

# Diverse Berichte

# Briefwechsel.

## Mittheilungen an die Redaktion.

Königsberg i. Pr., November 1886.

Ueber die Bestimmung des Winkels der optischen Axen an Platten, deren Normale nicht mit der Halbirungslinie des Winkels der optischen Axen zusammenfällt.

Mit 2 Holzschnitten.

Benutzt man zur Messung des Winkels der optischen Axen eine Platte, welche schief zur Halbirungslinie des Winkels der optischen Axen geschnitten ist, so kann man, wie G. KIRCHHOFF<sup>1</sup> gezeigt hat, durch Messung des Winkels der scheinbaren optischen Axen und der Winkel dieser gegen die Plattennormale zur Bestimmung des wahren Winkels der optischen Axen ( $2V$ ) gelangen, wenn noch die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit ( $b$ )

des Lichtes im Krystall bekannt ist. Die Formeln hierfür sind in der vorliegenden Arbeit zunächst zusammengestellt. Ist  $b$  nicht bekannt, so genügen die Messungen an zwei solchen Platten zur Bestimmung von  $V$  und  $b$ . Da indessen diese Beobachtungen und Rechnungen ziemlich umständlich sind, so wird man meistens eine Platte zu schleifen versuchen, die senkrecht auf der Halbirungslinie des Winkels der optischen Axen steht und es erhebt sich dann die Frage, welchen Fehler in der Orientirung man machen darf, wenn man ein

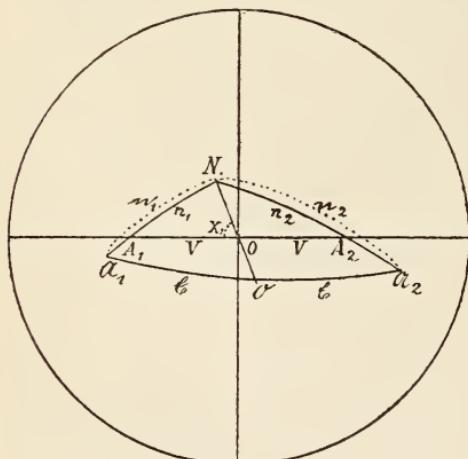


Fig. 1.

Resultat erhalten will, dessen Abweichung von dem wahren Werth unter einer gewissen Grenze liegt. Diese Frage ist von E. MALLARD<sup>2</sup> näherungsweise gelöst und soll hier ohne Näherung behandelt werden.

<sup>1</sup> G. KIRCHHOFF: Über den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien. (POGG. Ann. 1859, 108, 571, 572.)

<sup>2</sup> E. MALLARD: Traité de cristallographie géométrique et physique. Paris, 1884, II, 428—432.

Es seien (siehe Fig. 1):

$A_1$  und  $A_2$  die optischen Axen im Krystall,

$O$  die Halbirungslinie des Winkels  $2V$  von  $A_1$  und  $A_2$ ,

$N$  die Normale der zu der Messung benutzten Krystallplatte,

$\chi$  der Winkel  $A_1 ON$ ,

$\vartheta$  der Winkel von  $N$  gegen  $O$ ,

$n_1$  und  $n_2$  die Winkel von  $N$  gegen  $A_1$  und  $A_2$ ,

$\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  die scheinbaren optischen Axen, deren Winkel  $2\mathfrak{E}$  gemessen wird,

$\mathfrak{D}$  die Halbirungslinie<sup>1</sup> des Winkels zwischen  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$ ,

$t$  der Winkel von  $N$  gegen  $\mathfrak{D}$ ,

$n_1$  und  $n_2$  die Winkel von  $N$  gegen  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$ ,

$b$  die mittlere Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Krystall,

$v$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem die Platte umgebenden isotropen Medium,

$\beta$  und  $\alpha$  die entsprechenden Brechungsindices,

$2E$  der Winkel der scheinbaren optischen Axen, den man erhalten müsste, wenn  $N$  mit  $O$  zusammenfiele [ $b \sin E = v \sin V$ ] und

$2\mathfrak{B}$  der Winkel der optischen Axen, den man aus  $2\mathfrak{E}$  berechnen würde unter der Voraussetzung, dass  $N$  mit  $O$  zusammenfiele [ $b \sin \mathfrak{E} = v \sin \mathfrak{B}$ ].

Ferner werde gesetzt:

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin^2 \mathfrak{E} - \sin^2 E &= e \\ \sin^2 \mathfrak{B} - \sin^2 V &= b^2 e : v^2 = e. \end{aligned}$$

Beobachtet man nun die Werthe von  $\mathfrak{E}$ ,  $n_1$  und  $n_2$ , so ergeben sich zur Bestimmung von  $V$  folgende Gleichungen<sup>2</sup>:

$$(2) \quad \begin{aligned} (\cos 2\mathfrak{E} - \cos n_1 \cos n_2) \sin n_1 \sin n_2 &= (\cos 2V - \cos n_1 \cos n_2) \sin n_1 \sin n_2 \\ \sin n_1 : \sin n_1 &= \sin n_2 : \sin n_2 = b : v. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(3) \quad \begin{aligned} b^2 \cos 2E - v^2 \cos 2V - b^2 \cos n_1 \cos n_2 &= -v^2 \cos n_1 \cos n_2 \\ (2b^2 e + v^2 - b^2 + b^2 \cos n_1 \cos n_2)^2 &= (v^2 - b^2 + b^2 \cos^2 n_1)(v^2 - b^2 + b^2 \cos^2 n_2) \text{ oder} \\ 4b^2 e^2 + 4e(v^2 - b^2 + b^2 \cos n_1 \cos n_2) - (v^2 - b^2)(\cos n_1 - \cos n_2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält also zur Bestimmung von  $e$  eine quadratische Gleichung. Das zweite Glied dieser Gleichung ist immer positiv, denn, da  $n_1$  und  $n_2$  kleiner als  $\pi/2$  sind, so gelten immer folgende Ungleichungen:

$$\cos^2 n_1 \gtrless \cos n_1 \cos n_2 \gtrless \cos^2 n_2.$$

<sup>1</sup>  $N$ ,  $O$  und  $\mathfrak{D}$  liegen in einer Ebene. Würde die Ebene  $NO$  die Ebene  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$  nicht in  $\mathfrak{D}$ , sondern in  $\mathfrak{D}'$  schneiden und wäre  $\mathfrak{D}' \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E} + x$ , so ist:

$$\sin(\mathfrak{E} + x) \sin N \mathfrak{D}' \mathfrak{A}_1 = \sin \mathfrak{A}_1 N \mathfrak{D}' \cdot \sin n_1$$

$$\sin A_1 NO \cdot \sin n_1 = \sin V \cdot \sin \chi$$

$$\sin V \cdot \sin \chi = \sin A_2 NO \cdot \sin n_2$$

$$\sin \mathfrak{A}_2 NO' \cdot \sin n_2 = \sin(\mathfrak{E} - x) \cdot \sin N O' \mathfrak{A}_2.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich:

$$\sin(\mathfrak{E} + x) = \sin(\mathfrak{E} - x); \text{ also } x = 0.$$

<sup>2</sup> G. KIRCHHOFF, a. a. O. 572.

$$-\mathfrak{b}^2 \sin^2 \mathfrak{n}_1 \gtrless -\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}^2 \cos \mathfrak{n}_1 \cos \mathfrak{n}_2 \gtrless -\mathfrak{b}^2 \sin^2 \mathfrak{n}_2$$

$$\mathfrak{b}^2 \cos^2 \mathfrak{n}_1 \gtrless \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}^2 \cos \mathfrak{n}_1 \cos \mathfrak{n}_2 \gtrless \mathfrak{b}^2 \cos^2 \mathfrak{n}_2.$$

Also ist  $\mathfrak{v}^2 - \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}^2 \cos \mathfrak{n}_1 \cos \mathfrak{n}_2$  immer positiv und die Gleichung (3) besitzt eine kleinere positive und eine grössere negative Wurzel, wenn  $\mathfrak{v} > \mathfrak{b}$ , und zwei negative Wurzeln, wenn  $\mathfrak{v} < \mathfrak{b}$  ist. Da in dem speziellen Fall, wenn N mit O zusammenfällt,  $e = 0$  werden muss, so ist also die Wurzel der Gleichung (3) die richtige, bei welcher die Quadratwurzel das positive Vorzeichen hat.

Es ist also immer für  $\mathfrak{v} > \mathfrak{b}$ ,  $e > 0$ ,  $\mathfrak{E} > E$  und  $\mathfrak{V} > V$ :

und für  $\mathfrak{v} < \mathfrak{b}$ ,  $e < 0$ ,  $\mathfrak{E} < E$  und  $\mathfrak{V} < V$ ,

d. h. wenn  $\mathfrak{v} > \mathfrak{b}$  ist, so ist der Winkel der optischen Axen, den man aus dem scheinbaren Winkel ohne Berücksichtigung der schiefen Lage von N gegen O berechnet, grösser als der wahre Winkel der optischen Axen; ist  $\mathfrak{v} < \mathfrak{b}$ , so ist der berechnete Winkel kleiner als der wahre Winkel.

Aus Gleichung (3) ergiebt sich ferner, dass  $e = 0$ , also  $\mathfrak{E} = E$  und  $\mathfrak{V} = V$  ist, wenn  $\cos \mathfrak{n}_1 = \cos \mathfrak{n}_2$  ist.

Man erhält also den wahren Winkel der optischen Axen durch die Berechnung aus  $2\mathfrak{E}$  nicht nur, wenn N mit O zusammenfällt, sondern auch, wenn N in der Ebene liegt, die auf der Ebene der optischen Axen senkrecht steht und O in sich enthält.

Diesen Satz kann man auch direkt ableiten. Wenn  $\chi = \pi/2$  ist, so ist  $N \mathfrak{D} \mathfrak{A}_1 = \pi/2$ , also:

$$\sin \mathfrak{E} = \sin \mathfrak{n}_1 \cdot \sin \mathfrak{A}_1 N \mathfrak{D}$$

$$\sin V = \sin \mathfrak{n}_1 \cdot \sin A_1 N O$$

folglich

$$\sin V = \mathfrak{b} \cdot \sin \mathfrak{E} : \mathfrak{v} = \sin \mathfrak{V}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) kann man e, E und V berechnen, wenn  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{n}_1$ ,  $\mathfrak{n}_2$ ,  $\mathfrak{v}$  und  $\mathfrak{b}$  bekannt sind. Ist  $\mathfrak{b}$  nicht bekannt und macht man dann an einer zweiten Platte von anderer Orientirung die entsprechenden Beobachtungen, so ergiebt sich für diese:

$$\sin^2 \mathfrak{E}' - \sin^2 E = e'$$

$$4\mathfrak{b}^2 e'^2 + 4e'(\mathfrak{v}^2 - \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{b}^2 \cos \mathfrak{n}_1' \cos \mathfrak{n}_2') - (\mathfrak{v}^2 - \mathfrak{b}^2)(\cos \mathfrak{n}_1' - \cos \mathfrak{n}_2')^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (1) und (3) folgt eine quadratische Gleichung für  $\mathfrak{b}^2$ , so dass dann also  $\mathfrak{b}$  und danach V bestimmt werden können. Diese Gleichung soll hier nicht aufgestellt werden; es soll nur bemerkt werden, dass sie identisch gleich Null wird, wenn für beide Platten  $\chi = \pi/2$  ist, oder wenn die beiden Platten symmetrisch zu einer der optischen Symmetrieebenen liegen. In diesen Fällen würden also Beobachtungen an den beiden Platten zur Bestimmung von  $\mathfrak{b}$  und V nicht ausreichen.

Bei einer Platte aus einem rhombischen Krystall, deren krystallographische Orientirung bekannt ist oder für welche bereits für eine Farbe eine vollständige Messung durchgeführt ist, so dass man also die Lage

der Normale zu den optischen Symmetriaxen, d. h. die Winkel  $\chi$  und  $\vartheta$  kennt, genügt zur Bestimmung von  $V$  eine<sup>1</sup> Messung von  $2\mathfrak{E}$ , wenn auch noch  $b$  bekannt ist. Man kann dann die Gleichungen (2) in folgender Weise umformen:

$$\begin{aligned} b^2 \cos 2\mathfrak{E} - v^2 \cos 2V + v^2 \cos n_1 \cos n_2 &= b^2 \cos n_1 \cos n_2 \\ (2v^2e + v^2 - b^2 - v^2 \cos n_1 \cos n_2)^2 &= (v^2 - b^2 - v^2 \cos^2 n_1)(v^2 - b^2 - v^2 \cos^2 n_2) \\ (4) \quad 4v^2e^2 - 4e(v^2 - b^2 + v^2 \cos n_1 \cos n_2) + (v^2 - b^2)(\cos n_1 - \cos n_2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun hierin die folgenden Werthe ein:

$$\begin{aligned} \cos n_1 \cos n_2 &= \cos^2 V \cos^2 \vartheta - \sin^2 V \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \chi \\ &= e(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi) + \cos^2 \mathfrak{V} \cos^2 \vartheta - \sin^2 \mathfrak{V} \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi \\ (\cos n_1 - \cos n_2)^2 &= 4 \sin^2 V \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi = 4(-e + \sin^2 \mathfrak{V}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} v^2 e^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi - e[(b^2 - v^2)(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi) + v^2(\cos^2 \mathfrak{V} \cos^2 \vartheta - \sin^2 \mathfrak{V} \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi)] \\ + (v^2 - b^2) \sin^2 \mathfrak{V} \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann man  $e$  und dann aus (1)  $V$  berechnen.

Von der Gleichung (4) soll nun eine Anwendung gemacht werden zur Bestimmung des Einflusses, den die Lage der Plattennormale auf die Grösse von  $\mathfrak{V}$  bei einem bestimmten Mineral hat.

Da  $b^2 - v^2 + v^2 \cos n_1 \cos n_2$  stets positiv ist, so hat (4) zwei positive Wurzeln für  $v > b$  und eine grössere positive und kleinere negative Wurzel für  $v < b$ . Da in speziellen Fällen  $e$  gleich Null werden muss, so ist die Wurzel die richtige, bei welcher die Quadratwurzel das negative Vorzeichen hat, also für  $v > b$  die kleinere positive und für  $v < b$  die negative.

Für einen constanten Werth von  $e$  stellt (4) einen Kegel mit den Variabeln  $\chi$  und  $\vartheta$  dar, auf welchem die Normalen aller Platten liegen, bei welchen man denselben Werth  $\mathfrak{V}$  resp.  $2\mathfrak{E}$  durch Messung erhält. Der Gleichung (4) kann man auch folgende Gestalt geben:

$$4(v^2e + v^2 - b^2)(e - \cos n_1 \cos n_2) + (v^2 - b^2)(\cos n_1 + \cos n_2)^2 = 0 \text{ oder} \\ (v^2e + v^2 - b^2)(e - \cos^2 V \cdot \cos^2 \vartheta + \sin^2 V \sin^2 \vartheta \cos^2 \chi) + (v^2 - b^2) \cos^2 V \cos^2 \vartheta = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \sin^2 \vartheta (v^2e + v^2 - b^2)(e + \sin^2 V \cos^2 \chi) + \cos^2 \vartheta [(v^2e + v^2 - b^2)(e - \cos^2 V) \\ + (v^2 - b^2) \cos^2 V] = 0 \\ (5) \quad \text{tg}^2 \vartheta (v^2e + v^2 - b^2)(e + \sin^2 V \cos^2 \chi) = -e(v^2e + v^2 \sin^2 V - b^2) \text{ oder} \\ (5a) \quad \text{tg}^2 \vartheta \left( \sin^2 \mathfrak{V} + \cos^2 V - \frac{b^2}{v^2} \right) (\sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V \sin^2 \chi) = -(\sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V) \left( \sin^2 \mathfrak{V} - \frac{b^2}{v^2} \right). \end{aligned}$$

Legt man senkrecht zu der Linie O eine Ebene  $\mathfrak{G}$ , welche von dem Nullpunkt um die Längeneinheit entfernt ist und bezeichnet man die Schnittlinien dieser Ebene mit den Ebenen  $\chi = 0$  und  $\vartheta = \pi/2$  als die  $\xi$ - resp.  $\eta$ -Axe, so schneidet der Kegel die Ebene  $\mathfrak{G}$  in einer Kurve, deren Gleichung ist:

$$(6) \quad \xi^2 (e + \sin^2 V) + \eta^2 e = -e(v^2e + v^2 \sin^2 V - b^2) : (v^2e + v^2 - b^2), \\ \text{also in einem Kegelschnitt, dessen Halbaxen gegeben sind durch:}$$

<sup>1</sup> G. KIRCHHOFF, a. a. O. 572, 573.

$$a^2 = \frac{(b^2 - v^2 \sin^2 V - v^2 e) e}{(v^2 - b^2 + v^2 e) (\sin^2 V + e)}$$

$$b^2 = \frac{(b^2 - v^2 \sin^2 V - v^2 e)}{v^2 - b^2 + v^2 e}$$

Es ist aber  $b^2 - v^2 \sin^2 V - v^2 e = b^2 - v^2 \sin^2 \mathfrak{V} = b^2 \cos^2 \mathfrak{E}$  immer positiv und  $v^2 - b^2 + v^2 e$  hat immer dasselbe Zeichen wie  $e$ , da  $e(v^2 - b^2) + v^2 e^2$  immer positiv ist;  $\sin^2 V + e = \sin^2 \mathfrak{V}$  ist ebenfalls immer positiv. Folglich ist  $a^2$  stets positiv,  $b^2$  dagegen positiv für  $e > 0$ ,  $v > b$  und negativ für  $e < 0$ ,  $v < b$ . Die Kurven (6) sind also Ellipsen für  $v > b$  und Hyperbeln für  $v < b$ .

Es sollen jetztz diese beiden Fälle getrennt behandelt werden, und zwar zunächst der Fall  $v > b$ .

Setzt man  $b : v = \sin N$  und beschreibt um die optischen Axen  $A_1$  und  $A_2$  Kreiskegel (siehe Fig. 2) mit dem Öffnungswinkel  $2N$ , so treten

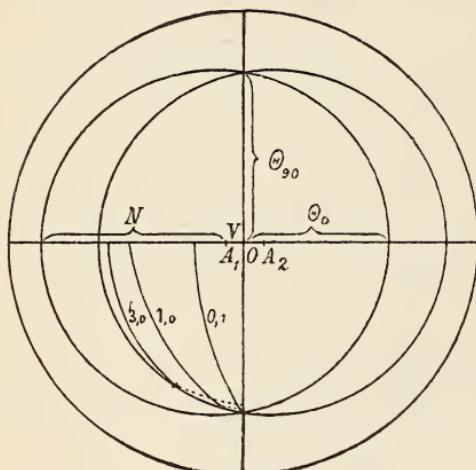


Fig. 2.

nur aus den Platten beider optischen Axen aus, deren Normalen innerhalb der beiden Kreiskegel liegen. Läge die Normale ausserhalb eines der Kegel, so würde die betreffende Axe total reflektirt werden. Schneiden sich die beiden Kegel gar nicht, ist also  $N < V$ , so giebt es keine Platte, welche beide Axen austreten lässt. Die Schnittlinien der beiden Kegel liegen in der Ebene  $\chi = \pi/2$  und bilden mit der Linie O den Winkel  $\theta_{90}$ . Die Schnittlinien der Kegel mit der Ebene  $\chi = 0$  bilden mit der Linie O den Winkel  $\theta_0$ . Dann ist:

$$\theta_0 = N - V, \quad \cos \theta_{90} = \cos N : \cos V.$$

Führt man in (5a) den Winkel  $N$  ein und setzt:

$$\operatorname{tg}^2 \theta_0 = (\sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V) (\sin^2 N - \sin^2 \mathfrak{V}) : \sin^2 \mathfrak{V} (\sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V + \cos^2 N)$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{90} = (\sin^2 N - \sin^2 \mathfrak{V}) : (\sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V + \cos^2 N)$$

so erhält sie folgende Gestalt:

$$(7) \quad \operatorname{tg}^2 \theta (\operatorname{cotg}^2 \theta_0 \cos^2 \chi + \operatorname{cotg}^2 \theta_{90} \sin^2 \chi) = 1.$$

Ändert  $\sin^2 \mathfrak{V}$  seinen Werth, so ändern sich auch  $\theta_0$  und  $\theta_{90}$ , und zwar ist:

$$\frac{d \operatorname{tg}^2 \theta_0}{d \sin^2 \mathfrak{V}} = - \frac{[\sin V \cdot \sin N \cos(N+V) + \sin^2 \mathfrak{V}] [\sin V \sin N \cos(N-V) - \sin^2 \mathfrak{V}]}{\sin^4 \mathfrak{V} (\sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V + \cos^2 N)^2}$$

$$\frac{d \operatorname{tg}^2 \theta_{90}}{d \sin^2 \mathfrak{V}} = - \frac{\cos^2 V}{(\sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V + \cos^2 N)^2}$$

Der zweite Ausdruck ist immer negativ, der erste dagegen ist  $\geq 0$ , wenn  $\sin^2 \mathfrak{V} \leq \sin V \sin N \cos(N-V)$  ist. Für  $\sin^2 \mathfrak{V} = \sin V \sin N \cos(N-V)$

erreicht also  $\operatorname{tg}^2 \vartheta_0$  ein Maximum; dieses ist:

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_0^m = \operatorname{tg}^2 (N - V)$$

$$\vartheta_0^m = N - V = \Theta_0$$

Der zugehörige Werth von  $\vartheta_{90}^m$  ergiebt sich aus:

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_{90}^m = \operatorname{tg} N \cdot \operatorname{tg} (N - V).$$

Für  $\mathfrak{V} = V$  erhält man:

$$\cos^2 \vartheta_{90}^0 = \frac{\cos^2 N}{\cos^2 V} \quad \text{also } \vartheta_{90}^0 = \Theta_{90}, \quad \vartheta_0^0 = 0.$$

Wächst nun  $\mathfrak{V}$ , so wächst  $\vartheta_0$  bis zu einem Maximum  $\vartheta_0^m = \Theta_0$  und nimmt dann wieder ab,  $\vartheta_{90}$  nimmt beständig ab.

Die einhüllende Fläche der sämmtlichen elliptischen Kegel ergiebt sich auf folgende Weise. Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V &= A & \sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V \sin^2 \chi &= C \\ \sin^2 N - \sin^2 \mathfrak{V} &= B & \sin^2 \mathfrak{V} - \sin^2 V + \cos^2 N &= D, \end{aligned}$$

so kann man (7) schreiben:

$$(7 \text{ a}) \quad \operatorname{tg}^2 \vartheta \cdot C D - A B = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach  $\sin^2 \mathfrak{V}$ , so erhält man:

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta (C + D) + A - B = 0.$$

Quadrirt man diese Gleichung und subtrahirt davon die erste, nachdem man sie mit  $4(\operatorname{tg}^2 \vartheta + 1)$  multiplizirt hat, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^4 \vartheta (C - D)^2 + \operatorname{tg}^2 \vartheta [2(C - D) \cdot (A + B) + 4(A - C) \cdot (B + D)] + (A + B)^2 = \\ [\operatorname{tg}^2 \vartheta (\sin^2 V \cos^2 \chi - \cos^2 N) + \sin^2 N - \sin^2 V]^2 - 4 \operatorname{tg}^2 \vartheta \sin^2 V \cos^2 V \cos^2 \chi = \\ \frac{1}{\cos^4 \vartheta} \left\{ [\cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 V + \sin^2 \vartheta \sin^2 V \cos^2 \chi - \cos^2 N]^2 - 4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin^2 V \cos^2 V \cos^2 \chi \right\} = \\ \frac{1}{\cos^4 \vartheta} [(\cos \vartheta \cdot \cos V + \sin \vartheta \sin V \cos \chi)^2 - \cos^2 N] [(\cos \vartheta \cos V - \sin \vartheta \sin V \cos \chi)^2 - \cos^2 N] = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt aber die beiden um die optischen Axen gelegten Kegel mit dem Öffnungswinkel  $2N$  dar. Diese werden also von den elliptischen Kegeln berührt und je zwei unendlich benachbarte von diesen schneiden sich in Linien, die auf den Kreiskegeln liegen, wenigstens so lange  $\sin^2 \mathfrak{V} \leq \sin V \sin N \cos(N - V)$  ist. Für grössere Werthe von  $\mathfrak{V}$  schneiden sich die Ellipsen in imaginären Linien  $1/\cos^2 \vartheta = 0$ .

Der Raum im Innern beider Kreiskegel wird also von den elliptischen Kegeln vollständig ausgefüllt, und zwar gehen durch jeden Punkt zwei Kegel, da ja zu jedem Werthe  $\chi$  und  $\vartheta$  zwei positive Werthe von  $\epsilon$  gehören (siehe S. 4). Da jedoch der kleinere von diesen beiden Werthen zu benutzen ist und andererseits zu einem kleineren  $\epsilon$  resp.  $\mathfrak{V}$  ein grösserer Winkel  $\vartheta_{90}$  gehört, so wird der Punkt als zu dem Kegel gehörig zu betrachten sein, dessen Durchschnitt mit der Ebene  $\chi = \pi/2$  von der Linie 0 am weitesten entfernt ist. Es werden also nur diejenigen Stücke der Kegel in Betracht kommen, die zwischen der Ebene  $\chi = 0$  und den Berührungslien der Kegel mit den Kreiskegeln liegen. In Fig. 2 sind in dem Quadranten links unten die Schnittlinien der Kegel mit der Konstruktionskugel für drei Werthe von  $(\mathfrak{V} - V)$  für Aragonit und  $n = 1,6$  gezeichnet,

und zwar sind die Theile, die nicht weiter in Betracht kommen, punktiert. Ist  $\sin^2 \mathfrak{V} > \sin V \sin N \cos(N - V)$ , so liegen die Kegel vollständig innerhalb des Kegels, den man für  $\sin^2 \mathfrak{V} = \sin V \sin N \cos(N - V)$  erhält; man kann sie deshalb ganz unberücksichtigt lassen. Der grösste Werth, den  $\mathfrak{V}$  annehmen kann und der mit  $\mathfrak{V}^m$  bezeichnet werden soll, ist also durch die Gleichung bestimmt:

$$\sin^2 \mathfrak{V}^m = \sin V \sin N \cos(N - V).$$

Die Berührungs linie eines beliebigen Kegels mit einem der Kreiskegel möge die Coordinaten  $\chi_k$  und  $\vartheta_k$  haben; dann sind dieselben bestimmt durch die Gleichung des Kegels (7 a) und die Gleichung

$$(8) \quad \cos N = \cos \vartheta_k \cos V \pm \sin \vartheta_k \sin V \cos \chi_k.$$

Setzt man nun in (7 a):

$$C = D - \cos^2 N + (\cos N - \cos \vartheta_k \cos V)^2 : \sin^2 \vartheta_k$$

$$A = D - \cos^2 N$$

$$B = D + \cos^2 V,$$

so ergiebt sich:

$$[\sin^2 \vartheta_k (D - \cos^2 N) + (\cos N - \cos \vartheta_k \cos V)^2] D + \cos^2 \vartheta_k (D - \cos^2 N) (D - \cos^2 V) = \\ (D - \cos V \cdot \cos N \cos \vartheta_k)^2 = 0.$$

Es ist also:

$$\cos \vartheta_k = \frac{D}{\cos V \cdot \cos N} = \cos V \cdot \cos^2 \vartheta_{90} : \cos N = \cos^2 \vartheta_{90} : \cos \vartheta_{90}$$

$$\cos \chi_k = \pm (\cos^2 N - D) : \sin V \cdot \cos N \cdot \sin \vartheta_k = \pm (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{V}) : \sin V \cdot \cos N \cdot \sin \vartheta_k.$$

In der folgenden Tabelle sind für Aragonit und für  $n = 1$  resp. 1,6 die Werthe von  $N$ ,  $\vartheta_0$  etc. berechnet. Die benutzten Formeln sollen hier noch kurz zusammengestellt werden.

Gegeben:  $V$ ,  $\beta$ ,  $n$  und  $\mathfrak{V} - V$ .

	$\sin N = b : v = n : \beta$	$\sin^2 \vartheta_{90} = \sin(N + \mathfrak{V}) \sin(N - \mathfrak{V}) : \cos^2 V$
	$\vartheta_0 = \vartheta_0^m = N - V$	$\operatorname{tg}^2 \vartheta_0 = \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} \cdot \sin(\mathfrak{V} + V) \sin(\mathfrak{V} - V) : \sin^2 \mathfrak{V}$
(9)	$\cos \vartheta_{90} = \cos N : \cos V$	$\cos \vartheta_k = \cos^2 \vartheta_{90} : \cos \vartheta_{90}$
	$\operatorname{tg}^2 \vartheta_{90}^m = \operatorname{tg} N \cdot \operatorname{tg}(N - V)$	$\cos \chi_k = \sin(\mathfrak{V} + V) \sin(\mathfrak{V} - V) : \sin V \cos N \sin \vartheta_k$
	$\sin^2 \mathfrak{V}^m = \sin V \sin N \cos(N - V)$	

Für sehr kleine Werth von  $\mathfrak{V} - V$  erhält man statt den vier Formeln rechts:

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_{90} = \vartheta_{90} \\ \vartheta_k = \vartheta_{90} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 = \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} \cdot 2 \operatorname{cotg} V \sin(\mathfrak{V} - V) \\ \cos \chi_k = 2 \sin(\mathfrak{V} - V) : \sin \vartheta_{90} \cos \vartheta_{90} \end{array} \right\}$$

Es ergiebt sich für Aragonit:

Tabelle I.  
 $V = 8^{\circ} 92$ .  $\beta = 1,68157$ .

$n$	$N$	$\vartheta_0$	$\vartheta_{90}$	$\vartheta_{90}^m$	$\mathfrak{V}^m - V$
1	$36^{\circ} 49$	$27^{\circ} 57$	$35^{\circ} 53$	$31^{\circ} 86$	$7^{\circ} 69$
1,6	$72,08$	$63,16$	$71,85$	$67,98$	$6,04$

$\mathfrak{B} - V$	$n = 1$				$n = 1,6$			
	$\vartheta_{90}$	$\vartheta_0$	$\vartheta_k$	$\chi_k$	$\vartheta_{90}$	$\vartheta_0$	$\vartheta_k$	$\chi_k$
0,001	35°,53	1°,93	35°,52	89°,96	71,84	8°,18	71°,83	89°,93
0,1	35,50	6,02	35,46	89,57	71,80	24,21	71,74	89,32
0,2	35,46	8,40	35,39	89,14	71,74	32,16	71,63	88,63
0,5	35,36	12,80	35,19	87,81	71,58	43,87	71,30	86,52
1,0	35,18	17,08	34,82	85,46	71,30	52,16	70,72	82,81
3,0	34,37	24,31	33,15	74,15	70,08	61,25	68,11	65,13
5,0	33,40	26,76	31,08	58,28	68,72	63,01	64,99	38,51
7,0	32,28	27,52	28,56	30,80	—	—	—	—

Ist  $v < b$ , so würde  $\sin N > 1$  werden und  $N$  also imaginär. Die Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel  $2N$  verlieren ihre Bedeutung und der Raum, in welchem die Plattennormalen liegen müssen, damit beide Axen austreten können, wird begrenzt durch die beiden Ebenen, die auf den optischen Axen senkrecht stehen. Man hat dann also allgemein:

$$\Theta_0 = \pi/2 - V, \quad \Theta_{90} = \pi/2.$$

Setzt man in (5 a) nun  $v : b = \cos P$  und zugleich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 &= (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{B}) (\operatorname{tg}^2 P + 1 - \sin^2 \mathfrak{B}) : \sin^2 \mathfrak{B} (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{B} + \operatorname{tg}^2 P) \\ \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} &= (\operatorname{tg}^2 P + 1 - \sin^2 \mathfrak{B}) : (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{B} + \operatorname{tg}^2 P), \end{aligned}$$

so sind die Gleichungen der hyperbolischen Kegel folgende:

$$(10) \quad \operatorname{tg}^2 \vartheta (\operatorname{cotg}^2 \vartheta_0 \cos^2 \chi - \operatorname{cotg}^2 \vartheta_{90} \sin^2 \chi) = 1.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{tg}^2 \vartheta_0}{d \sin^2 \mathfrak{B}} &= - \frac{\sin^2 V (\cos^2 P \sin^2 V + \sin^2 P) - 2 \sin^2 \mathfrak{B} \sin^2 V \cos^2 P + \sin^4 \mathfrak{B} \cos^4 P}{\sin^4 \mathfrak{B} [\cos^2 P \sin^2 V - \cos^2 P \sin^2 \mathfrak{B} + \sin^2 P]^2} \\ \frac{d \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90}}{d \sin^2 \mathfrak{B}} &= - \frac{\cos^2 V \cos^4 P}{[\cos^2 P \sin^2 V - \cos^2 P \sin^2 \mathfrak{B} + \sin^2 P]^2}. \end{aligned}$$

Den Zähler des ersten Bruches kann man folgendermassen schreiben:

$$[\sin^2 V \cos^2 P - \sin^2 \mathfrak{B} \cos^4 P] [\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{B}] + \sin^2 V \sin^2 P (1 - \sin^2 V \cos^2 P).$$

Da für  $v < b$  immer  $V > \mathfrak{B}$  ist, so ist dieser Ausdruck stets grösser als Null. Es ist also  $d \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 : d \sin^2 \mathfrak{B}$  und  $d \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} : d \sin^2 \mathfrak{B}$  stets negativ.

Für  $\mathfrak{B} = V$  ist:

$$\vartheta_0^0 = 0, \quad \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90}^0 = 1 + \cos^2 V \operatorname{cotg}^2 P.$$

Nimmt nun  $\mathfrak{B}$  ab, so wachsen  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_{90}$  beständig.

Je zwei von den hyperbolischen Kegeln schneiden sich nie in reellen Linien und es geht durch jede mögliche Plattennormale nur eine von den Hyperbeln, dem Umstande entsprechend, dass für  $v < b$  die Gleichung (4) nur eine negative Wurzel hat.

Den kleinsten Werth nimmt  $\mathfrak{B}$  für  $\vartheta_0 = \pi/2 - V$  an. Diesen kleinsten Werth von  $\mathfrak{B}^m$  findet man aus (10), indem man darin  $\chi = 0$ ,  $\vartheta = \pi/2 - V$

setzt. Zugleich soll ein Hülfsinkel  $M$  eingeführt werden, welcher bestimmt ist durch:

$$\cos M = \cos P \cos 2V.$$

Man erhält dann:

$$\sin \mathfrak{V}^m = \sin \frac{M \mp P}{2} : \cos P.$$

Das obere Zeichen giebt den Werth, welcher kleiner als  $V$  ist, und ist also zu benutzen.

Um nun die Werthe von  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta_{90}$ ,  $\vartheta_k$  und  $\chi_k$ , die zu einem bestimmten  $\mathfrak{V}$  gehören, bequem berechnen zu können, kann man noch setzen:

$$\cos P \cdot \sin \mathfrak{V} = \sin \mathfrak{W}.$$

Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 &= \cos^2 \mathfrak{W} (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}) : \sin^2 \mathfrak{V} (\sin^2 P + \cos^2 P \sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}) \\ \sin^2 \vartheta_0 &= \cos^2 \mathfrak{W} (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}) : (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}). \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} = \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \cdot \sin^2 \mathfrak{V} : (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}).$$

Zur Bestimmung von  $\vartheta_k$  und  $\chi_k$  hat man die Gleichungen:

$$\cos V \cos \vartheta_k \pm \sin V \sin \vartheta_k \cos \chi_k = 0.$$

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_k (\operatorname{cotg}^2 \vartheta_0 \cos^2 \chi_k - \operatorname{cotg}^2 \vartheta_{90} \sin^2 \chi_k) = 1.$$

Setzt man den Werth von  $\cos \chi_k$  in die zweite Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} -\operatorname{tg}^2 \vartheta_k + \operatorname{cotg}^2 V (\operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} \operatorname{cotg}^2 \vartheta_0 + 1) &= \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} \\ \operatorname{tg}^2 \vartheta_k &= \cos^2 V : (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}) - \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} \\ &= (\cos^2 V - \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \mathfrak{W}) : (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}) \\ 1 : \cos^2 \vartheta_k &= (\cos^2 \mathfrak{W} - \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \mathfrak{W}) : (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}) \\ \cos^2 \vartheta_k &= \cos^2 \vartheta_0 (\sin^2 V - \sin^2 \mathfrak{W}) : \cos(\mathfrak{W} + \vartheta_0) \cos(\mathfrak{W} - \vartheta_0). \\ \cos \chi_k &= \pm \operatorname{cotg} \vartheta_k \operatorname{cotg} V. \end{aligned}$$

Für  $v < b$  erhält man also folgende Formeln:

Gegeben:  $V$ ,  $n$ ,  $\beta$  und  $V - \mathfrak{W}$ .

$$(11) \quad \begin{cases} \cos P = v : b = \beta : n & \sin \mathfrak{W} = \cos P \sin \mathfrak{V} \\ \cos M = \cos P \cos 2V & \sin^2 \vartheta_0 = \cos^2 \mathfrak{W} \cdot \sin(V + \mathfrak{W}) \sin(V - \mathfrak{W}) : \sin(V + \mathfrak{W}) \sin(V - \mathfrak{W}) \\ \vartheta_0 = \pi/2 - V & \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90} = \operatorname{tg}^2 \vartheta_0 \sin^2 \mathfrak{W} : \sin(V + \mathfrak{W}) \sin(V - \mathfrak{W}) \\ \vartheta_{90} = \pi/2 & \cos^2 \vartheta_k = \cos^2 \vartheta_0 \sin(V + \mathfrak{W}) \sin(V - \mathfrak{W}) : \cos(\mathfrak{W} + \vartheta_0) \cos(\mathfrak{W} - \vartheta_0) \\ \sin \mathfrak{V}^m = \sin \frac{M - P}{2} : \cos P & \cos \chi_k = \operatorname{cotg} \vartheta_k \cdot \operatorname{cotg} V. \end{cases}$$

Ist  $V - \mathfrak{W}$  sehr klein, so kann man für  $\vartheta_0$  auch folgende Gleichung benutzen:

$$\sin^2 \vartheta_0 = 2 \operatorname{cotg} V \cos^2 \mathfrak{W} \sin(V - \mathfrak{W}) : \sin^2 P.$$

Angewendet sind diese Formeln in der folgenden Tabelle für BoraX, Anhydrit und Natrolith in dem Falle  $n = 1,6$ . Die Werthe von  $\vartheta_{90}$  sind hierfür nicht berechnet.

Im Übrigen sind bei Berechnung der Tabelle die Formeln (9) benutzt.

Tabelle II.

n	β	V	N	Θ₀	Θ₃₀	Θ₉₀	[Β - V] = 0°,1				d₀	
							Β₃₀ - V	Β₃₉₀	Β₉₀	Β₉₄		
1	Cerussit . . .	2,07628	4°,12	28°,79	24°,67	28°,52	26°,970	6°,09	28°,50	6°,70	28°,48	89°,52
	Aragonit . . .	1,68157	8,92	36,49	27,57	35,53	31,86	7,69	35,50	6,02	35,46	89,57
	Schwerspath . . .	1,63745	18,39	37,64	19,25	33,44	27,43	6,86	33,37	3,84	33,29	89,56
	Borax . . .	1,4686	19,80	42,92	23,12	38,89	32,22	7,62	38,82	4,51	38,75	89,59
	Anhydrit . . .	1,57553	21,91	39,40	17,49	33,60	26,96	6,47	33,52	3,52	33,43	89,56
	Natrolith . . .	1,4797	29,73	42,52	12,49	31,92	24,52	5,14	31,80	2,77	31,67	89,55
	Topas . . .	1,6150	32,61	38,26	5,65	21,23	15,61	2,58	21,04	1,62	20,84	89,40
	Anglesit . . .	1,8830	33,42	32,08	—	—	—	—	—	—	—	
	Schwefel . . .	2,03832	36,17	29,38	—	—	—	—	—	—	—	
	Olivin . . .	1,678	43,87	36,58	—	—	—	—	—	—	—	
1,6	Cerussit . . .	50°,41	46°,29	50,29	48°,36	7°,16	50°,27	14°,58	50°,25	89°,59	4°,79	
	Aragonit . . .	72,08	63,16	71,85	67,98	6,04	71,80	24,21	71,74	89,32	8,19	
	Schwerspath . . .	77,72	59,33	77,05	70,24	4,97	76,90	23,67	76,74	89,08	8,02	
	Borax . . .	(90°)	70,20	90	—	—8,02	—	14,04	88,07	84,64	4,28	
	Anhydrit . . .	(90°)	68,09	90	—	—4,28	—	36,13	88,53	86,34	9,05	
	Natrolith . . .	(90°)	60,27	90	—	—8,24	—	10,72	87,52	85,66	3,31	
	Topas . . .	82,19	49,58	80,72	71,13	3,43	80,32	23,37	79,91	88,74	8,14	
	Anglesit . . .	58,18	24,76	50,82	40,77	7,26	50,69	5,06	50,55	89,59	1,62	
	Schwefel . . .	51,72	15,55	39,88	30,70	5,75	39,73	3,28	39,58	89,59	1,05	
	Olivin . . .	72,46	28,59	65,29	52,71	5,75	65,04	7,36	64,78	89,47	2,37	

Diese Tabelle giebt eine Übersicht über die Räume, innerhalb deren eine Plattennormale liegen kann und über die Grösse der grössten Abweichung des Werthes  $\mathfrak{B}$  von  $V$ , welche möglich ist. Ferner ist daraus die Gestalt der Kegelfläche zu ersehen, auf welcher die Normalen der Platten liegen, die einen Werth  $\mathfrak{B}$  ergeben, der von  $V$  um  $0^{\circ}1$  abweicht. Besonders wichtig ist der Winkel  $\vartheta_0$ , da dieser die Abweichung der Normale von  $O$  in der Ebene darstellt, in welcher eine Abweichung auf die Messung und Berechnung den ungünstigsten Einfluss hat. Der Winkel  $\vartheta_0$  ist auch für  $[\mathfrak{B} - V] = 0^{\circ}01$  angegeben. Dass der Werth von  $n$  einen bedeutenden Einfluss auf diesen Winkel hat, ist ebenfalls aus der Tabelle zu ersehen.

Ist  $v > b$ , so ist

$$\sin^2 \mathfrak{B}^m = \sin N \cdot \sin V \cdot \cos(N - V).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d \sin^2 \mathfrak{B}^m}{d N} = \sin V \cos(2N - V).$$

Solange also  $2N < V + \pi/2$  ist, nimmt  $\mathfrak{B}^m$  mit wachsendem  $N$  resp.  $n$  zu, erreicht für  $2N = V + \pi/2$  einen Maximalwerth

$$\sin^2 \mathfrak{B}^m = \sin V (\sin V + 1) : 2$$

und nimmt dann wieder ab.

Um den Werth  $V$  zu bestimmen, für den  $\mathfrak{B}^m - V$  ein absolutes Maximum wird, kann man bilden:

$$2 \cdot \sin \mathfrak{B}^m \cos \mathfrak{B}^m \cdot d \mathfrak{B}^m = \cos V (2 \sin V + 1) \cdot d V : 2$$

$$d(\mathfrak{B}^m - V) = \left[ \frac{\cos V \cdot (2 \sin V + 1)}{4 \sin \mathfrak{B}^m \cos \mathfrak{B}^m} - 1 \right] d V = 0.$$

Dieses ergiebt:

$$\begin{aligned} \cos^2 V (2 \sin V + 1)^2 - 4 \sin V \cdot (\sin V + 1) (2 - \sin^2 V - \sin V) = \\ \cos^2 V (1 - 4 \sin V) = 0. \end{aligned}$$

Da  $V = \pi/2$  einen einaxigen Krystall ergiebt, muss sein:

$$\sin V = 1 : 4, \quad \sin^2 N = 5 : 8, \quad \sin^2 \mathfrak{B}^m = 5 : 32, \quad \mathfrak{B}^m - V = 8^{\circ}81.$$

Das Maximum für  $\mathfrak{B}^m$  ergiebt sich indessen lediglich deshalb, weil sich mit  $n$  auch die Räume erweitern, in denen die Normalen liegen können. Nimmt man dagegen eine bestimmte Normale an, so wird die Differenz zwischen dem zugehörigen  $\mathfrak{B}$  und  $V$  mit wachsendem  $n$  immer geringer, bis sie für  $n = \beta$  verschwindet. Umgekehrt gehören zu demselben Werthe von  $\mathfrak{B} - V$  immer weitere Kegel, je grösser  $n$  resp.  $N$  ist, wie aus den Formeln (9) hervorgeht. Das Verhältniss  $\operatorname{tg}^2 \vartheta_0 : \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90}$  ändert sich nicht, wenn  $n$  variiert.

Wächst  $n$  über  $\beta$  hinaus, so wächst auch  $P$  und  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_{90}$  nehmen ab, wobei wieder das Verhältniss  $\operatorname{tg}^2 \vartheta_0 : \operatorname{tg}^2 \vartheta_{90}$  ungeändert bleibt. Die hyperbolischen Kegel nähern sich also wieder der Linie  $O$  und umgekehrt erhält man jetzt eine um so grösse Differenz  $V - \mathfrak{B}$  bei derselben Platte, je grösser  $n$  wird.

Um diese Verhältnisse zu veranschaulichen, ist die folgende Tabelle für den Aragonit entworfen:

Tabelle III.

n	N	$\Theta_0$	$\Theta_{90}$	$\vartheta_{90}^m$	$\mathfrak{B}^m - V$	$[\mathfrak{B} - V] = 0^\circ,01$		$\frac{[\mathfrak{B} - V]}{= 0^\circ,01}$
						$\vartheta_{90}$	$\vartheta_0$	
1	36°,49	27°,57	35°,53	31°,86	7,69	35°,50	6°,02	1°,93
1,3	54,05	45,13	53,54	49,65	8,39	53,51	11,30	3,65
1,4	56,36	47,44	55,89	51,99	8,27	55,86	12,30	3,98
1,5	63,13	54,21	62,77	58,85	7,60	62,73	16,01	5,24
1,6	72,08	63,16	71,85	67,98	6,04	71,80	24,21	8,19
1,7	(90°)	81,08	90	—	— 3,25	—	44,49	18,49
1,8	(90°)	81,08	90	—	— 5,55	—	22,69	7,52

Fasst man die Resultate, die sich aus dem Anblick der Tabellen II und III ergeben, zusammen, so zeigt sich, dass es im Allgemeinen am günstigsten ist, wenn  $n$  möglichst nahe an  $\beta$  liegt, dass aber für die meisten Mineralien eine Flüssigkeit mit dem Brechungsindex 1,6, etwa Cassiaöl zur Messung und Berechnung des Winkels der optischen Axen ohne Rücksicht auf die fehlerhafte Orientirung der Platte genügen wird. Nur bei den Mineralien, die durch einen sehr grossen Axenwinkel und zugleich sehr grosses Lichtbrechungsvermögen ausgezeichnet sind, wie bei Anglesit und Schwefel, würde dann eine Neigung der Normale der Platte in der Ebene der optischen Axen gegen die Mittellinie derselben von 1° resp. 1°,6 einen Fehler von 0°,01 in der Bestimmung von V hervorrufen.

Ist die Plattennormale durch  $\chi$  und  $\vartheta$  bestimmt, so kann man leicht das zugehörige  $\vartheta_0$  berechnen, wenn man  $\mathfrak{B} - V$  als sehr klein betrachtet. Die Gleichungen (7) und (10) ergeben dann:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 \vartheta_0 &= \operatorname{tg}^2 \vartheta [\cos^2 \chi + (\sin^2 \mathfrak{B} - \sin^2 V) \sin^2 \chi : \sin^2 \mathfrak{B}] \\ &= \operatorname{tg}^2 \vartheta \cos^2 \chi.\end{aligned}$$

Mineralogisches Institut der Universität zu Königsberg i. Pr.  
B. Hecht.

Heidelberg, Januar 1887.

Hornblende, Oligoklas und Titanit aus Drusenräumen im Schriesheimer Diorit.

Im vorigen Frühjahr, bei einer Excursion in dem Thal oberhalb Schriesheim im Odenwald, wurde ein ziemlich zersetzer Diorit gefunden, welcher dadurch charakterisiert war, dass er reichlich grössere unregelmässig gestaltete Partien hell rosaroten Kalkspathes zeigte, in welchem einige gut spiegelnde, mit dem blossen Auge sichtbare Hornblendekristallchen eingewachsen waren.

An einigen mitgebrachten Bröckchen wurde der Kalkspat vermittelst verdünnter Salzsäure weggeätzt, wodurch eckige Drusenräume zum Vorschein kamen, in welche Krystalle von Hornblende und Feldspath, neben solchen von Titanit und spärlichem Epidot und Pyrit, aus dem Gestein hineinragen.

Auffällig war ein deutlicher Zusammenhang zwischen den gesteinbildenden Hornblenden und den frei aufgewachsenen Krystallchen desselben Minerals. Ob dieser aufgewachsene Theil als ein Weiterwachsen der aus schmelzflüssigem Magma ursprünglich ausgeschiedenen Hornblende anzusehen ist, oder ob diese primären Krystalle schon beim Festwerden des Diorit ihren Flächenreichthum angenommen und ihn nur dort haben bewahren können, wo nicht durch gegenseitiges Zusammenstossen der wachsenden Krystalle die Krystallgestalt deformirt wurde, ist eine Frage, die ich unbeantwortet lassen muss.

Bei den Feldspatkrystallchen ist ein solcher krystallographischer Zusammenhang mit den die Gesteinsmasse bildenden Feldspäthen wegen der Kleinheit derselben nicht so leicht zu bestätigen.

Das Gleiche gilt für die Titanite. Da dieses Mineral aber zu den zuerst ausgeschiedenen Bestandtheilen des Diorit gehört, so sind die eingewachsenen wie auch die aufgewachsenen rings um ausgebildet, und zeigen in beiden Fällen denselben Habitus und den gleichen Flächenreichthum.

Was den Epidot anbelangt, so ist dieser im Gegensatz zu dem bisher Besprochenen deutlich ein Zersetzungspunkt, der älter zwar als der die ganze Druse ausfüllende Calcit, aber jünger als die anderen Drusenmineralien ist. Seine Gestalt wird zum grossen Theil durch die Configuration der älteren Krystalle bedingt.

Da nun die Hornblende-, Feldspath- und Titanitkrystalle einen für Gesteinsgemengtheile aussergewöhnlichen Flächenreichthum aufwiesen und da die Flächen in der Regel gut spiegelten, schien es von Interesse, dieselben, soweit möglich, genau zu bestimmen. Diese Arbeit habe ich auf Veranlassung des Herrn Prof. ROSENBUSCH unternommen.

Die Hohlräume selbst, die unregelmässig zackige Gestalt besitzen, können eine Hauptlänge bis über 20 mm. hinaus erreichen. Meistens aber sind sie viel kleiner. Die grössten Dimensionen bei den Krystallen sind für Hornblende 5—6 mm., für Feldspath 4—6 mm., für Titanit 6—7 mm.

Manche Drusen enthalten nur Hornblenden, andere fast nur Feldspäthe, während der Titanit in vereinzelten Individuen auftritt. In der unmittelbaren Nähe einer Druse ist gewöhnlich dasselbe Mineral angehäuft, welches den Hauptgemengtheil der Druse bildet.

Die Drusenräume sind nicht gleichmässig durch das Gestein verbreitet, sondern local angehäuft. All das Material, welches ich zum Messen verwandt habe, stammt aus einem Block. Die anderen herumliegenden Blöcke, sowie das in der Nähe anstehende Gestein zeigen nur spärlich ähnliche Ausscheidungen.

Der Fundort liegt im Schriesheimer Thal etwa 25 Minuten oberhalb dieses Ortes, direkt an der Chaussee und kaum 75 Schritte unterhalb des

berühmten Peridotitganges. Es liegen im Gebüsch einige Blöcke, welche die mit röthlichem Calcit gefüllten Hohlräume enthalten, auch höher, das steile Gehänge hinauf, ist das Gestein anstehend zu treffen. Unmittelbar unterhalb dieses Fundortes, gegenüber einer Mühle, stehen Dioritfelsen an, die beim Chausseebau frisch angeschlagen wurden. Hier aber scheinen die Drusen zu fehlen.

Der Habitus der Hornblenden wird durch die vier herrschenden Formen  $\infty P$  (110),  $\infty P\bar{\infty}$  (010),  $OP$  (001) und  $P$  ( $\bar{1}11$ ) bedingt. Dazu treten untergeordnet die in der folgenden Tabelle angegebenen Formen. Die in der ersten Columnne angeführten Winkel sind die Durchschnittswerte, die ich durch Messungen an elf verschiedenen Krystallen gewonnen habe, die drei letzten Columnnen enthalten die den Lehrbüchern von NAUMANN-ZIRKEL, DANA und DES CLOIZEAUX entnommenen Winkelwerthe.

	gemessen	NAUMANN	DANA	DES CLOIZEAUX
110 : 1 $\bar{1}0$	124° 31'	124° 30'	124° 30'	124° 16',2
010 : 130	147 41		147 39	147 45,9
010 : $\bar{1}11$	105 40		105 46	105 49
010 : $\bar{1}31$	130 14	130 53	130 15	130 21,7
$\bar{1}11$ : $\bar{1}\bar{1}1$	148 38	148 30	148 28	
$\bar{1}11$ : $\bar{1}31$	155 31		155 31	155 27,3
001 : $\bar{1}11$	145 33	145 35	145 35	145 26,8
001 : 110	103 9		103 12	103 31,5

Die von mir gemessenen Winkel stimmen in befriedigender Weise mit den von DANA angegebenen Werthen überein.

Nicht messbar war eine stets sehr kleine, in den Zonen 001 : 010 und 110 :  $\bar{1}31$  liegende Fläche, welche demnach das Symbol (041) =  $4P\bar{\infty}$  hat.

Ausserdem wurde an einem Krystall eine schmale Fläche bemerkt, die den Winkel zwischen 110 und  $\bar{1}10$  abstumpft, und die als 100 =  $\infty P\bar{\infty}$  anzusehen ist.

Die Hornblenden aus diesen Drusen zeigen also folgende acht Krystallformen :

$$(110) = \infty P, (010) = \infty P\bar{\infty}, (100) = \infty P\bar{\infty}, (130) = \infty P\bar{3}, \\ (001) = OP, (041) = 4P\bar{\infty}, (\bar{1}11) = P, (\bar{1}31) = 3P\bar{3}.$$

Zu diesen acht Formen gesellt sich vielleicht noch eine neunte, die in der Lage einer flachen positiven Hemipyramide auftritt, aber viel zu winzig ist, um eine genaue Bestimmung zu gestatten.

Zwillinge bei diesen Hornblenden sind nicht selten. Das gewöhnliche Gesetz — Zwillingsebene das Orthopinakoid — ist allein beobachtet worden.

Die Feldspäthe besitzen meistens matte Flächen, welche wenig deutliche Bilder liefern. Die gefundenen Winkelwerthe haben daher nur auf geringe Zuverlässigkeit Anspruch.

Polysynthetische Zwillingsbildung nach dem Albitgesetz ist an manchen Krystallen deutlich sichtbar, während sie bei anderen gänzlich fehlt.

Der Habitus dieser Feldspäthe stimmt so sehr mit den von G. vom RATH gemessenen und abgebildeten Oligoklaskrystallen vom Vesuv, dass ich die aus seiner Arbeit<sup>1</sup> entnommenen Winkelmessungen in der folgenden Tabelle zum Vergleich herbeigezogen habe.

	gemessen	nach vom RATH	Differenzen
1 : M	120° 59'	120° 46',5	12',5
1 : T	121 9	120 53	16
M : T	118 42	118 20	22
M : P	86 27	86 32	5
M : z	148 42	149 9	27
P : x	128 31	128 3	28
P : r	115 10	115 2,5	7,5
P : y	99 ?	98 7,5	52,5?

Der Werth 99° für den Winkel P : y ist unzuverlässig, da das kleine Makrodoma y = (201) nur mit Sicherheit an einem Krystall beobachtet wurde, und ein sehr wenig deutliches Bild ergab.

Ausser diesen acht durch Messungen bestimmten Formen kommen vier andere vor, die vermittelst des Zonenverbandes leicht zu erkennen sind. Sie sind die folgenden — 111 in den Zonen 001 : 110 und 101 : 010, — 221 in den Zonen 001 : 110 und 403 : 130, — 110 in den Zonen 001 : 110 und 101 : 010 — und 221 in den Zonen 001 : 110 und 010 : 201.

Noch eine andere vorkommende Fläche, den Winkel zwischen 110 = 1 und 0/0 = m abstumpfend, wird wohl der Lage nach als f = (130) anzusehen sein.

Folgende 13 Formen sind also an den Feldspäthen mit mehr oder weniger Bestimmtheit nachgewiesen worden:

P = (001), T = (110), l = (110), M = (010), f = (130), z = (130), x = (101),  
y = (201), r = (403), p = (111), o = (111), g = (221), u = (221).

Unter diesen dreizehn sind zwölf an einem Krystall vertreten.

Eine aus der oben erwähnten Arbeit von G. vom RATH entlehnte Zeichnung, mit der man die Krystalle von Schriesheim gut vergleichen kann, findet sich in der Mineralogie von NAUMANN-ZIRKEL unter Oligoklas. Die an genannter Stelle abgebildete Fig. 1 stellt sehr getreu die Art der Ausbildung der Schriesheimer Oligoklase dar. Nur drei kleine Flächen, nämlich die mit h, e und n bezeichneten, habe ich bis jetzt nicht beobachtet.

Die nahe Übereinstimmung der an den Schriesheimer Feldspäthen gefundenen Winkeln mit denen des vesuvischen Oligoklas lässt darauf schliessen, dass hier ebenfalls Oligoklas vorliege. Das wird durch die optische Untersuchung bestätigt. Schliffe nach den Flächen P und M geben auf M eine Auslöschungsschiefe von 5° 35' gegen die Trace der Fläche P, während auf P die Auslöschungsschiefe gegen die Trace von M etwa 1° 6' im positiven Sinne beträgt. Diese Zahlen entsprechen, nach dem SCHUSTER-

<sup>1</sup> Pogg. Ann. Bd. 138. p. 464.

schen Gesetze, einem Oligoklas von der Zusammensetzung  $Ab_3An_1$ . Im convergenten Lichte giebt der Schliff nach dem Brachypinakoid eine fast in der Mitte austretende positive Bisectrix.

Die Titanite sind nach dem in Gesteinsarten häufigsten Habitus ausgebildet, d. h. nach n säulenförmig gestreckt. Die Flächen sind häufig geknickt, wodurch das Bestimmen der Formen sehr erschwert wird. Zwillingssbildung scheint vollständig zu fehlen.

Die an elf ausgewählten Krystallen ausgeführten Messungen finden sich in der ersten Columnne der folgenden Tabelle; in der zweiten sind zum Vergleich die aus DES CLOIZEAUX' „Manuel de minéralogie“ entnommenen Winkelwerthe beigegeben. Da aber DES CLOIZEAUX dem Titanit eine andere als die in Deutschland übliche Aufstellung gegeben hat, habe ich die Flächen mit den aus NAUMANN's Mineralogie entnommenen Buchstaben und mit den dem NAUMANN'schen Axenverhältniss entsprechenden MILLER'schen Symbolen bezeichnet.

	gemessene Winkelwerthe	nach DES CLOIZEAUX	Differenzen
$P = 001 : x = \bar{1}02$	140° 40'	140° 43'	3'
$P : y = \bar{1}01$	119 40	119 43	3
$P : l = 110$	85 41	85 45	4
$P : t = 121$	120 33?	119 13	1° 20
$P : \bar{1}45$	148 18	148 5	13
$P : n = \bar{1}23$	145 4	144 56	8
$n = \bar{1}23 : n = \bar{1}23$	136 26	136 12	14
$n : y = \bar{1}01$	141 49	141 44	5
$n : t = 121$	108 5?	108 39	34
$n : r = 011$	152 46	152 46	0
$y = \bar{1}01 : l = 110$	139 27	139 26	1
$y : o = 013$	61 8	61 2	6
$y : z = \bar{1}12$	154 26	154 19	7
$y : \bar{1}45$	130 29	130 45	16
$l, = 110 : l = \bar{1}10$	133 51	133 52	1
$e, = \bar{1}13 : e = \bar{1}13$	157 21	157 16	5

Mit Ausnahme der Fläche  $t = (121)$ , die nur an einem Krystall vor kommt und dort zu schlecht ausgebildet ist, um ein genaueres Messen zu gestatten, stimmen alle Winkelmaasse nahe genug mit den Angaben von DES CLOIZEAUX überein, um die Formen zu identificiren. Da aber die ausgenommene Fläche deutlich in der Zone  $n, r, t, l, y$  liegt, so ist man wohl berechtigt, sie als  $t = (121)$  anzunehmen.

Ausser diesen zwölf Krystallformen kommt an einem einzigen Krystall eine positive Pyramide vor, die mit keiner der von DES CLOIZEAUX angegebenen Formen übereinstimmt. Diese Hemipyramide, die mit zwei Flächen vertreten ist, macht mit  $P = 001$  einen Winkel von 128° 32', mit  $y = \bar{1}01$  einen von 158° 59'. Aus diesen zwei Zahlen habe ich sie vermit-

telst sphärischer Dreiecke als  $(\bar{2}23) = \frac{2}{3}P$  berechnet, bezogen auf NAUMANN's Axenverhältniss.

Zur Controlle wurden die Winkel für  $\bar{2}23 : \bar{2}\bar{2}3$ ,  $\bar{2}23 : \bar{1}01$  und  $\bar{2}23 : 001$  berechnet. Die folgende Tabelle giebt sie gemessenen nebst den berechneten Winkeln.

	gemessen	berechnet
$\bar{2}23 : \bar{1}01$	$158^\circ 59'$	$158^\circ 59'$
$\bar{2}23 : 001$	$128^\circ 32'$	$128^\circ 34'$
$\bar{2}23 : \bar{2}\bar{2}3$	$143^\circ 50'$	$144^\circ 15'$

Eine Fläche mit der Lage  $\bar{2}23$  sollte in zwei Zonen liegen, nämlich in der Zone  $100 : \bar{1}23$  und in der Zone  $001 : \bar{1}10$ . Dass nun die betreffende Fläche in der ersten Zone wirklich liegt, kann man an dem Krystall constatiren, da (100) fehlt, ist dasselbe für die zweite Zone nicht nachweisbar.

Die Hemipyramide  $(\bar{2}23)$  wird in keinem mir zugänglichen Lehrbuch der Mineralogie unter den bei Titanit vorkommenden aufgezählt.

Zur bequemerem Vergleichung dieser Formen habe ich in der Tabelle unter I die für die Titanitformen gebräuchlichen Buchstaben ( $(\bar{2}23)$  wurde mit J bezeichnet), unter II, III und IV die Lévy'schen, MILLER'schen und NAUMANN'schen Symbole, bezogen auf das von DES CLOIZEAUX für Titanit angenommene Axenverhältniss (dasselbe wurde aus einem Werth  $b : h = 1000 : 681,902$ ,  $D = 798,207$ ,  $d = 602,384$  berechnet), unter V und VI die MILLER'schen und NAUMANN'schen Symbole für das von NAUMANN benutzte Axenverhältniss  $a : b : c = 0,4272 : 1 : 0,6575$  zusammengestellt.

I	Axenverhältniss nach DES CLOIZEAUX				Axenverhältniss nach NAUMANN	
	II	III	IV	V	VI	
n	$= d^{\frac{1}{2}} = (111)$	$= -P$	$= (\bar{1}23) = \frac{2}{3}P\bar{2}$			
P	$= h^1 = (100)$	$= \infty P\infty$	$= (001) = 0P$			
x	$= o^2 = (102)$	$= -\frac{1}{2}P\infty$	$= (\bar{1}02) = \frac{1}{2}P\infty$			
y	$= p = (001)$	$= oP$	$= (\bar{1}01) = P\infty$			
t	$= b^{\frac{1}{2}} = (\bar{1}11)$	$= P$	$= (121) = -2P\bar{2}$			
r	$= m = (110)$	$= \infty P$	$= (011) = P\infty$			
l	$= b^1 = (\bar{1}12)$	$= \frac{1}{2}P$	$= (110) = \infty P$			
o	$= h^2 = (310)$	$= \infty P\bar{3}$	$= (013) = \frac{4}{3}P\infty$			
e	$= \varepsilon = (212)$	$= -P\bar{2}$	$= (\bar{1}13) = \frac{1}{3}P$			
z	$= d^1 = (112)$	$= -\frac{1}{2}P$	$= (\bar{1}12) = \frac{1}{2}P$			
	$= d^{\frac{1}{4}} = (221)$	$= -2P$	$= (\bar{1}45) = \frac{4}{5}P\bar{4}$			
J	$= (5, 11, 22) = \frac{1}{2}P\frac{1}{5}$		$= (\bar{2}23) = \frac{2}{3}P$			

Die spärlich vorkommenden Eisenkieskrystalle zeigen nur zwei Krystallformen, vorwiegend  $\infty O\infty$  (100) mit durch O = (111) abgestumpften Ecken.

Horace B. Patton.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1887

Band/Volume: [1887](#)

Autor(en)/Author(s):

Artikel/Article: [Diverse Berichte 249-266](#)