

# Ueber die Symmetrieverhältnisse der Krystalle.

Von

**B. Minnigerode** in Greifswald.

---

In diesem Jahrbuche, Beil.-Bd. 5. 145—166. 1887, habe ich „Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle“ veröffentlicht und darin mit Hülfe der Substitutions- und Gruppentheorie die Frage nach den krystallographisch möglichen Polyëdern behandelt, auch die einschlagenden Arbeiten meiner Vorgänger angeführt, zu denen ich noch HESSEL als den ersten hinzufügen muss, auf dessen Arbeiten SOHNCKE<sup>1</sup> zuerst aufmerksam gemacht hat.

Von dem Standpunkte aus, den ich in dieser Arbeit eingenommen habe, haben sich einige der Analogieen verschiedener Krystallsysteme anders dargestellt, als es bis dahin in allen übrigen Bearbeitungen des Gegenstandes der Fall gewesen ist. Alle früheren Darstellungen heben eine Analogie zwischen der rhomboëdrischen Hemiëdrie des hexagonalen und der sphenoidischen Hemiëdrie des tetragonalen Systems hervor, während bei meinen Untersuchungen statt dessen die Analogie zwischen den sphenoidischen Formen dieser beiden Krystallsysteme als wesentlich erscheint.

Der Grund des Unterschiedes liegt in der principiellen Wichtigkeit, die ich dem Centrum der Symmetrie beilege. Diese Wichtigkeit schien mir so einleuchtend, dass ich mich über sie sehr kurz gefasst habe. Die Einwürfe von SCHÖN-

---

<sup>1</sup> L. SOHNCKE: Die Entdeckung des Eintheilungsprincips der Krystalle durch J. F. C. HESSEL. Zeitschr. f. Kryst. 18. 486. 1891, dies. Jahrb. 1893. I. -3—7-.

FLIES<sup>1</sup> gegen meine Aufstellungen zeigen mir, dass eine grössere Ausführlichkeit wünschenswerth ist, ich nehme desshalb den Gegenstand hier wieder auf.

Um den Unterschied der beiden Anschauungen klar zu machen, bemerke ich, dass für die in Frage kommenden Hemiedrien und Tetartoedrien folgende Symmetrieverhältnisse charakteristisch sind:

**Tetragonales System.**

Sphenoidische Formen.

- 1) Eine 2-zählige Symmetrieaxe, die 4-zählig wird, sobald
  - a) ein Centrum,
  - b) eine zur Axe senkrechte Ebene der Symmetrie
 hinzukommt. Eines von beiden bedingt bei einer 2-zähligen Symmetrieaxe das andere, so dass thatsächlich nur eine einzige Bedingung vorliegt.
- 2) Kein Centrum der Symmetrie.
- 3) Keine Ebene der Symmetrie.

**Hexagonales System.**

Sphenoidische Formen.

- 1) Eine 3-zählige Symmetrieaxe, die 6-zählig wird, sobald ein Centrum der Symmetrie hinzukommt.
- 2) Kein Centrum der Symmetrie.
- 3) Eine Ebene der Symmetrie, senkrecht zur Axe.

Rhomboëdrische Formen.

- 1) Eine 3-zählige Symmetrieaxe, die 6-zählig wird, sobald eine Ebene der Symmetrie, senkrecht zur Axe, hinzukommt.
- 2) Ein Centrum der Symmetrie.
- 3) Keine Ebene der Symmetrie, senkrecht zur Axe.

Es sei noch bemerkt, dass bei einer 3-zähligen Symmetrieaxe ein Centrum und eine zur Axe senkrechte Ebene der Symmetrie nicht gleichzeitig vorkommen können, sondern dass sie sich gegenseitig ausschliessen.

Will man nun die wesentlichen Analogieen zwischen dem tetragonalen und hexagonalen System aufsuchen, so hat man

<sup>1</sup> A. SCHÖNFLIES: Krystallsysteme und Krystallstructur. Leipzig 1891.

sich zu entscheiden, ob man das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein entweder eines Centrums oder einer Ebene der Symmetrie als maassgebend ansehen will.

Den sphenoidischen Formen des tetragonalen Systems entsprechen im hexagonalen System als Analogon die sphenoidischen Formen, wenn man das Symmetriecentrum (MINNIGERODE), die rhomboëdrischen Formen, wenn man die Symmetrieebene als maassgebend ansieht (SCHÖNFLIES und alle früheren Autoren).

Jede der beiden Anschauungen ist an sich berechtigt, es handelt sich darum, ihre Vorzüge gegen einander abzuwägen. Die Entscheidung kann aber nicht aus der Betrachtung des vorliegenden Falles hervorgehen, sondern muss auf einer allgemeineren Grundlage fussen.

Für die grössere Wichtigkeit der Symmetrieebene spricht die Überlieferung. Bei fast allen Versuchen, die Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Krystallformen festzustellen, haben, abgesehen von den Symmetrieaxen, die hier nicht in Betracht kommen, als Eintheilungsprincip die Symmetrieebenen die Hauptrolle gespielt, wenn auch die Bedeutung des Symmetriecentrums keineswegs unterschätzt worden ist, wie dies schon aus der von mehreren Krystallographen gebrauchten Bezeichnung parallelfächige und geneigtflächige Hemiëdrien hervorgeht.

Für die grössere Wichtigkeit des Symmetriecentrums sprechen die einfacheren geometrischen Verhältnisse. Ist ein Centrum der Symmetrie (Inversion) vorhanden, so ist dadurch für jede Richtung die entsprechende ohne Weiteres gegeben, eine Eigenschaft, die ausserdem nur der Drehung Null um eine Axe (Identität) zukommt; zur Bezeichnung jeder anderen Symmetrieeigenschaft sind noch andere Bestimmungsstücke erforderlich, die zur Orientirung dienen.

Ferner bemerke ich, dass sämtliche Symmetrieeigenschaften der Krystalle in zwei Classen zerfallen, die den von SCHÖNFLIES sogenannten Operationen erster und zweiter Art entsprechen. Die Operationen erster Art sind Drehungen, die zu ihnen gehörigen, bei meinen Untersuchungen benutzten Substitutionen haben die Determinante  $+1$ ; die Operationen zweiter Art verwandeln eine Figur in eine ihr spiegelbildlich

gleiche, die zu ihnen gehörigen Substitutionen haben die Determinante  $-1$ . Es findet nun die Eigenschaft statt, dass jede Operation zweiter Art ersetzt werden kann durch Combination irgend einer Operation zweiter mit einer erster Art. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, sämtliche Operationen zweiter Art zu ersetzen durch Combination von Operationen erster mit einer bestimmten Operation zweiter Art. Eine von diesen ist die Inversion; sie besitzt die Eigenschaft, mit jeder andern Operation erster oder zweiter Art vertauschbar zu sein. Auch diese ausgezeichnete Eigenschaft kommt ausser ihr nur der Identität zu. Ich habe die Inversion benutzt, um alle übrigen Operationen zweiter Art durch sie und Drehungen zu ersetzen. Insbesondere ist eine Symmetrieebene der Verbindung der Inversion mit einer Drehung um zwei Rechte (Umklappung) um eine zur Symmetrieebene senkrechte Axe äquivalent. SCHÖNFLIES betrachtet die Drehspiegelung als einfachste typische Operation zweiter Art, d. h. die Verbindung einer Drehung mit einer Spiegelung, deren Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe steht. Jede Operation zweiter Art ist einer gewissen Drehspiegelung äquivalent. Den Nachweis dieses Satzes stützt SCHÖNFLIES darauf, dass eine Operation zweiter Art durch eine Inversion verbunden mit einer Drehung ersetzt werden kann (l. c. S. 28 u. 38). Insbesondere wird die Inversion durch eine Spiegelung und Umklappung um die zur spiegelnden Ebene senkrechte Axe ersetzt.

Ob man das eine oder das andere vorzieht, kann schliesslich als Geschmackssache betrachtet werden. Als entscheidend aber sehe ich die physikalischen Beziehungen an. Für eine grosse Reihe wichtiger physikalischer Erscheinungen ist ein Centrum der Symmetrie vorhanden. Die 32 nach den Symmetrieeigenschaften unterschiedenen Gruppen zerfallen danach in 11 Abtheilungen, von denen nur die hier in Betracht kommenden aufgeführt werden sollen. Für das tetragonale System sondern sich die Gruppen in folgende 2 Abtheilungen:

- I. Holoëdrie. Hemimorphie der Holoëdrie. Trapezoëdrische Hemiëdrie. Sphenoidische Hemiëdrie.
- II. Pyramidale Hemiëdrie. Hemimorphie der trapezoëdrischen und pyramidalen Hemiëdrie. Sphenoidische Tetartoëdrie.

Für das hexagonale System erhält man 4 Abtheilungen:

- I. Holoëdrie. Hemimorphie der Holoëdrie. Trapezoëdrische Hemiëdrie. Sphenoidische Hemiëdrie.
- II. Pyramidale Hemiëdrie. Hemimorphie der trapezoëdrischen und pyramidalen Hemiëdrie. Sphenoidische Tetartoëdrie.
- III. Rhomboëdrische Hemiëdrie. Hemimorphie der rhomboëdrischen Hemiëdrie. Trapezoëdrische Tetartoëdrie.
- IV. Rhomboëdrische Tetartoëdrie. Hemimorphie der Tetartoëdrien.

Die Formen jeder Abtheilung besitzen für die physikalischen Eigenschaften, denen ein Symmetriecentrum zukommt, die Symmetrieverhältnisse der zuerst aufgeführten Formen.

Ich glaube, dass ein Blick auf die vorstehende Übersicht genügt, um zu zeigen, dass die sphenoidischen Formen der beiden Systeme einander vollständig analog sind und dass die rhomboëdrischen Formen eine Gruppe für sich bilden. Übrigens hat SCHÖNFLIES selbst darauf aufmerksam gemacht, dass für diese Verhältnisse eine Analogie zwischen den sphenoidischen Formen des tetragonalen und den rhomboëdrischen des hexagonalen Systems nicht vorhanden ist (l. c. S. 229 Anm. 2).

Eine andere Symmetrieeigenschaft von ähnlicher Bedeutung für die physikalischen Verhältnisse wie die Inversion gibt es aber nicht.

Die vorstehenden Auseinandersetzungen, bei denen die Benützung von Formeln vermieden ist, zeigen, dass der Unterschied der beiden Anschauungen in der Sache begründet und nicht etwa durch eine „zufällige Bezeichnung“ hervorgerufen ist<sup>1</sup>. Für die von mir gewählte Bezeichnung hatte ich indess meine, wie ich glaube, ganz guten Gründe. Bei meiner Darstellung werden die Symmetrieverhältnisse einer Krystallform ausgedrückt durch die Substitutionen, deren Gesammtheit eine Gruppe bildet, und zwar in doppelter Weise. Erstens durch Angabe der Richtungs-cosinus der Normalen der Krystallflächen, für die auch deren Indices genommen werden können. Zweitens werden sämtliche Substitutionen aufgestellt und durch einige von ihnen ausgedrückt, die so

<sup>1</sup> B. MINNIGERODE: Dies. Jahrb. Beil.-Bd. V. S. 151 u. 152.

gewählt sind, dass sie zur Darstellung aller ausreichen und von einander unabhängig sind. Diese Auswahl kann auf mehrfache Weise geschehen: die von mir getroffene soll in jedem einzelnen Fall die Beziehung der Symmetrieverhältnisse zu der von mir als fundamental betrachteten Substitution, die einem Centrum der Symmetrie entspricht, hervortreten lassen und ich glaube, dass sie dieses vollständig leistet.

---

Die vorstehenden Auseinandersetzungen sind vor zwei Jahren niedergeschrieben. Ich habe sie bisher nicht veröffentlicht, weil es meine Absicht war, Erörterungen über Krystallstructur zuzufügen. Die Theorie der Krystallstructuren ist indessen von anderer Seite mehrfach behandelt worden und ich verzichte wenigstens für jetzt, darauf einzugehen und theile die obigen Bemerkungen mit, die auch ganz für sich bestehen können.

Greifswald, im October 1893.

---

1893. II. 131 Z. 7 v. u. Hier ist hinzuzufügen: Nur der flüssige Schwefelphosphor und in noch stärkerem Grade der ebenfalls flüssige Selenphosphor werde höhere Brechungsexponenten (vielleicht 2,2 bis 2,5) besitzen.
- „ „ 133 Z. 4 v. u. lies Phosphorsuboxyd  $P_4O$  anstatt Phosphor-  
monoxyd  $P_2O$ .
- „ „ 174 Z. 12 v. o. „ Krystallkante anstatt Krystante.
- „ „ -248- Z. 14 v. u. „ Barma anstatt Parma.
- „ „ -470- Z. 10 v. u. „ Maniton anstatt Mainton.
- „ „ in „JUSTUS ROTH, Nekrolog“ p. 20 Z. 11 v. o. lies E. R. anstatt  
~~ELISABETH ROTH.~~
1894. I. 96 Anmerkung lies SCHÖNFLIES: l. c. anstatt B. MINNIGERODE:  
Dies. Jahrb. Beil.-Bd. V. S. 151 u. 152.
- „ „ 180 Z. 8 v. o. „ Kaliumlithiumsulfat anstatt Kaliumsulfat.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1894

Band/Volume: [1894](#)

Autor(en)/Author(s): Minnigerode Bernhard

Artikel/Article: [Ueber die Symmetrieverhältnisse der Krystalle 92-97](#)