

Zur Theorie der totalen Reflexion an der Grenze von isotropen und anisotropen Medien¹.

Von

Paul Volkmann in Königsberg i. Pr.

Wenn auch bei dem Vorgang der totalen Reflexion die reflectirte Lichtbewegung für die Beobachtung am wichtigsten ist, so fordert doch die theoretische Betrachtung derselben ein näheres Eingehen auf die dabei gleichfalls auftretende gebrochene Lichtbewegung, welche erfahrungsgemäss bereits in sehr geringer Tiefe verschwindet.

Bei der gewöhnlichen Lichtbewegung, wie sie auch bei dem Vorgang der partiellen Reflexion für die reflectirte und gebrochene Welle erhalten bleibt, setzt MAC CULLAGH für die Bewegung der Äthertheilchen allgemein:

$$\left| \begin{array}{l} \xi = p \cos \alpha \sin \varphi + q \cos \alpha' \cos \varphi \\ \eta = p \cos \beta \sin \varphi + q \cos \beta' \cos \varphi \\ \zeta = p \cos \gamma \sin \varphi + q \cos \gamma' \cos \varphi \end{array} \right.$$

$$\text{wo: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (l_1 x + m y + n z - s t)$$

Diese Bewegung stellt im Allgemeinen elliptisch polarisiertes Licht dar, p, q sind irgend zwei conjugirte Halbmesser der Schwingungsellipse, α, β, γ resp. α', β', γ' die Winkel, welche p resp. q mit der xyz Axe machen, lmn die Richtungsco-

¹ Auszug aus der Abhandlung des Verf. „Über MAC CULLAGH's Theorie der Totalreflexion für isotrope und anisotrope Medien“. Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Sitzung vom 7. November 1885.

sinus der Wellennormalen, λ die Wellenlänge, s die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts.

Die Annahme der Incompressibilität des Äthers:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

führt hier auf die Gleichungen:

$$\begin{cases} l \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos \gamma = 0 \\ l \cos \alpha' + m \cos \beta' + n \cos \gamma' = 0 \end{cases}$$

und damit auf die Transversalität der Lichtbewegung.

Bei der im Fall der totalen Reflexion auftretenden Lichtbewegung der gebrochenen Welle setzt MAC CULLAGH:

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon (p \cos \alpha \sin \varphi + q \cos \alpha' \cos \varphi) \\ \eta = \varepsilon (p \cos \beta \sin \varphi + q \cos \beta' \cos \varphi) \\ \zeta = \varepsilon (p \cos \gamma \sin \varphi + q \cos \gamma' \cos \varphi) \end{cases}$$

$$\text{wo: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - st)$$

$$- \frac{2\pi}{\lambda} r (fx + gy + hz)$$

$$\varepsilon = e$$

Der Unterschied dieser Formeln von den vorigen beruht auf dem Hinzutreten des Factors ε , in dem r ein in jedem Fall zu bestimmender Factor, fgh die Richtungscosinus der Normalen der Grenzfläche¹, an der die totale Reflexion stattfindet, bedeuten.

Die durch die Richtungen fgh lmn gelegte Ebene ist die Einfallsebene der auffallenden Lichtbewegung.

Die Annahme der Incompressibilität des Äthers lässt hier eine Transversalität der Lichtbewegung im Allgemeinen nicht zu, und spricht den Satz von MAC CULLAGH aus:

Die Projection der Schwingungsellipse auf die Einfallsebene hat zu conjugirten Durchmesserlinien, welche parallel zur Grenzebene des Mediums und zur Wellenebene sind, ihre Längen verhalten sich, wie $r : 1$.

Eine transversale Schwingung kann danach für die bei der totalen Reflexion auftretende gebrochene Welle nur senkrecht zur Einfallsebene auftreten und ist dann linear polarisirt. In allen andern Fällen ist die Bewegung der Äthertheil-

¹ Wenigstens ergeben die später eingeführten Grenzbedingungen diese Bedeutung. Der Einfachheit halber ist schon hier die Bezeichnung Grenzfläche und Einfallsebene benutzt.

chen eine elliptische, ohne transversal zu sein. Hervorgehoben möge noch der Fall werden, wo die Schwingungsebene in der Einfallsebene liegt, dieselbe also senkrecht zur Wellenebene steht.

Die Einsetzung der Werthe $\xi\eta\zeta$ in die bekannten Differentialgleichungen der Ätherbewegung:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - b^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - a^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

liefert nun einmal Gleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit s und den in dem Ausdruck für ε vorkommenden Factor r . Diese Gleichungen liefern für eine gegebene Wellenebene entsprechend der gewöhnlichen Lichtbewegung je nach dem Polarisationszustand einen zweifachen Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit s , worauf auch im Falle der totalen Reflexion die Doppelbrechung beruht. Die Bezeichnung der ordinären und extraordinären Wellenbewegung kann daher auch auf die bei der totalen Reflexion auftretende gebrochene Wellenbewegung übertragen werden.

Es folgen für optisch zweiaxige Medien und für die extraordinäre Wellenbewegung in optisch einaxigen Medien weitere Relationen, deren geometrische Deutung Aufschluss über die Ebene der Schwingungseellipse giebt. Im Falle optisch zweiaxiger Medien lautet die von MAC CULLAGH gegebene Regel:

Man suche die Schnittellipsen der Kreisschnitte des Indexellipsoides¹ mit dem durch die Grössen r, l, m, n, f, g, h benannten Projectionscyliner; es seien $p_1 p_2$ die grossen Halbachsen, $q_1 q_2$ die kleinen Halbachsen derselben. Nun verbinde man die Endpunkte der grossen und der kleinen Halbachsen und theile jede dieser Verbindungslinien in dem Verhältniss von $\sqrt{p_1^2 - q_1^2} : \sqrt{p_2^2 - q_2^2}$. Die Ebene, welche durch diese Theilungspunkte und durch den Mittelpunkt der ersten Schnittellipsen gelegt wird, hat die Lage der Ebene der Schwingungseellipse.

Im Falle einer extraordinären Wellenbewegung bei optisch

¹ Es ist das Ellipsoid $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$, wo $a b c$ die 3 Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls sind. Cf. TH. LIEBISCH: dies. Jahrb. 1885. II. 187.

einaxigen Medien liegt die Ebene der Schwingungsellipse senkrecht zur optischen Axe.

Im Falle einer ordinären Wellenbewegung bei optisch einaxigen Medien und im Fall isotroper Medien ist die Lage dieser Ebene a priori unbestimmt, sie ist in jedem Fall aus der einfallenden Lichtbewegung besonders zu bestimmen.

Die bisherigen Resultate gehören MAC CULLAGH an.

F. NEUMANN und G. KIRCHHOFF behalten für die gebrochene Wellenbewegung den bei der partiellen Reflexion und Brechung üblichen Ausdruck bei; dieser nimmt aber bei der totalen Reflexion naturgemäss ein complexes Argument an. Aus diesem Ausdruck kann leicht ein anderer gebildet werden, welcher gleichfalls die Differentialgleichungen befriedigt, aber nur noch reelle Argumente enthält.

Die NEUMANN-MAC CULLAGH'schen Grenzbedingungen (Gleichheit der Verrückungscomponenten zu beiden Seiten der Grenzfläche und Erhaltung der lebendigen Kraft) rechtfertigen einmal die schon oben benutzte Bezeichnungsweise von Grenz- und Einfallsebene, sodann liefern sie die der gewöhnlichen Reflexion entsprechenden bekannten Reflexions- und Brechungsgesetze, also:

$$s = \frac{\sin \omega}{\sin i}$$

wo ω der Brechungswinkel, i der Einfallswinkel.

Bei der Vergleichung der beiden Theorien, welche sich als identisch ergeben, ist zu berücksichtigen, dass die Bedeutung für den Brechungswinkel (ω), für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (s) und die Wellenlänge (λ) eine verschiedene ist. Unterscheiden wir die betreffenden Grössen in der NEUMANN-KIRCHHOFF'schen Theorie durch einen Index von dem in MAC CULLAGH's Theorie, so entspricht der NEUMANN-KIRCHHOFF'sche Ausdruck:

$$\frac{\sin}{\cos} (x \sin \omega' + z \cos \omega' - s't) \frac{2\pi}{\lambda'}$$

$$= e^{-\frac{2\pi z v}{\lambda' s'}} \frac{\sin}{\cos} (x \sin \omega' + \frac{z u}{s'} - s't) \frac{2\pi}{\lambda'}$$

— worin $\cos \omega' = \frac{u + iv}{s'}$ ebenso, wie bei der partiellen Bre-

chung aus der Indexfläche¹ folgt — dem Ausdruck von MAC CULLAGH:

$$e^{-\frac{2\pi z}{\lambda} r \frac{\sin}{\cos} (x \sin \omega + z \cos \omega - st) \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke liefert:

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{v}{\lambda' s'} \quad \frac{\sin \omega}{\lambda} = \frac{\sin \omega'}{\lambda'} \quad \frac{\cos \omega}{\lambda} = \frac{u}{\lambda' s'}$$

und daraus folgen die von MAC CULLAGH gegebenen Relationen:

$$\text{tang } \omega = \frac{\sin i}{u} \quad r = v \frac{\sin \omega}{\sin i} = v s$$

Der Polarisationszustand der total reflectirten Wellenbewegung wird nun von MAC CULLAGH mit Hülfe der Polarisationszustände der zuvor behandelten gebrochenen Wellenbewegung aus der einfallenden Lichtbewegung aus der Gleichheit der Verrückungscomponenten in folgender Weise bestimmt:

Aus der Lage und Form der bei gegebener einfallender Wellennormale bekannten Schwingungsellipse der gebrochenen Welle lassen sich die uniradial einfallenden und reflectirten Schwingungen construiren, das sind solche Schwingungen, welche das gleichzeitige Auftreten zweier gebrochener Wellen ausschliessen. Die gegebene einfallende Lichtbewegung wird nun nach den uniradial einfallenden Schwingungen zerlegt, und jede dieser Componenten für sich behandelt.

Es seien OP und OQ die Halbaxen der Schwingungsellipse der gebrochenen Welle an der Grenzfläche und O der Fusspunkt des Einfallsloths. Man lege ferner durch O zwei Ebenen, welche die Lage der einfallenden und reflectirten Welle darstellen mögen. Man lege nun durch die Halbaxe OP eine Ebene und drehe dieselbe, bis der Winkel der Schnittgeraden dieser Ebene mit den die Lage der einfallenden und reflectirten Wellen darstellenden Ebenen halbirt wird. Zu dieser Lage zeichne man aus den Schnittgeraden das Parallelogramm, zu dem OP die Diagonale ist. Es seien OA und OA' die entsprechenden Seiten desselben. Die gleiche Construction werde mit der Halbaxe OQ gemacht, wodurch die Schnittgeraden OB und OB' erhalten werden. Es wird dann

¹ TH. LIEBISCH: Dies. Jahrb. 1885. II. 185.

die einfallende Schwingung repräsentirt durch die Ellipse, zu der OA und OB conjugirte Halbmesser sind und die reflectirte Schwingung durch die Ellipse, zu der OA' und OB' conjugirte Halbmesser sind. Zugleich ist ersichtlich, dass die Punkte $AA'P$ gleichzeitig, ebenso wie die Punkte $BB'Q$ passirt werden.

Die in dieser Weise construirten uniradial reflectirten Schwingungsellipsen werden zu einer einzigen zusammengesetzt, welche den Polarisationszustand der total reflectirten Lichtbewegung angiebt.

Königsberg i. Pr., 1. November 1885.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1886

Band/Volume: [1886](#)

Autor(en)/Author(s): Volkmann Paul

Artikel/Article: [Zur Theorie der totalen Reflexion an der Grenze von isotropen und anisotropen Medien 205-210](#)