Ueber die Bestimmung der Lichtbrechungsverhältnisse doppeltbrechender Krystalle durch Prismenbeobachtungen.

Von

Th. Liebisch in Königsberg i. Pr.

(Mit 1 Holzschnitt.)

---

§. 1.

Aus dem HUYGHENS'schen Princip ergiebt sich, dass bei der Brechung, die bei dem Durchgange des Lichtes durch ein von einem homogenen isotropen Mittel umgebenes Prisma eines homogenen anisotropen Mittels stattfindet, 1^0 eine ebene Welle, deren Einfallsebene senkrecht zur Prismenkante ist, eben und parallel zur Prismenkante bleibt, 2^0 die gebrochene Wellenebene durch zwei Grössen vollständig bestimmt ist: durch den Winkel ψ, den ihre Normale mit einer gegen das Prisma festen Ebene, z. B. mit der Halbirungsebene des inneren Prismenwinkels, einschliesst, und durch ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{p}$. Zwischen diesen beiden Grössen und den am Prisma mit Hülfe eines Spectrometers zu messenden vier Winkeln — dem Prismenwinkel, der Ablenkung, dem Eintritts- und dem Austrittswinkel — bestehen Relationen, welche gestatten die Elemente ψ, $\mathfrak{p}$ einer gebrochenen Welle zu bestimmen ohne das Gesetz zu benutzen, welches die Abhängigkeit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ von der Fortpflanzungsrichtung in dem anisotropen Mittel ausdrückt.

Wir werden zunächst die in Rede stehenden Relationen zusammenstellen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}$ die Eintrittsfläche, mit $\mathfrak{G}'$ die Austrittsfläche des Prismas, mit A den inneren Prismenwinkel ($\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$), mit i die Neigung der einfallenden Welle zur Eintrittsfläche, mit i' die Neigung der austretenden Welle zur Austrittsfläche, mit r und r' die Winkel zwischen der gebrochenen Wellenebene und den Flächen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, mit $\mathfrak{p}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und mit n das Brechungsverhältniss der gebrochenen Welle, wobei die Geschwindigkeit des Lichtes in dem äusseren isotropen Mittel gleich 1 gesetzt wird, so dass $n = 1/\mathfrak{p}$ ist; ferner mit ψ die Neigung der Normale der gebrochenen Welle zur Halbirungsgeraden des Winkels A und mit D den Winkel zwischen der eintretenden und der austretenden Welle.

Zwischen den sieben Grössen A, i, i', r, r', n, D bestehen, wie sich aus dem Huyghens'schen Princip ergiebt, die folgenden vier Beziehungen:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \sin i & = n \sin r \\
(2) & \sin i' & = n \sin r' \\
(3) & r + r' & = A \\
(4) & i + i' & = A + D
\end{array}$$

aus denen drei jener Grössen eliminirt werden können. Die übrig bleibende Relation zwischen den vier anderen Grössen dient dazu, eine derselben zu berechnen, wenn die drei übrigen gegeben sind. (1) und (2) kann man ersetzen durch:

$$(1^*) \qquad \sin\frac{i+i'}{2}\cos\frac{i-i'}{2} = n\sin\frac{r+r'}{2}\cos\frac{r-r'}{2},$$

$$(2^*) \qquad \sin\frac{i-i'}{2}\cos\frac{i+i'}{2} = n\sin\frac{r-r'}{2}\cos\frac{r+r'}{2}.$$

Hieraus erhält man durch Elimination von n:

$$(5) \qquad \tan\frac{r-r'}{2} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{i-i'}{2}\cot\frac{i+i'}{2} = \frac{C}{S}\tan\frac{i-i'}{2}$$

wenn:

$$C = \frac{\cos\frac{A+D}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad S = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

gesetzt wird, oder, indem man noch i' und r' und darauf i' und r eliminirt:

$$(6) \qquad \tan\left(r-\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{A}{2}\tan\left(i-\frac{A+D}{2}\right)\cot\frac{A+D}{2} = \tan\left(\frac{A}{2}-r'\right).$$

Auf diese Weise sind r und r' als Functionen von A, D, i dargestellt. Da:

$$(7)\qquad \psi = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2} = \frac{\pi}{2} + r - \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{A}{2}$$

ist, so folgt aus (5):

$$(8)\qquad \tan\psi = -\frac{S}{C}\cot\frac{i - i'}{2}.$$

Ferner ergiebt sich aus (1*) und (2*) durch Multiplication von einander entsprechenden Seiten:

$$(9)\qquad n^2 = \frac{\sin i + i'}{\sin r + r'}\ \frac{\sin i - i'}{\sin r - r'},$$

durch Elimination von $\frac{r - r'}{2}$:

$$(10)\qquad n^2 = C^2 \sin^2\frac{i - i'}{2} + S^2 \cos^2\frac{i - i'}{2}$$

oder:

$$(11)\qquad n^2 = \frac{\sin^2 i + \sin^2 i' + 2 \sin i \sin i' \cos A}{\sin^2 A}$$

und durch Elimination von $\frac{i - i'}{2}$:

$$(12)\qquad \frac{1}{n^2} = \mathfrak{p}^2 = \frac{1}{C^2}\sin^2\frac{r - r'}{2} + \frac{1}{S^2}\cos^2\frac{r - r'}{2}$$

oder nach (7):

$$(13)\qquad \frac{1}{n^2} = \mathfrak{p}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{S^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2}\right)\cos 2\psi.$$

Durch Beobachtungen können die Winkel A, D, i, i' bestimmt werden; zwischen ihnen besteht die Relation (4), so dass drei dieser Winkel zur Berechnung der Elemente ψ, $\mathfrak{p}$ der gebrochenen Welle erforderlich und ausreichend sind.

Sind A, i, i' gegeben, so berechnet man aus (5) die Differenz $r - r'$ und findet dann ψ aus (7) und, da die Summe $r + r'$ bekannt ist, $\mathfrak{p}$ aus (1) und (2) oder besser aus (1*) und (2*); die Benützung eines dieser Formelpaare gewährt eine Verification der Rechnung.

Sind A, D, i gegeben, so berechnet man zunächst r oder r' aus (6) und alsdann ψ und $\mathfrak{p}$ wie im vorhergehenden Falle.

Diese Relationen gelten für irgend wie beschaffene homogene Körper und sind vollständig unabhängig von der Gestalt der Wellenfläche und der Orientirung des Prismas. Hierauf gründet sich die von G. G. STOKES vorgeschlagene, von R. T. GLAZEBROOK am Kalkspath und Aragonit ausgeführte Methode zur experimentellen Prüfung der HUYGHENS'schen und FRESNEL'schen Gesetze der Doppelbrechung und die von V. VON LANG unternommene Bestimmung der Gestalt der Wellenfläche im Quarz [1].

Nimmt der Einfallswinkel i in der Querschnittsebene des Prismas alle möglichen Werthe an, so umhüllen die gebrochenen, von dem Einfallspunkte O ausgehenden und zur Prismenkante parallelen Wellenebenen nach der Zeiteinheit die um O als Mittelpunkt beschriebene Strahlenfläche, also auch den dieser Fläche umschriebenen Cylinder, dessen Erzeugende der Prismenkante parallel sind. Die von O auf die Wellenebenen gefällten Normalen, deren Längen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$ dieser Wellen repräsentiren, bestimmen durch ihre Endpunkte die Schnittcurve $\mathfrak{P}$ der Wellenfläche mit dem Querschnitt des Prismas. $\mathfrak{P}$ ist die Fusspunktcurve jener Curve $\mathfrak{R}$, welche der Cylinder auf dem Querschnitt erzeugt. Bezeichnen wir mit P den Fusspunkt der Normale einer bestimmten Wellenebene ($OP = \mathfrak{p}$), mit R den Berührungspunkt dieser Wellenebene auf der Curve $\mathfrak{R}$, so ist

[1] G. G. STOKES: Report on Double Refraction. Rep. British Assoc. for 1862. London 1862, 272.

—, Sur l'emploi du prisme dans la vérification de la loi de la double réfraction. Compt. rend. 1872, **77**, 1150.

—, On the Law of extraordinary Refraction in Iceland Spar. Phil. Mag. 1872 (4), **44**, 316.

R. T. GLAZEBROOK: An Experimental Investigation into the Velocities of Normal Propagation of Plane Waves in a Biaxal Crystal, with a Comparison of the Results with Theory. Proceed. Roy. Soc. London 1878, **27**, 496—502.

—, On Plane Waves in a Biaxal Crystall. (An Experiment. Determination of the Values of the Veloc. of Norm. Propag. of Plane Waves in different directions in Biaxal Cryst., and a Comp. of the Results with Theory.) Philos. Trans. London 1879, **1**, 287—377.

—, Double Refraction and Dispersion in Iceland Spar: an Experimental Investigation, with a Comparison with HUYGHEN's Construction for the Extraordinary Wave. Philos. Trans. London 1880, **2**, 421; dies. Jahrb. 1882. II. 2.

V. v. LANG: Über die Lichtgeschwindigkeit im Quarze. Sitzungsber. Wien. Akad. 1869, **60** (2), 767. POGG. Ann. 1870, **140**, 460.

OR die Projection des zu der Wellennormale OP gehörigen Strahles auf den Querschnitt des Prismas. Durchläuft P die Curve $\mathfrak{P}$, so beschreibt R die Curve $\mathfrak{R}$.

Sind nun an einem Prisma die Winkel A, D, i, i' gemessen und ist daraus ein Werthepaar ψ, $\mathfrak{p}$ berechnet, so kennt man die Richtung und die Grösse eines Radius der Curve $\mathfrak{P}$. Hieraus ist ersichtlich, dass die Schnittcurve der Wellenfläche des Prismas mit der Querschnittsebene desselben experimentell durch eine beliebige Zahl ihrer Punkte ermittelt werden kann, und darin besteht die Methode von Stokes.

§. 2.

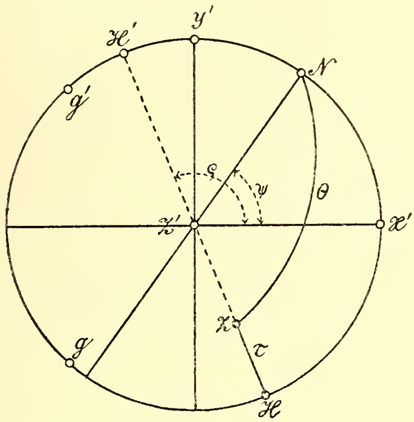
Es erhebt sich nun die Frage, ob auf demselben Wege, der die Gestalt und Lage der Curve $\mathfrak{P}$ im Prismenquerschnitt zu bestimmen gestattet, auch die Gestalt der Wellenfläche selbst und ihre Lage in Bezug auf das Prisma gefunden werden kann; m. a. W. ob man aus dem Prismenwinkel A und einer gewissen Anzahl von Werthepaaren ψ, $\mathfrak{p}$ die Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten und die Lage der optischen Symmetrieaxen in Bezug auf das Prisma berechnen kann.

Bevor ich diese Frage allgemein beantworte, werde ich den besonderen Fall der optisch einaxigen Krystalle behandeln. Diese Krystalle sind dadurch ausgezeichnet, dass ihre beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten für eine homogene Lichtsorte an einem beliebig geschnittenen Prisma durch je eine Beobachtung für eine gewöhnliche und eine ungewöhnliche Wellenebene vollständig bestimmt werden können, wenn die krystallographische Orientirung der Flächen des Prismas bekannt ist. Die Möglichkeit der Durchführung dieser Bestimmung beruht darauf, dass mit der Orientirung der Prismenflächen die Lage der optischen Axe, also auch die Lage der Wellenfläche in Bezug auf das Prisma gegeben ist.

Die in Betracht kommenden Geraden und Ebenen seien durch den Einfallspunkt O gelegt, der zum Mittelpunkt einer Constructionskugel gewählt werden möge (vgl. Figur.) Es bedeuten g und g' die Normalen der Eintrittsfläche $\mathfrak{G}$ und der Austrittsfläche $\mathfrak{G}'$, so dass

$$(g g') = \pi - A.$$

Wir führen ein rechtwinkliges Coordinatensystem X', Y', Z' mit dem Mittelpunkte in O ein. Die Prismenkante werde zur Z'-Axe gewählt und über dem Prismenquerschnitt positiv gerechnet, die Y'-Axe halbire den äusseren, die X'-Axe den inneren Prismenwinkel. Die positive Richtung von X' erstrecke sich nach dem Inneren des Prismas, jene von Y' entspreche dem Sinn der Fortpflanzung des Lichtes. Ferner bedeuten Z die optische Axe und HH' die Durchschnittsgerade des Hauptschnittes ZZ' der Prismenkante mit dem Querschnitt X'Y' des Prismas. Die constante Geschwindigkeit der gewöhnlichen Welle werde mit $\mathfrak{o}$, die Hauptlichtgeschwindigkeit der ungewöhnlichen Wellen mit $\mathfrak{e}$ und die entsprechenden Brechungsverhältnisse mit $\omega = 1/\mathfrak{o}$ und $\varepsilon = 1/\mathfrak{e}$ bezeichnet.



Zur Orientirung der Prismenflächen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ sind die Winkel erforderlich, welche $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ mit zwei bekannten Krystallflächen oder Spaltflächen, die nicht gleichzeitig der Prismenkante parallel laufen, einschliessen. Wir setzen voraus, dass die von diesen vier Flächen gebildeten sechs Winkel, die durch eine Relation verbunden sind[1], bekannt seien und dass daraus die Lage der Prismenflächen gegen die optische Axe auf trigonometrischem Wege berechnet sei. Zu diesem Zwecke sind zwei Winkel zwischen der optischen Axe und solchen Richtungen, die in Bezug auf das Prisma eine bekannte Lage

[1] vgl. Th. Liebisch: Geometrische Krystallographie 1881, S. 78 (5).

besitzen, zu berechnen; wir wählen hierzu[1]: 1^0 die Neigung der optischen Axe zum Querschnitt des Prismas:

$$\tau = (ZH) = \frac{\pi}{2} - (ZZ')$$

und 2^0 den Winkel, welchen der Hauptschnitt der Prismenkante mit der Halbirungsebene des inneren Prismenwinkels einschliesst:

$$\varrho = (X'OH').$$

ϱ soll von der Halbirungsebene aus in dem Sinne positiv gerechnet werden, in welchem die positive X'-Axe auf dem kürzesten Wege in die positive Y'-Axe übergeführt wird.

Dem Ellipsoid der Strahlenfläche (Huyghens'schen Wellenfläche), welche O zum Mittelpunkt hat, werde ein Cylinder umschrieben, dessen erzeugende Geraden der Prismenkante parallel laufen. Die Schnittcurve von Cylinder und Einfallsebene ist eine Ellipse $\mathfrak{R}$. Jene Halbaxe von $\mathfrak{R}$, welche auf dem Hauptschnitt der Prismenkante senkrecht steht, ist gleich $\mathfrak{e}$; die in den Hauptschnitt fallende Halbaxe $\mathfrak{h}$ repräsentirt die Geschwindigkeit einer ungewöhnlichen Welle, deren Normale unter dem Winkel τ gegen die optische Axe geneigt ist. Folglich ist:

$$\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{o}^2 \cos^2 \tau + \mathfrak{e}^2 \sin^2 \tau.$$

Es bedeute ON die Normale einer gebrochenen ungewöhnlichen Wellenebene, welche die Ellipse $\mathfrak{R}$ in R berührt; ihre Geschwindigkeit sei:

$$OP = \mathfrak{p} = \frac{1}{n}.$$

Beschreibt R die Ellipse, so durchläuft der Fusspunkt P der Wellennormale das Oval $\mathfrak{P}$, welches die Fusspunktcurve von $\mathfrak{R}$ ist und demnach ebenfalls die Halbaxen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ besitzt. Bezeichnet man die Neigung von ON zur X'-Axe, welche in demselben Sinne wie ϱ gerechnet werden soll, mit ψ und den Winkel zwischen ON und der optischen Axe mit Θ:

$$(NX') = \psi, \quad (NZ) = \Theta,$$

so ist:

$$\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{o}^2 \cos^2 \Theta + \mathfrak{e}^2 \sin^2 \Theta.$$

Aus dem sphärischen Dreieck $NZ'Z$ ergiebt sich:

$$\cos \Theta = \sin (Z'Z) \cos (NZ'Z) = -\cos \tau \cos (\varrho - \psi).$$

[1] vgl. A. Cornu: Ann. scient. de l'école norm. sup. 1874 (2), **3**, 23.

Trägt man diesen Werth in die vorhergehende Relation ein, so erhält man die Gleichung des Ovals $\mathfrak{P}$ in Polarcoordinaten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^2 &= \mathfrak{h}^2 \cos^2(\varrho - \psi) + \mathfrak{e}^2 \sin^2(\varrho - \psi) \\ &= \frac{1}{2}(\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}^2) + \frac{1}{2}(\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{e}^2)\cos 2(\varrho - \psi).\end{aligned}$$

Wenn nun an einem Prisma, dessen Orientirung durch die Winkel τ, ϱ gegeben ist, der Prismenwinkel A, der Einfallswinkel i einer parallel zur Prismenkante eintretenden Wellenebene und die Ablenkungen D, D_u der beiden austretenden Wellenebenen gemessen sind, so können die Hauptlichtgeschwindigkeiten in folgender Weise berechnet werden. Man findet die constante Geschwindigkeit $\mathfrak{o}$ der gewöhnlichen Wellen aus:

(14)
$$\left|\begin{aligned}&\tan\left(r - \frac{A}{2}\right) = \tan\frac{A}{2}\tan\left(i - \frac{A + D}{2}\right)\cot\frac{A + D}{2} \\ &\frac{1}{\mathfrak{o}} = \omega = \frac{\sin i}{\sin r},\end{aligned}\right.$$

darauf die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ der gebrochenen ungewöhnlichen Wellenebene aus:

(15)
$$\left|\begin{aligned}&\tan\left(r_u - \frac{A}{2}\right) = \tan\frac{A}{2}\tan\left(i - \frac{A + D_u}{2}\right)\cot\frac{A + D_u}{2} \\ &\frac{1}{\mathfrak{p}} = n = \frac{\sin i}{\sin r_u}\end{aligned}\right.$$

und den Winkel ψ aus:

(16)
$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + r_u.$$

Durch τ, ϱ, ψ ist die Neigung der Wellennormale gegen die optische Axe bestimmt:

17)
$$\cos\Theta = -\cos\tau\cos(\varrho - \psi).$$

Folglich kennt man in der Relation:

(18)
$$\mathfrak{p}^2 = \frac{1}{n^2} = \mathfrak{o}^2\cos^2\Theta + \mathfrak{e}^2\sin^2\Theta$$

alle Grössen bis auf die Hauptlichtgeschwindigkeit $\mathfrak{e}$ der ungewöhnlichen Wellen, die letztere kann also hieraus berechnet werden. Durch Einführung des Hülfswinkels χ gewinnt man die logarithmisch bequemen Formeln:

(18*)
$$\frac{1}{\mathfrak{e}} = \varepsilon = \frac{n\sin\Theta}{\cos\chi}\ ,\quad \sin\chi = \frac{n\cos\Theta}{\omega}.$$

Die umgekehrte Aufgabe besteht darin, aus den Hauptlichtgeschwindigkeiten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{e}$, den Winkeln A, τ, ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ einer zur Prismenkante parallelen ungewöhnlichen Wellenebene der Reihe nach die Winkel ψ, i und D_u zu berechnen. Dazu dienen die Formeln:

$$
(19)\quad \left|\begin{aligned}
\mathfrak{h}^2 &= \mathfrak{o}^2 \cos^2\tau + \mathfrak{e}^2 \sin^2\tau \\
\cos 2(\varrho - \psi) &= \frac{2\mathfrak{p}^2 - (\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{e}^2)}{\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{e}^2} \\
\mathrm{r} = \psi + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{2} &\quad , \quad \mathrm{r}' = A - \mathrm{r} \\
\sin \mathrm{i} = \frac{\sin \mathrm{r}}{\mathfrak{p}} &\quad , \quad \sin \mathrm{i}' = \frac{\sin \mathrm{r}'}{\mathfrak{p}} \\
D_u &= A - \mathrm{i} - \mathrm{i}'
\end{aligned}\right.
$$

Für einen einaxigen Krystall ist jede auf der optischen Axe senkrecht stehende Gerade in optischer Beziehung eine Symmetrieaxe von der Periode 2 und die optische Axe selbst ist eine ∞-zählige Symmetrieaxe; ein Prisma desselben von der Beschaffenheit, dass eine der Axen X', Y' oder die Prismenkante Z' auf der optischen Axe senkrecht steht oder mit ihr zusammenfällt, ist daher durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichnet. Wir können sechs, durch specielle Werthe von ϱ und τ charakterisirte Fälle unterscheiden.

1. Die X'-Axe steht senkrecht zur optischen Axe, m. a. W. die Halbirungsgerade des inneren Prismenwinkels A steht senkrecht zum Hauptschnitt der Prismenkante; dann ist $\varrho = \frac{\pi}{2}$, während die Neigung τ der optischen Axe zum Prismenquerschnitt jeden beliebigen Werth zwischen 0 und π annehmen kann: $\pi > \tau > 0$.
2. Die Y'-Axe steht senkrecht zur optischen Axe, m. a. W. der Hauptschnitt der Prismenkante halbirt den inneren Winkel A des Prismas; in diesem Falle ist $\varrho = 0$ oder $= \pi$ und: $\pi > \tau > 0$.
3. Die Z'-Axe steht senkrecht zur optischen Axe, m. a. W. die optische Axe liegt im Querschnitt des Prismas; alsdann ist $\tau = 0$ oder $= \pi$ und ϱ hat einen zwischen 0 und π liegenden Werth.
4. Die X'-Axe ist parallel zur optischen Axe, m. a. W. die optische Axe halbirt den Prismenwinkel A; demnach ist $\varrho = 0$ oder $= \pi$, $\tau = 0$ oder $= \pi$.

5. Die Y′-Axe ist parallel zur optischen Axe, m. a. W. die optische Axe halbirt den Winkel π—A; folglich ist $\varrho = \frac{\pi}{2}$, $\tau = 0$ oder $= \pi$.
6. Die Z′-Axe ist parallel zur optischen Axe, dann ist ϱ unbestimmt und $\tau = \frac{\pi}{2}$.

In diesen sechs Fällen vereinfacht sich die Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten, wie leicht zu ersehen ist.

§. 3.

Wir betrachten jetzt ein Prisma eines optisch zweiaxigen Krystalls und stellen die Gleichung der Curve $\mathfrak{P}$ auf, in der die Wellenfläche des Krystalls von der Querschnittsebene des Prismas geschnitten wird. Wir bezeichnen die Hauptlichtgeschwindigkeiten mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die optischen Symmetrieaxen mit X, Y, Z und die Richtungscosinusse von X′, Y′, Z′ in Bezug auf jene Axen mit $\alpha \ldots \gamma_2$:

(20)

	X	Y	Z
X′	α	β	γ
Y′	α_1	β_1	γ_1
Z′	α_2	β_2	γ_2

Bedeuten x, y, z die Coordinaten eines Punktes bezogen auf die optischen Symmetrieaxen, x′, y′, z′ die Coordinaten desselben Punktes in dem durch das Prisma fixirten Axensystem, so ist:

$$\text{(21)} \quad \begin{aligned} x &= \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z' \\ y &= \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z' \\ z &= \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z' \end{aligned}$$

und es bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \text{ u. s. w.} \\ &\alpha^2 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 = 1, \text{ u. s. w.} \\ &\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0, \text{ u. s. w.} \\ &\beta \gamma + \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 = 0, \text{ u. s. w.} \\ &x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Wellenfläche lautet:

$$\text{(22)} \quad \frac{x^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{p}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{p}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{p}^2} = 0$$

Um die Gleichung der Schnittcurve $\mathfrak{P}$ von Einfallsebene ($z' = 0$) und Wellenfläche, bezogen auf das Axensystem x', y', z', zu bilden, haben wir die Werthe (21) in die Gleichung (22) einzutragen und dabei $z' = 0$ zu setzen:

$$\frac{(\alpha x' + \alpha_1 y')^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{p}^2} + \frac{(\beta x' + \beta_1 y')^2}{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{p}^2} + \frac{(\gamma x' + \gamma_1 y')^2}{\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{p}^2} = 0. \tag{23}$$

oder, wenn hierin:

$$\left| \begin{array}{l} x' = \mathfrak{p} \cos \psi \\ y' = \mathfrak{p} \sin \psi \end{array} \right.$$

gesetzt und das Resultat nach $\mathfrak{p}$ geordnet wird:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \qquad & \mathfrak{p}^4 - \mathfrak{p}^2 (L \cos^2 \psi + L_1 \sin^2 \psi + 2 L_2 \cos \psi \sin \psi) \\ & \quad + M \cos^2 \psi + M_1 \sin^2 \psi + 2 M_2 \cos \psi \sin \psi = 0 \end{aligned}$$

worin:

$$(24) \quad \left| \begin{array}{l} L = (\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2) \alpha^2 + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2) \beta^2 + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2) \gamma^2 \\ L_1 = (\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2) \alpha_1{}^2 + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2) \beta_1{}^2 + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2) \gamma_1{}^2 \\ L_2 = (\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2) \alpha \alpha_1 + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2) \beta \beta_1 + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2) \gamma \gamma_1 \\ M = \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 \alpha^2 + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{a}^2 \beta^2 + \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \gamma^2 \\ M_1 = \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 \alpha_1{}^2 + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{a}^2 \beta_1{}^2 + \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \gamma_1{}^2 \\ M_2 = \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 \alpha \alpha_1 + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{a}^2 \beta \beta_1 + \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \gamma \gamma_1 \end{array} \right.$$

I ist die Gleichung der Curve $\mathfrak{P}$ in Polarcoordinaten.

Wir setzen die krystallographische Orientirung des Prismas als bekannt, d. h. die Richtungscosinusse (20) als gegeben voraus; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sollen berechnet werden.

Die Gleichung I nimmt nach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ geordnet die Gestalt an:

$$\mathrm{I}^* \qquad a\, \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 + b\, \mathfrak{c}^2 \mathfrak{a}^2 + c\, \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 + d\, \mathfrak{a}^2 + e\, \mathfrak{b}^2 + f\, \mathfrak{c}^2 + g = 0$$

worin:

$$(25) \quad \left| \begin{array}{l} a = \alpha^2 \cos^2 \psi + \alpha_1{}^2 \sin^2 \psi + 2 \alpha \alpha_1 \cos \psi \sin \psi \\ b = \beta^2 \cos^2 \psi + \beta_1{}^2 \sin^2 \psi + 2 \beta \beta_1 \cos \psi \sin \psi \\ c = \gamma^2 \cos^2 \psi + \gamma_1{}^2 \sin^2 \psi + 2 \gamma \gamma_1 \cos \psi \sin \psi \\ d = -\mathfrak{p}^2 [(\beta^2 + \gamma^2) \cos^2 \psi + (\beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2) \sin^2 \psi + 2 (\beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \psi \sin \psi] \\ e = -\mathfrak{p}^2 [(\gamma^2 + \alpha^2) \cos^2 \psi + (\gamma_1{}^2 + \alpha_1{}^2) \sin^2 \psi + 2 (\gamma \gamma_1 + \alpha \alpha_1) \cos \psi \sin \psi] \\ f = -\mathfrak{p}^2 [(\alpha^2 + \beta^2) \cos^2 \psi + (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2) \sin^2 \psi + 2 (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1) \cos \psi \sin \psi] \\ g = \mathfrak{p}^4 \end{array} \right.$$

Zur Bestimmung von $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ sind drei derartige Gleichungen, also drei Werthepaare ψ, $\mathfrak{p}$ nothwendig:

$$(26) \quad \left| \begin{array}{l} a\, \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 + \ldots\ldots + g = 0 \\ a_1 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 + \ldots\ldots + g_1 = 0 \\ a_2 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 + \ldots\ldots + g_2 = 0 \end{array} \right.$$

Die Lösung ist aber nicht eindeutig. Löst man die Gleichungen (26) nach $\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2$, $\mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$ auf, so erhält man drei Gleichungen von folgender Form:

$$(27)\quad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2 = A\,\mathfrak{a}^2 + B\,\mathfrak{b}^2 + C\,\mathfrak{c}^2 + D \\ \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2 = A_1\mathfrak{a}^2 + B_1\mathfrak{b}^2 + C_1\mathfrak{c}^2 + D_1 \\ \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 = A_2\mathfrak{a}^2 + B_2\mathfrak{b}^2 + C_2\mathfrak{c}^2 + D_2 \end{array}\right.$$

worin die $A, \ldots, D_2$ nur von den gegebenen Coëfficienten $a, \ldots, g_2$ der Gleichungen (26) abhängen. Aus den beiden ersten Gleichungen (27) ergiebt sich:

$$(28)\quad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{a}^2 = \dfrac{E\,\mathfrak{c}^4 + F\,\mathfrak{c}^2 + G}{E_2\,\mathfrak{c}^4 + F_2\,\mathfrak{c}^2 + G_2} \\ \mathfrak{b}^2 = \dfrac{E_1\,\mathfrak{c}^4 + F_1\,\mathfrak{c}^2 + G_1}{E_2\,\mathfrak{c}^4 + F_2\,\mathfrak{c}^2 + G_2} \end{array}\right.$$

worin die $E, \ldots, G_2$ nur von $a, \ldots, g_2$ abhängig sind. Setzt man die Werthe (28) in die dritte Gleichung (27) ein, so erhält man eine Gleichung fünften Grades zur Bestimmung von $\mathfrak{c}^2$. Jeder Wurzel dieser Gleichung entspricht in Verbindung mit (28) ein Werthsystem $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$, welches die gegebenen Gleichungen (26) befriedigt. Die Lösung ist also im Allgemeinen eine fünfdeutige.

Zu demselben Ergebniss führt folgende geometrische Betrachtung. Setzt man:

$$\mathfrak{a}^2 = \xi,\ \mathfrak{b}^2 = \eta,\ \mathfrak{c}^2 = \zeta$$

und fasst man ξ, η, ζ als variable Punktcoordinaten auf, so stellt jede der drei Gleichungen (26) eine Oberfläche zweiten Grades dar:

$$(26^*)\quad \left|\begin{array}{l} \Phi\ = a\,\eta\zeta + \mathfrak{b}\,\zeta\xi + \ldots\ldots + g\ = 0 \\ \Phi_1 = a_1\eta\zeta + \mathfrak{b}_1\zeta\xi + \ldots\ldots + g_1 = 0 \\ \Phi_2 = a_2\eta\zeta + \mathfrak{b}_2\zeta\xi + \ldots\ldots + g_2 = 0 \end{array}\right.$$

Da in diesen Gleichungen die Glieder mit den Quadraten der Coordinaten fehlen, so erhält man auf jeder Coordinatenaxe nur einen im Endlichen gelegenen Schnittpunkt mit einer Fläche Φ. Folglich haben die Flächen Φ, Φ_1, Φ_2 mit den Coordinatenaxen drei unendlich ferne Punkte gemein. Da sie im Ganzen 8 Schnittpunkte besitzen, so schneiden sie sich also noch in fünf im Endlichen liegenden Punkten, deren Coordinaten die der Aufgabe genügenden fünf Werthsysteme $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ liefern.

§. 4.

Ich werde jetzt die durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichneten speciellen Fälle behandeln, nämlich die Fälle, wo 1^0 eine der optischen Symmetrieaxen X, Y, Z mit einer der Axen X', Y', Z' zusammenfällt, oder 2^0 alle drei optischen Symmetrieaxen mit den durch das Prisma fixirten Axen zusammenfallen. Dann nehmen die Richtungscosinusse (20) besondere Werthe an und wir gelangen zu einer Reihe z. Th. bekannter Resultate, deren gemeinsame Quelle die Gleichungen I und I* sind.

Wenn die Halbirungsgerade X' des inneren oder die Halbirungsgerade Y' des äusseren Prismenwinkels eine optische Symmetrieaxe ist, so muss in dem Falle, wo die gebrochene Wellennormale parallel Y', also die gebrochene Wellenebene parallel zur Halbirungsebene des inneren Prismenwinkels ist $\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$, der Eintrittswinkel i gleich dem Austrittswinkel i' sein. Es sind dann die Bedingungen erfüllt, welche bei Prismen isotroper Körper für den Fall des Minimums der Ablenkung gelten[1].

I. Die Halbirungsgerade des inneren Prismenwinkels fällt mit einer optischen Symmetrieaxe zusammen.

Fällt X' mit X zusammen und bezeichnet man die Winkel $(YY') = (ZZ') = \mu$, so haben X' und Y' die Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	1	0	0
Y'	0	$\cos\mu$	$-\sin\mu$

Demnach ergiebt sich aus (25):

$$
(29) \qquad \left|\begin{aligned}
a &= \cos^2\psi \\
b &= \cos^2\mu \sin^2\psi \\
c &= \sin^2\mu \sin^2\psi \\
d &= -\mathfrak{p}^2 \sin^2\psi \\
e &= -\mathfrak{p}^2 [\cos^2\psi + \sin^2\mu \sin^2\psi] \\
f &= -\mathfrak{p}^2 [\cos^2\psi + \cos^2\mu \sin^2\psi] \\
g &= \mathfrak{p}^4
\end{aligned}\right.
$$

so dass I* lautet:

---

[1] Vgl. V. von Lang: Über die Minimum-Ablenkung der Lichtstrahlen durch doppeltbrechende Prismen. Sitzungsber. Wien. Akad. 1858, **33**, 155.

$$(30)\quad \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2\cos^2\psi+\mathfrak{a}^2(\mathfrak{b}^2\sin^2\mu+\mathfrak{c}^2\cos^2\mu) \\ -\mathfrak{p}^2[\mathfrak{a}^2\sin^2\psi+(\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2)\cos^2\psi+(\mathfrak{b}^2\sin^2\mu+\mathfrak{c}^2\cos^2\mu)]+\mathfrak{p}^4=0$$

Ist insbesondere $\psi=\frac{\pi}{2}$, so wird:

$$\left|\begin{array}{l} a=0,\quad b=\cos^2\mu,\quad c=\sin^2\mu \\ d=-\mathfrak{p}^2,\quad e=-\mathfrak{p}^2\sin^2\mu,\quad f=-\mathfrak{p}^2\cos^2\mu,\quad g=\mathfrak{p}^4 \end{array}\right.$$

und aus I* folgt:

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{p}=\mathfrak{a} \\ \mathfrak{p}^2=\mathfrak{b}^2\sin^2\mu+\mathfrak{c}^2\cos^2\mu \end{array}\right.$$

d. h. beim Minimum der Ablenkung liefert die parallel zur Prismenkante polarisirte Welle die Hauptlichtgeschwindigkeit, welche der Halbirungsgeraden des inneren Prismenwinkels entspricht. Die Geschwindigkeit der senkrecht zur Prismenkante polarisirten Welle, die beiden anderen Hauptlichtgeschwindigkeiten und der Winkel μ sind durch die Relation:

$$(31)\qquad \mathfrak{p}_\mu{}^2=\mathfrak{b}^2\sin^2\mu+\mathfrak{c}^2\cos^2\mu$$

verbunden[1].

Die Gleichung (30) nimmt jetzt die Form an:

$$(30^*)\qquad a\,\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2+h\,(\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2)+k=0$$

worin zur Abkürzung:

$$\left|\begin{array}{l} a=\cos^2\psi \\ h=-\mathfrak{p}^2\cos^2\psi \\ k=\mathfrak{a}^2\mathfrak{p}_\mu{}^2-\mathfrak{a}^2\mathfrak{p}^2\sin^2\psi-\mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_\mu{}^2+\mathfrak{p}^4 \end{array}\right.$$

gesetzt ist. Bestimmt man nun durch Beobachtung zwei Werthepaare ψ, $\mathfrak{p}$, so kann man die zugehörigen Gleichungen (30*) nach $\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2$ und $\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2$ auflösen. Der Werth von $\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2$ liefert in Verbindung mit (31) die beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$.

Hierher gehören: 1. Prismen rhombischer Krystalle, deren Flächen in Bezug auf eine der drei krystallographischen Symmetrieaxe einander entsprechen, d. h. einem rhombischen Sphenoïd angehören oder an einer rhombischen Pyramide so liegen wie Flächen eines Sphenoïds; 2. Prismen monokliner Krystalle, deren Flächen bezüglich der krystallographischen Symmetrieaxe gleichberechtigt sind, also Symbole von der Form $h\,k\,l$ und $\bar{h}\,k\,\bar{l}$ besitzen.

---

[1] Vgl. V. von Lang: Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten von Galmei und unterschwefelsaurem Natron. Sitzungsber. der Wien. Akad. 1859, **37**, 379.

II. Die Halbirungsgerade des äusseren Prismenwinkels fällt mit einer optischen Symmetrieaxe zusammen.

Fällt Y' mit X zusammen und bezeichnet man die Winkel $(Y Z') = (Z X') = \mu$, so haben X' und Y' folgende Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	0	$-\sin\mu$	$\cos\mu$
Y'	1	0	0

Demnach ergiebt sich aus (25):

$$
(32)\quad \left|\begin{array}{l}
a = \sin^2\psi \\
b = \sin^2\mu\cos^2\psi \\
c = \cos^2\mu\cos^2\psi \\
d = -\mathfrak{p}^2\cos^2\psi \\
e = -\mathfrak{p}^2[\cos^2\mu\cos^2\psi + \sin^2\psi] \\
f = -\mathfrak{p}^2[\sin^2\mu\cos^2\psi + \sin^2\psi] \\
g = \quad \mathfrak{p}^4
\end{array}\right.
$$

Ist insbesondere $\psi = \frac{\pi}{2}$, so wird:

$$
\left|\begin{array}{l}
a = 1,\ b = 0,\ c = 0, \\
d = 0,\ e = -\mathfrak{p}^2,\ f = -\mathfrak{p}^2,\ g = \mathfrak{p}^4
\end{array}\right.
$$

und aus I* folgt:

$$
\left|\begin{array}{l}
\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \\
\mathfrak{p} = \mathfrak{c}
\end{array}\right.
$$

d. h. beim Minimum der Ablenkung erhalten wir zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten, nämlich die Geschwindigkeiten der beiden Wellen, welche sich in der Richtung der den äusseren Prismenwinkel halbirenden Symmetrieaxe fortpflanzen.

Ist ausser $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ noch ein Werthepaar ψ, $\mathfrak{p}$ durch Beobachtung bestimmt, so liefert I* eine lineare Gleichung zur Berechnung von $\mathfrak{a}^2$; denn I* lautet mit Rücksicht auf (32):

$$
(33)\qquad v\,\mathfrak{a}^2 + w = 0
$$

worin zur Abkürzung:

$$
\left|\begin{array}{l}
v = [\mathfrak{b}^2\cos^2\mu + \mathfrak{c}^2\sin^2\mu - \mathfrak{p}^2)\cos^2\psi \\
w = [\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{p}^2(\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)]\sin^2\psi - \mathfrak{p}^2(\mathfrak{b}^2\cos^2\mu + \mathfrak{c}^2\sin^2\mu)\cos^2\psi + \mathfrak{p}^4
\end{array}\right.
$$

gesetzt ist:

Hierher gehören: 1⁰ die Prismen rhombischer Krystalle, welche von zwei in Bezug auf eine der drei Symmetrieebenen einander entsprechenden Flächen einer rhombischen Pyramide gebildet werden; 2° die Prismen monokliner Krystalle, deren Flächen symmetrisch zur krystallographischen Symmetrieebene liegen.

III. Die Prismenkante fällt mit einer optischen Symmetrieaxe zusammen.

Fällt Z' mit X zusammen und bezeichnet man die Winkel (YX') = (ZY') = μ, so haben X' und Y' die Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	0	$\cos\mu$	$\sin\mu$
Y'	1	0	0

Demnach ergiebt sich aus (25):

$$
(34)\quad \left|\begin{array}{l}
\mathfrak{a} = 0 \\
\mathfrak{b} = \cos^2(\mu+\psi) \\
\mathfrak{c} = \sin^2(\mu+\psi) \\
\mathfrak{d} = -\mathfrak{p}^2 \\
\mathfrak{e} = -\mathfrak{p}^2\sin^2(\mu+\psi) \\
\mathfrak{f} = -\mathfrak{p}^2\cos^2(\mu+\psi) \\
\mathfrak{g} = \quad\mathfrak{p}^4
\end{array}\right.
$$

und aus I* folgt:

$$
(35)\quad \left|\begin{array}{l}
\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \\
\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{b}^2\sin^2(\mu+\psi) + \mathfrak{c}^2\cos^2(\mu+\psi)
\end{array}\right.
$$

d. h. die senkrecht zur Prismenkante polarisirte Welle liefert eine Hauptlichtgeschwindigkeit. Bestimmt man für eine parallel zur Prismenkante polarisirte Welle das zugehörige Werthepaar ψ, $\mathfrak{p}$, so erhält man eine lineare Relation zwischen den beiden anderen Hauptlichtgeschwindigkeiten; zwei derartige Relationen genügen also, um diese Geschwindigkeiten zu bestimmen. Dieses Verfahren zur Bestimmung der drei Hauptlichtgeschwindigkeiten eines optisch zweiaxigen Krystalls an einem Prisma ist von G. G. Stokes vorgeschlagen und von V. von Lang mit grosser Sorgfalt am Gyps durchgeführt worden[1].

[1] G. G. Stokes: On a Formula for determining the Optical Constants of Doubly Refracting Crystals. Cambr. and Dublin Math. Journ. 1846, 1, 183. — Wieder abgedruckt in: Math. and Phys. Papers. Cambridge 1880, 1, 148.

[2] V. von Lang: Grösse und Lage der optischen Elasticitätsaxen beim Gypse. Sitzungsber. Wien. Akad. 1877, 76 (2), 793.

Hierher gehören: 1^0 die Prismen rhombischer Krystalle, welche von zwei, der Zone einer Symmetrieaxe angehörenden ungleichen Flächen gebildet werden; 2^0 die Prismen monokliner Krystalle, deren Flächen in die Zone der krystallographischen Symmetrieaxe fallen.

IV. Die Axen X, Y, Z fallen mit den drei optischen Symmetrieaxen zusammen.

Wir nehmen an, dass X, Y, Z der Reihe nach mit X', Y', Z' zusammen fallen; dann haben X' und Y' die Richtungscosinusse:

	X	Y	Z
X'	1	0	0
Y'	0	1	0

Demnach ergiebt sich aus (25):

$$(36)\qquad \left|\begin{array}{l} a = \cos^2\psi,\ b = \sin^2\psi,\ c = 0 \\ d = -\mathfrak{p}^2\sin^2\psi,\ e = -\mathfrak{p}^2\cos^2\psi,\ f = -\mathfrak{p}^2,\ g = \mathfrak{p}^4 \end{array}\right.$$

Ist insbesondere $\psi = \frac{\pi}{2}$, so wird:

$$\left|\begin{array}{l} a = 0,\ b = 1,\ c = 0 \\ d = -\mathfrak{p}^2,\ e = 0,\ f = -\mathfrak{p}^2,\ g = \mathfrak{p}^4 \end{array}\right.$$

und aus I* folgt:

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{p} = \mathfrak{c} \\ \mathfrak{p} = \mathfrak{a} \end{array}\right.$$

d. h. beim Minimum der Ablenkung erhalten wir die beiden Hauptlichtgeschwindigkeiten, mit denen sich in der Richtung der Halbirungsgeraden des äusseren Prismenwinkels ebene Wellen fortpflanzen. Für das Quadrat der dritten Hauptlichtgeschwindigkeit liefert dann I* mit Rücksicht auf (36) eine lineare Gleichung:

$$(37)\qquad \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{a}^2\sin^2\psi + \mathfrak{b}^2\cos^2\psi$$

so dass nur noch ein Werthepaar ψ, $\mathfrak{p}$ durch Beobachtung zu bestimmen ist.

Hierher gehören die Prismen rhombischer Krystalle, welche von zwei, der Zone einer Symmetrieaxe angehörenden gleichberechtigten Flächen, also den Flächen eines rhombischen Prismas gebildet werden.

§. 5.

Wir werden jetzt die Voraussetzung, dass die Lage der Prismenflächen gegen die optischen Symmetrieaxen bekannt sei, fallen lassen und die im Eingange des §. 2 gestellte Aufgabe allgemein behandeln. Ihre Lösung ist in einer Abhandlung des Herrn A. Brill enthalten, in welcher gezeigt wird, wie man aus einem ebenen Centralschnitt der Strahlenfläche oder der Wellenfläche die Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls und die Lage des Schnittes gegen die optischen Symmetrieaxen bestimmen kann [1]. Diese Untersuchung wurde durch die von Herrn F. Kohlrausch unternommenen Beobachtungen über totale Reflexion an der Oberfläche doppeltbrechender Krystalle veranlasst [2]. Ihre Resultate gestatten aber, wie Herr A. Brill selbst bemerkt [3], mit Ausnahme solcher Centralschnitte, welche optischen Symmetrieebenen parallel laufen, keine Anwendung auf die Messungen von Grenzwinkeln der totalen Reflexion; dagegen sind sie, wie hier gezeigt werden soll, wenigstens soweit sie die Wellenfläche (22) betreffen, auf Prismenbeobachtungen anwendbar.

Die Gleichung I eines ebenen Centralschnittes $\mathfrak{P}$ der Wellenfläche enthält sechs Coëfficienten L, ..., M_2. Es reichen also die Beobachtungen von sechs Werthepaaren ψ, $\mathfrak{p}$ hin, um diese Grössen und damit die Curve $\mathfrak{P}$ zu bestimmen. Die Aufgabe besteht jetzt darin, die Gleichungen (24), welche den Zusammenhang von L, ..., M_2 mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\alpha, \ldots, \gamma_2$ darstellen, nach den letzteren Grössen aufzulösen.

Herr A. Brill hat gefunden, dass die Gleichung, deren Wurzeln die Hauptlichtgeschwindigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind, vom vierten Grade ist. Da sich vier Grössen auf vier verschiedene Arten zu dreien gruppiren lassen, so ist die Lösung eine vierdeutige; darunter befinden sich nur zwei reelle Lösungen, wenn es eine giebt. Durch einen Centralschnitt einer Wellenfläche lässt sich also immer und nur noch eine reelle, von der

---

[1] A. Brill: Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem ebenen Centralschnitte derselben. Sitzungsber. München. Akad. Math.-physik. Classe. 3. Nov. 1883, 423.

[2] vgl. F. Kohlrausch: Wiedem. Ann. 1878, 4, 15.

[3] a. a. O. 424, Anm.

ersten im Allgemeinen verschiedene Wellenfläche legen. Nur für Centralschnitte, welche durch eine optische Axe hindurchgehen, fallen die beiden reellen Lösungen zusammen.

Da Herr A. Brill der ausführlichen Behandlung der Strahlenfläche nur eine kurze Andeutung über die Wellenfläche hinzugefügt hat, so möge es hier, wo ausschliesslich die Wellenfläche in Betracht kommt, gestattet sein, die Übertragung seiner Untersuchung vollständig wiederzugeben.

Aus:

$$\left| \begin{array}{l} 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ L = (b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2 \\ M = b^2 c^2 \alpha^2 + c^2 a^2 \beta^2 + a^2 b^2 \gamma^2 \end{array} \right.$$

und:

$$\left| \begin{array}{l} 0 = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 \\ L_2 = (b^2 + c^2)\alpha\alpha_1 + (c^2 + a^2)\beta\beta_1 + (a^2 + b^2)\gamma\gamma_1 \\ M_2 = b^2 c^2 \alpha\alpha_1 + c^2 a^2 \beta\beta_1 + a^2 b^2 \gamma\gamma_1 \end{array} \right.$$

ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 + c^2 & c^2 + a^2 & a^2 + b^2 \\ b^2 c^2 & c^2 a^2 & a^2 b^2 \end{vmatrix} = -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$

ist:

$$(38) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha^2 = \dfrac{a^4 - L a^2 + M}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ \beta^2 = \dfrac{b^4 - L b^2 + M}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\ \gamma^2 = \dfrac{c^4 - L c^2 + M}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{array} \right.$$

$$(39) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha\alpha_1 = \dfrac{- L_2 a^2 + M_2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ \beta\beta_1 = \dfrac{- L_2 b^2 + M_2}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\ \gamma\gamma_1 = \dfrac{- L_2 c^2 + M_2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{array} \right.$$

In analoger Weise erhält man $\alpha_1{}^2$, $\beta_1{}^2$, $\gamma_1{}^2$. Bildet man nun $\alpha^2 \alpha_1{}^2 = (\alpha\alpha_1)^2$, so ergiebt sich, wenn für a^2 die Bezeichnung u eingeführt wird, eine Gleichung vierten Grades für u:

$$(u^2 - L u + M)(u^2 - L_1 u + M_1) = (- L_2 u + M_2)^2$$

oder:

$$\text{II} \qquad u^4 - a u^3 + b u^2 - c u + d = 0$$

worin zur Abkürzung:

$$\left|\begin{array}{l} a = L + L_1 \\ b = M + M_1 + L L_1 - L_2^2 \\ c = L M_1 + L_1 M - 2 L_2 M_2 \\ d = M M_1 - M_2^2 \end{array}\right.$$

gesetzt ist.

Derselben Gleichung II müssen $\mathfrak{b}^2$ und $\mathfrak{c}^2$ genügen, wie aus $\beta^2 \beta_1{}^2 = (\beta \beta_1)^2$ und $\gamma^2 \gamma_1{}^2 = (\gamma \gamma_1)^2$ folgt. Der Coëfficient a von u^3 ist gleich der Summe der vier Wurzeln $u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq u_4$ der Gleichung II; nun ist:

$$a = L + L_1 = \mathfrak{a}^2 (1 + \alpha_2{}^2) + \mathfrak{b}^2 (1 + \beta_2{}^2) + \mathfrak{c}^2 (1 + \gamma_2{}^2) \tag{40}$$

folglich ist die neben $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ vorhandene vierte Wurzel:

$$\mathfrak{d}^2 = \mathfrak{a}^2 \alpha_2{}^2 + \mathfrak{b}^2 \beta_2{}^2 + \mathfrak{c}^2 \gamma_2{}^2 \tag{41}$$

Bezeichnet man irgend drei der Wurzeln der Gleichung II mit $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ und die vierte Wurzel mit $\mathfrak{d}^2$, so entspricht dieser Annahme eine Wellenfläche mit den Hauptlichtgeschwindigkeiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Die Cosinusse α_2, β_2, γ_2 der Winkel, welche die Prismenkante mit den Symmetrieaxen der Wellenfläche einschliesst, ergeben sich dann aus:

$$\text{III} \qquad \left|\begin{array}{l} \alpha_2{}^2 = 1 - \alpha^2 - \alpha_1{}^2 = \dfrac{\mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2 \mathfrak{d}^2 - (M + M_1)}{(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2)(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)} \\[2ex] \beta_2{}^2 = 1 - \beta^2 - \beta_1{}^2 = \dfrac{\mathfrak{c}^2 \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 \mathfrak{d}^2 - (M + M_1)}{(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2)(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)} \\[2ex] \gamma_2{}^2 = 1 - \gamma^2 - \gamma_1{}^2 = \dfrac{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{d}^2 - (M + M_1)}{(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2)(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2)} \end{array}\right.$$

Wird $\mathfrak{a}^2 \geqq \mathfrak{b}^2 \geqq \mathfrak{c}^2$ vorausgesetzt, so entsprechen den vier möglichen Annahmen die vier Reihen der folgenden Tabelle:

(42)

	1	2	3	4
u_1	$\mathfrak{a}^2$	$\mathfrak{a}^2$	$\mathfrak{a}^2$	$\mathfrak{d}^2$
u_2	$\mathfrak{b}^2$	$\mathfrak{d}^2$	$\mathfrak{b}^2$	$\mathfrak{a}^2$
u_3	$\mathfrak{d}^2$	$\mathfrak{b}^2$	$\mathfrak{c}^2$	$\mathfrak{b}^2$
u_4	$\mathfrak{c}^2$	$\mathfrak{c}^2$	$\mathfrak{d}^2$	$\mathfrak{c}^2$

Gehört III zur ersten Reihe, so erhält man die entsprechenden Werthe für die Quadrate der Richtungscosinusse der Winkel, welche die Prismenkante mit den Symmetrieaxen der drei anderen Wellenflächen einschliesst, indem man auf III dieselben Vertauschungen anwendet, durch welche der Reihe nach die 2., 3., 4. Reihe der Tabelle aus der ersten Reihe hervorgehen.

Da $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$ positive Grössen sind, so ergiebt sich aus (41), dass $\mathfrak{d}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ liegen muss, wenn α_2, β_2, γ_2 reell sind. Um einem reellen Schnitt einer Wellenfläche zu entsprechen, müssen also alle vier Wurzeln der Gleichung II reell und positiv sein. Alsdann giebt es aber, wie Herr A. Brill aus der Discussion der Realitätsverhältnisse von α_2, β_2, γ_2 für die vier möglichen Annahmen (42) entnimmt, immer zwei reelle Wellenflächen, die der Aufgabe genügen, wenn eine vorhanden ist; diese Flächen unterscheiden sich nur hinsichtlich ihrer mittleren Axe $\mathfrak{b}$ (beziehungsweise $\mathfrak{d}$), während die grösste Axe $\mathfrak{a}$ und die kleinste $\mathfrak{c}$ übereinstimmen. Es sind also nur dann die beiden Wellenflächen identisch, wenn $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{d}^2$ ist, d. h. nach (41), wenn:

$$\frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2}}$$

Wird mit A eine optische Axe bezeichnet, so lautet diese Bedingung:

$$\frac{\cos(Z'Z)}{\cos(Z'X)} = \frac{\sin(AZ)}{\sin(AX)}$$

In diesem Falle steht also die Prismenkante Z' auf einer optischen Axe senkrecht.