Minimumproblem in der Lehre von der Symmetrie.

Von

E. von Fedorow.

Mit 4 Holzschnitten.

Das in dem Titel gestellte Problem bezieht sich auf verschiedene Zweige der Wissenschaft.

In erster Linie treffen darin zwei mathematische Lehren zusammen: einerseits die Lehre von den maximis et minimis, andererseits die Gestaltenlehre und zwar derjenige Abschnitt dieser allgemeinen Lehre, welcher zum Gegenstand die Symmetrie der geometrischen Figuren hat (die Lehre von der Symmetrie).

Bei dem Gange der Untersuchung bemerken wir verschiedene Beziehungen zu solchen Fragen der Lehre von den maximis et minimis, welche gewöhnlich als selbständige, von anderen unabhängige Aufgaben dieser Lehre behandelt worden sind.

Recht zahlreiche hierzu gehörende Aufgaben werden in den Elementarlehrbüchern der Differentialrechnung behandelt. Doch sind mir keine systematischen Untersuchungen über Minimumprobleme in der Lehre von der Symmetrie bekannt. Indirect gehören aber hiezu die classischen Untersuchungen von Steiner:

„Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt,“ und die Aufsätze von Sturm:

1) Bemerkungen und Zusätze zu Steiner's Aufsätzen über Maximum und Minimum, und

2) Würfel und reguläres Tetraëder als Maximum und Minimum (J. Crelle, Bd. 96 u. 97).

Nahe Beziehung zu dem behandelten Problem hat auch der Aufsatz Lindelöf's: „Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume“ (Bull. de l'Acad. Imp. de St. Pétersb. 1870. p. 257).

Noch näher steht das Problem verschiedenen Aufgaben der Physik und Krystallographie.

Schon Gauss hat die Bedeutung der Oberflächengrösse in der Lehre der Capillarerscheinungen hervorgehoben [1].

Curie [2] hat eine elementare Theorie der Krystallisation entwickelt, welche zur Basis das Princip der Minimaloberfläche hat.

Das Princip ist von ihm folgenderweise ausgedrückt [2]: „Etant donné un pareil [3] corps en ne considérant pas les forces extérieures autres que les forces capillaires l'énergie interne est la même pour tous les éléments de même volume suffisament éloignés de la surface; au contraire, à la surface, il y a une couche de transition extrêmement mince, les éléments de volume de cette couche ont une énergie moyenne différant sensiblement de celle des éléments intérieurs, d'où, dans l'énergie totale une partie est proportionelle au volume, l'autre partie est proportionelle à la couche de transition, c'est à dire à la surface.

„Lorsque le corps se déforme, l'énergie en volume est constante et l'énergie totale varie proportionellement à la variation de surface.“

Dasselbe Princip liegt auch einigen Untersuchungen von Liveing zu Grunde [4].

Auf dasselbe Princip beziehen sich Überlegungen mancher hervorragender Chemiker. So z. B. lesen wir in einem bekannten Werke Ostwald's [5]:

---

[1] Carl Friedrich Gauss' Werke. V. Bd. p. 31—77.

[2] Bull. de la Soc. minéral. de France. T. VIII. p. 146.

[3] Déformable sans variation de nature, ni de volume.

[4] Cambr. Philos. Transact. 14. 1889.

[5] Stöchiometrie. p. 731. Auch O. Lehmann: Molecularphysik. Bd. II. p. 418.

„Die Molekeln auf der Oberfläche eines Körpers befinden sich in einem weniger stabilen Zustande, als die im Inneren, denn es ist Arbeit erforderlich, um die Oberfläche zu vergrössern. Dies gilt sicher für Flüssigkeiten und sehr wahrscheinlich für feste Körper. Ein fester Körper in einer Flüssigkeit, die aus gleichen Molekeln besteht wie er selbst, wird also die Tendenz zeigen, möglichst viel Molekeln zu inneren zu machen, wie ja überall die Tendenz zur stabilsten Anordnung in der Natur vorhanden ist.“

Alle angegebenen Betrachtungen haben den Zweck, zu zeigen, dass bei der Entstehung einer krystallinen, ebenso wie einer unkrystallinen Substanz das Princip der kleinsten Oberfläche zur Anwendung kommt.

Zieht man jetzt das in dieser Abhandlung angeführte Resultat in Betracht, dass gleich grosse Körper, deren Symmetrie höher ist, unter gewissen Bedingungen eine kleinere Oberfläche haben, so erhalten wir möglicherweise eine Andeutung darüber, warum unter den natürlichen Krystallformen diejenigen von höheren Symmetriearten in so ausgeprägtem Grade vertreten sind.

Andererseits wurde vom Verfasser gezeigt[1], dass die Symmetriegrösse in sehr einfachem Verhältniss zur Anzahl der chemischen Molekeln in einer Krystallmolekel steht. Das Verhältniss ist die directe Proportionalität. Es wurde namentlich an dem Beispiele der besterforschten Mineralien (Leucit, Perowskit, Boracit) gezeigt, dass in den Grenzen des festen Zustandes ihre Krystallmolekeln einer Änderung unterworfen sind: und zwar dass bei höheren Temperaturen ihre Molekeln in eine ganze Anzahl einfacherer zerlegt werden und dass gleichzeitig die Symmetriegrösse in demselben Verhältniss zunimmt.

Darauf basirt der erste Versuch des Verfassers, wirkliche Structurarten der bezüglichen Krystalle zu ermitteln, d. h. die Vertheilung der Krystallmolekeln im Raume aufzuklären. Die Möglichkeit dafür wurde schon in der in seinem Werke: „Symmetrie der regelmässigen Systeme der Figuren“ vollständig ausgeführten Ableitung sämmtlicher möglichen

[1] Russisches Bergjournal. 1891. No. 1.

Structurarten der Krystalle angegeben. Insofern diese Ableitung auch die vollständige Ableitung vom regelmässigen Punktsysteme ist, fand sie in dem Werk von H. Schönflies: „Krystallsysteme und Krystallstructur“ die erwünschte Bestätigung (p. 622).

Aber Schönflies hielt sich fern von dem Begriffe der „Molekelsphäre“, d. h. des dem Molekel angehörenden Raumtheiles, welchen Begriff der Verfasser als Grundbegriff der Theorie der Krystallstructur ansieht. Diese Molekelsphäre soll die Form eines „Paralleloëders“ haben[1].

Die Verschiedenheit in den Typen der convexen Paralleloëder bedingt auch die Verschiedenheit in der Krystallstructur; die vollständige Ableitung von den Paralleloëdertypen war also das wahre Zeitbedürfniss[2].

Es kann auch vorausgesetzt werden, dass das Princip der kleinsten Oberflächen auch bei den Oberflächen der Molekelsphären (der Paralleloëder) in Anwendung kommt; ist das der Fall, so erhält die Frage über die kleinsten Oberflächen der Paralleloëder eine besondere Bedeutung.

Einen sehr particulären Fall dieser Frage bildet die Mac Laurin'sche Aufgabe von der Bienenzelle, d. h. von den Winkeln, bei welchen eine symmetrische Änderung in der Lage einiger Flächen eines Paralleloëders (und zwar des Hexaparalleloëders) zur kleinsten Oberfläche führt[3].

Diese Aufgabe bezieht sich auf ein sehr lehrreiches Beispiel dafür, was der Verstand und der Instinct so kleiner Insecten, wie die Bienen sind, leisten kann. Es kann scheinen (und das soll die Meinung mancher hervorragenden Vertreter der Naturwissenschaft sein), dass die Bienen in dem Bau ihrer Zellen eine nicht sehr einfache Aufgabe der Lehre von den maximis et minimis gelöst haben, und zwar fanden sie ein solches Paralleloëder, welches bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzt. Diese Auflösung spielt für ihr

---

[1] Unter Paralleloëder versteht man die den Raum in paralleler Lage lückenlos erfüllenden Figuren.

[2] Die vollständige Ableitung wurde vom Verfasser im Werke „Elemente der Gestaltenlehre“ § 77 publicirt. Jetzt ist diese Ableitung von Seiten der Herrn Minkowsky und Schönflies bestätigt worden.

[3] Mac Laurin, Philosoph. Transact. 1743.

Leben eine wichtige Rolle, weil damit die möglichste Ersparung des mit Mühe gewonnenen Materials — des Wachses — erzielt wird.

Vom Standpunkte der reinen Mathematik haben sie diese Aufgabe nicht fehlerfrei gelöst[1], aber etwas über diese Aufgabe Hinausgehendes erzielt.

Die Lösung der gestellten Aufgabe, welche von einigen englischen Mathematikern[2] gegeben wurde, hat zum Resultate geführt, dass die kleinste Oberfläche das Glied von der höchsten Symmetrie besitzt. In diesem Fall bezieht sich aber der Beweis auf eine einzige Figur und auf eine einzige Symmetrieart. In der vorliegenden Abhandlung ist diese Aufgabe auf alle möglichen Figuren und auf sämmtliche Symmetriearten angewandt.

Zum Schlusse sei noch die Erwähnung erlaubt, dass das Princip der kleinsten Wirkung von verschiedener Seite im Gebiete der Krystallographie seine Anwendung fand.

Herr Karnojetzky versucht auf dieses Princip die Entstehung der pseudosymmetrischen Krystalle zu begründen und die Orientirung der Einzelindividuen in Bezug auf die krystallographischen Axen des primitiven Krystalls in Einklang zu bringen[3].

Herr Prendel hat schon den Zusammenhang der beiden Principe — das der kleinsten Wirkung und das der kleinsten Oberfläche — betont. Er sagt u. A.[4]:

„Wenn wir nun diesen Satz ein wenig verallgemeinern und annehmen, dass überhaupt bei der Erhöhung der Symmetrie in einem Krystallkörper seine relative Oberfläche kleiner wird, so müssen caeteris paribus diejenigen Krystallkörper

---

[1] In dem Werke „Elemente der Gestaltenlehre" (§ 77) wurde gezeigt, dass noch ein Paralleloëder (Heptaparalleloëder) existirt, dessen Oberfläche bei demselben Volumen noch kleiner ist. Aber bei sehr kleiner Differenz in dem Verhältniss der Volumen (1 : 100574) haben die Bienen in dem Hexaparalleloëder noch ein wichtiges Resultat erzielt, namentlich die Gleichheit sämmtlicher inneren Flächenwinkel (welche für dieses Hexaparalleloëder gleich 120° sind). Man versteht sehr gut, von welch hoher Wichtigkeit dieser Umstand bei dem Zellenaufbau sein muss.

[2] Brougham, Compt. rend. t. 46. p. 1024. Willich, ibid. t. 51. p. 633.

[3] Groth, Zeitschrift für Krystallographie. Bd. XIX. p. 571.

[4] Ibid. Bd. XVIII. p. 449.

stabiler sein, die zu den Systemen der höheren Symmetrie gehören."

Hilfssätze.

Satz 1. Ist eine positive Zahl a in positive Theile $a_1, a_2 \ldots a_n$ getheilt, so hat das Product $a_1, a_2 \ldots a_n$ derselben den grössten Werth, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a/n$.

Für Maximum oder Minimum einer Function sind sämmtliche partielle Differentiale gleich 0, also:

$$\frac{\partial a_1}{a_1} + \frac{\partial a_2}{a_2} = 0; \quad \frac{\partial a_1}{a_1} + \frac{\partial a_3}{a_3} = 0 \ldots . \quad \frac{\partial a_1}{a_1} + \frac{\partial a_n}{a_n} = 0, \qquad \text{a)}$$

wenn a_1 als Function aller anderen Variabeln angenommen wird.

Aber zwischen denselben Grössen besteht noch die Relation:

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = a,$$

also auch:

$$\frac{\partial a_1}{\partial a_2}\partial a_2 + \partial a_2 = 0; \quad \frac{\partial a_1}{\partial a_3}\partial a_3 + \partial a_3 = 0 \ldots\ldots \frac{\partial a_1}{\partial a_n}\partial a_n + \partial a_n = 0. \quad \text{b)}$$

Auf Grund dieser Relationen finden wir:

$$a_1 = a_2 = \ldots\ldots \quad = a_n \qquad \text{c)}$$

als Maximum resp. Minimumbedingung.

Das vollständige Differential des Productes ist:

$$\frac{\partial a_1}{a_1} + \frac{\partial a_2}{a_2} + \ldots\ldots \quad + \frac{\partial a_n}{a_n},$$

und für das zweite Differential finden wir:

$$-\left(\frac{\partial a_1^{\,2}}{a_1^{\,2}} + \frac{\partial a_2^{\,2}}{a_2^{\,2}} + \ldots . \quad + \frac{\partial a_n^{\,2}}{a_n^{\,2}}\right) < 0.$$

Daraus ist zu schliessen, dass c) sich auf ein Maximum bezieht.

Satz 2. Unter sämmtlichen einem Kreis umschriebenen n-Seiten hat das regelmässige die kleinste Fläche (ebenso erhält die ihr direct proportionale Grösse des Perimeters den kleinsten Werth und ebenso den kleinsten Umfang).

Es sei r der Radius des eingeschriebenen Kreises. Nun verbinden wir sämmtliche Eckpunkte und Berührungspunkte des Polygons mit dem Mittelpunkt des Kreises durch Geraden. Dann entstehen im Mittelpunkte 2n verschiedene Winkel, welche sich jedem Eckpunkte des Polygons entsprechend in Paare gruppiren und wo beide Winkel eines Paares untereinander gleich sind.

Sind diese Winkel $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, so haben wir als Ausdruck für die Fläche:

$$r^2 (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \ldots\ldots + \operatorname{tg} \alpha_n),$$

und ausserdem noch:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n = \pi.$$

Betrachten wir α_1 als eine Function der anderen Variabeln, so finden wir für das Minimum:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} = 0; \quad \frac{\partial \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} = 0 \ldots \frac{\partial \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\partial \alpha_n}{\cos^2 \alpha_n} = 0, \qquad \text{a)}$$

und ausserdem besteht die Relation:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \partial \alpha_2 + \partial \alpha_2 = 0; \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_3} \partial \alpha_3 + \partial \alpha_3 = 0 \ldots \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_n} \partial \alpha_n + \partial \alpha_n = 0. \qquad \text{b)}$$

Daraus finden wir:

$$\cos^2 \alpha_1 = \cos^2 \alpha_2 \ldots\ldots = \cos^2 \alpha_2. \qquad \text{c)}$$

Das vollständige Differential der Flächengrösse ist:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} + \ldots\ldots \frac{\partial \alpha_n}{\cos^2 \alpha_n},$$

und das zweite Differential ist:

$$\frac{2 \sin \alpha_1 \, \partial \alpha_1{}^2}{\cos^3 \alpha_1} + \frac{2 \sin \alpha_2 \, \partial \alpha_2{}^2}{\cos^3 \alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{2 \sin \alpha_n \, \partial \alpha_n{}^2}{\cos^3 \alpha_n} > 0.$$

Also bezieht sich die Lösung c) auf ein Minimum.

Satz 3. Sind von n rechtwinkeligen Dreiecken die Katheten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ einzeln und die anderen $b_1, b_2, b_3 \ldots$ durch die Gesammtlänge bestimmt, so ist die Summe der Hypotenusen $c_1, c_2, c_3 \ldots$ dann ein Minimum, wenn die Dreiecke ähnlich angenommen werden.

Nehmen wir eine beliebige Gesammtheit der Dreiecke, welche die durch den Satz ausgesprochenen Bedingungen erfüllen, und reihen wir sie solcherweise aneinander, dass die beiden Katheten immer denselben Geraden AB und BA_n (Fig. 1) parallel bleiben und die Hypotenusen eine gebrochene Linie bilden. Die Länge AB sei die gegebene Summe der Katheten $b_1, b_2 \ldots$ und BA_n die der Katheten a_1,

$a_2 \ldots$[1], die Punkte B und A_n haben also für die Gesammtheit aller beliebig angenommenen Dreiecke eine feste Lage, und die gebrochene Linie $A A_1 A_2 \ldots A_n$ ist die Summe der Hypotenusen.

Nun ist klar, dass die letzte Grösse ein Minimum wird für die Gerade $A A_n$, und dieser Fall ist gerade der, bei welchem die Dreiecke selbst sämmtlich untereinander ähnlich sind.

Folgerung. Nehmen wir die Katheten a_1, $a_2 \ldots$ und b_1, $b_2 \ldots$ und die Hypotenusen für die Seiten der Rechtecke, deren Höhen m, m_1, $m_2 \ldots$ entsprechend gleich sind, ersetzen wir diese Rechtecke durch die anderen mit ihnen gleichflächigen, und seien sie auch von gleicher Höhe, so dass die dem Dreieck a_1, b_1, c_1 entsprechenden die Höhe m_1 haben, die dem Dreieck a_2, b_2, c_2 entsprechenden die Höhe m_2 u. s. w. Die Grundseiten dieser anderen Rechtecke bezeichnen wir durch a_1', b_1', c_1'; a_2', b_2', c_2' u. s. w., so haben wir:

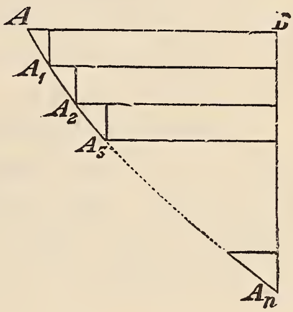

Fig. 1.

$$ma_1 = m_1 a_1'; \; ma_2 = m_2 a_2' \ldots\ldots$$
$$mb_1 = m_1 b_1'; \; mb_2 = m_2 b_2' \ldots\ldots$$
$$mc_1 = m_1 c_1'; \; mc_2 = m_2 c_2' \ldots\ldots$$

Da die Geraden m, m_1, m_2 als bestimmt gelten können, so sind a_1', a_2', $a_3' \ldots$ als bestimmt anzusehen. Für die Seiten b gilt aber die Relation:

$$m_1 b_1' + m_2 b_2' + \ldots \quad = m(b_1 + b_2 + \ldots).$$

Die erste Summe ist durch die letzte, als gegebene, bestimmt. Endlich auf Grund der Gleichung

$$m_1 c_1' + m_2 c_2' + \ldots \quad = m(c_1 + c_2 + \ldots)$$

schliessen wir, dass die Summe der Flächen, welche den 1. Theil bilden, mit der Summe $(c_1 + c_2 + \ldots)$ gleichzeitig ein Minimum wird. Zufolge des eben bewiesenen Satzes schliessen wir, dass sämmtliche Dreiecke ähnlich sein müssen.

[1] Jacob Steiner, Gesammelte Werke. Bd. II. p. 281.

Also: Ist von n rechtwinkeligen Dreiecken mit gleichen Katheten a_1', a_2' ... die Summe der Rechtecke der übrigen Kathete b_1', b_2' ... in gegebene Geraden $m_1, m_2, m_3 \ldots$, also die Summe $m_1 b_1' + m_2 b_2' + \ldots$ gegeben, so ist die Summe der Rechtecke der Hypotenusen c_1', c_2', c_3' ... in die nämlichen Geraden, also die Summe $m_1 c_1' + m_2 c_2' + \ldots$ ein Minimum, wenn die Dreiecke gleich sind.

Satz 4. Von zwei Pyramiden, welche geraden Kegeln umschrieben sind, gleiche Höhe und gleich grosse Grundflächen haben, hat diejenige eine kleinere Seitenfläche, deren Grundfläche dem grösseren Kreise umschrieben ist[1].

Heissen die Pyramiden P und P_1, ihre Seitenflächen μ und μ_1, so sei die Grundfläche von P dem grösseren Kreise umschrieben. Aus den Mittelpunkten der den Grundflächen eingeschriebenen Kreise fälle man Perpendikel p und p_1 auf die Seitenflächen, so ist offenbar

$$p > p_1;$$

und da nun

$$P = \tfrac{1}{3} p \mu; \quad P_1 = \tfrac{1}{3} p_1 \mu_1$$

und nach Voraussetzung $P = P_1$, so muss

$$\mu < \mu_1$$

sein.

Hauptsätze.

Satz 1. Unter sämmtlichen dieselbe Basisseite und dieselbe Höhe besitzenden Parallelogrammen hat das Rechteck den kleinsten Umfang.

Ein Paar Seiten bleibt dasselbe, vom anderen Paare bildet die Seite des Rechtecks den kürzesten Abstand zwischen denselben Geraden.

Folglich:

Satz 2. Unter sämmtlichen gleichflächigen, dieselben Winkelgrössen besitzenden Parallelogrammen hat der Rhombus den kleinsten Umfang.

---

[1] Jacob Steiner, Gesammelte Werke. Bd. II. p. 282.

Es seien *a* und *b* die Seiten des Parallelogramms und α einer seiner Winkel, so ist seine Flächengrösse:

$$P = a \, . \, b \, . \sin\alpha.$$

Nun ist bekannt (Hilfssatz 1), dass bei $a + b = \text{const.}$ das Product ab den grössten Werth c^2 besitzt, wo $2c = a + b$; c ist aber die Seite des mit dem gegebenen Parallelogramm gleichen Umfang besitzenden Rhombus, seine Fläche hat also den grössten Werth.

Folglich, umgekehrt . . . .

Folgerung a. Aus diesen beiden Sätzen folgt unmittelbar, dass unter sämmtlichen gleichflächigen Parallelogrammen das Quadrat den kleinsten Umfang besitzt.

Folgerung b. Unter sämmtlichen gleich grossen geraden Parallelepipeden, welche eine gemeinsame Seitenfläche besitzen, hat das rechtwinkelige die kleinste Oberfläche.

Folgerung c. Unter sämmtlichen gleich grossen geraden Parallelepipeden, welche dieselben Winkelgrössen der Basis und dieselbe Höhe besitzen, hat dasjenige mit rhombischer Basis die kleinste Oberfläche.

Folgerung d. Unter sämmtlichen gleich grossen rechtwinkeligen Parallelepipeden, welche dieselbe Höhe besitzen, hat dasjenige mit quadratischer Basis die kleinste Oberfläche.

Satz 3. Unter sämmtlichen Dreiecken von gleicher Basis und Höhe hat das gleichschenkelige den kleinsten Umfang.

Die Basis sei c, und die beiden anderen Seiten seien x und y.

Bezeichnen wir die Hälfte des Perimeters durch p, und die Fläche des Dreiecks durch P, so wird

$$P^2 = p\,(p - c)\,(p - x)\,(p - y), \text{ und } 2p = c + x + y.$$

Also auch

$$P^2 = p\,(p - c)\,(p - x)\,(c + x - p)$$

und

$$\frac{\partial\,(P^2)}{\partial x} = 0 = N\,\frac{\partial p}{\partial x} + p\,(p - c)\,(2p - 2x - c).$$

Hier bedeutet

$$N = (p-c)(p-x)(c+x-p) + p(p-x)(c+x-p) + p(p-c)(c+x-p) - p(p-c)(p-x)$$
$$= x^2(c-2p) + x[(2p-c)^2 + 2p(p-c)] - 2p(p-c)(2p-c)$$
$$= (x-2p+c)[2p(p-c) - x(2p-c)].$$

Da aber für einen grössten oder kleinsten Werth des p $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ sein muss, so haben wir für diesen Fall

$$p(p-c)(2p-2x-c) = 0.$$

Da nun p und $(p-c)$ nicht verschwinden können, so bleibt

$$2p-2x-c = 0 \text{ oder } 2x = 2p-c = x+y, \text{ d. h. } x = y.$$

Für $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ finden wir

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{N\left[-2p(p-c) + L\frac{\partial p}{\partial x}\right] - p(p-c)(2p-2x-c)\frac{\partial N}{\partial x}}{N^2}$$

L ist hier eine von ∞ verschiedene Grösse. Für den Fall $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, in welchem auch $2p-2x-c = 0$ ist, haben wir

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{2p(p-c)}{N} = \frac{8p(p-c)}{(2p-c)c^2}$$

Diese Grösse ist positiv; folglich hat p für $x = y$ den kleinsten Werth.

Folgerung a. In der vorhergehenden Beweisführung ist es gleichgiltig, ob die Basisseite einer der beiden anderen Seiten des Dreiecks gleich ist oder nicht.

Wenn wir also ein beliebiges Dreieck in ein anderes gleichflächiges und gleichschenkeliges Dreieck transformiren, so können wir jetzt eine der zwei gleichen Seiten als Basisseite annehmen, die Transformation wiederholen und wieder ein neues gleichflächiges und gleichschenkeliges Dreieck erhalten. Mit diesem neuen können wir dieselbe Operation noch einmal wiederholen und so fort.

Auf diese Weise erhalten wir eine Reihe von gleichflächigen Dreiecken, für welche die Regel gilt, dass jedes folgende einen kleineren Umfang besitzt.

Jetzt wollen wir den Beweis folgen lassen, dass (ausser einer besonderen Reihe) jede solche Reihe unendlich ist, und ihre Glieder dem gleichseitigen Dreieck immer mehr und mehr sich annähern, ohne einmal zu einem solchen zu werden.

Es ist evident, dass die Reihe noch nicht abgeschlossen ist, wenn ihr letztes Glied nicht ein gleichseitiges Dreieck ist. Nun nehmen wir an, dass dies in der That geschehen ist. Dann erhalten wir dieselbe Reihe, indem wir diese Figur dem umgekehrten Process unterziehen.

In dieser umgekehrten Reihe wird das zweite Glied ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem stumpfen Winkel 120^0, das dritte mit dem stumpfen Winkel $> 150^0$, das vierte mit dem stumpfen Winkel $> 165^0 \ldots$, und überhaupt, wenn ein

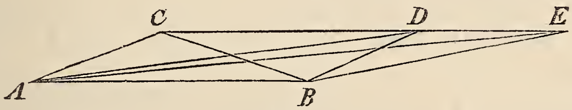

Fig. 2.

Glied der Reihe ein gleichschenkeliges Dreieck ist, mit dem stumpfen Winkel $180^0 - \alpha$, so ist das folgende ein Dreieck mit dem Winkel $> 180^0 - \alpha/2$.

Es sei in der That ABC (Fig. 2) ein Glied mit dem stumpfen Winkel C. Man ziehe $BD // AC$, $CD // AB$ und verbinde die Punkte A und D durch die Gerade AD.

In dem Dreieck ABD ist der Winkel $ABD = ACB + \alpha/2$; dabei ist $BD = AC < AB$.

Verlängern wir noch die Gerade CD bis zum Punkte E, welcher dadurch bestimmt wird, dass $BE = AB$; wie aber $BE = AB > BD$, so ist der Winkel $ABE > ABD$. Ausser dieser besonderen Reihe der stumpfwinkeligen Dreiecke schliesst sich jede andere oben charakterisirte Reihe nicht, ist also unendlich.

Betrachten wir eine dieser unendlichen Reihen der Dreiecke, deren Perimeter die Seiten $2c_1 + b_1$, $2c_2 + b_2$, $2c_3 + b_3 \ldots$, $2c_{i-1} + b_{i-1}$, $2c_i + b_i \ldots$ haben. Dabei bestehen noch die Relationen $b_2 = c_1$, $b_3 = c_2 \ldots$, $b_i = c_{i-1} \ldots$

Zufolge des eben bewiesenen Satzes ist:

$$2c_i + b_i < 2c_{i-1} + b_{i-1}$$

oder, indem wir von beiden Theilen $3b_i = 3c_{i-1}$ subtrahiren:

$$2(c_i - c_{i-1}) < c_{i-2} - c_{i-1}. \qquad \text{a)}$$

Es ist aber klar, dass die absolute Grösse der Differenz

$c_i - c_{i-1}$ als Maass der Annäherung an das gleichseitige Dreieck gelten kann.

Die Reihe dieser Differenzen ist, wenn wir der Ungleichheit a) die Form geben:

$$\text{abs. Grösse } \frac{c_i - c_{i-1}}{c_{i-1} - c_{i-2}} < \tfrac{1}{2} \qquad \text{b)}$$

nach der Regel D'ALEMBERT's convergent. Mit anderen Worten, die Glieder jeder solchen Reihe nähern sich unendlich dem gleichseitigen Dreieck w. z. b. w.

Also: Unter sämmtlichen gleichflächigen Dreiecken besitzt das gleichseitige den kleinsten Umfang[1].

Folgerung b. Nehmen wir ein beliebiges Dreieck ABC (Fig. 3), theilen alle seine drei Seiten in je drei gleiche Theile, und ziehen durch die Theilungspunkte die den anderen Seiten parallelen Geraden.

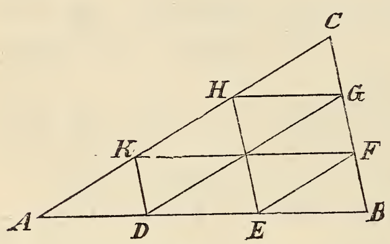

Fig. 3.

Das Sechseck $DEFGHK$ hat eine Fläche, welche $\frac{2}{3}$ der Fläche des Dreiecks ABC, und ebenso einen Umfang, welcher $\frac{2}{3}$ des Umfangs des Dreiecks ABC beträgt. Das auf diese Weise construirte Sechseck ist ein normales Triparallelogon[2]. Wird das Dreieck ABC gleichseitig (regulär), so wird es auch das Sechseck $DEFGHK$.

Also können wir schliessen, dass unter sämmtlichen gleichflächigen normalen Triparallelogonen das reguläre Sechseck den kleinsten Umfang besitzt.

---

[1] Diese Folgerung ist auch sehr leicht direct zu beweisen, wenn man das Minimumproblem bei zwei veränderlichen Grössen nach der allgemeinen Regel auflöst.

[2] s. „Elemente der Gestaltenlehre" (russisch): „Gleiche (oder symmetrische), die Ebene lückenlos erfüllende Polygone heissen Planigone; diejenigen, welche die Ebene in paralleler Lage erfüllen, heissen Parallelogone" (S. 171). Unter „normalen" Triparallelogonen werden diejenigen verstanden, welche mit dem regulären Sechsecke in affiner Beziehung stehen.

Folgerung c. Wir schliessen weiter daraus, dass unter sämmtlichen gleich grossen geraden dreiseitigen Prismen, welche gleiche Höhe besitzen, dasjenige, dessen Basis ein reguläres Dreieck ist, die kleinste Oberfläche hat; und noch

Folgerung d. Unter sämmtlichen gleich grossen geraden Prismen, welche dieselbe Höhe besitzen und zur Basis ein normales Triparallelogon haben, hat dasjenige, dessen Basis ein reguläres Sechseck ist, die kleinste Oberfläche.

Satz 4. Unter sämmtlichen Prismen, welche dieselbe Basisfläche und dieselbe Höhe besitzen, hat das gerade die kleinste Oberfläche.

Die Basisflächen behalten ihre Grösse. Die Seitenflächen behalten die Grössen ihrer Basisseiten; die Höhe dieser Flächen erhält aber den kleinsten Werth im Falle des geraden Prismas, in welchem diese Höhe den kürzesten Abstand zwischen beiden Basisflächen ausmacht.

Folglich:

Folgerung a. Aus diesem Satze und Folgerung d) des 2. Satzes schliessen wir, dass unter sämmtlichen gleich grossen Parallelepipeden, welche dieselbe Höhe besitzen, das tetragonale Prisma die kleinste Oberfläche hat.

Folgerung b. Aus demselben Satze und den Folgerungen des vorigen schliessen wir noch, dass unter sämmtlichen gleich grossen dreiseitigen Prismen, welche dieselbe Höhe besitzen, das trigonale (mit regulärer Basis) die kleinste Oberfläche hat.

Folgerung c. Unter sämmtlichen gleich grossen Prismen, welche als Basisfläche ein normales Triparallelogon und dieselbe Höhe besitzen, hat das hexagonale die kleinste Oberfläche.

Satz 5. Unter sämmtlichen gleich grossen Parallelepipeden, welche gleiche Winkelgrössen besitzen (etwa die Flächen seien parallel), hat die kleinste Oberfläche dasjenige, dessen Flächen unter einander gleich sind.

Es seien *A*, *B* und *C* die Kanten, a, b und c die Flächen des gegebenen Parallelepipedons. Für das Quadrat seines Volumens V finden wir[1]

$$V^2 = a \,.\, b \,.\, c \,.\, \mathrm{Sin}\,(a\,b\,c).$$

Sin (abc) ist nur von den Winkelgrössen abhängig, bleibt jetzt also constant.

Nun ist bekannt, dass, wenn $a + b + c =$ constant, das Product *abc* den grössten Werth bei $3\partial = a + b + c$ hat; 3∂ ist aber nichts anderes als die Flächengrösse desjenigen Parallelepipedons, dessen Flächen gleich gross sind. Folglich umgekehrt, bei constantem abc hat 3∂ den kleinsten Werth.

Folgerung a. Auf Grund dieses Satzes und der Folgerung a) des vorigen schliessen wir, dass unter sämmtlichen gleich grossen Parallelepipeden der Würfel die kleinste Oberfläche hat.

Satz 6. Unter sämmtlichen Prismen, welche dieselbe Hauptzone und dieselbe Länge der Kanten dieser Zone besitzen, hat das rechte die kleinste Oberfläche.

Die Grössen der Seitenflächen bleiben dieselben. Die Basisflächen des geraden Prisma sind aber die orthogonalen Projectionen von allen übrigen und haben folglich die minimale Grösse.

Folglich:

Folgerung a. Auf Grund dieses Satzes und der der Folgerung d des Satzes 2 schliessen wir, dass unter sämmtlichen gleich grossen Parallelepipeden, welche gleiche Kanten, wenn auch einer Zone, besitzen, das tetragonale Prisma die kleinste Oberfläche hat.

Folgerung b. Auf Grund desselben Satzes und Folgerung c des Satzes 3 schliessen wir noch, dass unter sämmtlichen gleich grossen dreiseitigen Prismen, welche dieselbe Kantenlänge der Haupt-

---

[1] In der That ist $V^2 = A^2 \,.\, B^2 \,.\, C^2 \,.\, \mathrm{Sin}^2\,(A\,B\,C) = B\,C \,.\, \sin\,(B\,C) \,.\, C \,.\, A \,.\, \sin\,(C\,A) \,.\, A \,.\, B \,.\, \sin\,(A\,B)\ \mathrm{Sin}\,(a\,b\,c)$, wo $(a\,b\,c)$ das dem $(A\,B\,C)$ polare Trigonoëder (Raumecke) ist. Vergl. zweite analytisch-krystallographische Studie. Cap. I. Form. 10.

zone besitzen, das trigonale die kleinste Oberfläche hat.

Folgerung c. Auf Grund desselben Satzes und der Folgerung d des Satzes 3 ist noch zu schliessen, dass unter sämmtlichen gleich grossen Prismen, deren Basisflächen normale Triparallelogone sind, und welche dieselbe Kantenlänge der Hauptzone besitzen, das hexagonale die kleinste Oberfläche hat.

In Anwendung auf die Krystallographie müssen wir die Thatsache hervortreten lassen, dass die verschiedenen Typen der Parallelepipede gerade verschiedenen krystallographischen Systemen (resp. Subsystemen) entsprechen, und zwar entspricht:

das schiefe Parallelepipedon	dem	triklinen Subs.,
„ gerade „	„	monoklinen Subs.,
„ rechtwinkelige „	„	rhombischen Subs.,
„ tetragonale Prisma	„	tetragonalen Subs.,
der Würfel	„	tesseralen Subs.

Die Symmetrie vergrössert sich in der hier angezeigten Ordnung, und gerade dies ist dieselbe Ordnung, in welcher bei den angegebenen beschränkenden Bedingungen auch die Oberflächengrösse der gleich grossen Parallelepipede sich vermindert.

Jetzt liegt uns die Aufgabe vor, dieselben Sätze auf beliebige Figuren zu übertragen. Zuerst sind aber diejenigen Deformationen genau zu definiren, welchen die Figuren zu unterziehen sind.

Diese Deformationen sind als ein particulärer Fall der Affinität (nach Möbius) zu betrachten, welcher durch die Constanz des Volumens charakterisirt wird. Entsprechend dem schon früher gebrauchten Worte will ich statt der „Gesammtheit der durch Affinität mit einander verbundenen gleich grossen Figuren“ einfach von „krystallographisch-projectiven“ sprechen[1].

Nun folgt zuerst ein Satz von Steiner[2].

Satz 7. Ist die Grundfläche einer Pyramide einem Kreise umschrieben und gegeben, und ist

[1] Erste und dritte der analytisch-krystallographischen Studien.
[2] Gesammelte Werke. Bd. II. p. 278.

ferner die Höhe (oder der Inhalt) der Pyramide gegeben, so ist die Summe ihrer Seitenflächen dann ein Minimum, wenn die Pyramide einem geraden Kegel umschrieben ist.

Sei B die gegebene Grundfläche und C der ihr eingeschriebene Kreis. Über C denke man sich den geraden Kegel mit der gegebenen Höhe, und über B die ihm umschriebene Pyramide P, deren Seitenflächen α, β, $\gamma \ldots$ heissen mögen. Ferner denke man sich einen zweiten Kegel k, welcher den ersten im Kreise C orthogonal schneidet und somit auf der anderen Seite der Grundfläche steht; die Länge der Kante des Kegels k sei gleich r. Endlich denke man sich noch die dem Kegel k umschriebene Pyramide p über der Grundfläche B; ihre Seitenflächen berühren den Kegel k in solchen Kanten, welche respective auf den Seitenflächen α, β, $\gamma \ldots$ von P perpendiculär sind. Der aus beiden Pyramiden P und p zusammengesetzte Körper kann auch als aus einer Reihe dreiseitiger Pyramiden bestehend angesehen werden, welche die Seitenflächen α, β, $\gamma \ldots$ von P zu Grundflächen haben, deren Spitzen sämmtliche im Scheitel von p (oder k) liegen, und deren Höhen alle gleich r (nämlich die genannten perpendiculären Kanten) sind. Daher hat man:

$$P + p = \tfrac{1}{3} r (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$$

Nun sei P_1 irgend eine dritte Pyramide über der Grundfläche B, mit P auf gleicher Seite und von gleicher Höhe, und somit auch von gleichem Inhalte, so bilden P_1 und p zusammen einen Körper, der ebenso aus dreiseitigen Pyramiden besteht, welche die Seitenflächen α_1, β_1, $\gamma_1 \ldots$ von P_1 zu Grundflächen haben, und deren Spitzen im Scheitel von p vereinigt sind; aber ihre Höhen sind im Allgemeinen alle kleiner als r, nur in besonderen Fällen können eine oder zwei derselben höchstens gleich r sein; bezeichnen wir dieselben durch $r - z$, $r - y$, $r - x \ldots$, so hat man

$$\begin{aligned} P_1 + p &= \tfrac{1}{3}(r - z)\alpha_1 + \tfrac{1}{3}(r - y)\beta_1 + \tfrac{1}{3}(r - x)\gamma_1 + \ldots \\ &= \tfrac{1}{3} r (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \ldots) - \tfrac{1}{3}(z\alpha_1 + y\beta_1 + x\gamma_1 + \ldots) \end{aligned}$$

und daher, da P_1 gleich P,

$$r(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) = r(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \ldots) - (z\alpha_1 + y\beta_1 + x\gamma_1 + \ldots)$$

woraus folgt, dass

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \ldots$$

Folgerung a. Auf Grund dieses Satzes schliessen wir unmittelbar, dass eine regelmässige (n-gonale) Bipyramide eine Oberfläche besitzt, welche kleiner ist als die jeder anderen Bipyramide, welche entsteht, wenn man sie einer Schiebung unterwirft, deren Deformationsfläche die Basisfläche der Bipyramide ist.

Wir können aber diese specielle Folgerung verallgemeinern, indem wir die Hilfssätze 2 und 3 in Betracht ziehen.

Kehren wir zu dem Hilfssatze 3 und seinen Bezeichnungen wieder zurück, und nehmen wir an, dass die rechtwinkeligen Dreiecke sich solcherweise aus einer Pyramide herstellen lassen: ziehen wir die Höhenlinie, welche die gleichen Katheten a'_1, $a'_2 \ldots$ ausmacht, dieser Pyramide und durch diese Gerade, die zu den Seiten der Basisfläche senkrechten Ebenen. Die Schnittgeraden dieser Ebenen mit der Basisfläche seien die durch die constante Summe $(m_1 b'_1 + m_2 b'_2 + \ldots)$ angegebenen Katheten b'_1, $b'_2 \ldots$, und die Schnittgeraden derselben Ebene mit entsprechenden Seitenflächen seien die Hypotenusen c'_1, $c'_2 \ldots$ Die Längengrössen m_1, $m_2 \ldots$ sind nichts anderes als die Seiten der Basisfläche; die constante Summe $(m_1 b'_1 + m_2 b'_2 \ldots)$ ist der Inhalt dieser Fläche. Dann ist die Folgerung des Satzes so zu interpretiren: unter sämmtlichen gleich grossen Bipyramiden, welche dieselbe Höhe besitzen, hat diejenige, deren Flächen einen geraden Kegel berühren, die kleinste Oberfläche (die Basis des Kegels ist der der Basisfläche der Pyramide eingeschriebene Kreis).

Folgerung b. Ziehen wir noch die Hilfssätze 2 und 4 in Betracht, so erhalten wir leicht eine noch allgemeinere Folgerung und zwar: unter sämmtlichen gleich grossen, der regelmässigen krystallographisch-projectiven Bipyramiden, welche dieselbe Höhe besitzen, hat diese (die regelmässige) die kleinste Oberfläche.

Die vorige Folgerung hat uns zu einer einem geraden Kegel umgeschriebenen Bipyramide geführt. Für alle solche Bipyramiden sind direct proportional: Volumen, Basisfläche, deren Perimeter und Oberfläche. Nun hat aber dem 2. Hilfssatze gemäss unter sämmtlichen solchen Bipyramiden die regelmässige das kleinste Volumen, und dem Hilfssatze 4 gemäss jede andere Bipyramide, welche dasselbe Volumen hätte, aber deren Grundfläche einem grösseren Kreise umgeschrieben wäre, eine kleinere Oberfläche.

Folgerung c. Jede digonale (ditrigonale, ditetragonale) Bipyramide ist als eine Gruppe von zwei concentrischen regelmässigen anzusehen. Wie aber die vorige Folgerung für jede derselben, einzeln genommen, gültig ist, so behält sie ihre Gültigkeit auch für die Gruppe beider, d. h. unter sämmtlichen gleich grossen, einer digonalen krystallographisch-projectiven und dieselbe Höhe besitzenden Bipyramiden hat die letzte (die digonale) die kleinste Oberfläche.

Folgerung d. Wählen wir eine Diagonale Oo' (Fig. 4) eines beliebigen Parallelepipedons als Axe, und bezeichnen die der durch die Mittelpunkte der Kanten AC', $C'B$, BA' ... hindurchgehenden Ebene *abcde* parallelen Ebenen als Diagonalebenen, dabei die Ebene *abcde* selbst als eine Hauptdiagonalebene. Verlängern wir die drei in der Spitze O sich schneidenden Ebenen bis zu dem Durchschnitt mit der Hauptdiagonalebene, dann verwandelt sich die obere Hälfte des Parallelepipedons in eine dreiseitige Pyramide $O . A_1 B_1 C_1$; die hinzugefügten Theilpyramiden werden ihr sämmtlich ähnlich, ebenso wie der Pyramide $O . ABC$, welche wir als Gipfelpyramide des Parallelepipedons bezeichnen wollen. Wird der Inhalt einer der Theilpyramiden als Einheit genommen, so wird der der Gipfelpyramide gleich 8 und der des ganzen Parallelepipedons gleich $2(3^3 - 3) = 48$; folglich ist das Verhältniss des Inhaltes der Gipfelpyramide zu dem des Parallelepipedon ein constantes ($\frac{1}{6}$), wie auch das Parallelepipedon beschaffen sein mag. Ebenso constant ($\frac{1}{4}$) ist das Verhältniss der Seitenfläche dieser Pyramide zu der Oberfläche des Parallelepipedons. Daraus können wir schliessen, dass unter

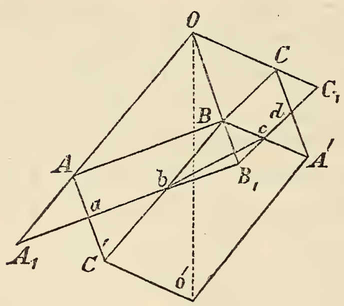

Fig. 4.

sämmtlichen gleich grossen und dieselbe Höhe in Bezug auf eine Hauptdiagonalfläche besitzenden, einem Rhomboëder krystallographisch-projectiven Parallelepipeden, das erste (das Rhomboëder) die kleinste Oberfläche hat. Dabei wird als selbstverständlich vorausgesetzt, dass das der regelmässigen dreiseitigen Gipfelpyramide entsprechende Parallelepipedon ein Rhomboëder ist.

Satz 8. Unter sämmtlichen gleich grossen, einem Pentagonal-Dodekaëder krystallographisch-projectiven Polyëdern hat das erste die kleinste Oberfläche.

Die Oberfläche eines Pentagonaldodekaëders lässt sich als eine Gruppe von zwei Rhomboëdern mit zusammenfallender Axe auffassen. Dabei bleibt gleichgültig, welche von den vier dreizähligen Symmetrieaxen wir für die Axe des Rhomboëders annehmen wollen. Bezeichnen wir die beiden Rhomboëder durch A und B und einen der gegebenen Figur coaxialen Würfel durch C.

In der allgemeinsten Form kann eine krystallographische Deformation als aus folgenden Theildeformationen bestehend aufzufassen sein:

1. Ein beliebiges gegebenes Parallelepipedon unterziehen wir zuerst einer solchen Deformation, bei welcher die Lage der Diagonalflächen, sein Volumen und die Höhe (in Bezug auf Hauptdiagonalfläche) dieselben bleiben, aber das Parallelepipedon sich in ein Rhomboëder verwandelt;

2. das Rhomboëder unterziehen wir einem directen Zuge nach der Richtung der Axe, bis es sich in einen Würfel verwandelt, und

3. den so erhaltenen Würfel ersetzen wir durch einen ihm ähnlichen, der dem gegebenen Parallelepipedon gleich gross ist.

Somit ist ein beliebiges Parallelepipedon in einen ihm gleich grossen Würfel verwandelt worden. Also auch umgekehrt können wir jedes mit dem Würfel krystallographisch-projective Parallelepipedon als eine aus dem Würfel durch die Operationen 3, 2 und 1 verwandelte Figur entstanden betrachten.

Nun ist es klar, dass, wenn wir alle drei krystallographisch-projective Figuren A, B und C dem Processe 1 unterwerfen, sie sich sämmtlich in Rhomboëder verwandeln, da nur eine derselben, z. B. C, zum Rhomboëder wird. Dies ist als eine Folgerung der allgemeinen Eigenschaften der in affiner Beziehung stehenden Figuren anzusehen. Nun ist aber der Folgerung d des vorigen Satzes gemäss zu schliessen, dass dabei die Oberfläche aller drei Figuren kleiner wird.

Es bleiben also in dieser Beziehung die Operationen 2 und 3 zu prüfen, welche zu dem Resultate führen sollen, dass C sich in einen gleich grossen Würfel verwandelt. Nehmen wir an, dass dabei die Summe der Oberflächengrössen von A und B nicht die kleinste wird, sondern dass diese Summe einen kleinsten Werth bei anders ausgeführten Operationen 2 und 3 hat, und dass bei dieser Ausführung C schon kein Würfel mehr ist, sondern ebenso ein Rhomboëder. Jetzt sind alle drei Körper A, B und C in Bezug auf die genommene Axe die Rhomboëder und höchstens kann einer der beiden A und B der Würfel sein. In Bezug auf eine andere Axe (und als Folge der projectiven Eigenschaften müssen sämmtliche Axen zusammenfallen) sind diese Körper keine Rhomboëder mehr[1], von Ausnahmefällen abgesehen, in welchen einer der Körper A oder B ein Würfel ist, in welchem dieser Körper in Bezug auf sämmtliche Axen ein Rhomboëder wäre. Dieser Fall ist aber gerade der unmögliche, weil, wenn einer dieser Körper in Bezug auf eine Axe ein Rhomboëder wäre, auch sämmtliche andere Rhomboëder wären, was gegen die Voraussetzung ist.

Ist aber keiner von den dreien ein Rhomboëder, so lässt sich jeder von ihnen, einzeln genommen, ebenso wie ihre Gesammtheit der Operation 1 unterziehen, welche die Verminderung der Oberflächengrösse zur Folge hätte, was wieder gegen die gemachte Voraussetzung ist. Die Voraussetzung ist also

[1] Dabei soll nicht ausser Acht gelassen werden, dass die Körper A und B nicht einzeln zu nehmen sind, sondern immer zusammen, und dass bei der Änderung der Axe eine Vertauschung einiger Flächen stattfinden soll, da wir nur bei zweckmässiger Vertauschung erfahren können, ob sie als eine Gruppe der zwei Rhomboëder anzusehen ist oder nicht.

unmöglich, d. h. es ist unmöglich anzunehmen, dass eine solche Gruppe von A und B, welcher der Würfel C entspricht, nicht die kleinste Oberfläche besitzt, w. z. b. w.

Ist aber C ein Würfel, so sind A und B in Bezug auf alle Axen als eine Gruppe von zwei Rhomboëdern anzusehen, und die Operation 1 ist nicht mehr anwendbar.

Folgerung. Denselben Satz können wir auch auf ein Tetartoëder übertragen. Der Unterschied in der Beweisführung besteht nur darin, dass die Oberfläche eines Tetartoëders als eine Gruppe von vier (Hälften) und nicht von zwei Rhomboëdern zu betrachten ist. Dieser Umstand ändert aber weiter nichts in dem Gange der Beweisführung.

Vom Tetartoëder ist leicht zu sämmtlichen anderen Figuren des tesseralen, ebenso wie des dodekaëder-ikosaëdrischen Systems überzugehen. Alle einfachen Figuren sämmtlicher Symmetriearten dieser Systeme sind nämlich durch die Relation der Meroëdrie mit Tetartoëdrie des tesseralen Systems verbunden[1], also ist eine jede solche Figur als eine Gruppe von Tetartoëdern anzusehen; ist also der Satz für jedes derselben, einzeln genommen, richtig, so bleibt natürlich seine Richtigkeit auch für die Gruppe fortbestehen.

Von den durch ebene Flächen begrenzten Figuren ist der directe Übergang zu den symmetrischen krummen Flächen, welche als unendliche Gesammtheit der Tetartoëder mit unendlich kleinen Flächen aufzufassen wären. Bleibt der Satz richtig für jedes unendlich kleine Element, einzeln genommen, so bleibt natürlich seine Richtigkeit auch für die Gesammtheit dieser Elemente fortbestehen.

Somit sind wir zu der höchsten Verallgemeinerung des bewiesenen Satzes gekommen, und zwar:

Unter sämmtlichen mit einer eine Symmetrieart der regelmässigen Systeme besitzenden beliebigen krummen Fläche krystallographisch projectiven Flächen hat die erste die kleinste Oberfläche.

Werfen wir noch einen Rückblick auf die erhaltenen Resultate, so finden wir, dass der Satz über die kleinste Ober-

[1] Die Elemente der Gestaltenlehre. § 44.

fläche sich auf sämmtliche unendliche Symmetriearten anwenden lässt.

Nur ist die Anwendung des Satzes für beide regelmässige Systeme (tesserale und dodekaëder-ikosaëdrische) als eine absolute zu bezeichnen. Dagegen ist für sämmtliche andere Symmetriearten ihre Richtigkeit durch gewisse Bedingungen beschränkt: es sollen die Lagen der Hauptflächen (die zu Hauptaxen normalen Flächen) und damit zusammen die Grössen der Höhen (welche als Abstand zwischen diesen Flächen anzusehen sind) in Bezug auf diese Flächen constant bleiben.

Für das digonale System, welches seiner Hauptaxe beraubt ist, ist der Satz nicht mehr anwendbar, sogar bei Zuhilfenahme dieser beschränkenden Bedingungen; für dieses System bleiben aber die Relationen bestehen, welche in einer Reihe von Sätzen über verschiedene Typen von Parallelepipeden ihren Ausdruck finden.