dass für sie die beiden schnelleren oder die beiden langsameren der vier aus der Zerlegung der einfallenden Welle hervorgehenden Wellen DR, DR', DR_1, DR_1' ($OR > OR', OR_1 > OR_1'$) und demnach auch die zugehörigen Strahlen zusammenfallen.

Die Berührungspunkte der Geraden \mathcal{A} mit dem inneren und dem äusseren Zweige der Curve \mathcal{I} mögen bezeichnet werden mit P_0 und P_0' . Die in diesen Punkten an die Indexfläche gelegten Tangentialebenen stehen auf der Grenzebene senkrecht. Daraus folgt, dass der einem Grenzwinkel der totalen Reflexion i_0 oder i_0' entsprechende gebrochene Strahl OS_0 oder OS_0' in der Grenzebene liegt; dagegen fällt die zugehörige Wellennormale OP_0 oder OP_0' , welche stets der Einfallsebene angehört, im Allgemeinen nicht in die Grenzebene. Der Winkel, den einer der beiden Strahlen OS_0 oder OS_0' mit der Einfallsebene bildet, soll das Azimut dieses Strahles genannt werden.

Wie aus dieser Construction hervorgeht, sind die Berührungspunkte P_0, P_0' und die beiden diametral gegenüberliegenden Punkte \bar{P}_0, \bar{P}_0' die vier reellen Schnittpunkte der centrisch symmetrischen Curve vierter Ordnung \mathcal{I} mit der ersten Polare des auf dem Einfallslot unendlich fern liegenden Punktes in Bezug auf \mathcal{I} . Diese Polare ist eine Curve dritter Ordnung, welche durch das Centrum von \mathcal{I} hindurchgeht und noch acht imaginäre Schnittpunkte mit \mathcal{I} besitzt. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

In jeder Einfallsebene erhält man die den beiden Grenzwinkeln der totalen Reflexion entsprechenden Wellennormalen, indem man das Centrum der Schnittcurve \mathcal{I} von Einfallsebene und Indexfläche mit den Schnittpunkten dieser Curve und der in Bezug auf sie genommenen ersten Polare des auf dem Einfallslot gelegenen unendlich fernem Punktes verbindet.

Nimmt auf derselben Grenzebene die Einfallsebene alle möglichen Lagen an, so erfüllen die den Grenzwinkeln der totalen Reflexion entsprechenden Wellennormalen den Kegel,

der gebildet wird von den Verbindungsgeraden des Centrums der Indexfläche mit den Punkten der Curve, in der die Indexfläche von dem zur Normale der Grenzebene parallelen Tangencylinder berührt wird. In dieser Curve wird die Indexfläche von der in Bezug auf sie genommenen ersten Polarfläche des auf der Normale der Grenzebene unendlich fern liegenden Punktes geschnitten.

In den Grenzfällen, wo die Gerade \mathcal{A} die Curve \mathcal{I} berührt, besitzt die Gleichung (11) zwei reelle einander gleiche Wurzeln. Die beiden Grenzwinkel i_0 und i_0' der totalen Reflexion für die Grenzebene \mathcal{G} und die Einfallsebene \mathcal{E} sind also dadurch charakterisirt, dass für sie die Discriminante \mathbf{D} der Gleichung $f(r) = 0$ verschwindet:

$$(31) \quad \mathbf{D} = \mathbf{I}^3 - 6\mathbf{J}^2 = 0$$

worin:

$$\mathbf{I} = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2 a_2)$$

$$\mathbf{J} = 6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Trägt man in \mathbf{D} die Werthe (12) ein, so ersieht man, dass sich der Factor $(\sin^2 i)^6$ heraushebt. Der übrig bleibende Factor giebt der Null gleich gesetzt eine Gleichung sechsten Grades zur Bestimmung von $\sin^2 i_0$, in Übereinstimmung damit, dass die Curve \mathcal{I} von der zwölften Klasse ist.

Die für den Beginn der totalen Reflexion geltende Bedingung (31) nimmt eine sehr einfache Gestalt in den durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichneten Fällen an, die auf S. 191 und 192 hervorgehoben wurden.

I. Die Curve \mathcal{I} ist symmetrisch zur Grenzebene.

Sollen die Wurzeln eines der beiden Paare $\pm \tan r$, $\pm \tan r'$ einander gleich sein, so muss:

$$(32) \quad \pm \tan r = \infty \text{ oder } \pm \tan r' = \infty$$

sein, denn der Werth Null entspricht der normalen Incidenz; d. h. ist die Grenzebene eine optische Symmetrieebene oder ihre Schnittgerade mit der Einfallsebene eine optische Symmetrieaxe, so liegen für

den Grenzwinkel der totalen Reflexion die gebrochenen Wellennormalen in der Grenzebene; sie fallen also mit der Schnittgeraden von Grenzebene und Einfallsebene zusammen. Da $f(r) = 0$ die Form hat:

$$(33) \quad a_0 \tan^4 r + 6a_2 \tan^2 r + a_4 = 0$$

so ist:

$$\tan^2 r = -\frac{3a_2}{a_0} \pm \sqrt{\frac{9a_2^2 - a_0 a_4}{a_0^2}}$$

Demnach sind in diesem Falle die beiden Grenzwinkel i_0, i_0' bestimmt durch die Bedingung:

$$(34) \quad a_0 = 0$$

Wenn die Grenzebene eine optische Symmetrieebene ist, so besteht, wie aus den Formeln (15), (18) und (21) hervorgeht, a_0 aus zwei, in Bezug auf $\frac{\sin^2 i_0}{v^2}$ linearen Factoren; man erhält also aus (34) zwei Werthe für diesen Quotienten.

Grenz-
ebene:

$$(35) \quad \begin{array}{l} YZ \quad \frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\sin^2 i_0'}{v^2} = \frac{1}{b^2 \sin^2 \delta + c^2 \cos^2 \delta} \\ ZY \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{b}, \quad \frac{\sin^2 i_0}{v^2} = \frac{1}{c^2 \sin^2 \delta + a^2 \cos^2 \delta}, \quad 0 < \delta < V \\ \frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{b}, \quad \frac{\sin^2 i_0'}{v^2} = \frac{1}{c^2 \sin^2 \delta + a^2 \cos^2 \delta}, \quad V < \delta < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ XY \quad \frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{c}, \quad \frac{\sin^2 i_0}{v^2} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \delta + b^2 \cos^2 \delta} \end{array}$$

Die beiden neben der Doppelwurzel (32) vorhandenen, einander entgegengesetzt gleichen Wurzeln der Gleichung (33) ergeben sich aus:

$$(36) \quad \tan^2 r = -\frac{a_4}{3a_2}$$

Trägt man auf der rechten Seite im Zähler und im Nenner successive die beiden, in (35) angegebenen Werthe von $\frac{\sin i_0}{v}$ ein, so findet man, dass diese Wurzeln für i_0 reell und für i_0' imaginär sind, ein mit der Construction übereinstimmendes Resultat.

Ist die Schnittgerade von Grenzebene und Einfallsebene eine optische Symmetrieaxe, so erhält man aus (34) für die:

$$\begin{array}{l}
 \text{Axe} \\
 \text{X} \quad \frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{b}, \quad \frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{c}, \\
 (37) \quad \text{Y} \quad \frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{c}, \\
 \text{Z} \quad \frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{b}.
 \end{array}$$

II. Die Curve r zerfällt in zwei Curven zweiter Ordnung.

Die Bedingungen für den Eintritt der totalen Reflexion bestehen in diesem Falle darin, dass die beiden aus (14) hervorgehenden Gleichungen des zweiten Grades:

$$\varphi(r) = 0, \quad \psi(r) = 0$$

je zwei reelle, einander gleiche Wurzeln besitzen. Man erhält aus (23), (26), (29) folgende Relationen:

Grenzebene parallel zur Axe:	Einfallsebene:	Gewöhnliche Welle:	Ungewöhnliche Welle:
X	, YZ	, $\frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{a}$, $A_0 A_2 - A_1^2 = 0$
Y	, ZX	, $\frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{b}$, $B_0 B_2 - B_1^2 = 0$
Z	, XY	, $\frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{c}$, $C_0 C_2 - C_1^2 = 0$

Für die den ungewöhnlichen Wellen entsprechenden Grenzwinkel ergeben sich aus den Gleichungen der letzten Reihe folgende Relationen:

$$\begin{array}{l}
 (38) \quad \frac{\sin^2 i_0}{v^2} = \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \cos^2 \mu = \frac{1}{\xi^2} \\
 \frac{\sin^2 i_0}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos^2 \mu = \frac{1}{\xi^2} \\
 \frac{\sin^2 i_0}{v^2} = \frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \cos^2 \mu = \frac{1}{\xi^2}
 \end{array}$$

Die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (38) sind die reciproken Werthe der Geschwindigkeiten ξ jener ungewöhnlichen Strahlen, die in den Ebenen YZ, ZX, XY unter dem Winkel μ gegen die Axen Z, X, Y geneigt sind. Daraus folgt, dass die Lage einer Grenzebene, welche einer optischen Symmetrieaxe parallel ist, in Bezug auf die beiden anderen Symmetrieachsen durch Messung der Grenzwinkel der totalen Reflexion in den beiden ausgezeichneten Einfallsebenen, von denen die eine jener Axe parallel geht, während die andere

senkrecht auf ihr steht, ermittelt werden kann. Aus den vier Grenzwinkeln findet man die Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten a , b , c und den Werth von ξ ; alsdann ergibt sich der Werth von μ aus (38). Setzt man:

$$\frac{1}{a} = \alpha, \quad \frac{1}{b} = \beta, \quad \frac{1}{c} = \gamma, \quad \frac{1}{\xi} = \sigma,$$

so erhält man folgende Tabelle:

Grenzebene parallel zur Axe:	μ bedeutet die Neigung der Grenzebene zur Axe:	
X	Z	$\cos^2 \mu = \frac{\sigma^2 - \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2}$
(39) Y	X	$\cos^2 \mu = \frac{\sigma^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}$
Z	Y	$\cos^2 \mu = \frac{\sigma^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$

Ist die Grenzebene zur Y-Axe parallel und gegen die Z-Axe unter dem halben positiven Winkel U der Strahlenaxen (secundären optischen Axen) geneigt ($U = \frac{\pi}{2} - \mu$), so liegt der besondere Fall vor, dass bei dem Eintritt der totalen Reflexion in der Einfallsebene ZX nur ein Strahl mit der Geschwindigkeit $\sigma = \frac{1}{b}$ in der Grenzebene vorhanden ist; zu diesem singulären Strahl gehören unendlich viele Wellennormalen im Krystall.

§. 6.

Die Totalreflexion an optisch einaxigen Krystallen.

Um nun die für optisch einaxige Krystalle bestehenden Relationen aus den vorhergehenden abzuleiten, setzen wir voraus, dass der Charakter der Doppelbrechung positiv, also $a = b$ sei. Dann fällt die optische Axe mit der Z-Axe zusammen und die Indexfläche zerfällt in eine Kugel mit dem Radius $\frac{1}{a}$ und ein Umdrehungsellipsoid mit den Halbachsen $\frac{1}{c}$ und $\frac{1}{a}$, von denen die letztere der Umdrehungsaxe Z angehört; die Gleichung der Fläche in Punktcoordinaten ergibt sich aus (4):

$$(40) \quad [a^2(x^2 + y^2 + z^2) - 1] [c^2(x^2 + y^2) + a^2z^2 - 1] = 0$$

Wir können die X-Axe in den Hauptschnitt ξ der Grenzebene \mathcal{G} , d. h. in die Ebene ZZ' legen. Bezeichnen wir die Neigung der Normale der Grenzebene gegen die optische Axe ($Z'Z$) = μ und den Winkel zwischen der Einfallsebene \mathcal{E} und jenem Hauptschnitt mit δ , so ist durch diese beiden Winkel die Lage von Grenzebene und Einfallsebene gegen die optische Axe fixirt. Die Richtungs-cosinusse $\alpha \dots \gamma_2$ der Axen X', Y', Z' erhalten folgende Werthe:

	X	Y	Z
X'	$\cos \mu \cos \delta$	$-\sin \delta$	$-\sin \mu \cos \delta$
Y'	$\cos \mu \sin \delta$	$\cos \delta$	$-\sin \mu \sin \delta$
Z'	$\sin \mu$	0	$\cos \mu$

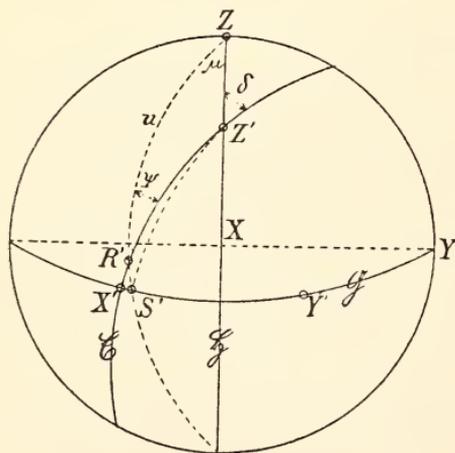
und die Gleichung des Ellipsoids der Indexfläche, bezogen auf das Axensystem $X'Y'Z'$ lautet:

$$(41) \quad G = a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2a_{23} y'z' + 2a_{31} z'x' + 2a_{12} x'y' = 1$$

worin:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \mu \cos^2 \delta \\ a_{22} = c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 \mu \sin^2 \delta \\ a_{33} = c^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu \\ a_{23} = (c^2 - a^2) \sin \mu \cos \mu \sin \delta \\ a_{31} = (c^2 - a^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta \\ a_{12} = -(c^2 - a^2) \sin^2 \mu \sin \delta \cos \delta \end{array} \right.$$

gesetzt ist. Aus der in §. 5 beschriebenen Construction ergibt sich nun für den Grenzwinkel i_0' der ungewöhnlichen (langsameren) Welle, die hier allein in Betracht gezogen wird, folgender Satz:



In jeder Einfallsebene hat die dem Grenzwinkel der ungewöhnlichen totalen Reflexion entsprechende Wellennormale die Richtung des zur Normale der Grenzebene conjugirten Durchmessers der Ellipse, in der die Einfallsebene das Ellipsoid der Indexfläche schneidet;

denn dieser Durchmesser ist die Polare des unendlich fernen Punktes des Einfallslotes in Bezug auf jene Ellipse. Dar-

aus folgt weiter für die Gesamtheit aller Einfallsebenen auf derselben Grenzzebene:

Die ungewöhnlichen Wellennormalen, welche den Grenzwinkeln der totalen Reflexion an einer beliebigen Grenzzebene eines optisch einaxigen Krystalls entsprechen, erfüllen die zur Normale der Grenzzebene conjugirte Diametralebene des Ellipsoids der Indexfläche.

Da die schnelleren Wellennormalen, welche den Grenzwinkeln i_0 der gewöhnlichen totalen Reflexion entsprechen, in der Grenzzebene selbst liegen, so zerfällt der auf Seite 199 erwähnte Kegel bei den optisch einaxigen Krystallen in zwei Ebenen. Die Gleichung der Ebene der ungewöhnlichen Wellennormalen ergibt sich aus (41), wenn wir berücksichtigen, dass diese Ebene die Polare des unendlich fernen Punktes der Z' -Axe ist; sie lautet demnach:

$$\frac{dG}{dz'} = 0$$

oder:

$$(42) \quad (c^2 - a^2) \sin \mu \cos \mu (x' \cos \delta + y' \sin \delta) + (c^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu) z' = 0$$

Für die in der Einfallsebene ($y' = 0$) gelegene Wellennormale erhalten wir hieraus, indem wir noch:

$$\frac{x'}{z'} = \tan r_0'$$

setzen:

$$(43) \quad \tan r_0' = \frac{c^2 + (a^2 - c^2) \cos^2 \mu}{(a^2 - c^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta}$$

Auf diese Weise ist der Brechungswinkel r_0' der ungewöhnlichen Wellennormale ausgedrückt durch die Hauptlichtgeschwindigkeiten a , c und die beiden Winkel μ , δ , welche die Lage von Grenzzebene und Einfallsebene bestimmen. Bezeichnet man die Neigung der Wellennormale zur optischen Axe mit u , so ist:

$$\cos u = \cos \mu \cos r_0' - \sin \mu \sin r_0' \cos \delta$$

folglich geht (43) über in:

$$(43^*) \quad \cos r_0' = \frac{c^2 - a^2}{c^2} \cos u \cos \mu$$

Die Gleichung der Ellipse, in der die Indexfläche von der Einfallsebene geschnitten wird, ergibt sich in Punktcoordinaten aus (41), wenn wir $y' = 0$ setzen:

$$(44) \quad a_{11} x'^2 + a_{33} z'^2 + 2a_{31} z' x' - 1 = 0$$

Demnach lautet die Gleichung dieser Ellipse in Linien-coordinaten:

$$(45) \quad a_{33} u^2 + a_{11} w^2 + 2 a_{31} w u - (a_{33} a_{11} - a_{31}^2) = 0$$

Hieraus folgt die u-Coordinate der Geraden \mathcal{A} , welche durch ihren Berührungspunkt mit der Ellipse die Richtung der ungewöhnlichen Wellennormale bestimmt, wenn $w = 0$ gesetzt wird:

$$(46) \quad u^2 = \frac{a_{33} a_{11} - a_{31}^2}{a_{33}}$$

Nun ist:

$$-\frac{1}{u} = \frac{\sin i_0'}{v}$$

folglich:

$$(47) \quad \frac{\sin^2 i_0'}{v^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{c^2 + (a^2 - c^2) \cos^2 \mu}{c^2 + (a^2 - c^2) (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \delta)}$$

Hierdurch ist der Sinus des Grenzwinkels als Funktion der Geschwindigkeit des Lichtes in dem einfach brechenden Mittel, der Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystals und der Winkel μ , δ dargestellt.

Dieses Verfahren, den Werth des Quotienten von $\sin i_0'$ und v zu bilden, ist nicht wesentlich verschieden von dem in meiner früheren Mittheilung (dies. Jahrb. 1885, I, 250) benutzten und dem auf S. 200 für optisch zweiachsigte Krystalle angegebenen Wege. Trägt man in die Gleichung (44) für die Coordinaten x' , z' die Werthe (10) ein, so erhält man die allgemeine, zur Bestimmung der Brechungswinkel r' der ungewöhnlichen Wellennormalen dienende Gleichung:

$$(48) \quad a_0 \tan^2 r' + 2 a_1 \tan r' + a_2 = 0$$

worin:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a_{11} \sin^2 i' - v^2 \\ a_1 = a_{31} \sin^2 i' \\ a_2 = a_{33} \sin^2 i' \end{array} \right.$$

ist. Für den Grenzwinkel i_0' besitzt (48) zwei reelle einander gleiche Wurzeln, d. h. in diesem Falle verschwindet die Discriminante der Gleichung (48):

$$(49) \quad a_0 a_2 - a_1^2 = 0$$

und diese Relation stimmt mit (47) überein. Nach Einführung der Hülfswinkel Θ , η , welche durch:

$$\tan \Theta = \frac{\sqrt{(a+c)(a-c)}}{c} \cos \mu$$

$$\sin \eta = \frac{\sqrt{(a+c)(a-c)}}{a} \sin \mu \sin \delta$$

definiert sind, nimmt (47) die logarithmisch brauchbare Form an:

$$\frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{a \cos \Theta \cos \eta}$$

Wenn die Bedingung (49) erfüllt ist, erhält man für die einander gleichen Wurzeln von (48) den Werth (43).

In einem optisch einaxigen Krystall liegt jeder ungewöhnliche Strahl mit der zugehörigen Wellennormale und der optischen Axe in einer Ebene. Bezeichnet man die Geschwindigkeit der Wellennormale mit q und ihre Neigung zur optischen Axe mit u , so gilt für den von Strahl und Wellennormale eingeschlossenen Winkel ε die bekannte Relation:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \varepsilon = -\frac{a^2 - c^2}{2q^2} \sin 2u = -\frac{(a^2 - c^2) \sin u \cos u}{c^2 + (a^2 - c^2) \cos^2 u} \\ \cos \varepsilon = \frac{c^2 + (a^2 - c^2) \cos^2 u}{\sqrt{c^4 + (a^4 - c^4) \cos^2 u}} \end{array} \right.$$

mit Hülfe deren die folgende, von Herrn F. NEUMANN aufgestellte Beziehung zwischen dem Brechungswinkel r' einer ungewöhnlichen Wellennormale R' und dem Brechungswinkel s' des zugehörigen Strahles S' abgeleitet werden kann. In den sphärischen Dreiecken $Z'R'S'$ und $Z'R'Z$ ist, wenn $(Z'R'Z) = \psi$ gesetzt wird:

$$(51) \quad \begin{array}{l} \cos s' = \cos r' \cos \varepsilon - \sin r' \sin \varepsilon \cos \psi \\ \cos \psi = \frac{\cos \mu - \cos u \cos r'}{\sin u \sin r'} \end{array}$$

folglich¹:

$$(52) \quad \cos s' = \frac{\cos r' + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos u \cos \mu}{\sqrt{1 + \frac{a^4 - c^4}{c^4} \cos^2 u}}$$

Nimmt beim Beginn der totalen Reflexion r' den Werth r_0' an, so hat $\cos r_0'$ den Werth (43); alsdann verschwindet der Zähler von (51). Daraus ergibt sich in Übereinstimmung mit der Construction in §. 5, dass für den Fall des Grenz-

¹ Vgl. F. NEUMANN: Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflectirt und gebrochen wird. Abhandl. Berlin. Akad. 1835, S. 19, Formel (18).

winkels der totalen Reflexion der gebrochene Strahl in der Grenzebene liegt.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Verbindungsebene des Strahles S' und der Normalen der Grenzebene mit der Einfallsebene bildet,

$$(S'Z'X') = \Omega,$$

so ergibt sich aus dem Dreieck $R'S'Z'$:

$$\tan \Omega = \frac{\tan \varepsilon \sin \psi}{\sin r' + \tan \varepsilon \cos r' \cos \psi}$$

oder, wenn man für $\tan \varepsilon$ und $\cos \psi$ die Werthe (50) und (51) einträgt und $\sin \psi \sin u = \sin \mu \sin \delta$ setzt:

$$(53) \quad \tan \Omega = \frac{\cos u \sin \mu \sin \delta \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2}}{\sin r' + \cos u \sin \mu \cos \delta \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2}}$$

Dieser von Herrn F. NEUMANN¹ aufgestellte Ausdruck für das Azimut Ω des gebrochenen Strahles in Bezug auf die Einfallsebene liefert in dem Falle, wo S' in der Grenzebene selbst liegt, die Neigung $S'X'$ dieses Strahles gegen die Einfallsebene. Aus dem Dreieck $R'S'Z'$ ergibt sich in diesem besonderen Falle die Relation:

$$(54) \quad \cos (S'X') = \frac{\cos \varepsilon}{\sin r'_0'}$$

Wir betrachten jetzt noch einige specielle Fälle. — In jeder Grenzebene eines optisch einaxigen Krystalls ist eine auf der optischen Axe senkrecht stehende Richtung, also eine optische Symmetrieaxe enthalten; geht auch die Einfallsebene dieser Richtung parallel, so ist $\delta = \frac{\pi}{2}$; dann ergibt sich aus (47):

$$(55) \quad \frac{\sin i'_0'}{v} = \frac{1}{c}$$

Ist $\delta = 0$, so ist die Einfallsebene parallel zum Hauptschnitt der Grenzebene, also nach (47):

$$(56) \quad \frac{\sin^2 i'_0'}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos^2 \mu = \frac{1}{\bar{s}'^2}$$

wenn mit \bar{s}' die Geschwindigkeit des ungewöhnlichen Strahles bezeichnet wird, der in die Durchschnittsgerade der

¹ a. a. O. S. 19, Formel (17).

Grenzebene und ihres Hauptschnittes fällt. Aus (55) und (56) ergibt sich der von Herrn F. KOHLRAUSCH aufgestellte Satz¹, demzufolge an einer beliebigen Grenzebene eines optisch einaxigen Krystalls aus den vier Grenzwinkeln der totalen Reflexion, welche man erhält, wenn man als Einfallsebenen den Hauptschnitt und die zu ihm senkrechte Ebene wählt, die beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten a , c und die Neigung $\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)$ der Grenzebene gegen die optische Axe ermittelt werden können; dabei bestimmt man die constante Geschwindigkeit a der gewöhnlichen Wellen zwei Mal und findet für jene Neigung aus (56):

$$(57) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c'^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}$$

Die Grenzebene ist einer optischen Symmetrieebene parallel, wenn $\mu = \frac{\pi}{2}$ oder $\mu = 0$ ist. In dem ersteren Falle ist die Grenzebene parallel zur optischen Axe und aus (47) folgt:

$$(58) \quad \frac{\sin^2 i_0'}{v^2} = \frac{1}{c^2 + (a^2 - c^2) \cos^2 \delta} = \frac{1}{q'^2}$$

wenn mit q' die Geschwindigkeit der ungewöhnlichen Welle bezeichnet wird, deren Normale wie die Schnittgerade von Grenzebene und Einfallsebene gerichtet ist; in dem letzteren Falle ist die Grenzebene senkrecht zur optischen Axe und nach (47) ist:

$$(59) \quad \frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{c}.$$

In dies. Jahrb. 1885. I. 246 habe ich gezeigt, dass die von Herrn W. KOHLRAUSCH in der Abhandlung: „Über die experimentelle Bestimmung von Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen“² aufgestellte Ansicht über den Zusammenhang

¹ F. KOHLRAUSCH: Über die Ermittlung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion. WIEDEM. ANN. 1878, 4, 15.

² Inaug.-Dissert. Würzburg 1879. WIEDEM. ANN. 6, 86—115. Dies. Jahrb. 1879, 875.

zwischen den Grenzwinkeln der totalen Reflexion an beliebigen Grenzebenen optisch einaxiger Krystalle, den Hauptlichtgeschwindigkeiten dieser Krystalle und den Winkeln, welche die krystallographische Orientirung von Grenzebene und Einfallsebene bestimmen, mit seinen Messungen am Natronsalpeter und mit den Gesetzen der Doppelbrechung unvereinbar ist. Eine zweite Mittheilung des Herrn W. KOHLRAUSCH: „Schiefe Schnitte in zweiaxigen Krystallen“¹ enthält eine Hypothese über den Zusammenhang der entsprechenden Grössen bei optisch zweiaxigen Krystallen. Ich werde hier nicht näher darauf eingehen, dass diese Hypothese, wie Herr W. KOHLRAUSCH nicht bemerkt zu haben scheint, für den besonderen Fall der schiefen Schnitte optisch einaxiger Krystalle mit den Angaben seiner ersten Abhandlung im Widerspruch steht; es genügt zu bemerken, dass die Voraussetzungen, von denen Herr W. KOHLRAUSCH bei der Aufstellung seiner Hypothese ausging, unzutreffend sind.

Eine beliebige Grenzebene eines optisch zweiaxigen Krystalls erzeugt mit den drei optischen Symmetrieebenen desselben drei Durchschnittsgeraden. Herr W. KOHLRAUSCH ist der Ansicht, dass in dem Falle, wo eine dieser Geraden Durchschnittslinie von Grenzebene und Einfallsebene ist, zwischen den beiden Grenzwinkeln der totalen Reflexion und den Geschwindigkeiten der beiden, in der Richtung jener Geraden sich fortpflanzenden ebenen Wellen Beziehungen von der Form:

$$\frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{q}$$

bestehen. Nun ergibt sich aber aus §. 5 der vorliegenden Abhandlung, dass eine solche Relation nur dann besteht, wenn die Grenzebene eine optische Symmetrieebene oder die Schnittgerade von Grenzebene und Einfallsebene eine optische Symmetrieaxe ist. Daraus ist ersichtlich, dass die in Rede stehende Annahme des Herrn W. KOHLRAUSCH und die aus ihr gezogenen Folgerungen nicht richtig sind.

Der Quotient des Sinus des Grenzwinkels und der Lichtgeschwindigkeit in dem einfach brechenden Mittel ist bei beliebiger Lage von Grenzebene und Einfallsebene sowohl bei

¹ WIEDEM. ANN. 1879, 7, 427—435.

optisch zweiaxigen als bei optisch einaxigen Krystallen abhängig von den Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls und den Winkeln, welche Grenzebene und Einfallsebene mit den optischen Symmetriemaxen des Krystalls einschliessen. Nur in speciellen Fällen ist dieser Quotient dem reciproken Werth einer Lichtgeschwindigkeit gleich:

1°. Ist die Grenzebene eine optische Symmetrieebene, so entspricht der constante Grenzwinkel einer Hauptlichtgeschwindigkeit; der mit der Einfallsebene veränderliche Grenzwinkel liefert einen Werth $\sin i_0/v$ gleich dem reciproken Werth der Geschwindigkeit jener ungewöhnlichen Wellenebene, die sich in der Richtung der Schnittgeraden von Grenzebene und Einfallsebene fortpflanzt.

2°. Ist die Einfallsebene eine optische Symmetrieebene (also die Grenzebene parallel zu der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Symmetriemaxe), so liefert der eine der beiden Grenzwinkel eine Hauptlichtgeschwindigkeit; der mit Hülfe des anderen Grenzwinkels gebildete Quotient $\sin i_0/v$ ist dem reciproken Werthe der Geschwindigkeit jenes ungewöhnlichen Strahles gleich, der in die Schnittgerade von Grenzebene und Einfallsebene fällt.

3°. Ist die Schnittgerade von Grenzebene und Einfallsebene eine optische Symmetriemaxe, so ist jeder der beiden Quotienten $\sin i_0/v$ gleich dem reciproken Werth einer Hauptlichtgeschwindigkeit.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1885

Band/Volume: [1885_2](#)

Autor(en)/Author(s): Liebisch Theodor

Artikel/Article: [Ueber die Totalreflexion an doppeltbrechenden Krystallen 181-211](#)