

# Ueber die Totalreflexion an doppelbrechenden Krystallen.

(Zweite Mittheilung\*.)

Von

**Th. Liebisch** in Königsberg i. Pr.

Mit Tafel IV und 1 Holzschnitt.

---

## §. 7.

Es ist eine bekannte, aber bisher noch nicht vollständig erklärte Erscheinung, dass die am Totalreflectometer im Gesichtsfelde des Beobachtungsfernrohres auftretenden Grenzlinien, in denen sich die Gebiete des an einem anisotropen Krystall partiell und total reflectirten Lichtes berühren, im Allgemeinen nicht wie bei der totalen Reflexion an isotropen Mitteln senkrecht zu der Ebene  $\mathcal{E}$  stehen, welche die Normale der Grenzebene des Krystalls und die optische Axe des Fernrohres verbindet. Die senkrechte Lage jener Grenzlinien tritt nur dann ein, wenn die Einfallsebene  $\mathcal{E}$  einer optischen Symmetrieebene des Krystalls parallel läuft oder wenn ihre Durchschnittsgerade mit der Grenzebene eine optische Symmetrieaxe des Krystalls ist.

Um ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu haben, betrachten wir einen optisch einaxigen Krystall, dessen Grenzebene zur optischen Axe unter einem von  $90^\circ$  verschiedenen Winkel geneigt ist. Der Charakter der Doppelbrechung sei positiv. Diffuses homogenes Licht falle von links her auf die in ihrer Ebene drehbare Grenzfläche. Bringt man, während

---

\* Vgl. dies. Jahrb. 1885. II. 181.

das Beobachtungsfernrohr fest steht, den Krystallträger in die Lage, dass im Gesichtsfelde des Fernrohres der Übergang aus dem Gebiet des partiell reflectirten Lichtes (zur Linken) in das Gebiet des total reflectirten Lichtes (zur Rechten) wahrzunehmen ist, so erscheinen zwei Grenzlinien. Die linke Grenze steht vertical und behält ihre Stellung bei der Drehung der Grenzfläche unverändert bei; sie entsteht durch die gewöhnliche Grenzbrechung, für welche die Einfallsebene  $\mathcal{E}$  in jeder Lage eine Symmetrieebene ist. Die rechte Grenzlinie ändert bei der Drehung der Grenzfläche stetig ihren Abstand von der festen Grenze und ihre Neigung gegen dieselbe; sie wird durch die ungewöhnliche Grenzbrechung erzeugt, für welche im Allgemeinen die Ebene  $\mathcal{E}$  nicht Symmetrieebene und die Durchschnittsgerade von  $\mathcal{E}$  mit der Grenzfläche nicht Symmetrieaxe ist. Der Abstand der beiden Grenzlinien von einander erreicht seinen grössten Werth, wenn die Ebene  $\mathcal{E}$  senkrecht zum Hauptschnitt  $\mathcal{H}$  der Grenzfläche steht, den kleinsten, wenn  $\mathcal{E}$  mit  $\mathcal{H}$  zusammenfällt. Die veränderliche Grenzlinie convergirt gegen die feste nach oben, wenn der spitze Winkel zwischen dem Hauptschnitt und der Einfallsebene  $\mathcal{E}$  rechts oben und links unten von  $\mathcal{E}$  liegt, nach unten, wenn sich dieser Winkel rechts unten und links oben von  $\mathcal{E}$  befindet (Taf. IV Fig. 1, 2); sie liegt parallel zur festen Grenze, wenn die Ebenen  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{E}$  einander parallel sind oder senkrecht auf einander stehen. Nun ist der Hauptschnitt der Grenzfläche eine optische Symmetrieebene, die zu ihm senkrechte Gerade eine optische Symmetrieaxe des Krystalls. Demnach nimmt in der That die veränderliche Grenzlinie nur in den durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichneten Positionen der Ebene  $\mathcal{E}$  die besonderen, durch die äussersten Werthe ihres Abstandes von der festen Grenze und durch den Parallelismus mit dieser Grenze bestimmten Lagen an.

Ist der Charakter der Doppelbrechung negativ, so tritt die veränderliche Grenzlinie links von der festen Grenze auf. Im Übrigen gelten aber dieselben Regeln wie in dem vorigen Falle (Taf. IV Fig. 3, 4).

Die vorliegende Mittheilung enthält im Anschluss an meine frühere Abhandlung über die Totalreflexion an doppeltbrechen-

den Krystallen (dies. Jahrb. 1885. II. 181) die Ableitung des Gesetzes, nach welchem die Neigung der Grenzlinien gegen die Einfallsebene  $\mathcal{G}$  abhängt von den Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls, den Grössen, welche die krystallographische Orientirung von Grenzebene und Einfallsebene bestimmen, und der Lichtgeschwindigkeit  $v$  in dem die Grenzebene des Krystalls bedeckenden Mittel  $\mathcal{M}$ .

### §. 8.

#### Die Kegel der Grenzstrahlen.

In dem äusseren Mittel  $\mathcal{M}$  erhalten wir im Allgemeinen in jeder Einfallsebene zwei Paare von Grenzstrahlen der totalen Reflexion. Die Strahlen jedes Paares liegen symmetrisch zur Normale der Grenzebene. Ihre Neigungen gegen diese Normale wurden in §. 5 mit  $i_0$  und  $i_0'$  bezeichnet, derart, dass der Grenzwinkel  $i_0$  der schnelleren,  $i_0'$  der langsameren der beiden Wellen entspricht, deren Normalen  $OP_0$  und  $OP_0'$  in der Einfallsebene  $\mathcal{G}$  liegen und die Grenzbrechung erlitten haben ( $i_0 < i_0'$ ). Die zugehörigen Strahlen  $OS_0$  und  $OS_0'$  liegen stets in der Grenzebene des Krystalls, im Allgemeinen aber nicht in der Einfallsebene.

Nimmt die Einfallsebene auf der Grenzebene  $\mathcal{G}$  alle möglichen Lagen an, so erfüllen die Paare der Grenzstrahlen in dem Mittel  $\mathcal{M}$  zwei zur Normale der Grenzebene symmetrische Kegel  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  mit gemeinsamem Scheitel im Einfallspunkte  $\mathcal{Q}$ .

Wie aus der in §. 5 beschriebenen Construction der Grenzstrahlen folgt, erhält man diese Kegel, indem man die Schnittcurve, welche der zur Normale der Grenzebene parallele Tangencylinder der Indexfläche des Krystalls (die Gesammtheit der Geraden  $\mathcal{A}$ ) auf der Kugel mit dem Radius  $1/v$  (der Indexfläche des äusseren Mittels) erzeugt, mit dem Einfallspunkte verbindet.

Die Kegel  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  können ebensowenig wie die Grenzwinkel  $i_0$  und  $i_0'$  in dem allgemeinsten Falle, wo  $\mathcal{G}$  die Grenzebene eines optisch zweiaxigen Krystalls von beliebiger Richtung ist, auf analytischem Wege getrennt dargestellt werden. Die Gleichung (31) des §. 5, welche die Grenzwinkel  $i_0$  und  $i_0'$  bestimmt, ist, wenn in ihr die zur Orientirung der Einfallsebene dienenden Grössen als Veränderliche betrachtet



werden, die Gleichung jener Kegel in ihrer einfachsten Gestalt. Es ergibt sich aus den Darlegungen des §. 5, dass bei optisch zweiaxigen Krystallen die getrennte analytische Darstellung der Kegel  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$  nur in den Fällen gelingt, wo die Grenzebene einer optischen Symmetrieebene des Krystalls parallel ist.

Geht man von einem äusseren Mittel mit hinreichend kleiner Lichtgeschwindigkeit  $v$  aus, derart, dass die Kegel  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$  gleichzeitig reell sind, so kann man es durch Vergrösserung von  $v$  dahin bringen, dass zunächst der äussere Kegel  $\mathfrak{K}'$  imaginär wird, d. h. dass eine Grenzbrechung nur noch für die schnelleren Strahlen der Grenzebene möglich ist. Bei weiterer Vergrösserung von  $v$  wird auch  $\mathfrak{K}$  imaginär und die Erscheinung der totalen Reflexion verschwindet vollständig.

Die Kegel der Grenzstrahlen sind schon im Jahre 1856 von H. DE SÉNARMONT auf theoretischem Wege gefunden und eingehend beschrieben worden<sup>1</sup>. SÉNARMONT unternahm seine Untersuchung in der Absicht die Gesetze der Doppelbrechung durch eine experimentelle Methode zu prüfen, die sich nicht auf Messungen vereinzelter Werthe von Lichtgeschwindigkeiten beschränkt sondern im Stande ist continuirlich verlaufende Erscheinungen zu liefern. Ist ein Leuchtpunkt L in das äussere isotrope Mittel  $\mathfrak{M}$  eingetaucht, so werden die von L divergirenden Strahlen von der Grenzebene partiell oder total reflectirt. Die Durchschnittspunkte dieser beiden Gruppen von Strahlen mit der Grenzebene werden von einander getrennt durch stetige Grenzcurven, welche den unter den Grenzwinkeln der totalen Reflexion auffallenden Strahlen entsprechen und im weissen Lichte mit Spectralfarben umsäumt erscheinen. Indem SÉNARMONT versuchte diese Farbenringe in ihrer ganzen Ausdehnung zu beobachten, stiess er auf unüberwindliche experimentelle Schwierigkeiten, die ihn an der Vollendung seiner Arbeit gehindert haben. Wenn seine schönen theoretischen Resultate in neuester Zeit unbeachtet ge-

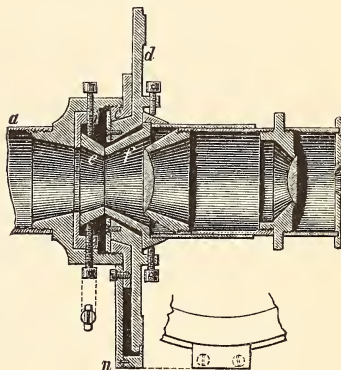
<sup>1</sup> H. DE SÉNARMONT, Recherches sur la double réfraction. Compt. rend. 1856, 42, 65. (Übersetzt in Pogg. Ann. 1856, 97, 605—616.) — Sur la réflexion totale de la lumière extérieurement à la surface des cristaux biréfringents. (Journ. de Mathém. 1856, (2) 1, 305—320.)

blieben sind, so ist dies wohl dem Umstande zuzuschreiben, dass er einen Beweis für die Richtigkeit seines Verfahrens die Grenzstrahlen der totalen Reflexion zu bestimmen nicht mitgetheilt hat.

### §. 9.

#### Experimentelle Hilfsmittel.

Die Grenzlinien, welche man am Totalreflectometer im Fernrohr erblickt, sind die Durchschnittslinien des Gesichtsfeldes mit kleinen Ausschnitten aus den Mänteln der Kegel der Grenzstrahlen. Sie erscheinen nur in dem beschränkten Gesichtsfelde und in Folge der Vergrößerung durch das Fernrohr annähernd geradlinig. Geht eine Grenzlinie durch den Mittelpunkt des Fadenkreuzes, so fällt ein Grenzstrahl *S* mit der optischen Axe des Fernrohres zusammen und das Gesichtsfeld ist jetzt die zu diesem Grenzstrahl senkrecht stehende Ebene. Daher ist die Neigung der Grenzlinie gegen die durch die Normale der Grenzebene und den Strahl *S* gelegte Einfallsebene  $\mathcal{E}$ , in welcher auch der horizontale Faden des Fadenkreuzes liegt, in der Nähe von *S* gleich dem Winkel, den die Ebene  $\mathcal{E}$  mit der in *S* an den Kegel der Grenzstrahlen gelegten Tangentialebene einschliesst.



Zur Messung dieses Winkels dient ein von R. FUESS in Berlin construirtes Oculargoniometer<sup>1</sup>.

In die Hülse *a*, welche in die Objectivhülse des Fernrohres eingeführt wird, ist ein Kopfstück eingeschraubt, welches vorn cylindrisch ausgedreht ist und hier einen schwer drehbaren Ring *i* aufnimmt. Durch länglich geschlitzte Löcher des Kopfstückes dringen vier Justirschrauben, welche

<sup>1</sup> Mit diesem Instrument hat J. DANKER in dem hiesigen mineralogischen Institut eine Reihe von Messungen an Kalkspath, Aragonit und Schwerspath ausgeführt. (Vgl. dies. Jahrb. 1885. Beil.-Bd. IV. 251, 265, 272, 280, 284, 288.)

ihr Muttergewinde in dem Ringe  $i$  finden; sie dienen zur Centrirung des mit einem Fadenkreuz versehenen Diaphragmas  $e$ . Die Gestalt jener Löcher gestattet dem Ringe  $i$  auch nach der Einführung des Oculars in das Fernrohr eine geringe Drehung zu ertheilen und auf diese Weise die Fäden des Fadenkreuzes  $e$  genau in die zur Axe des Goniometers parallele und senkrechte Lage zu bringen. In jenes Kopfstück ist ausserdem ein Hohlkegel eingeschraubt, welcher das Axenlager für den Theilkreis  $d$  bildet. An  $d$  können mit Hülfe des Nonius  $n$  zwei Minuten abgelesen werden. Auf der vorderen Fläche der Scheibe  $d$  befindet sich ein vorspringender Ring, welcher von vier auf die Hülse  $f$  wirkenden Justirschrauben durchsetzt wird. Die Hülse  $f$  enthält hinten ein Diaphragma mit einem diametralen Faden und vorn ein RAMSDEN'Sches Ocular.

Zur Justirung des Oculargoniometers ist zunächst erforderlich, dass der Faden  $f$  durch die Drehungsaxe des Theilkreises  $d$  gehe und der Mittelpunkt des Fadenkreuzes  $e$  in dieselbe Axe falle. Ausserdem muss diese Ocularaxe senkrecht zur Drehungsaxe des ganzen Goniometers gerichtet sein.

Man erreicht diese Einstellung auf folgendem Wege. Zuvörderst stellt man den Faden  $f$ , dessen Drehungsebene dicht an der Ebene des Fadenkreuzes  $e$  liegt und der deshalb gleichzeitig mit  $e$  deutlich gesehen wird, mit Hülfe seiner Justirschrauben so ein, dass er nach einer Drehung des Theilkreises  $d$  um  $180^\circ$  mit seiner ursprünglichen Lage zur Deckung gelangt. Abweichungen von dieser Einstellung können mit Hülfe des von vorn herein nur annähernd justirten Fadenkreuzes  $e$  sehr genau beurtheilt werden. Alsdann wird der Mittelpunkt von  $e$  mit Hülfe der zugehörigen Justirschrauben mit dem Faden  $f$  zur Deckung gebracht. Zum Schluss wird auf dem gewöhnlichen Wege das ganze Fernrohr senkrecht zur Goniometeraxe gerichtet, wobei die vier (in der Figur nicht dargestellten) Justirschrauben der Hülse  $a$  benutzt werden.

### §. 10.

#### Optisch einaxige Krystalle.

Der Charakter der Doppelbrechung sei positiv, dann sind die Grenzwinkel  $i_0$  und  $i_0'$  gegeben durch:

$$\sin i_0 = \frac{v}{a}$$

$$(47) \quad \frac{\sin^2 i_0'}{v^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{c^2 + (a^2 - c^2) \cos^2 \mu}{c^2 + (a^2 - c^2) (\cos^2 \mu + \sin^2 \mu \cos^2 \delta)}$$

Die erste Gleichung stellt einen für jede Lage der Grenz-ebene constanten Kreiskegel  $\mathfrak{K}$  dar, dessen Axe die Normale der Grenzebene  $\mathfrak{G}$  ist; auf demselben liegen in dem äusseren Mittel die Grenzstrahlen der totalen Reflexion, welche den in der Grenzebene enthaltenen ordentlichen Strahlen entsprechen. Betrachtet man in der zweiten Gleichung  $v$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $\mu$  als constant, das Azimut  $\delta$  der Einfallsebene als veränderlich von 0 bis  $2\pi$ , so stellt (47) den Kegel  $\mathfrak{K}'$  dar, auf welchem die den ausserordentlichen Strahlen der Grenzebene entsprechenden Grenzstrahlen in dem äusseren Mittel liegen. Die Gleichung (47) wird nicht geändert, wenn  $i_0'$  durch  $-i_0'$  oder  $\pi - i_0'$  und  $\delta$  durch  $-\delta$  oder  $\pi - \delta$  ersetzt werden. Daraus folgt, dass der Kegel  $\mathfrak{K}'$  symmetrisch ist in Bezug auf die folgenden drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen: die Grenzebene  $\mathfrak{G}$ , den Hauptschnitt  $\mathfrak{H}$  derselben und die zu  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  normale Ebene. Seine Gestalt hängt von der Lage der Grenzebene gegen die optische Axe ab; für eine zu dieser Axe parallele Grenzebene ( $\mu = \pi/2$ ) ist:

$$(58) \quad \sin^2 i_0' = \frac{v^2}{a^2 \cos^2 \delta + c^2 \sin^2 \delta}$$

Steht die Grenzebene senkrecht zur optischen Axe ( $\mu = 0$ ), so geht  $\mathfrak{K}'$  in den Kreiskegel:

$$(59) \quad \sin i_0' = \frac{v}{c}$$

über. — Wir führen ein durch die Symmetrieebenen von  $\mathfrak{K}'$  bestimmtes, also mit der Grenzebene fest verbundenes rechtwinkliges Coordinatensystem ein und wählen die Durchschnittsgerade der Grenzebene mit ihrem Hauptschnitt zur  $\Xi$ -Axe, die Normale dieses Hauptschnitts zur  $H$ -Axe und die Normale der Grenzebene zur  $Z$ -Axe. Dann sind die Coordinaten eines Punktes, der sich in der Entfernung  $x$  vom Einfallspunkte auf dem durch die Winkel  $i_0$  und  $\delta$  seiner Richtung nach bestimmten Grenzstrahle befindet:

$$\left| \begin{array}{l} \xi = x \sin i_0 \cos \delta \\ \eta = x \sin i_0 \sin \delta \\ \zeta = x \cos i_0 \end{array} \right.$$



so dass:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= z^2 \\ \xi^2 + \eta^2 &= (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \sin^2 i_0 \\ \zeta^2 &= (\xi^2 + \eta^2) \cos^2 \delta \end{aligned}$$

Demnach lautet die Gleichung des Kreiskegels:

$$\mathfrak{K} \dots (\alpha^2 - \nu^2) (\xi^2 + \eta^2) - \nu^2 \zeta^2 = 0.$$

In analoger Weise wird durch:

$$\begin{aligned} \xi &= z \sin i_0' \cos \delta \\ \eta &= z \sin i_0' \sin \delta \\ \zeta &= z \cos i_0' \end{aligned}$$

die Gleichung (47) des Kegels  $\mathfrak{K}'$  übergeführt in:

$$\mathfrak{K}' \dots \left( \frac{\alpha^2 c^2}{\alpha^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu} - \nu^2 \right) \xi^2 + (c^2 - \nu^2) \eta^2 - \nu^2 \zeta^2 = 0$$

Für  $\mu = \pi/2$  und  $\mu = 0$  erhält man hieraus an Stelle von (58) und (59):

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \nu^2) \xi^2 + (c^2 - \nu^2) \eta^2 - \nu^2 \zeta^2 &= 0 \\ (c^2 - \nu^2) (\xi^2 + \eta^2) - \nu^2 \zeta^2 &= 0 \end{aligned}$$

Der Differenz der Gleichungen  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$ :

$$\alpha^2 \cos^2 \mu \xi^2 + (\alpha^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu) \eta^2 = 0$$

genügen nur  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ; d. h. die Kegel  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$  haben im Allgemeinen nur ihre Spitze gemein; ist aber die Grenzebene der optischen Axe parallel ( $\cos \mu = 0$ ), so berühren sie sich in den im Hauptschnitt ( $\eta = 0$ ) gelegenen Geraden.

In Folge des positiven Charakters der Doppelbrechung bestehen die Bedingungen:

$$\alpha^2 \geq \frac{\alpha^2 c^2}{\alpha^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu} \geq c^2.$$

Wir wollen nun die Veränderungen verfolgen, welche die Kegel der Grenzstrahlen erleiden, wenn sich das Brechungsverhältniss  $1/\nu$  des äusseren Mittels ändert<sup>1</sup>.

1. Ist  $\nu < c$ , also das Brechungsverhältniss  $1/\nu$  grösser als das Hauptbrechungsverhältniss der ausserordentlichen Strahlen des Krystals, so wird  $\mathfrak{K}'$  von einer zur Grenzebene parallelen Ebene in einer Ellipse geschnitten, deren grössere Axe senkrecht zum Hauptschnitt steht und für jede Neigung der Grenzebene gegen die optische Axe denselben Werth

<sup>1</sup> Vgl. H. DE SÉNARMONT a. a. O.

besitzt (Taf. IV Fig. 5<sup>1</sup>). Die kleinere Ellipsenaxe erhält ihren kleinsten Werth, der gleich dem Radius des Schnittkreises jener Ebene mit  $\mathfrak{K}$  ist, wenn die Grenzebene zur optischen Axe parallel läuft.

2. Ist  $v = c$ , so zerfällt  $\mathfrak{K}'$  in zwei auf dem Hauptschnitt der Grenzebene senkrecht stehende und zur Normale der Grenzebene symmetrische Ebenen, deren Neigung  $\Theta$  gegen diese Normale sich aus:

$$\cot \Theta = \frac{\zeta}{\xi} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu}} \sin \mu$$

ergiebt: diese Ebenen fallen mit der Grenzebene ( $\zeta = 0$ ) zusammen, wenn die letztere auf der optischen Axe senkrecht steht, und sie berühren den Kegel  $\mathfrak{K}$ :

$$(a^2 - c^2)(\xi^2 + \eta^2) - c^2 \zeta^2 = 0$$

in den im Hauptschnitt ( $\eta = 0$ ) gelegenen Geraden, wenn die Grenzebene die Richtung der optischen Axe enthält.

3. Ist  $a > v > c$ , so zerfällt  $\mathfrak{K}'$  auf derjenigen Grenzebene, deren Neigung zur optischen Axe der Bedingung

$$v^2 (a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu) = a^2 c^2$$

genügt, in zwei imaginäre Ebenen:

$$\frac{\zeta}{\eta} = \pm \frac{\sqrt{-(a^2 - c^2)}}{a} \sin \mu$$

Für kleinere Werthe von  $\mu$  ist  $\mathfrak{K}'$  ein imaginärer, für grössere ein reeller Kegel, der von einer zur Grenzebene parallelen Ebene in einer Hyperbel derart geschnitten wird, dass die reelle Hyperbelaxe in die Richtung des Hauptschnittes der Grenzebene fällt (Taf. IV Fig. 6).

Es soll der Winkel  $\chi$  berechnet werden, den die Einfallsebene des durch die Winkel  $\delta$ ,  $i_0'$  fixirten Grenzstrahles S mit der in S an den Kegel  $\mathfrak{K}'$  gelegten Tangentialebene einschliesst. Die Gleichung der Einfallsebene ist:

$$\xi' - \cot \delta \eta' = 0$$

die Gleichung der Tangentialebene:

$$\left( \frac{a^2 c^2}{a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu} - v^2 \right) \xi \xi' + (c^2 - v^2) \eta \eta' - v^2 \zeta \zeta' = 0$$

oder, wenn die auf S. 54 angegebenen Werthe für die Coor-

<sup>1</sup> Die schematische Figur 5 entspricht der Figur 1.

dinaten  $\xi \eta \zeta$  eines Punktes des Grenzstrahles eingesetzt werden:

$$\left( \frac{a^2 c^2}{a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu} - v^2 \right) \cos \delta \zeta' + (c^2 - v^2) \sin \delta \eta' - v^2 \cot i_0' \zeta' = 0$$

Daraus folgt:

$$\cos \chi = \frac{c^2 (a^2 - c^2) \sin^2 \mu \sin \delta \cos \delta}{(a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu) \sqrt{\mathfrak{N}'}}$$

worin zur Abkürzung die Bezeichnung:

$$\mathfrak{N}' = \left( \frac{a^2 c^2}{a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu} - v^2 \right)^2 \cos^2 \delta + (c^2 - v^2)^2 \sin^2 \delta + v^4 \cot^2 i_0'$$

eingeführt ist. Ersetzt man  $\cot^2 i_0'$  durch den aus (47) fließenden Werth, so ergibt sich:

$$(60) \quad \cos \chi = \frac{c (a^2 - c^2) \sin^2 \mu \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{\mathfrak{N}'}}$$

worin:

$$\mathfrak{N}' = a^2 [a^2 c^2 - v^2 (a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu)] \cos^2 \delta + (c^2 - v^2) (a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu)^2 \sin^2 \delta$$

In dem besonderen Falle einer zur optischen Axe parallelen Grenzebene ist:

$$(61) \quad \cos \chi = \frac{(a^2 - c^2) \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{a^2 (a^2 - v^2) \cos^2 \delta + c^2 (c^2 - v^2) \sin^2 \delta}}$$

Hieraus ersieht man, dass die Grenzlinie, welche der ungewöhnlichen Grenzbrechung entspricht, nur in folgenden Fällen senkrecht zur Einfallsebene  $\mathfrak{E}$  stehen kann: 1. wenn die Grenzebene senkrecht zur optischen Axe steht ( $\mu = 0$  oder  $\pi$ ); 2. wenn bei einem von 0 oder  $\pi$  verschiedenen Werthe von  $\mu$  die Einfallsebene  $\mathfrak{E}$  parallel oder senkrecht zum Hauptschnitte der Grenzebene liegt ( $\delta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ).

Geben wir in (60) dem Winkel  $\mu$  und der Geschwindigkeit  $v$  bestimmte Werthe, so stellt diese Relation das Gesetz dar, nach welchem sich die Neigung der Grenzlinie gegen die Einfallsebene mit dem Azimut dieser Ebene ändert. Die Abweichung des Winkels  $\chi$  von  $90^\circ$  wird ein Maximum für diejenigen Werthe  $\delta_m$  von  $\delta$ , welche durch:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\sin \delta \cos \delta}{\sqrt{\mathfrak{N}'}} = 0$$

oder:

$$(62) \quad \tan^4 \delta_m = \frac{a^2 [a^2 c^2 - v^2 (a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu)]}{(c^2 - v^2) (a^2 \cos^2 \mu + c^2 \sin^2 \mu)^2}$$

gegeben sind. Hieraus ist ersichtlich, dass den Symmetrieeigenschaften des Kegels  $\mathfrak{K}'$  entsprechend das Maximum jener

Abweichung unter den vier Azimuten  $\delta_m$ ,  $-\delta_m$ ,  $\pi - \delta_m$ ,  $\pi + \delta_m$  eintritt.

In dem besonderen Falle einer zur optischen Axe parallelen Grenzebene ist:

$$(63) \quad \tan^4 \delta_m = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{c^2(c^2 - b^2)}$$

Ist der Charakter der Doppelbrechung negativ, so sind in diesen Formeln  $a$  und  $c$  zu vertauschen. Die Kegel der Grenzstrahlen erhalten die Gleichungen:

$$\mathfrak{K}' \dots (c^2 - b^2)(\zeta^2 + \eta^2) - b^2 \zeta^2 = 0$$

$$\mathfrak{K} \dots \left( \frac{a^2 c^2}{a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu} - b^2 \right) \zeta^2 + (a^2 - b^2) \eta^2 - b^2 \zeta^2 = 0$$

und es bestehen die Bedingungen:

$$a^2 \geq \frac{a^2 c^2}{a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu} \geq c^2.$$

1. Ist  $b < c$ , so wird  $\mathfrak{K}$  von einer zur Grenzebene parallelen Ebene in einer Ellipse geschnitten, deren kleinere Axe senkrecht zum Hauptschnitt steht und für jede Neigung der Grenzebene gegen die optische Axe denselben Werth besitzt (Taf. IV Fig. 7<sup>1</sup>). Die grössere Ellipsenaxe erhält ihren grössten Werth, der gleich dem Radius des Schnittkreises jener Ebene mit dem Kegel  $\mathfrak{K}'$  ist, wenn die Grenzebene zur optischen Axe parallel läuft.

2. Ist  $b = c$ , so verschwindet der Kreiskegel  $\mathfrak{K}'$ ;  $\mathfrak{K}$  bleibt im allgemeinen elliptisch, zerfällt aber auf einer zur optischen Axe parallelen Grenzebene in zwei zum Hauptschnitte symmetrisch liegende Ebenen:

$$\frac{\zeta}{\eta} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}.$$

3. Ist  $a > b > c$ , so zerfällt  $\mathfrak{K}$  für die der Bedingung:

$$b^2(a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu) = a^2 c^2$$

genügende Grenzebene in zwei zum Hauptschnitt symmetrische Ebenen:

$$\frac{\zeta}{\eta} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \sin \mu$$

Für kleinere Werthe von  $\mu$  ist  $\mathfrak{K}$  ein elliptischer Kegel; für grössere Werthe von  $\mu$  wird  $\mathfrak{K}$  von einer zur Grenzebene

<sup>1</sup> Die schematische Figur 7 entspricht der Figur 3.



parallelen Ebene in einer Hyperbel geschnitten, deren reelle Axe senkrecht zum Hauptschnitte steht (Taf. IV Fig. 8).

Die Gleichungen (60)—(63) gehen über in:

$$(60^*) \quad \cos \chi = - \frac{a(a^2 - c^2) \sin^2 \mu \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{\mathfrak{N}'}}$$

worin:

$$\mathfrak{N}' = c^2 [a^2 c^2 - v^2 (a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu)] \cos^2 \delta + (a^2 - v^2) (a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu)^2 \sin^2 \delta$$

$$(62^*) \quad \tan^4 \delta_m = \frac{c^2 [a^2 c^2 - v^2 (a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu)]}{(a^2 - v^2) (a^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu)^2}$$

In dem besonderen Falle einer zur optischen Axe parallelen Grenzebene ist:

$$(61^*) \quad \cos \chi = - \frac{(a^2 - c^2) \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{a^2 (a^2 - v^2) \sin^2 \delta + c^2 (c^2 - v^2) \cos^2 \delta}}$$

$$(63^*) \quad \tan^4 \delta_m = \frac{c^2 (c^2 - v^2)}{a^2 (a^2 - v^2)}$$

Die vorstehenden Entwicklungen enthalten u. A. die Erklärung der in §. 7 beschriebenen Erscheinungen.

## §. 11.

### Optisch zweiaxige Krystalle.

Von besonderem Interesse sind die Fälle, in denen die Grenzebene eine optische Symmetrieebene ist:

I. Grenzebene ist die YZ-Ebene.

Die Grenzwinkel sind gegeben durch:

$$(35) \quad \frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\sin^2 i_0'}{v^2} = \frac{1}{b^2 \sin^2 \delta + c^2 \cos^2 \delta}$$

worin das Azimut  $\delta$  der Einfallsebene von der Y-Axe aus gerechnet ist. Demnach haben die Kegel der Grenzstrahlen die Gleichungen:

$$\mathfrak{K} \dots (a^2 - v^2) (\xi^2 + \eta^2) - v^2 \zeta^2 = 0$$

$$\mathfrak{K}' \dots (c^2 - v^2) \xi^2 + (b^2 - v^2) \eta^2 - v^2 \zeta^2 = 0$$

wenn die Coordinatenaxen  $\Xi, H, Z$  der Reihe nach mit den optischen Symmetrieebenen Y, Z, X zusammenfallen.  $\mathfrak{K}$  ist ein Kreiskegel und liegt im Inneren des Kegels  $\mathfrak{K}'$ , der für  $v < c$  eine elliptische Basis besitzt; die grössere Ellipsenaxe ist parallel zur Y-Axe gerichtet. Ist  $v = c$ , so reducirt sich  $\mathfrak{K}'$  auf zwei zur Y-Axe parallele Ebenen. Für  $v > c$  wird  $\mathfrak{K}'$  von einer zur Grenzebene parallelen Ebene in einer Hy-

perbel geschnitten, deren reelle Axe zur Y-Axe senkrecht steht<sup>1</sup>. Ist  $a > v \geq b$ , so wird  $\mathfrak{K}'$  imaginär und nur der Kreiskegel bleibt bestehen.

Die Neigung der dem Kegel  $\mathfrak{K}'$  entsprechenden Grenzlinie gegen die Einfallsebene ergibt sich aus:

$$(64) \quad \cos \chi = - \frac{(b^2 - c^2) \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{b^2 (b^2 - v^2) \sin^2 \delta + c^2 (c^2 - v^2) \cos^2 \delta}}$$

Ihre Abweichung von  $90^\circ$  nimmt einen Maximalwerth an für die durch

$$(65) \quad \tan^4 \delta_m = \frac{c^2 (c^2 - v^2)}{b^2 (b^2 - v^2)}$$

bestimmten Azimute der Einfallsebene.

II. Grenzebene ist die XY-Ebene.

Die Grenzwinkel sind gegeben durch:

$$(35) \quad \frac{\sin i_0'}{v} = \frac{1}{c}, \quad \frac{\sin^2 i_0}{v^2} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \delta + b^2 \cos^2 \delta}$$

worin das Azimut  $\delta$  der Einfallsebene von der X-Axe aus gerechnet ist. Demnach haben die Kegel der Grenzstrahlen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}' \dots & (c^2 - v^2) (\xi^2 + \eta^2) - v^2 \zeta^2 = 0 \\ \mathfrak{K} \dots & (b^2 - v^2) \xi^2 + (a^2 - v^2) \eta^2 - v^2 \zeta^2 = 0 \end{aligned}$$

wenn die Coordinatenaxen  $\Xi, H, Z$  der Reihe nach mit den optischen Symmetrieaxen X, Y, Z zusammenfallen. Der Kreiskegel  $\mathfrak{K}'$  liegt ausserhalb des Kegels  $\mathfrak{K}$ , welcher für  $v < c$  eine elliptische Basis besitzt, deren kleinere Axe der Y-Axe parallel läuft. Ist  $v = c$ , so fällt  $\mathfrak{K}'$  mit der Grenzebene zusammen, und für  $v > c$  wird der Kreiskegel imaginär. Der Kegel  $\mathfrak{K}$  zerfällt in zwei zur Y-Axe senkrechte Ebenen, wenn  $v = b$  ist; er wird von einer zur Grenzebene parallelen Ebene in einer Hyperbel geschnitten, deren reelle Axe zur Y-Axe parallel ist, wenn  $a > v > b$ .

Die Neigung der dem Kegel  $\mathfrak{K}$  entsprechenden Grenzlinie gegen die Einfallsebene ergibt sich aus:

$$(66) \quad \cos \chi = - \frac{(a^2 - b^2) \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{a^2 (a^2 - v^2) \sin^2 \delta + b^2 (b^2 - v^2) \cos^2 \delta}}$$

<sup>1</sup> Die schematischen Figuren 5 und 6 auf Taf. IV können auch zur Erläuterung dieser Erscheinungen dienen, wenn die Z-Axe in den Hauptschnitt  $\mathfrak{S}$  gelegt wird.

Ihre Abweichung von  $90^\circ$  nimmt einen Maximalwerth an für die durch:

$$(67) \quad \tan^4 \delta_m = \frac{b^2 (b^2 - v^2)}{a^2 (a^2 - v^2)}$$

bestimmten Azimute der Einfallsebene.

### III. Grenzebene ist die ZX-Ebene.

Die bemerkenswerthen Erscheinungen der totalen Reflexion, welche eine zur Ebene der optischen Axen parallele Grenzfläche darbietet, lassen sich am übersichtlichsten entwickeln, indem man die Kegel der Grenzstrahlen mit Hülfe der Indexfläche construirt.

Die Ebene der optischen Axen schneidet die Indexfläche in einem Kreise mit dem Radius  $1/b$  und einer Ellipse mit den Halbachsen  $1/a$  und  $1/c$ , welche in die Richtungen der optischen Symmetriemaxen Z und X fallen<sup>1</sup>. Die Radien nach den Schnittpunkten dieser Curven sind die optischen Axen. In jedem Schnittpunkte besitzt die Indexfläche einen Knotenpunkt und die Normalen seines Tangentenkegels bilden den zu der optischen Axe dieses Punktes gehörigen Strahlenkegel.

Durch jede gemeinsame Tangente von Kreis und Ellipse geht eine auf der Ebene der optischen Axen senkrecht stehende singuläre Tangentialebene der Indexfläche, deren Normale eine Strahlenaxe ist; die Radien nach ihrem Berührungskreise bilden den zu dieser Strahlenaxe gehörigen Kegel von Wellennormalen<sup>2</sup>.

Hieraus ergibt sich, dass die Berührungspunkte des auf der Ebene der optischen Axen senkrecht stehenden Tangencylinders der Indexfläche nicht nur den Kreis und die Ellipse erfüllen, in denen jene Ebene die Indexfläche schneidet, sondern ausserdem noch die vier Berührungskreise, welche auf den reellen singulären Tangentialebenen der Indexfläche liegen. Verbindet man die Schnittcurve, welche der Tangencylinder auf der Kugel mit dem Radius  $1/b$  erzeugt, mit dem Einfallspunkt O, so erhält man als Gesammtheit der Grenzstrahlen: 1. einen Kreiskegel  $\mathfrak{K}_z$ , welcher den in der

<sup>1</sup> Dies. Jahrb. 1885. II. 187.

<sup>2</sup> Ein Modell der Strahlenfläche (FRESNEL'schen Wellenfläche) kann auch zur Veranschaulichung der Indexfläche dienen.

Grenzebene enthaltenen Strahlen von constanter Geschwindigkeit entspricht; 2. einen Kegel  $\mathfrak{K}_\varepsilon$  entsprechend den Strahlen der Grenzebene, deren Geschwindigkeit sich mit ihrer Richtung ändert; 4. vier Kegelmantelausschnitte  $\mathfrak{Q}$ , welche den Wellennormalenkegeln der Strahlenaxen entsprechen.

Die Gleichung des Kreiskegels ist:

$$(35) \quad \frac{\sin i_0}{v} = \frac{1}{b}$$

oder:

$$\mathfrak{K}_z \dots (b^2 - v^2)(\xi^2 + \eta^2) - v^2 \zeta^2 = 0$$

wenn die Coordinatenaxen  $\Xi, H, Z$  der Reihe nach zusammenfallen mit den optischen Symmetrieaxen  $Z, X, Y$ ; die Gleichung des Kegels  $\mathfrak{K}_\varepsilon$ :

$$(35) \quad \frac{\sin^2 i_0}{v^2} = \frac{1}{c^2 \sin^2 \delta + a^2 \cos^2 \delta}$$

worin das Azimut  $\delta$  der Einfallsebene von der  $Z$ -Axe aus gerechnet ist, oder:

$$\mathfrak{K}_\varepsilon \dots (a^2 - v^2) \xi^2 + (c^2 - v^2) \eta^2 - v^2 \zeta^2 = 0$$

Ist  $v < c$ , so wird  $\mathfrak{K}_\varepsilon$  von einer zur Grenzebene parallelen Ebene in einer Ellipse geschnitten, deren grössere Halbaxe zur  $X$ -Axe parallel läuft.

Die Kegel  $\mathfrak{K}_z$  und  $\mathfrak{K}_\varepsilon$  haben die vier Geraden  $\mathfrak{A}$  gemein, welche in den Azimuten  $\delta = \pm V$  und  $180^\circ \pm V$  liegen. Fällt aus dem äusseren Mittel ein Strahl in der Richtung einer Geraden  $\mathfrak{A}$  auf die Grenzebene, so ist die zugehörige gebrochene Wellennormale im Krystall eine der optischen Axen. Daraus ergibt sich, dass die in den Richtungen  $\mathfrak{A}$  einfallenden Strahlen beim Eindringen in den Krystall der inneren konischen Refraction unterliegen. Von den Strahlen, welche den zu einer optischen Axe gehörigen Strahlenkegel bilden, fallen nur zwei in die Grenzebene, von denen der eine die optische Axe selbst ist; die übrigen entgehen der Grenzbrechung. Besitzt das Krystallpräparat die Form einer hinreichend ausgedehnten planparallelen Platte, so treten die aus der inneren konischen Refraction hervorgegangenen Strahlen parallel zur Einfallrichtung als Strahlencylinder wieder aus der Platte heraus.

Wir betrachten jetzt diejenigen Geraden des Tangentencylinders, welche in die vier singulären Tangentialebenen der



Indexfläche fallen. Jede dieser Geraden berührt die Indexfläche in zwei zur Grenzebene symmetrisch liegenden Punkten des Berührungskreises der zugehörigen Tangentialebene. Die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem Einfallspunkt sind die gebrochenen Wellennormalen. Für alle Wellennormalen nach einem Berührungskreise ist die zugehörige Strahlenaxe der ihnen gemeinsame Strahl. Es können also aus dem äusseren Mittel unter verschiedenen Winkeln Strahlen derart auf die Grenzebene fallen, dass sie bei dem Übergange in den Krystall die Grenzbrechung erleiden und dabei sämmtlich in eine Strahlenaxe vereinigt werden. Die Grenzstrahlen von dieser Beschaffenheit bilden einen Theil eines Um-drehungskegels  $\mathcal{Q}$  um die zugehörige Strahlenaxe B, denn ihre Richtungen sind bestimmt durch Punkte der Schnittcurve, welche die zu B senkrechte singuläre Tangentialebene der Indexfläche auf der Kugel mit dem Radius  $1/v$  erzeugt. Bezeichnet man die Neigung einer Geraden E des Kegels  $\mathcal{Q}$  zu seiner Axe mit  $\Theta$ , so ist die Gleichung von  $\mathcal{Q}$ :

$$(68) \quad \cos \Theta = \frac{v}{b}$$

Nun ist:

$$\cos \Theta = \cos (BX) \cos (EX) + \cos (BZ) \cos (EZ)$$

$$\cos (BX) = \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \cos (BZ) = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Demnach geht (68) über in:

$$v = c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \cos (EX) + a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \cos (EZ)$$

oder in:

$$\mathcal{Q} \dots v^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \left[ c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \eta + a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \xi \right]^2.$$

Wie sich aus der Construction ergibt und aus den Gleichungen für  $\mathfrak{R}_\gamma$ ,  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  und  $\mathcal{Q}$  abzulesen ist, berührt jeder Kegel  $\mathcal{Q}$  die Kegel  $\mathfrak{R}_\gamma$  und  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  in je einer Geraden. Die Berührung von  $\mathcal{Q}$  und  $\mathfrak{R}_\gamma$  findet in derjenigen Geraden statt, welche gleichzeitig in der Verbindungsebene der Y-Axe und der zu  $\mathcal{Q}$  gehörigen Strahlenaxe B enthalten ist. Die Berührungsgerade von  $\mathcal{Q}$  und  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  fällt in die Verbindungsebene der Y-Axe mit derjenigen Wellennormale der Grenzebene, welche in dem

zu B gehörigen Wellennormalenkegel der Strahlenaxe gegenüberliegt.

Nur die innerhalb der beiden Berührungsgerechten gelegenen Strahlen des Kegels  $\mathfrak{K}$  sind Grenzstrahlen der totalen Reflexion und werden beim Übergang in den Krystall sämmtlich in eine Strahlenaxe vereinigt. Die Geraden, welche ausserhalb dieses Bereiches auf  $\mathfrak{K}$  liegen, gehören dem Gebiet der totalen Reflexion an<sup>1</sup>.

Ist die Lichtgeschwindigkeit in dem äusseren Mittel gleich der kleinsten Hauptlichtgeschwindigkeit des Krystalls ( $v = c$ ), so zerfällt der Kegel  $\mathfrak{K}_\epsilon$  in zwei auf der YZ-Ebene senkrecht stehende Ebenen:

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}$$

welche den Kegel  $\mathfrak{K}_\epsilon$ :

$$(b^2 - c^2)(\xi^2 + \eta^2) - c^2 \zeta^2 = 0$$

in den Geraden  $\mathfrak{A}$  schneiden. Ist  $b > v > c$ , so wird  $\mathfrak{K}_\epsilon$  von einer zur Grenzebene parallelen Ebene in einer Hyperbel geschnitten, deren reelle Axe der Z-Axe parallel läuft. Dieser Kegel bleibt allein bestehen, wenn  $a > v \geq b$ .

Die Neigung der dem Kegel  $\mathfrak{K}_\epsilon$  entsprechenden Grenzlinie gegen die Einfallsebene ergibt sich aus:

$$(69) \quad \cos \chi = \frac{(a^2 - c^2) \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{a^2 (a^2 - v^2) \cos^2 \delta + c^2 (c^2 - v^2) \sin^2 \delta}}$$

Ihre Abweichung von  $90^\circ$  nimmt einen Maximalwerth an für:

$$(70) \quad \tan^4 \delta_m = \frac{a^2 (a^2 - v^2)}{c^2 (c^2 - v^2)}$$

## §. 12.

Berechnung der Beobachtungen von J. DANKER.

Genauere Messungen der Winkel  $\chi$  zwischen den Grenzlinien und der Einfallsebene  $\mathfrak{E}$  werden dadurch beeinträchtigt,

<sup>1</sup> Die Erscheinungen, welche W. KOHLRAUSCH an einer zur Ebene der optischen Axen annähernd parallelen Fläche eines Weinsäurekrystalls beobachtet und in WIEDEM. Ann. Bd. 6, Taf. I, Fig. 10 No. 1 a und b abgebildet hat, finden hierdurch ihre Erklärung. Weitere Beobachtungen an genau orientirten Präparaten stark doppeltbrechender Krystalle und Messungen mit Hilfe des Oculargoniometers sind wünschenswerth.

dass häufig die Intensitäten der beiden in einer Grenzlinie zusammenstossenden Bereiche des Gesichtsfeldes nur wenig von einander verschieden sind und dass die Grenzlinien selbst nicht vollkommen geradlinig verlaufen, sondern eine, wenngleich nur schwach gekrümmte Gestalt besitzen. Dazu kommt, dass bei den gegenwärtig allein vorliegenden Messungen von J. DANKER (a. a. O.) die WOLLASTON'sche Methode benutzt wurde, welche in Folge der Ablenkung durch das Prisma die Abweichung der Winkel  $\chi$  von  $90^\circ$  etwas grösser erscheinen lässt, als sie in Wirklichkeit ist. Aus diesen Gründen erreichen die Differenzen zwischen den von J. DANKER beobachteten und den von mir berechneten Werthen der Winkel  $\chi$  den Betrag von  $\frac{3}{4}^\circ$ . Es bleibt weiteren Beobachtungen an den nach dem F. KOHLRAUSCH'schen Princip construirten Totalreflectometern vorbehalten noch genauere Bestimmungen der Winkel  $\chi$  zu liefern.

Die folgenden Tabellen enthalten den Angaben von J. DANKER entsprechend die Werthe von  $S = 90^\circ - \chi$  resp.  $\chi - 90^\circ$ .

Am Kalkspath von Andreasberg „war die Grenze der totalen Reflexion nur sehr schwach wahrzunehmen“. Die hierdurch bedingte Ungenauigkeit der Messung macht sich darin geltend, dass unter den Differenzen ausser den der Ablenkung durch das Prisma entsprechenden negativen Werthen auch positive Werthe auftreten. Verschiedene Ablesungen desselben Winkels unterscheiden sich bis zu  $2^\circ$  von einander.

### Kalkspath von Andreasberg.

(Grenzebene parallel zur optischen Axe.)

No.	$\delta$	S beobachtet	S berechnet	Differenz	Anzahl der Beobachtungen
2	$85^\circ 47'$	$1^\circ 59'$	$1^\circ 54\frac{1}{2}'$	$- 4\frac{1}{2}'$	3
3	83 36	(?) 3 47	$2^\circ 53\frac{3}{4}'$	$- 53\frac{1}{4}'$	1
4	81 16	3 59	$3^\circ 56\frac{5}{8}'$	$- 2\frac{1}{8}'$	5
5	76 13	5 34	$6^\circ 12\frac{1}{4}'$	$+ 38\frac{1}{4}'$	4
6	73 48	7 4	$7^\circ 16\frac{1}{2}'$	$+ 12\frac{1}{2}'$	3
7	71 19	8 7	$8^\circ 21\frac{5}{8}'$	$+ 14\frac{5}{8}'$	1
8	68 44	9 34	$9^\circ 29\frac{1}{8}'$	$- 4\frac{5}{8}'$	4
9	66 18	10 4	$10^\circ 31\frac{3}{8}'$	$+ 27\frac{3}{8}'$	3

Berechnet nach (61\*) mit Hülfe der Werthe:

$$a = 0,672789, \quad c = 0,602954, \quad v = 0,606021.$$

Aus (63\*) folgt, dass der grösste Werth von S unter dem Azimut:

$$\delta_m = 23^\circ 22' 19''$$

eintritt und aus (61\*) ergibt sich für diesen Maximalwerth selbst:

$$S_m = 27^\circ 28' 14''.$$

In dem folgenden durch schärfere Grenzbilder ausgezeichneten Falle ist der von vorn herein zu erwartende negative Betrag der Differenz durchweg vorhanden. Die beobachteten Werthe von S sind durch nur einmalige Ablesung gewonnen.

### Aragonit von Bilin.

(Grenzebene  $b = 010 = XY$ -Ebene.)

No.	$\delta$	S beobachtet	S berechnet	Differenz
3	75° 0'	5° 31'	5° 16 $\frac{1}{4}$ '	— 14 $\frac{3}{4}$ '
4	70 0,5	7 15	6 55 $\frac{1}{2}$	— 19 $\frac{1}{2}$
5	65 1	8 37	8 29 $\frac{1}{2}$	— 7 $\frac{1}{2}$
6	60 1	10 0	9 56 $\frac{3}{4}$	— 3 $\frac{1}{4}$
7	55 0	11 43	11 15 $\frac{1}{2}$	— 27 $\frac{1}{2}$
8	50 1	13 8	12 22 $\frac{2}{3}$	— 45 $\frac{1}{3}$
9	45 0,75	13 49	13 16 $\frac{1}{2}$	— 32 $\frac{1}{2}$
10	39 59,5	14 17	13 53	— 24
11	35 0	14 55	14 10	— 45

Berechnet nach (66) mit Hilfe der Werthe:

$$a = 0,653527, \quad b = 0,594725, \quad v = 0,573105.$$

Aus (67) und (66) ergibt sich:

$$\delta_m = 34^\circ 9' 28'' \quad S_m = 14^\circ 10' 25''.$$

Die folgenden Messungen an einem Spaltungsstücke des Kalkspaths von Island erstrecken sich auf einen vollen Quadranten, lassen also das Azimut  $\delta_m$  der Einfallsebene erkennen, für welches S ein Maximum  $S_m$  wird. Da in der Nähe von  $S_m$  das Wachsen und Abnehmen von S noch langsamer als sonst erfolgt, ist die experimentelle Bestimmung von  $S_m$  in erhöhtem Maasse schwierig. Unter  $\Delta$  ist die Differenz der beiden am meisten von einander abweichenden Beobachtungen angegeben. Der verticale Faden des Oculargoniometers war nicht genau parallel zur Drehungsaxe des Goniometers.



## Kalkspath von Island.

(Grenzebene eine Fläche des Spaltungsrhomboëders.)

No.	$\delta$	S beobachtet	S berechnet	Differenz	Anzahl der Beobach- tungen.	$\Delta$
2	3° 30'	0° 58'	1° 23 $\frac{1}{2}$ '	+ 25 $\frac{1}{2}$ '	3	21'
3	8 20	2 48	3 14 $\frac{5}{8}$	+ 26 $\frac{5}{8}$	2	5
4	13 24	4 28	4 58 $\frac{1}{2}$	+ 30 $\frac{1}{2}$	3	20
5	18 26	6 23	6 25 $\frac{1}{2}$	+ 2 $\frac{1}{2}$	2	5
6	23 21	7 2	7 29 $\frac{1}{2}$	+ 27 $\frac{1}{2}$	3	10
7	28 21	7 43	8 15 $\frac{3}{5}$	+ 32 $\frac{6}{10}$	3	40
8	33 34	8 10	8 42 $\frac{1}{3}$	+ 32 $\frac{1}{3}$	3	20
9	38 30,5	8 18	8 49 28 $\frac{1}{2}$ "	+ 31 28 $\frac{1}{2}$ "	2	15
10	43 22	8 23	8 41 $\frac{1}{6}$	+ 18 $\frac{1}{6}$	3	12 $\frac{1}{2}$
11	48 20,5	7 58	8 18 $\frac{5}{6}$	+ 20 $\frac{5}{6}$	2	0
12	53 25	7 10	7 43 $\frac{3}{4}$	+ 33 $\frac{3}{4}$	3	7 $\frac{1}{2}$
13	58 20	6 21	6 59 $\frac{2}{3}$	+ 38 $\frac{2}{3}$	3	2 $\frac{1}{2}$
14	63 19	5 40	6 12	+ 32	3	10
15	68 23	4 49	5 5 $\frac{3}{4}$	+ 16 $\frac{3}{4}$	4	42 $\frac{1}{2}$
16	73 24	3 51	4 —	+ 9	4	45
17	78 25	2 54	2 50 $\frac{1}{2}$	— 34 $\frac{1}{2}$	3	27 $\frac{1}{2}$
18	83 22	0 51	1 38 $\frac{1}{3}$	+ 47 $\frac{1}{3}$	2	18

Berechnet nach (60\*) mit Hülfe der Werthe:

$$a = 0,672789, \quad c = 0,602954, \quad v = 0,606021$$

$$\mu = 44^{\circ} 36' 34''.$$

Aus (62\*) und (60\*) folgt:

$$\delta_m = 38^{\circ} 10' 37'', \quad S_m = 8^{\circ} 49' 30''.$$

Diese Vergleichung zeigt, dass schon die Beobachtungen von J. DANKER, welche unter den für den vorliegenden Zweck ungünstigen Verhältnissen der WOLLASTON'schen Methode angestellt sind und daher die erreichbare Genauigkeit nicht besitzen, eine Bestätigung der Theorie enthalten.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1886

Band/Volume: [1886\\_2](#)

Autor(en)/Author(s): Liebisch Theodor

Artikel/Article: [Ueber die Totalreflexion an doppeltbrechenden Krystallen. 46-66](#)