

# Ueber Wärmeleitung in Krystallen.

Von

**B. Minnigerode** in Greifswald.

I. Theil.

---

Die ersten Untersuchungen über Wärmeleitung in Krystallen verdankt man DUHAMEL<sup>1</sup>, der seine Theorie auf die Hypothese gründete, dass die Leitung der Wärme auf molekularer Strahlung beruhe. Nachdem durch H. DE SÉNARMONT<sup>2</sup> auch Beobachtungen über Wärmeleitung in nicht isotropen Körpern angestellt worden waren, hat DUHAMEL<sup>3</sup> den Gegenstand wieder aufgenommen und seine Theorie mit den Beobachtungen verglichen. LAMÉ<sup>4</sup> hat dann die Theorie weiter entwickelt, indem er zu den DUHAMEL'schen theoretischen Vorstellungen noch die Hypothese hinzufügte, dass die Wärmeleitfähigkeit nach entgegengesetzten Richtungen nicht nothwendig gleich sein müsse, ein Gedanke, auf den er durch das elektrische Verhalten gewisser Krystalle bei ihrer Erwärmung gekommen zu sein scheint<sup>5</sup>. Indessen hat sich in die von LAMÉ aufgestellten Formeln, die im Allgemeinen eine grössere Anzahl von Constanten enthalten, als die bis dahin angenommenen, ein Fehler eingeschlichen, so dass die von ihm gefundenen Resultate mit der von ihm zu Grunde gelegten Hypothese nicht im Einklang sind. Diesen Fehler

<sup>1</sup> Journal de l'école polytechnique. Cah. 21, 356, 1832.

<sup>2</sup> Ann. chim. et phys. Sér. 3, 21, 457; 22, 179; 23, 257, 1848.

<sup>3</sup> Journal de l'école polytechnique. Cah. 32, 155, 1848.

<sup>4</sup> Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Paris 1861.

<sup>5</sup> l. c. p. VI u. §. XV.

habe ich in meiner Inauguraldissertation<sup>1</sup> aufgedeckt, aber sonst scheint er nicht weiter bemerkt worden zu sein, während auf das Werk von LAMÉ vielfach Bezug genommen wird. Auf dieselbe theoretische Vorstellung sind neuerdings auch THOMPSON und LODGE gekommen, wie es scheint, ohne von den Untersuchungen LAMÉ's Kenntniss zu haben. Beobachtungen beim Turmalin schienen ihre Ansicht zu bestätigen<sup>2</sup>; dieselben zeigen indess unter einander grosse Abweichungen und die vor Kurzem von STENGER<sup>3</sup> veröffentlichten Messungen machen eine Verschiedenheit der Wärmeleitung nach entgegengesetzten Richtungen beim Turmalin sehr unwahrscheinlich.

Inzwischen waren Untersuchungen von STOKES<sup>4</sup> über Wärmeleitung in Krystallen angestellt worden, in denen die Differentialgleichungen auf allgemeinerer Grundlage aufgestellt werden, ohne dass die DUHAMEL'sche Hypothese der molekularen Strahlung angenommen wird. STOKES gelangt so zu Gleichungen, die identisch sind mit den später von LAMÉ aufgestellten, aber unrichtig interpretirten Formeln.

Die vorliegende Abhandlung enthält 1. eine Ableitung der Grundgleichungen für die Wärmeleitung in Krystallen aus der LAMÉ'schen Hypothese, nebst dem Nachweis des LAMÉ'schen Fehlers in einer ausführlicheren Darstellung, als die früher von mir veröffentlichte, 2. eine Anwendung der STOKES'schen Theorie auf die einzelnen Krystallsysteme und deren Unterabtheilungen. Aus der Discussion der möglichen Fälle ergibt sich, dass die allgemeineren Formeln nicht ausschliesslich solchen Krystallen entsprechen, die pyroelektrische Eigenschaften zeigen. — Die Fortsetzung dieser Untersuchung wird sich eingehend mit der Theorie der Beobachtungsmethoden beschäftigen und zeigen, wie für die Krystalle der einzelnen Systeme die Constanten der Wärmeleitung aus Beobachtungen zu bestimmen sind; für die Krystalle des triklinen Systems ist bisher in dieser Hinsicht noch nichts geschehen.

<sup>1</sup> B. MINNIGERODE: Über Wärmeleitung in Krystallen. Art. II. Göttingen 1862.

<sup>2</sup> Philosophical Magazine. Ser. V, 5, 110, 1878 und 8, 18, 1879. Dies. Jahrb. 1880. I. 145.

<sup>3</sup> WIEDEM. Ann. 22, 522, 1884. Dies. Jahrb. 1885. II. 411.

<sup>4</sup> On the Conduction of Heat in Crystals. Cambridge and Dublin mathematical Journal ed. by W. THOMPSON, 6, 215, 1851.

## §. 1.

Es seien  $M, M'$  zwei benachbarte Punkte im Innern des Krystalls,  $\varrho$  ihre Entfernung,  $\alpha, \beta, \gamma$  die Cosinus der Winkel, welche die von  $M$  nach  $M'$  gezogene Gerade mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen bildet,  $v$  die Temperatur in  $M$ ,  $v'$  jene in  $M'$ ,  $d\zeta$  und  $d\zeta'$  zwei Volumenelemente, denen  $M$  und  $M'$  angehören. Die während der Zeit  $dt$  von dem Massenelement in  $d\zeta$  an das Massenelement in  $d\zeta'$  abgegebene Wärmemenge wird dann ausgedrückt durch

$$\text{I.} \quad d\zeta d\zeta' (v - v') F(\varrho, \varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma) dt$$

Hierin ist  $\varepsilon = +1$  oder  $= -1$  zu setzen, je nachdem die Temperatur in  $d\zeta$  höher oder niedriger ist als in  $d\zeta'$ , wenn die LAMÉ'sche Voraussetzung der ungleichen Leitungsfähigkeit der Wärme nach entgegengesetzten Richtungen zu Grunde gelegt wird. Fällt diese Voraussetzung fort, so ist

$$F(\varrho, \alpha, \beta, \gamma) = F(\varrho, -\alpha, -\beta, -\gamma)$$

und man kann  $\varepsilon = 1$  setzen. Die Function  $F$  ist wesentlich positiv. Ihr Werth ist derselbe, an welche Stelle des Krystalls man das Punktepaar  $M, M'$  bringen mag, sobald nur  $\varrho, \varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma$  dieselben sind. Ferner ist  $F = 0$ , sobald  $\varrho$  einen kleinen Werth  $R$  übersteigt, dessen Grösse eine Function von  $\alpha, \beta, \gamma$  sein kann.

Man theile den Krystall durch eine Ebene  $E$  in zwei Theile  $A$  und  $B$ . Es werde  $B$  in unendlich dünne Cylinder zerlegt, von denen jeder seine Basis  $d\sigma$  in  $E$  hat und deren Erzeugungslinien senkrecht zu  $E$  stehen. Die während der Zeit  $dt$  von einem solchen Cylinder mit der Basis  $d\sigma$  an  $A$  abgegebene Wärmemenge, welche durch

$$-d\sigma dt \Omega$$

bezeichnet werden möge, soll jetzt berechnet werden, indem der LAMÉ'sche Gedankengang im Wesentlichen beibehalten wird.

Es werde das Punktepaar  $M, M'$  zuerst in eine solche Lage gebracht, dass  $M$  die Stelle des Durchschnitts der Axe des Cylinders in  $d\sigma$  mit der Ebene  $E$  einnimmt, und darauf in eine zweite, so dass  $M$  in einen anderen in  $B$  gelegenen Punkt  $M_1$  derselben Axe fällt; die von  $M$  nach  $M_1$  gezogene gerade Linie sei  $= l$ . Die Linie  $\varrho$  wird hierbei parallel mit ihrer ursprünglichen Lage verschoben; in beiden Lagen soll

der zweite Endpunkt ( $M'$ ,  $M_1'$ ) sich in A befinden. Wir zählen die Normale  $p$  der Ebene E positiv nach dem Innern von A und bezeichnen die Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet, durch  $(xp)$ ,  $(yp)$ ,  $(zp)$ ; sind nun die Coordinaten von M

$$x, y, z$$

so erhalten die Coordinaten von  $M'$ ,  $M_1$ ,  $M_1'$  die folgenden Werthe

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \varrho\alpha, y + \varrho\beta, z + \varrho\gamma, \\ x - 1 \cos(xp), y - 1 \cos(yp), z - 1 \cos(zp), \\ x + \varrho\alpha - 1 \cos(xp), y + \varrho\beta - 1 \cos(yp), z + \varrho\gamma - 1 \cos(zp). \end{array} \right.$$

Es seien  $v'$ ,  $v_1$ ,  $v_1'$  die Temperaturen an diesen drei Punkten, so liefert die auf ihre ersten Glieder beschränkte TAYLOR'sche Reihe die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} v' = v + \varrho\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \varrho\beta \frac{\partial v}{\partial y} + \varrho\gamma \frac{\partial v}{\partial z}, \\ v_1 = v - 1 \cos(xp) \frac{\partial v}{\partial x} - 1 \cos(yp) \frac{\partial v}{\partial y} - 1 \cos(zp) \frac{\partial v}{\partial z}, \\ v_1' = v + (\varrho\alpha - 1 \cos(xp)) \frac{\partial v}{\partial x} + (\varrho\beta - 1 \cos(yp)) \frac{\partial v}{\partial y} + (\varrho\gamma - 1 \cos(zp)) \frac{\partial v}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Hieraus folgt

$$v_1 - v_1' = v - v' = -\varrho \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

Es hat also der Wärmeaustausch I. für beide Lagen des Punktepaars M,  $M'$  den nämlichen Werth, indem nicht bloss der Coëfficient F, sondern auch die Temperaturdifferenz  $v - v'$  denselben Werth besitzt. Dies gilt für alle parallelen Lagen von  $MM'$ , sobald nur die Längen  $l$  und  $\varrho$  eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Hiernach ergibt sich für den Wärmeaustausch I. zweier Punkte M,  $M'$  oder  $M_1$ ,  $M_1'$

$$-d\zeta d\zeta' \varrho \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right) F dt.$$

Um  $\Omega_p$  zu erhalten, ist das der Ebene E angehörige Element  $d\zeta$  des Cylinders mit allen Elementen  $d\zeta'$  im Innern von A zu combiniren, deren Entfernungen  $\varrho$  die Werthe zwischen 0 und R besitzen, und ein Element  $d\zeta$  des Cylinders im Abstand  $l$  von der Ebene E ist für eine bestimmte Richtung von  $\varrho$  mit allen Elementen  $d\zeta'$  innerhalb A zu combiniren, deren Entfernung  $\varrho$  die Grösse R nicht übersteigt,

also zwischen  $\frac{1}{\cos(\varrho p)}$  und  $R$  enthalten ist. Darauf ist die Summe nach allen Richtungen von  $\varrho$  zu nehmen. Die bei einer bestimmten Richtung und Grösse von  $\varrho$  überhaupt in Betracht kommenden Elemente des Cylinders haben von der Ebene  $E$  die Abstände von  $0$  bis  $\varrho \cos(\varrho p)$ .

Setzt man für  $d\zeta$  das Element  $d\sigma dl$  des Cylinders, so erhält man für den Wärmeaustausch zwischen  $d\zeta$  und  $d\zeta'$

$$-d\sigma dl ds' \varrho \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right) F(\varrho, \varepsilon \alpha, \varepsilon \beta, \varepsilon \gamma) dt.$$

Fasst man alle in Betracht kommenden Elemente  $d\sigma dl$  und  $d\zeta'$  zusammen, für welche die Richtung und die Grösse von  $\varrho$  dieselben sind, so erhält man, da

$$\int dl = \varrho \cos(\varrho p)$$

ist

$$-d\sigma ds' \varrho^2 \cos(\varrho p) \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right) F(\varrho, \varepsilon \alpha, \varepsilon \beta, \varepsilon \gamma) dt.$$

Hieraus folgt

$$-d\sigma dt \Omega_p,$$

wenn man die Summe nimmt über alle Elemente  $d\zeta'$  im Innern von  $A$ , deren Abstände  $\varrho$  von  $M$  die Werthe von  $0$  bis  $R$  haben. Setzt man  $d\zeta' = \varrho^2 d\omega$ , wo  $d\omega$  das Element einer mit dem Halbmesser  $1$  um  $M$  beschriebenen Kugelfläche bedeutet, und führt man die Bezeichnung ein

$$\int_0^R \varrho^4 F(\varrho, \varepsilon \alpha, \varepsilon \beta, \varepsilon \gamma) d\varrho = \Phi(\varepsilon \alpha, \varepsilon \beta, \varepsilon \gamma),$$

so erhält man

$$\Omega_p = \int \cos(\varrho p) \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Phi(\varepsilon \alpha, \varepsilon \beta, \varepsilon \gamma) d\omega;$$

die Integration ist über die in  $A$  liegende Hälfte der Kugelfläche auszudehnen, deren Element  $d\omega$  ist. Bemerket man, dass

$$\cos(\varrho p) = \alpha \cos(x p) + \beta \cos(y p) + \gamma \cos(z p)$$

ist und dass bei der Integration die Differentialquotienten von  $v$  und die Winkel, welche  $p$  mit den Coordinatenachsen bildet, als constant anzusehen sind, so findet man



$$\begin{aligned} \Omega_p = & \left( \frac{\partial v}{\partial x} \int \alpha \alpha \Phi d\omega + \frac{\partial v}{\partial y} \int \alpha \beta \Phi d\omega + \frac{\partial v}{\partial z} \int \alpha \gamma \Phi d\omega \right) \cos(xp) \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \int \beta \alpha \Phi d\omega + \frac{\partial v}{\partial y} \int \beta \beta \Phi d\omega + \frac{\partial v}{\partial z} \int \beta \gamma \Phi d\omega \right) \cos(yp) \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \int \gamma \alpha \Phi d\omega + \frac{\partial v}{\partial y} \int \gamma \beta \Phi d\omega + \frac{\partial v}{\partial z} \int \gamma \gamma \Phi d\omega \right) \cos(zp) \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\Phi(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma) = \Phi$$

gesetzt ist.

Dieselben Formeln ergeben sich, wenn man, statt die Wärmeabgabe des Cylinders innerhalb B an A zu berechnen, einen Cylinder in A errichtet und seine Wärmeabgabe an B bestimmt. Die Grösse  $-\Omega_p d\sigma dt$  ist die durch das Element  $d\sigma$  während der Zeit  $dt$  hindurchtretende Wärmemenge.

## §. 2.

Wird die Voraussetzung gemacht, dass

$$(a) \quad \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \Phi(-\alpha, -\beta, -\gamma)$$

ist, so sind die in  $\Omega_p$  auftretenden Integrale Constante des Krystalls; ihre Werthe sind die Hälfte derjenigen, welche sich ergeben, wenn man, statt die Integration über die oben bezeichnete Halbkugel auszudehnen, dieselbe über die ganze Kugelfläche erstreckt.

Wird aber die LAMÉ'sche Annahme ungleicher Wärmeleitfähigkeit nach entgegengesetzten Richtungen gemacht, so erfüllt die Function  $\Phi$  die Gleichung (a) nicht. In diesem Fall sind die in  $\Omega_p$  vorkommenden Integrale keine Constanten des Krystalls, sondern sie sind von der Temperaturvertheilung in der Nähe von M abhängig, indem die Werthe, die  $\varepsilon$  für die Elemente des Integrals annimmt, von ihr abhängen. Es sei hier bemerkt, dass diese Integrale durch andere ersetzt werden können. Man lege in M an die durch diesen Punkt gehende isotherme Fläche die Tangentenebene: man kann dann in  $\Phi$  durchweg  $\varepsilon = 1$  setzen, wenn die Integration über diejenige Halbkugel ausgedehnt wird, die sich auf der Seite der Tangentenebene befindet, auf der die Temperatur die niedrigere ist. Unter allen Umständen haben aber in  $\Omega_p$  die Coëfficienten

$$\text{von } \frac{\partial v}{\partial y} \cos(zp) \text{ und } \frac{\partial v}{\partial z} \cos(yp),$$

$$\text{von } \frac{\partial v}{\partial z} \cos(xp) \text{ und } \frac{\partial v}{\partial x} \cos(zp),$$

$$\text{von } \frac{\partial v}{\partial x} \cos(yp) \text{ und } \frac{\partial v}{\partial y} \cos(xp),$$

dieselben Werthe.

LAMÉ findet statt der hier entwickelten Formel für  $\Omega_p$  eine wenig übersichtliche<sup>1</sup>, die ihn zu dem Irrthum verleitet, die Integrale in  $\Omega_p$  als Constante des Krystalls und zugleich die Coëfficienten der Produkte

$$\frac{\partial v}{\partial y} \cos(yp), \frac{\partial v}{\partial z} \cos(zp), \text{ etc.}$$

als von einander verschieden anzusehen.

Lässt man p nach einander mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, so erhält man

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_x = k_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \Omega_y = k_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \Omega_z = k_{31} \frac{\partial v}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial v}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial v}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Hier sind  $k_{11}$ ,  $k_{12}$  . . . die Werthe der in  $\Omega_p$  vorkommenden Integrale und zugleich besteht die Gleichung

$$\Omega_p = \Omega_x \cos(xp) + \Omega_y \cos(yp) + \Omega_z \cos(zp),$$

die gewöhnlich durch Betrachtung eines Tetraëders abgeleitet wird.

### §. 3.

Will man die Grössen  $k_{\mu\nu}$  als Constante des Krystalls ansehen und voraussetzen, dass  $k_{\mu\nu}$  für  $\mu \geq \nu$  nicht nothwendig gleich  $k_{\nu\mu}$  ist, so darf man, wie die vorstehenden Betrachtungen zeigen, die Formeln II. nicht auf die Voraussetzung von molekularer Strahlung gründen. STOKES hat sich auf einen allgemeinen Standpunkt gestellt und die Theorie der Wärmeleitung in Krystallen ohne diese Voraussetzung begründet, indem er von einigen sehr allgemeinen Gesetzen ausging, die allerdings aus der genannten Voraussetzung folgen, die aber von solcher Einfachheit sind, dass sie seiner

<sup>1</sup> l. c. §. V.

Ansicht nach sich aus jeder vernünftigen Hypothese ergeben müssen, die bezüglich des Überganges von Wärme im Innern eines festen Körpers gemacht werden kann. Er gelangt zu den Gleichungen II., in denen die  $k_{\mu\nu}$  constante Grössen sind, zwischen denen sich aus seinen grundlegenden Hypothesen von vorn herein keine Beziehung ergibt. Diese Art der Behandlung hat unstreitig den grossen Vorzug, die Grundgleichungen der Wärmeleitung aufstellen zu können, ohne eine specielle Hypothese über die Art und Weise machen zu müssen, wie der Übergang der Wärme vor sich geht und es ist wohl berechtigt, die sich hieran knüpfenden Folgerungen im Einzelnen zu entwickeln. Dies ist von STOKES und LAMÉ geschehen und hierin liegt das Interesse an LAMÉ's Untersuchungen über den von ihm sogenannten allgemeinen Fall, wenn auch die physikalische Bedeutung seiner Formeln nicht die von ihm vorausgesetzte ist. Auch ergibt die Differentialgleichung für die Wärmebewegung, wie aus den Untersuchungen von STOKES und LAMÉ selbst hervorgeht, keineswegs verschiedene Wärmeleitung nach entgegengesetzten Richtungen: wird einem unbegrenzten krystallinischen Körper nur an einer einzigen Stelle eine von Null verschiedene Temperatur ertheilt, so sind die isothermen Flächen zu jeder späteren Zeit ähnlliche und ähnllich liegende Ellipsoide, deren gemeinsamer Mittelpunkt die anfänglich erwärmte Stelle ist.

STOKES stellt in seiner Abhandlung Betrachtungen an über die Art der Wärmebewegung, die der allgemeineren Voraussetzung entspricht, und sucht es als wahrscheinlich hinzustellen, dass in der Natur die Gleichungen

$$\text{III.} \quad k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}$$

immer bestehen. Er zeigt dann, dass sie bestehen müssen, wenn der Krystall zwei zu einander senkrechte Symmetrieebenen besitzt, so dass nur bei gewissen unsymmetrischen Krystallen Spuren ihres Nichtbestehens erwartet werden können. Weiterhin findet er, dass beim Quarz, der besondere Unsymmetrien darbietet, diese Gleichungen ebenfalls gelten müssen.

Ich werde im Folgenden alle Fälle discutiren, die bei Krystallen vorkommen können. LAMÉ glaubte nachgewiesen



zu haben<sup>1</sup>, dass für gewisse Krystalle des regulären Systems die Gleichungen III. nicht bestehen. In Wirklichkeit müssen aber diese Relationen für alle Unterabtheilungen des regulären Systems erfüllt sein.

Das Nichtbestehen der Gleichungen III. würde übrigens, wenn es in der Natur überhaupt vorkommt, experimentell sehr schwierig nachzuweisen sein. Denn in der Differentialgleichung für Punkte im Innern des Körpers

$$CD \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z}$$

worin mit C die spezifische Wärme, mit D die Dichtigkeit des Körpers bezeichnet ist, kommen nur die Summen

$$k_{23} + k_{32}, k_{31} + k_{13}, k_{12} + k_{21}$$

vor. In der für die Punkte der Oberfläche geltenden Gleichung

$$\Omega_p = h(v - U),$$

worin p die nach innen errichtete Normale, h die äussere Leitungsfähigkeit, U die Temperatur der Umgebung bedeuten, kommen freilich die  $k_{\mu\nu}$  getrennt vor; aber hier tritt der Umstand erschwerend ein, dass h für verschiedene Krystallflächen verschiedene Werthe haben kann.

#### §. 4.

Es sei die z-Axe eine Symmetrieaxe des Krystalls, so dass durch Drehung desselben um sie um den Winkel  $\Theta$  jede Richtung des Krystalls mit einer gleichwerthigen zur Deckung kommt. Setzt man also

$$\begin{cases} x' = x \cos \Theta - y \sin \Theta, \\ y' = x \sin \Theta + y \cos \Theta, \\ z' = z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x'p') = \cos(xp) \cos \Theta - \cos(yp) \sin \Theta, \\ \cos(y'p') = \cos(xp) \sin \Theta + \cos(yp) \cos \Theta, \\ \cos(z'p') = \cos(zp) \end{cases}$$

und bezeichnet durch  $\Omega_{p'}$  den Ausdruck, den man erhält, wenn in  $\Omega_p$  die Grössen x, y, z, p durch x', y', z', p' ersetzt werden, so muss identisch

$$\Omega_{p'} = \Omega_p$$

<sup>1</sup> l. c. §. XXXVIII. — Vgl. JANNETAZ: Sur la propag. de la chaleur dans les corps crist. Ann. chim. et phys. IV. Sér. 29, p. 19, 1873.

sein, wenn für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $(x'p')$ ,  $(y'p')$ ,  $(z'p')$ , die oben angegebenen Werthe eingeführt werden. Dies liefert die Gleichungen

$$\begin{array}{l|l}
 k_{11} = (k_{11} \cos \Theta + k_{12} \sin \Theta) \cos \Theta + (k_{21} \cos \Theta + k_{22} \sin \Theta) \sin \Theta, & 1. \\
 k_{12} = (-k_{11} \sin \Theta + k_{12} \cos \Theta) \cos \Theta + (-k_{21} \sin \Theta + k_{22} \cos \Theta) \sin \Theta, & 2. \\
 k_{13} = k_{13} \cos \Theta + k_{23} \sin \Theta, & 3. \\
 k_{21} = -(k_{11} \cos \Theta + k_{12} \sin \Theta) \sin \Theta + (k_{21} \cos \Theta + k_{22} \sin \Theta) \cos \Theta, & 4. \\
 \text{IV. } k_{22} = -(-k_{11} \sin \Theta + k_{12} \cos \Theta) \sin \Theta + (-k_{21} \sin \Theta + k_{22} \cos \Theta) \cos \Theta, & 5. \\
 k_{23} = -k_{13} \sin \Theta + k_{23} \cos \Theta, & 6. \\
 k_{31} = k_{31} \cos \Theta + k_{32} \sin \Theta, & 7. \\
 k_{32} = -k_{31} \sin \Theta + k_{32} \cos \Theta, & 8. \\
 k_{33} = k_{33}. & 9.
 \end{array}$$

Die Gleichungen 1. und 2. geben

$$\begin{cases}
 (k_{11} - k_{22}) \sin \Theta^2 - (k_{12} + k_{21}) \sin \Theta \cos \Theta = 0, \\
 (k_{11} - k_{22}) \sin \Theta \cos \Theta + (k_{12} + k_{21}) \sin \Theta^2 = 0.
 \end{cases}$$

Ist  $\sin \Theta^2$  die Determinante dieser Gleichungen, von Null verschieden, so ist

$$k_{11} = k_{22}, \quad k_{12} + k_{21} = 0.$$

Diese Relationen bestehen also, sobald die z-Axe n-zählige Symmetrieaxe und  $n > 2$  ist.

Aus 3. und 6. folgt

$$\begin{cases}
 k_{13} (\cos \Theta - 1) + k_{23} \sin \Theta = 0, \\
 -k_{13} \sin \Theta + k_{23} (\cos \Theta - 1) = 0.
 \end{cases}$$

Die Determinante dieser Gleichungen ist

$$(\cos \Theta - 1)^2 + \sin \Theta^2;$$

sie verschwindet nur für  $\cos \Theta = 1$ , also ist für jede Symmetrieaxe z

$$k_{13} = k_{23} = 0.$$

Die Gleichungen 5. und 4. werden mit 1. und 2. identisch; 7. und 8. geben für jede Symmetrieaxe z

$$k_{31} = k_{32} = 0.$$

Durch gleichzeitige Vertauschung von  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\cos(xp)$ ,  $\cos(yp)$ ,  $\cos(zp)$  mit den entgegengesetzt gleichen Werthen bleibt  $\Omega_p$  ungeändert, d. h. für die Function  $\Omega_p$  besteht ein Centrum der Symmetrie; es können also die von mir in einer früheren Untersuchung<sup>1</sup> angegebenen Gruppierungen der Unterabtheilungen der Krystallsysteme benutzt werden.

<sup>1</sup> Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse und die Elasticität der Krystalle. Nachrichten der K. G. d. W. zu Göttingen 1884. p. 220 u. 379. Dies. Jahrb. 1885. I. 380.

Die Krystalle des regulären Systems besitzen drei aufeinander senkrechte geradzählige Symmetrieachsen, die zu Coordinatenachsen gewählt werden sollen. Aus dem soeben Bewiesenen folgt also

$$k_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \geq \nu.$$

Diese Symmetrieachsen sind cyklisch vertauschbar; vertauscht man also  $x, y, z$  der Reihe nach mit  $y, z, x$ , so müssen  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  der Reihe nach in  $\Omega_y, \Omega_z, \Omega_x$  übergehen.

Hieraus folgt

$$k_{11} = k_{22} = k_{33},$$

so dass für das reguläre System die Gleichungen gelten

$$\text{V.} \quad \Omega_x = k_{11} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \Omega_y = k_{11} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Omega_z = k_{11} \frac{\partial v}{\partial z};$$

und diese Formeln gelten augenscheinlich für irgend welche rechtwinklige Coordinatenachsen.

Die Krystalle des hexagonalen Systems besitzen entweder eine 6-zählige oder eine 3-zählige Symmetrieaxe; wird dieselbe zur  $z$ -Axe genommen, so ergibt sich

$$\text{VI*} \quad \left| \begin{array}{l} k_{11} = k_{22}, \quad k_{12} + k_{21} = 0, \\ k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = 0. \end{array} \right.$$

In den Fällen der pyramidalen Hemiëdrie und der rhomboëdrischen Tetartoëdrie, sowie der zweiten und vierten Hemimorphie des hexagonalen Systems ergeben sich keine weiteren Beziehungen zwischen den Wärmeleitungscoëfficienten und es ist

$$\text{VI.} \quad \left| \begin{array}{l} \Omega_x = k_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \Omega_y = -k_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + k_{11} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \Omega_z = k_{33} \frac{\partial v}{\partial z}. \end{array} \right.$$

In allen übrigen Fällen sind 2-zählige, zur  $z$ -Axe senkrechte Symmetrieachsen oder durch die  $z$ -Axe gehende Symmetrieebenen vorhanden; da für  $\Omega_p$  auch ein Centrum der Symmetrie besteht, so treten derartige Axen und Ebenen der Symmetrie in thermischer Beziehung immer gleichzeitig auf und hieraus folgt, dass jedesmal

$$\text{VII.} \quad k_{12} = k_{21} = 0$$

ist, wenn eine der Axen  $x$  oder  $y$  mit einer der 2-zähligen Symmetrieaxen zusammenfällt. Demnach ist für alle Fälle des hexagonalen Systems mit Ausnahme der oben bezeichneten

$$\text{VIII.} \quad \Omega_x = k_{11} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \Omega_y = k_{11} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Omega_z = k_{33} \frac{\partial v}{\partial z}$$

Man übersieht sogleich, dass diese Gleichungen auch gültig sind, wenn die Axen  $x$  und  $y$  irgend welche Winkel mit den 2-zähligen Symmetrieaxen bilden.

Die Krystalle des tetragonalen Systems besitzen entweder eine 4-zählige Symmetrieaxe oder eine 2-zählige, die einseitig von der zweiten Art ist; die Periode der letzteren Axe wird aber auf 4 erhöht für solche Functionen, für die ein Centrum der Symmetrie besteht. Die Krystalle des tetragonalen Systems erhalten also für solche Functionen Symmetrieverhältnisse, die entweder mit denen der holoëdrischen Krystalle oder denen der pyramidal-hemiëdrischen Krystalle übereinstimmen. Im letzteren Fall, zu dem ausser der pyramidalen Hemiëdrie nur noch die sphenoidische Tetartoëdrie sowie zwei Hemimorphien (von zweifelhafter Existenz) gehören, ist nur eine einzige (4-zählige) Symmetrieaxe  $z$  vorhanden, es gelten also die Formeln VI\* und VI.; für die übrigen Krystalle sind noch 2-zählige zu jener Axe senkrechte Axen der Symmetrie vorhanden, es kommt also die Relation VII. hinzu und demnach gelten die Formeln VIII.

Die Krystalle des rhombischen Systems besitzen auch für solche Functionen, die kein Centrum der Symmetrie haben, drei zu einander senkrechte Symmetrieaxen. Wählt man sie zu Coordinatenaxen, so ergibt sich

$$k_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \geq \nu,$$

also ist

$$\text{IX.} \quad \Omega_x = k_{11} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \Omega_y = k_{22} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Omega_z = k_{33} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Die Krystalle des monoklinen Systems besitzen eine 2-zählige Symmetrieaxe; wird dieselbe zur  $z$ -Axe genommen, so ist

$$k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = 0$$

und man hat

$$\text{X.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_x = k_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \Omega_y = k_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \Omega_z = k_{33} \frac{\partial v}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Für die Krystalle des triklinen Systems ergibt sich aus Symmetrieeigenschaften keine Beziehung zwischen den Grössen  $k$ .

Spuren des Nichtbestehens der Gleichungen III können also bei Krystallen des regulären und rhombischen Systems nicht vorkommen, möglicherweise aber bei gewissen oben bezeichneten Formen des hexagonalen und tetragonalen Systems, sowie bei monoklinen und triklinen Krystallen.

Greifswald, Juni 1885.

---



# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1886

Band/Volume: [1886](#)

Autor(en)/Author(s): Minnigerode Bernhard

Artikel/Article: [Ueber Wärmeleitung in Krystallen 1-13](#)