Ueber das Minimum der Ablenkung durch Prismen optisch zweiaxiger Krystalle.

Von

Th. Liebisch in Göttingen.

Im Anschluss an eine in dies. Jahrb. 1886. I. 14—34 veröffentlichte Mittheilung über die Bestimmung der Lichtbrechungsverhältnisse doppeltbrechender Krystalle durch Prismenbeobachtungen habe ich im Jahre 1888 diejenigen Fälle untersucht, in denen an Prismen optisch zweiaxiger Krystalle durch Messung des Minimums der Ablenkung von Wellen, die zur Prismenkante parallel laufen, unmittelbar eine oder zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten gefunden werden können[1]. Die dabei angestellte Überlegung war folgende.

Bezeichnet man den inneren Prismenwinkel durch A, den Winkel zwischen der Normale einer gebrochenen, zur Prismenkante parallelen Wellenebene, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{p}$ ist, und der Halbirungsgeraden des Winkels A durch ψ, ferner den Ablenkungswinkel durch D, so besteht für jeden homogenen durchsichtigen Körper die Relation (dies. Jahrb. 1886. I. 16):

$$\mathfrak{p}^2 = M + N \cos 2\psi \tag{1}$$

worin:

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A+D}{2}} + \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A+D}{2}}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{C^2} + \frac{1}{S^2}\right\} \\ N &= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A+D}{2}} - \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A+D}{2}}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2}\right\} \end{aligned}$$

[1] Th. Liebisch, Nachrichten d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen. 1888. p. 197—201.

ist. Hierdurch ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ ausgedrückt durch die zu messenden Winkel A, D und durch den Winkel ψ.

Andererseits genügt $\mathfrak{p}$ der Gleichung der Schnittcurve $\mathfrak{P}$ der Normalenfläche mit der Querschnittebene des Prismas und ist auf diese Weise ausgedrückt durch die Hauptlichtgeschwindigkeiten des Krystalls, die zur Orientirung des Prismas gegen die optischen Symmetrieaxen dienenden Grössen und den Winkel ψ. Bezeichnet man die Hauptlichtgeschwindigkeiten mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die optischen Symmetrieaxen mit X, Y, Z, die Richtungen der Prismenkante, der Halbirungsgeraden des äusseren und des inneren Prismenwinkels mit Z′, Y′, X′, ferner die Richtungscosinusse von X′, Y′ Z′ in Bezug auf jene Axen nach dem Schema:

	X	Y	Z
X′	α	β	γ
Y′	α_1	β_1	γ_1
Z′	α_2	β_2	γ_2

so lautet die Gleichung der Curve $\mathfrak{P}$ in Polarcoordinaten (dies. Jahrb. 1886. I. 24):

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}, \psi) = 0 \tag{2}$$

worin:

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{p}, \psi) = \mathfrak{p}^4 - \mathfrak{p}^2 (L \cos^2\psi + L_1 \sin^2\psi + 2 L_2 \cos\psi \sin\psi) \\ + M \cos^2\psi + M_1 \sin^2\psi + 2 M_2 \cos\psi \sin\psi$$

und:

$$\left|\begin{array}{lllll} L & = (\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)\alpha^2 & + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2)\beta^2 & + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)\gamma^2 \\ L_1 & = (\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)\alpha_1^2 & + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2)\beta_1^2 & + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)\gamma_1^2 \\ L_2 & = (\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)\alpha\alpha_1 & + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2)\beta\beta_1 & + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)\gamma\gamma_1 \\ M & = \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2\alpha^2 & + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2\beta^2 & + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\gamma^2 \\ M_1 & = \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2\alpha_1^2 & + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2\beta_1^2 & + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\gamma_1^2 \\ M_2 & = \mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2\alpha\alpha_1 & + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2\beta\beta_1 & + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\gamma\gamma_1 \end{array}\right.$$

Trägt man den Werth von $\mathfrak{p}$ aus (1) in die Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$\textbf{I.} \quad F(D, \psi) = 0$$

worin:

$$F(D, \psi) = M^2 + N^2 \cos^2 2\psi + 2MN \cos 2\psi \\ - (M + N\cos 2\psi)(L \cos^2\psi + L_1 \sin^2\psi + L_2 \sin 2\psi) \\ + M \cos^2\psi + M_1 \sin^2\psi + M_2 \sin 2\psi.$$

In dem Falle des Minimums der Ablenkung ist nun $\partial D / \partial \psi = 0$, also:

$$\textbf{II.} \quad \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0,$$

oder:

$$(\mathcal{M} + \mathcal{N} \cos 2\psi)\left[(4N - L + L_1) \sin 2\psi + 2 L_2 \cos 2\psi\right]$$
$$- \sin 2\psi \left[2\mathcal{N}(L \cos^2 \psi + L_1 \sin^2 \psi + L_2 \sin 2\psi) + M - M_1\right] - 2 M_2 \cos 2\psi = 0.$$

Für den besonderen Fall, dass bei dem Minimum der Ablenkung $\varDelta$ die gebrochene Wellenebene den Prismenwinkel A halbiren, also der Einfallswinkel gleich dem Austrittswinkel sein soll, ist in der Gleichung II für ψ der Werth 90^0 zu setzen. In diesem Falle müssen also die Winkel zwischen den durch das Prisma gegebenen Geraden X′, Y′, Z′ und den optischen Symmetrieaxen X, Y, Z folgende Bedingungsgleichung befriedigen:

$$\textbf{II}^*. \quad (\mathcal{M} - \mathcal{N}) L_2 - M_2 = 0$$

oder:

$$\sin^2 \frac{A}{2} \cdot \left\{(\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)\,\alpha\alpha_1 + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2)\,\beta\beta_1 + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)\,\gamma\gamma_1\right\}$$
$$- \sin^2 \frac{A + \varDelta}{2} \cdot \left\{\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2\,\alpha\alpha_1 + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}^2\,\beta\beta_1 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\,\gamma\gamma_1\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$\alpha\alpha_1 = 0, \qquad \beta\beta_1 = 0, \qquad \gamma\gamma_1 = 0$$

ist. Hierin sind mit Rücksicht auf die zwischen α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 bestehenden Relationen (dies. Jahrb. 1886. I. 23) drei wesentlich verschiedene Fälle enthalten.

Ist zunächst:

$$\text{a)} \qquad \left|\begin{array}{lll} \alpha = 1, & \beta = 0, & \gamma = 0, \\ \alpha_1 = 0, & \beta_1 = 1, & \gamma_1 = 0, \end{array}\right.$$

so fallen die optischen Symmetrieaxen X, Y, Z der Reihe nach mit X′, Y′, Z′ zusammen. Aus der Gleichung I folgt:

$$\left(\frac{1}{S^2} - \mathfrak{c}^2\right)\left(\frac{1}{S^2} - \mathfrak{a}^2\right) = 0.$$

Wir erhalten also durch Beobachtung des Minimums der Ablenkungen zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Ist ferner:

$$\text{b)} \qquad \left|\begin{array}{lll} \alpha = 0, & \beta = -\sin\mu, & \gamma = \cos\mu, \\ \alpha_1 = 1, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0, \end{array}\right.$$

so fällt die Halbirungsgerade des äusseren Prismenwinkels Y' mit der optischen Symmetrieaxe X zusammen. Zur vollständigen Orientirung des Prismas dient der Winkel (YZ') = (ZX') = μ. Da nach **I**:

$$\left(\frac{1}{S^2} - \mathfrak{b}^2\right)\left(\frac{1}{S^2} - \mathfrak{c}^2\right) = 0,$$

so ergeben sich auch in diesem Falle direct die Werthe von zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Endlich kann:

$$\text{c)} \quad \left|\begin{array}{lll} \alpha = 1, & \beta = 0, & \gamma = 0, \\ \alpha_1 = 0, & \beta_1 = \cos\mu, & \gamma_1 = -\sin\mu \end{array}\right.$$

sein. Dann fällt die Halbirungsgerade X' des inneren Prismenwinkels mit der optischen Symmetrieaxe X zusammen und die Orientirung des Prismas ist gegeben durch den Winkel (YY') = (ZZ') = μ. Aus **I** folgt:

$$\left(\frac{1}{S^2} - \mathfrak{a}^2\right)\left(\frac{1}{S^2} - \mathfrak{b}^2 \sin^2\mu - \mathfrak{c}^2 \cos^2\mu\right) = 0.$$

Demnach liefert beim Minimum der Ablenkung nur die parallel zur Prismenkante polarisirte Welle eine Hauptlichtgeschwindigkeit, nämlich die constante Geschwindigkeit der Wellen, deren Polarisationsebene mit der Symmetrieebene YZ zusammenfällt. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}_\mu$ der zweiten, nach der Querschnittebene des Prismas polarisirten Welle, die beiden anderen Hauptlichtgeschwindigkeiten und der Winkel μ sind verbunden durch die Relation:

$$\mathfrak{p}_\mu^2 = \mathfrak{b}^2 \sin^2\mu + \mathfrak{c}^2 \cos^2\mu.$$

Dies sind die Fälle, die ich a. a. O. abgeleitet und ausführlicher in der Physikalischen Krystallographie. 1891. p. 395—398 dargestellt habe. Sie werden zusammengefasst durch den Satz: Wenn die Halbirungsgerade des inneren oder des äusseren Prismenwinkels die Richtung einer optischen Symmetrieaxe besitzt oder wenn beides gleichzeitig stattfindet, so halbirt bei dem Minimum der Ablenkung die gebrochene, zur Prismenkante parallele Wellenebene den Prismenwinkel.

Die Bedingungsgleichung **II*** wird aber, worauf ich früher nicht geachtet habe, auch noch in einem vierten Falle befriedigt.

Die Richtungscosinus α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 sind verbunden durch die Relation (dies. Jahrb. 1886. I. 23):

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0.$$

Ist nun z. B. $\alpha = \cos X'X = 0$ oder $\alpha_1 = \cos Y'X = 0$, so nimmt, da jetzt $\beta\beta_1 = -\gamma\gamma_1$ wird, jene Bedingungsgleichung die Gestalt an:

$$\left(\sin^2 \frac{A}{2} - \mathfrak{a}^2 . \sin^2 \frac{A + \varDelta}{2}\right) (\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2)\, \beta\beta_1 = 0.$$

Diese Gleichung kann aber durch den Werth:

$$\mathfrak{a} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A + \varDelta}{2}}$$

nur dann erfüllt werden, wenn $\alpha_1 = 0$ ist, wie unmittelbar aus der Lage der Normalenfläche gegen das Prisma oder aus der Gleichung **I** der Schnittcurve $\mathfrak{P}$ dieser Fläche mit der Querschnittsebene des Prismas zu ersehen ist.

In der That, je nachdem $\cos X'X = 0$ oder $\cos Y'X = 0$ ist, fällt die optische Symmetrieaxe X in die Verbindungsebene der Kante Z′ des Prismas mit der Halbirungsgeraden Y′ des äusseren Prismenwinkels oder der Halbirungsgeraden X′ des inneren Prismenwinkels. Demgemäss schneidet die Symmetrieebene YZ die Querschnittsebene des Prismas in X′ oder Y′. Da sich nun eine gebrochene Wellenebene, für die $\psi = 90^0$ ist, in der Richtung Y′ fortpflanzen muss und die Symmetrieebene YZ alle Richtungen enthält, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Werth $\mathfrak{a}$ annehmen kann, so ist ersichtlich, dass nur durch $\alpha_1 = 0$, nicht aber durch $\alpha = 0$ den vorliegenden Bedingungen genügt wird.

Dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Gleichung **I**, die für $\psi = 90^0$ übergeht in:

$$(M - N)^2 - (M - N)\, L_1 + M_1 = 0$$

oder:

$$(M - N)^2 - (M - N) \left\{(\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)\, \alpha_1{}^2 + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2)\, \beta_1{}^2 + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)\, \gamma_1{}^2\right\}$$
$$+ \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2 \alpha_1{}^2 + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{a}^2 \beta_1{}^2 + \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \gamma_1{}^2 = 0.$$

Diese von α unabhängige Gleichung wird befriedigt durch $\alpha_1 = 0$, wobei $\beta_1 = 1 - \gamma_1^2$ wird, und:

$$\mathfrak{p}^2 = M - N = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A + \Delta}{2}} = \mathfrak{a}^2.$$

Wir erhalten also den Satz: **Wenn in einem Prisma eines optisch zweiaxigen Krystalls die Halbirungsgerade Y′ des äusseren Prismenwinkels in eine optische Symmetrieebene des Krystalls fällt, so wird die Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit für alle in dieser Symmetrieebene enthaltenen Fortpflanzungsrichtungen einen constanten Werth besitzt, bei dem Minimum der Ablenkung den inneren Prismenwinkel A halbiren.**

Diese soeben aus den allgemein gültigen Relationen **I** und **II** abgeleitete Eigenschaft der Prismen optisch zweiaxiger Krystalle ist von C. Viola[1] durch eine speciellere Überlegung gefunden worden.

Göttingen, November 1899.

---

[1] C. Viola, Zeitschr. f. Kryst. etc. **32** 66. 1899.

Zeitschrift/Journal: Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1900

Band/Volume: 1900

Autor(en)/Author(s): Liebisch Theodor

Artikel/Article: Ueber das Minimum der Ablenkung durch Prismen optisch zweiaxiger Krystalle 57-62