# Ueber Krystallsysteme.

Von

**V. de Souza Brandão** in Lissabon (Portugal).

Mit 10 Figuren.

---

Das Wort Syngonie (Winkelübereinstimmung), welches einem grösseren Kreise von Lesern, soviel ich weiss, zum ersten Mal in den Éléments de cristallographie physique von Ch. Soret 1893 bekannt gemacht wurde, ist von einigen Mineralogen lebhaft begrüsst und angenommen worden. Infolgedessen wurde versucht, die Bedeutungslosigkeit des Wortes „Krystallsystem" zu beweisen und dasselbe von der mineralogischen und krystallographischen Terminologie auszuschliessen.

Die Frage ist z. Th. eine Vocabelsache, z. Th. aber eine Begriffssache, und verdient in dieser Hinsicht ernstlich behandelt zu werden. Es ist nicht zu billigen, dass von früheren Forschern vorgeschlagene und gebrauchte Termini, welche zwar ihre Bedeutung im Laufe der Zeit etwas verändert, aber nicht verloren haben, ohne weiteres und ganz unnöthigerweise beseitigt werden, wie zweckmässig auch die neueren Namen erscheinen mögen.

Was die Begriffsseite der Frage anbetrifft, so wird die Sachlage am besten durch folgende Worte dargestellt[1], welche von einem Vertreter der neuen Richtung herrühren:

„Es scheint ihm entgangen zu sein, dass diese beiden Begriffe, d. h. der des ‚Krystallsystems' und der der ‚Syngonie', nicht identisch sind. Von dem ersten behaupte ich

---

[1] E. v. Fedorow, Zeitschr. f. Kryst. **29**. 654, mit Hinweis auf **24**. 605 f. und **28**. 36 f.

(und nicht ich allein), dass er ein unbestimmter, durch keine strenge Definition auszudrückender Begriff ist, und gerade deswegen mache ich von demselben keinen Gebrauch, wohl aber von einem ganz streng definirten Begriffe ‚Syngonie'."

Nun soll in dieser Notiz das Gegentheil bewiesen werden, und zu Ehren von Ch. S. Weiss, dem genialen Begründer der geometrischen Krystallographie, der Begriff eines Krystallsystems streng definirt und somit die Bezeichnung Krystallsystem rehabilitirt werden; damit hängt natürlich die Entbehrlichkeit des Wortes „Syngonie" zusammen.

Ich möchte zunächst die obwaltenden Verhältnisse nur so zu sagen materiell vor Augen führen. Dazu benütze ich Liebisch's Physikalische Krystallographie (1891) und schlage S. 66 auf. Dort findet man, dass bezüglich der Symmetrie des Verhaltens unter homogener Deformation sämmtliche 32 Krystallclassen sich in drei Gruppen unterbringen lassen und zwar: A. isotrope Krystalle, mit den tesseralen Classen; B. Krystalle mit einer Hauptaxe, mit den trigonalen, den hexagonalen und den tetragonalen Classen; C. Krystalle mit drei verschiedenen und gleichberechtigten Axen, mit den rhombischen, monoklinen und triklinen Classen.

Was sind nun diese drei Classengruppen? Sie sind eben weiter nichts als Krystallsysteme, und zwar die drei Krystallsysteme für das Verhalten gegen homogene Deformationen. Sie sind aber auch die Krystallsysteme bezüglich aller jener Vorgänge, deren Gesetze sich aus einem Ellipsoid ableiten lassen und deren Symmetrie deshalb mit derjenigen des Ellipsoides identisch ist. Diese Symmetrie besteht bekanntlich allgemein im Vorhandensein von drei aufeinander senkrecht stehenden zweizähligen reinen Drehungsaxen nebst dem Centrum der Symmetrie, wodurch die Ebenen jener Axen zu Symmetrieebenen werden. Zwei jener Axen oder jener Ebenen würden schon mit dem Centrum die ganze Symmetrie bestimmen.

Unter anderen sind es die Vorgänge der Doppelbrechung, welche dem Gesetz des Ellipsoides gehorchen; es sind somit jene drei Gruppen auch die optischen Krystallsysteme, solange es sich um das Verhalten homogenem Licht gegenüber handelt. Im ersten System A ist das Ellipsoid gleichaxig, also eine Kugel, im zweiten B sind zwei der obengenannten Axen unter sich gleich oder vertauschbar, was das Rotationsellipsoid mit seiner $\infty$-zähligen Axe definirt, im dritten C ist das Ellipsoid ein allgemeines dreiaxiges. Neben den später zu besprechenden geometrischen Krystallsystemen sind die optischen, wie sie eben definirt wurden, für die Diagnose der Mineralien wohl am wichtigsten.

Man darf aber nicht vergessen, dass, sobald man die Beschränkung auf homogenes Licht fallen lässt und weisses Licht voraussetzt, die Gruppe C in drei solche zerfällt, deren optische oder besser gesagt Doppelbrechungseigenschaften die drei niedrigst symmetrischen Krystallsysteme, d. h. das rhombische, das monokline und das trikline System geradezu charakterisiren. In rhombischen Krystallen fallen die Symmetrieaxen der (dreiaxigen) Ellipsoide für alle möglichen Wellenlängen in dieselben drei orthogonalen Richtungen, in monoklinen Krystallen giebt es eine einzige solche gemeinschaftliche Richtung, in triklinen keine. Die Sammelrichtungen sind, geometrisch betrachtet, entweder Umklappungsaxen oder Normalen von Symmetrieebenen, sie können also, je nach der Krystallclasse, verschiedene Bedeutung erlangen; in optischer Hinsicht aber ist deren Bedeutung unveränderlich. Hierdurch erhellt, wie diese drei Syngoniearten durch die Vorgänge der Doppelbrechung scharf von einander geschieden sind, wogegen tetragonale und trigonale oder hexagonale Krystalle optisch nicht unterscheidbar sind.

Andere optische Krystallsysteme sind nicht denkbar, da zwei für alle Wellenlängen gemeinschaftliche Symmetrieaxen des (dreiaxigen) Ellipsoides auch die dritte gemeinschaftlich werden lassen. Die drei optischen Krystallsysteme des dreiaxigen Ellipsoides sind also identisch mit den drei geometrischen Krystallsystemen, und es giebt im Ganzen fünf und nicht drei optische Krystallsysteme, wie es gewöhnlich behauptet wird. Man könnte sie resp. das isotrope, das einaxige, das zweiaxige trisymmetrische, das zweiaxige monosymmetrische und das zweiaxige asymmetrische nennen[1].

---

[1] Wir haben ersichtlich bei dieser Darlegung die Betrachtung der activen Medien fortgelassen.

Eine andere Art von Vorgängen, die Strömungsvorgänge, veranlassen wieder eine andere und zwar zahlreichere Bildung von Classengruppen. Während die regulären Classen eine solche Gruppe für sich bilden, zerfallen die tetragonalen in zwei durch das Vorhandensein resp. das Fehlen von zur vierzähligen Symmetrierichtung senkrecht stehenden zweizähligen Axen und durch dieselbe hindurchgehenden Symmetrieebenen charakterisirte Gruppen, und ebenso die trigonalen und die hexagonalen Classen, die übrigens von den tetragonalen nicht geschieden werden. Endlich werden die rhombischen, monoklinen und triklinen Classen in drei Gruppen untergebracht, welche mit den bekannten geometrischen Systemen identisch sind. Deshalb lautet das Systemschema[1]:

A. Reguläre Classen.
B. Trigonale, tetragonale und hexagonale Classen mit zweizähligen Symmetrieaxen u. s. w.
C. Ebensolche ohne zweizählige Symmetrieaxen u. s. w.
D. Rhombische Classen.
E. Monokline Classen.
F. Trikline Classen.

Hier begegnen wir der Eigenthümlichkeit, dass die drei Symmetriegruppen der trigonalen, der hexagonalen und der tetragonalen Classen nicht nur wie bei den dem Ellipsoidgesetz gehorchenden Vorgängen zusammengeworfen werden, sondern nach einer solchen Verschmelzung wieder in zwei Gruppen auseinander getrennt werden, so dass die rein geometrische Eintheilung ganz verwischt wird. Von den optischen (Ellipsoid-) Systemen ausgehend, wäre nur das einaxige System einer, übrigens in optischen Vorgängen nicht zu begründenden Zweitheilung zu unterwerfen.

Das elastische Verhalten bedingt wieder durch seine eigene Symmetrie, d. h. durch die Form des Elementargesetzes und des Potentials der elastischen Kräfte, die Unterscheidung von neun Classengruppen oder elastischen Krystallsystemen[2].

[1] Liebisch, Physik. Kryst. 1891. p. 142.

[2] l. c. p. 552 ff. In diesem Werk, wie in Voigt's „Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, 1898", findet man die Aufstellung der Krystallsysteme für weitere Vorgangsarten.

Es wird wohl genügen, diese Beispiele angeführt zu haben. So hat man die 32 Symmetrieclassen der Krystalle in Gruppen untergebracht, welche bezüglich jedes Agens oder jeder Vorgangsart sich in symmetrischer Hinsicht verschieden verhalten, während die Classen jeder solchen Gruppe nicht von einander zu unterscheiden sind. Diese Gruppen sind eben weiter nichts als Krystallsysteme und zwar optische, elastische, Deformations-Krystallsysteme, und unsere Frage wird mit der Aufstellung der geometrischen Krystallsysteme gelöst, welche sich folgendermaassen definiren lassen: „Geometrische Krystallsysteme sind diejenigen Gruppen von Symmetrieclassen, welche sich auf Grund des Verhaltens der Krystalle dem Zonengesetz gegenüber aufstellen lassen."

Bekanntlich besagt das Princip der Gruppirung der Symmetrieclassen nach dem Gesetz einer Vorgangsart, dass die Symmetrie der letzteren so mit derjenigen jeder Krystallclasse zur Deckung zu bringen ist, dass die Symmetrieelemente einer solchen wenigstens erhalten bleiben mit allen ihren Operationen; es kann die Zähligkeit eines solchen Symmetrieelementes concordant erhöht, nicht aber erniedrigt werden. So findet man bei der Verbindung der Ellipsoidsymmetrie (Doppelbrechungssymmetrie) mit derjenigen einer tetragonalen oder hexagonalen Classe, dass nach der Richtung der Hauptaxe eine Isotropieaxe (Drehungsaxe mit unendlich kleinem charakteristischem Drehungsbetrag) des Ellipsoides liegen muss, da letzteres entweder solche oder reine Umklappungsaxen besitzen kann, welche letzteren die Symmetrie der tetragonalen und hexagonalen Hauptaxenrichtung erniedrigen würden; daher das Rotationsellipsoid.

Definiren wir also nach obigem die Krystallsysteme nach ihrem Verhalten dem Hauptgesetz der geometrischen Krystallographie gegenüber, so handelt es sich zunächst um die Ermittelung der Symmetrie des Zonengesetzes, was sich leicht mit Benützung der arithmetischen Form desselben, des sogen. Gesetzes der rationalen Indices, ausführen lässt.

1. Zunächst ist es klar, dass das Zonengesetz centrosymmetrisch ist; die Elemente, Flächen oder Kanten, $\{s_1\, s_2\, s_3\}$ und $\{\bar{s}_1\, \bar{s}_2\, \bar{s}_3\}$ sind zugleich mögliche oder unmögliche Elemente

des Complexes, je nachdem $s_1 : s_2 : s_3$ rationale oder irrationale Verhältnisse darstellen. Bringt man die Centrosymmetrie mit derjenigen jeder Krystallclasse zur Deckung, so vertheilen sich die 32 Classen in 11 höhere Gruppen, und innerhalb jeder solchen sind bezüglich des Zonengesetzes keine Classenverschiedenheiten vorhanden. Es sind dies die bekannten 11 Gruppen, welche sich im erwähnten Liebisch'schen Werke p. 65 angeführt finden. Die drei untersten Gruppen sind fertig gebildet; das Zonengesetz vermag keine weitere Zusammenziehung dieser höchstens zweizählige Symmetrieelemente aufweisenden Classen zu bewirken. So zerfällt also das künstlich errichtete sogen. digonale Symmetriesystem in drei wohlbegründete (geometrische) Krystallsysteme, das trikline, das monokline und das rhombische, deren meroëdrische (hier nur hemiëdrische) Classen durch Hinzufügung des Centrums der Symmetrie in die bezüglichen Holoëdrien übergehen. Es ist kaum nöthig zu betonen, dass, hinsichtlich des Zonengesetzes, die auf einer geradzähligen Symmetrieaxe normale Ebene eine Symmetrieebene, und umgekehrt die Normale einer Symmetrieebene wenigstens eine zweizählige, eventuell höher geradzählige Drehungsaxe darstellt.

2. Jede auf einer drei-, vier- oder sechszähligen reinen Drehungs- oder Deformations-Drehungsaxe[1] senkrecht stehende mögliche Kante ist eine Umklappungsaxe und, des früher erwähnten Centrirtseins des Zonengesetzes wegen, zugleich die Normale einer Symmetrieebene, welch letztere mögliche Krystallfläche ist. Die fragliche Kante ist also zweizählige Inversions-Drehungsaxe für den Gesammtcomplex oder, was dasselbe bedeutet, für das Verhalten des Krystalls dem Zonengesetz gegenüber.

Ist n die Zähligkeit der Symmetrieaxe, so liegen in der zur Hauptaxe normalen Ebene noch (n — 1) weitere Kanten-

[1] Unter Deformations-Drehungsaxe wird hier das von Anderen Symmetrieaxe zweiter Art oder Axe der zusammengesetzten Symmetrie genannte Symmetrieelement verstanden, weil sie betrachtet werden kann als bestehend aus einer reinen Drehung und einer durch die Spiegelung resp. Inversion vertretenen unphysischen homogenen Deformation mit der Dilatation — 2. Hierüber weiteres im dritten Abschnitt dieser Arbeit.

richtungen (nicht Kantengeraden!), welche kleinste Winkel von $2\pi/n$ bilden. Ist

$$S \equiv \{s_1 s_2 \ldots . s_{n-1} s_n s_h\}$$

das Symbol einer Ebene, bezogen auf jene n gleichwerthigen Kantenrichtungen der Basalebene und auf die Hauptaxe, so ist das Symbol derjenigen Ebene, welche aus S, durch Umklappung um die Ausgangskante, auf welche sich $s_1$ bezieht, hervorgeht:

$$S' \equiv \{s_1 s_n s_{n-1} \ldots . s_2 \bar{s}_h\}.$$

Die Rationalität der Verhältnisse der Indices von S' steht und fällt mit derjenigen der Indicesverhältnisse von S, und die erwähnte beliebige Kante des Basalbüschels ist in der That eine Umklappungsaxe für den Complex.

Infolge dieser Eigenschaft einer auf einer übrigens reinen Drehungs- oder aber auch Deformations-Drehungsaxe senkrecht stehenden Kante geht, von den mehrerwähnten 11 Gruppen, 8 in 7, 6 in 5, 4 in 3 und 2 in 1 über. Aus 7 und 8 setzt sich das tetragonale System zusammen, aus 1 und 2 das reguläre; nur 3, 4 und 5, 6 sind noch einer weiteren Zusammenziehung fähig, und zwar auf Grund folgenden 3. Satzes. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass sämmtliche Flächen der Hauptzone, welche die Normalebenen der Kanten des Hauptbüschels sind, Symmetrieebenen des centrisch symmetrischen Complexes darstellen oder, was dasselbe bedeutet, dass jene Kanten zugleich Umklappungsaxen und zweizählige Inversions-Drehungsaxen sind.

3. Jede Symmetrieaxe ist zugleich zweizählige Drehungsaxe des Zonengesetzes, d. h. das Element, welches aus einem möglichen Element durch Umklappung um eine solche Axe hervorgeht, ist auch ein Element des Complexes.

Der Beweis ist ersichtlicherweise nur für ungeradzählige Axen, also für die dreizählige Axe zu führen, wobei angenommen wird, dass dieselbe mögliche Kante ist. Unter einer solchen Annahme ist es gestattet, die Elemente des Krystalls auf 2 zur dreizähligen Axe senkrecht stehende und einen Winkel von $120^0$ miteinander bildende gleichwerthige Kanten (1,2) und auf die dreizählige Axe (3) selbst zu beziehen.

Hat dann ein Element das Symbol

$$S \equiv (s_1\, s_2\, s_3),$$

so ist das Symbol desjenigen Elements, welches durch Umklappung um die dreizählige Axe (3) aus S hervorgeht

$$S^1 \equiv (\bar{s}_1\, \bar{s}_2\, s_3),$$

ebenso rational wie S. Die dreizählige Symmetrieaxe ist also sechszählige Drehungsaxe des Zonengesetzes.

Hierdurch gehen die beiden aus 5 nebst 6 und aus 3 nebst 4 gebildeten Classen in eine einzige über, deren gesammte Symmetrie diejenige der hexagonalen Holoëdrie ist, sobald man alle durch das Zonengesetz bedingten Elemente in Betracht zieht. Deshalb verdient das so entstandene Krystallsystem auch die Bezeichnung hexagonal, trotzdem sein krystallographisches Coordinatenaxensystem trigonaler Natur sein kann (und nach Bravais üblich ist), und aus anderen Gründen trigonal genannt werden muss.

Man hat also, nach der Symmetrie des Verhaltens bezüglich des Hauptgesetzes der geometrischen Krystallographie, 6 Gruppen von Krystallen zu unterscheiden, unter die sich die 32 Symmetrieclassen in der angegebenen Weise vertheilen lassen. Es sind dies das tesserale oder reguläre, das trigonale oder hexagonale, das tetragonale, das rhombische, das monokline und das trikline (geometrische) Krystallsystem, wie sie von älteren Werken mit mehr oder weniger Richtigkeit und Vollständigkeit der angenommenen Symmetrieclassen genannt werden (siehe Liebisch's Geometrische Krystallographie. 1881. XII. Cap. §. 5, wo auch die Zusammengehörigkeit zu einem Krystallsystem an der Empfänglichkeit für ein und dasselbe sogen. krystallographische Axensystem erkannt wird).

Die Symmetrieeigenschaften dieser 6 Gruppen sind diejenigen der bezüglichen Holoëdrien. Man darf sich aber, der Gewohnheit nachgehend, nicht vorstellen, dass nur die Holoëdrien selbst jene Symmetrieeigenschaften besitzen, sondern man muss erwägen, dass auch die niedrigst symmetrische Classe der Gruppe dieselbe volle Symmetrie in ihrem Verhalten dem Zonengesetz gegenüber aufweist, ganz wie ein nicht activer trikliner Krystall, trotz des Mangels seiner einfachen Formen an irgendwelcher Symmetrieaxe, doch für homogenes Licht, bezüglich der zwei Bissectricen und der optischen Normale für die fragliche Lichtart, zweizählig symmetrisch ist.

Man hat früher versucht, die Krystallsysteme auf verschiedenen Grundlagen zu errichten. Liebisch hat in seinem vorhin erwähnten fundamentalen Werk den Begriff eines sogen. krystallographischen Axensystems benutzt. Wenn man dieses in seiner grössten Allgemeinheit nimmt, wie ich es früher that (siehe Zeitschr. f. Kryst. **24**. 593), so muss man zu demselben Schluss gelangen, wie wenn das Zonengesetz zum Ausgangsprincip herangezogen wird, da ein solches krystallographisches Axensystem eine Folge der mit der Classensymmetrie combinirten Symmetrie des Zonengesetzes ist. Damals aber war man mit den Krystallclassen noch nicht im Klaren. Neulich hat auch V. Goldschmidt die Krystallsysteme auf besonderen, und zwar speculativen und mehr hypothetischen Grundlagen aufzubauen versucht.

Die Vertreter der sogen. Syngoniearten behaupten hierin weiter nichts als künstliche, durch Bequemlichkeit der Behandlung und rein äussere Winkelähnlichkeiten (Anzahl und Vertheilung der rechten Winkel) charakterisirte Gruppen zu sehen. Dass es nicht so ist, glaube ich bewiesen zu haben.

Vielmehr stellen die geometrischen Krystallsysteme, oder Krystallsysteme schlechthin, die auf Grund der Symmetrie des Zonengesetzes einzig und allein zu bildenden Gruppen dar, während die von den Vertretern der Syngoniearten in den Vordergrund gestellten sogen. Symmetriesysteme ganz verschieden ausfallen, je nach der der Ableitung der Krystallclassen zu Grunde gelegten Methode. Dies giebt sich z. B. darin kund, dass die eine Methode zu einem rhomboëdrischen, die andere zu einem sogen. trigonalen (eigentlich sphenoidischen) Symmetriesystem führt, die eine Methode wieder neben dem digonalen noch ein monogonales System schafft, während die andere allein ersteres aufnimmt u. s. w. (s. Schönflies, Krystallsysteme und Krystallstructur. 1891).

Die Symmetriesysteme mögen, wie E. v. Fedorow sagt, etwas Willkürliches an sich haben; die auf Grund des Gesetzes der Zonen abgeleiteten Krystallsysteme haben nur Bestimmtes an sich.

So viel was die Begriffe von Krystallsystem und Syngonieart anbetrifft. Die Vocabelsache selbst ist weniger wichtig, verdient aber immerhin berührt zu werden. Krystallisationssystem und Krystallsystem sind sehr alte Bezeichnungen; sie datiren von 1814—1815. Der Begriff hat zwar seitdem eine Evolution durchgemacht und ist nicht mehr ganz derselbe wie damals; aber die 7 Grundgestalten Bernhardi's werden durch Verschmelzen von Rhombenoktaëder und Rectanguläroktaëder auf 6 reducirt, welche den heutigen Krystallsystemen zu Grunde gelegt werden können. Die Begriffsänderung ist also nicht so durchgreifend gewesen, wie nach so langer Zeit zu erwarten war.

Eine solche Evolution machen fast alle wissenschaftlichen Begriffe durch, manchmal in viel kürzerer Zeit und in viel durchgreifender Weise. Dies ist aber kein Grund, um die Bezeichnung wegzuschaffen und durch eine neue zu ersetzen, um so mehr, als die schwankenden sogen. Symmetriesysteme, welche die Vertreter der Syngoniearten als streng theoretisch begründete Gruppen an die Spitze der Krystallographie stellen wollen, relativ sehr neu sind, und eher für diese eine andere Bezeichnung als System geschaffen werden sollte, als für die so alten Krystallsysteme.

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen und behaupten: die Gruppirung der Krystalle in Krystallsysteme lässt sich auf Grund des Zonengesetzes allein, ohne Berücksichtigung der Classensymmetrie durchführen.

Das Fundamentalvierflach bildet das Substratum des Flächencomplexes. Wir denken uns an dessen Stelle das sphärische Viereck gesetzt, welches von den Polen der vier Flächen auf einem cocentralen sphärischen Schnitt bestimmt wird. Die Aufgabe der Aufstellung der Krystallsysteme ist identisch mit der: die nach ihrer Symmetrie verschiedenen sphärischen Vierecke zu unterscheiden.

Diese Aufgabe lässt sich dadurch lösen, dass man, unter Heranziehung der Gegenpole (was nach dem Centrirtsein des Zonengesetzes erlaubt ist), die Seiten des Fundamentalvierecks zu zwei, zu drei u. s. w. nacheinander gleich macht, und jedesmal die entstandene Symmetrie des Vierecks untersucht und feststellt.

I. Wenn dem Fundamentalviereck mit den Polen *a*, *b*, *c*, *d* keine solche Bedingung auferlegt wird, so haben wir das einfach centrisch-symmetrische oder trikline System.

II. Werden zwei in einem Pole *a* zusammenstossende Vierecksseiten (*ab*) und (*ac*) einander gleich, so wird zunächst dem Viereck keine weitere Symmetrie ertheilt. Wohl aber, wenn die beiden im Pole *d* zusammenstossenden Seiten (*db*) und (*dc*) auch einander gleich, von den beiden ersten aber verschieden sind (Fig. 1). Die Ebene des Grosskreises durch *a* und *d* ist eine Symmetrieebene des Vierecks, und der darauf senkrecht stehende Kugeldurchmesser ist eine Umklappungsaxe, sobald die Gegenpole *a'*, *b'*, *c'*, *d'* mit berücksichtigt werden. Das sphärische Deltoid (*abcd*) besitzt also, in Verbindung mit seinem Gegendeltoid (*a'*, *b'*, *c'*, *d'*), die Symmetrie der monoklinen Holoëdrie und definirt das bezügliche System.

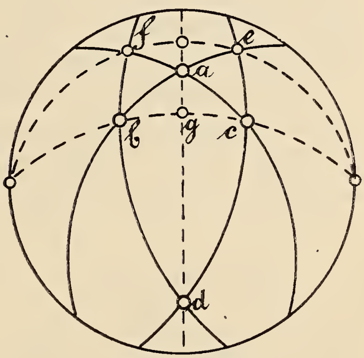

Fig. 1.

Die Schnittpunkte *e* und *f* der Grosskreise *ab* und *cd* einerseits und *ac* und *bd* andererseits bestimmen mit *b* und *c* ein sphärisches Trapez, welches auch als das Fundamentalviereck des monoklinen Systems angesehen werden kann. Im Deltoid sind die Seiten paarweise, und zwar anliegende Seiten wie (*ab*) und (*ac*), (*db*) und (*dc*), gleich, und von den Winkeln sind zwei gegenüberliegende (*b*) und (*c*) einander gleich, während die beiden anderen (*a*) und (*d*) verschieden sind und vom Grosskreis *ab* halbirt werden. Im Trapez dagegen verhalten sich die Winkel wie die Seiten des Deltoids und die Seiten wie die Winkel des letzteren; das Trapez ist die Polarfigur des Deltoids auf der Kugel und hat demgemäss dieselbe Symmetrie wie dieses.

Es muss bemerkt werden, dass die Winkel (*b*) und (*c*) des Deltoids symmetrisch (nicht congruent) gleich sind.

Vervollständigt man das Viereck, indem man die Grosskreise *ad* und *bc* zieht und die Durchschnitte *e*, *f*, *g* von *ab* mit *cd*, *ac* mit *bd*, *ad* mit *bc* einträgt, so lassen sich folgende Betrachtungen anstellen.

Im monoklinen Deltoid schneiden sich zwei Seitenkreise *ad* und *bc* des vollständigen Vierecks in einer der drei Diagonalecken *g* einander rechtwinkelig; die von den beiden übrigen Diagonalecken *e*, *f* bestimmte Diagonalseite *ef* schneidet eine jener Seiten, *ad*, rechtwinkelig, die andere, *bc*, also im Pol der ersteren. Daher die Anwesenheit unendlich vieler doppelt rechtwinkeliger Bezugsdreiecke, an denen sich stets die Seite *ad* und ihr Pol betheiligen, während für die beiden übrigen Ecken zwei rationale Pole des genannten Grosskreises *ad* zu wählen sind.

Hierdurch wird die monokline Symmetrie auch mittelst rechter Winkel charakterisirt. Ein einziger rechter Winkel oder zwei solche, welche nicht ein und denselben gemeinschaftlichen Schenkel hätten, würden keine besondere Symmetrie des Fundamentalvierecks zur Folge haben.

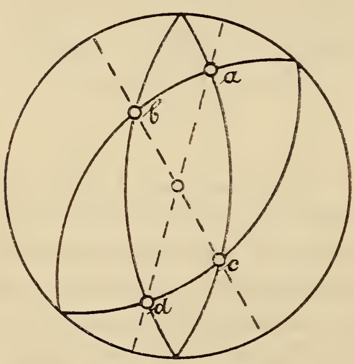

Fig. 2.

Anstatt anliegender Seiten, wie bisher, kann man sich auch gegenüberliegende Seiten des Vierecks einander gleich denken.

Ein einziges Paar würde für sich keine besondere Symmetrie hervorrufen. Macht man aber zugleich $(ab) = (cd)$ und $(ac) = (bd)$, wobei $(ab) \gtrless (ac)$, so erhält man ein sphärisches Parallelogramm (dessen gegenüberliegende Winkel auch einander gleich sind), wofür der durch den Schnittpunkt von *ad* und *bc* hindurchgehende Kugeldurchmesser eine Umklappungsaxe ist (Fig. 2). Die darauf normale Diametralebene ist eine Symmetrieebene der aus *a*, *b*, *c*, *d* und der Gegenpolen *a'*, *b'*, *c'*, *d'* zusammengesetzten Figur.

Wir haben also noch immer die monokline Symmetrie.

Hier sind die gegenüberliegenden Winkel congruent, und die Polarfigur ist wieder ein sphärisches Parallelogramm, da die Gleichheitsrelationen unter den Winkeln dieselben sind wie diejenigen unter den Seiten (Gleichheit der gegenüberliegenden Elemente überhaupt).

III. Sind drei und nur drei Seiten des Vierecks gleich, so gewinnt erst das Viereck eine Gestalt, deren Symmetrie von derjenigen von I und II verschieden ist, wenn die drei gleichen Seiten, z. B. $(ab)$, $(bc)$, $(ca)$ ein reguläres Dreieck bilden, und die Ecke $d$ sich im Pol der diesem Dreieck ein- und umgeschriebenen Kleinkreise befindet. Es ist dann, ausser $(a\,b) = (b\,c) = (c\,a)$, auch $(d\,a) = (d\,b) = (d\,c)$. Zieht man die Gegenpole in Betracht, so besitzt das Gebilde die Rhomboëdersymmetrie, d. h. eine dreizählige Drehungsaxe, drei um $120^0$ gegeneinander geneigte, durch die dreizählige Axe hindurchgehende Symmetrieebenen, drei auf diesen Ebenen senkrecht stehende Umklappungsaxen und, als Folge der beiden letzten Arten von Elementen, das Centrum der Symmetrie (Fig. 3).

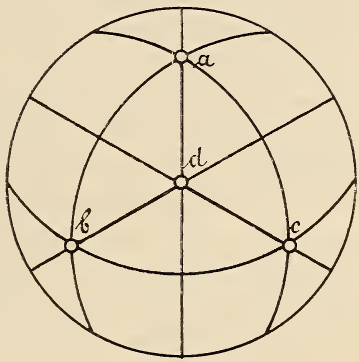

Fig. 3.

Nach unserem Gesichtspunkt ist es also ein rhomboëdrisches (nicht ein hexagonales) System, welches die geometrische Krystallographie zu behandeln hat, dessen Symmetrie diejenige der rhomboëdrischen Holoëdrie (rhomboëdrisch-hemiëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems) ist, ungeachtet der besonderen Symmetrie jeder Classe oder Gruppe des Systems, welche die rein geometrische Krystallographie ganz ignorirt. Es dürfte dies uns nicht überraschen, da das Fundamentale bei diesen Krystallen die dreizählige Axe ist, aus welcher die sechszählige der hexagonalen Gruppen durch Hinzufügung einer zweizähligen Axe von derselben Richtung hervorgeht. Da nach dem Zonengesetz jede Symmetrieaxe des Complexes zugleich eine Umklappungsaxe und die Normale einer Symmetrieebene desselben ist, so ist ersichtlich, wie man von den rhomboëdrischen zu den echt hexagonalen und den sphenoidischen Classen übergehen kann, welche beiden letzten Abtheilungen den zwei Abtheilungen des tetragonalen Systems parallelisirt werden können.

Ein geeignetes Bezugsdreieck des rhomboëdrischen Systems würde sich aus den Polen dreier, bezüglich der dreizähligen Axe symmetrischer Flächen bilden lassen. Dann würde aber bei denjenigen Classen, bei denen die Richtung der dreizähligen Axe zugleich diejenigen einer zweizähligen Drehungs- oder Inversions-Drehungsaxe (Normale einer Symmetrieebene) ist, nur die Hälfte eines Satzes von gleichwerthigen Flächenrichtungen zur Bildung des Bezugsvielecks beitragen und man könnte nicht mit einem einzigen Symbol eine einfache Form bezeichnen[1]. Diesem Übelstand wird dadurch geholfen, dass man drei Flächenrichtungen aus der Zone der dreizähligen Axe selbst wählt, für welche bekanntlich die Zonenaxe immer zweizählige Axe von jeder Natur ist, und, da drei solche tautozonale Flächen nicht ausreichen, die der dreizähligen Axe normale Flächenrichtung hinzunimmt, welche für sich allein einen ganzen Satz gleichwerthiger Flächenrichtungen vertritt.

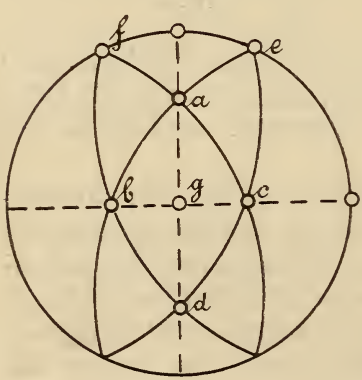


Fig. 4.

IV. Ein sphärisches Viereck von höherer Symmetrie als II kann auf zweierlei Wegen aus II selbst hervorgehen.

Entweder wird das Deltoid von Fig. 1 durch Gleichsetzen von $(ab)$ und $(bd)$ zu einem sphärischen Rhombus mit $(a\,b) = (a\,c) = (d\,b) = (d\,c)$, oder es wird das Parallelogramm von Fig. 2 durch Gleichsetzen der zwei Paare gegenüberliegender Seiten ebenfalls zu einem sphärischen Rhombus (Fig. 4).

[1] V. de Souza Brandão, Zeitschr. f. Kryst. u. s. w. **24**. 593 ff. 1895.

Die zwei übrigen Seiten $(ad)$ und $(bc)$ des vollständigen Vierecks (die Diagonalen im gewöhnlichen Sinne) halbiren sich rechtwinkelig in einer Diagonalecke $g$, welche der Pol des durch die beiden anderen Diagonalen $e$ und $f$ bestimmten Grosskreises ist. Jene Diagonalecke steht jetzt um $90^0$ von dem Pol ab, welchen der Grosskreis durch die zwei übrigen Diagonalecken auf $ad$ (und auf $bc$) erzeugt. Das bei II erwähnte doppelt rechtwinkelige Bezugsdreieck wird hier also zu einem orthogonalen, doch einzigen solchen Dreieck, und es ist leicht zu sehen, dass unter Heranziehung der Gegenpole $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ die Ecken dieses Dreiecks Pole von zweizähligen Drehungsaxen und die Seitenkreise desselben sphärische Schnitte von Symmetrieebenen des Fundamentalgebildes sind. Es ist dies die Symmetrie der rhombischen Holoëdrie, für uns diejenige der rhombischen Complexe, welcher Classe sie auch angehören mögen, also diejenige des rhombischen Systems.

Dem sphärischen Parallelogramm kann aber noch eine andere Bedingung auferlegt werden, welche ein mit rhombischer Symmetrie ausgestattetes Gebilde liefert und deshalb hierher gehört. Anstatt die zwei Paare gleicher gegenüberliegender Seiten einander gleich zu setzen, kann man die zwei weiteren Seiten des vollständigen Vierecks (gewöhnliche Diagonalen) $(ad)$ und $(cb)$ gleich gross machen.

Dies kann aber auf zweierlei Weise geschehen. 1. Indem zwei gegenüberliegende Pole, $a$ und $d$ z. B., auf dem gemeinschaftlichen Grosskreis $ad$ solcher Art verschoben werden, dass, wenn $(ad) = (bc)$ wird, einer der Schnittpunkte von $ad$ und $bc$ die Mitte der g l e i c h e n Bogen $(ad)$ und $(bc)$ ist, wo unter $(ad)$ und $(bc)$ Bogen von weniger als $180^0$ verstanden werden sollen. 2. Indem die Schnittpunkte der beiden Grosskreise die Mitten von jedesmal einem der genannten $180^0$ nicht erreichenden Bogen und der Ergänzung des anderen zu $360^0$.

Im 1. Fall wird aus dem sphärischen Parallelogramm ein sphärisches Rechteck, d. h. ein aus zwei Paaren gleicher gegenüberliegender Seiten und aus vier gleichen Winkeln gebildetes Viereck (Fig. 5). Der Schnittpunkt der gleichen Diagonalen (des dritten Paares gleicher gegenüberliegender Seiten des vollständigen Vierecks) ist der Pol des vom Rechteck umgeschriebenen Kleinkreises; die vier Ecken jenes liegen also in einer Ebene und stellen in dieser die Ecken eines ebenen Rechtecks dar.

Das sphärische Rechteck ist die correlative Figur des sphärischen Rhombus, wie leicht aus den Gleichheitsrelationen von Seiten und Winkeln bei beiden Arten von Gebilden zu ersehen ist, und hat dementsprechend die gleiche Symmetrie. Damit in Übereinstimmung steht es, dass von den vier Winkeln des Rechtecks nur je zwei gegenüberliegende congruent, je zwei anliegende aber invers gleich sind, genau so, wie es mit den Seiten des sphärischen Rhombus stattfindet.

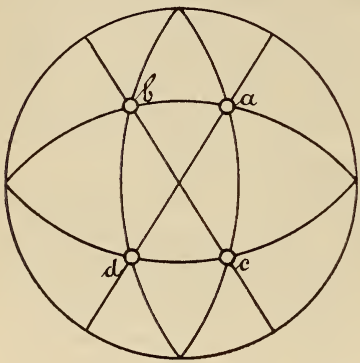


Fig. 5.

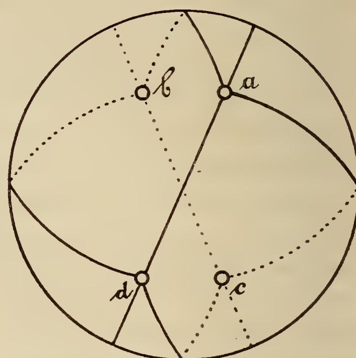


Fig. 6.

Im 2. Fall entsteht eine Figur, welche zwar wieder ein sphärisches Rechteck genannt werden darf, deren Eckpunkte aber nicht mehr in einer Ebene liegen, und deren sämmtliche Winkel congruent sind (Fig. 6[1]). Durch gerade Linien verbunden, würden die Eckpunkte dieses Gebildes ein geradliniges unebenes Rechteck erzeugen. Es ist leicht zu sehen, dass die Symmetrie dieses einem Kleinkreise nicht einschreibbaren sphärischen Rechtecks in drei orthogonalen zweizähligen Drehungsaxen besteht, welche die Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbinden (das Rechteck als vollständiges Viereck betrachtet). Durch Heranziehung der Gegenpole $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ wird die totale rhombische Symmetrie erzeugt.

[1] Die Punkte der unteren Halbkugel sind vom oberen Pol des Grundkreises aus projicirt. Die Grosskreisbogen dieser unteren Halbkugel sind zum Unterschied punktirt.

V. Die nächste Particularisirung des fundamentalen Vierecks besteht darin, dass man: 1. im sphärischen Rhombus die zwei Paare gleicher gegenüberliegender Winkel einander gleich macht, wodurch auch die aufeinander senkrechten Diagonalen gleich werden; 2. in den sphärischen Rechtecken die zwei Paar gleicher gegenüberliegender Seiten ebenso einander gleich macht, wodurch zugleich die gleichen Diagonalen einander normal werden.

Man erhält im 1. Fall ein sphärisches Quadrat mit in einer Ebene liegenden Eckpunkten, wenn sich die Grosskreise *ad* und *bc* innerhalb der gleichen Bogen (*ad*) und (*bc*) schneiden, eben dasselbe im 2. Fall, wenn das sphärische Rechteck einem Kleinkreise einschreibbar ist. War aber letzteres ein solches, dessen Eckpunkte nicht in einer Ebene liegen, oder wird im Fall des Rhombus (1) (*ad*) von der Verlängerung von (*bc*) geschnitten, dann erhalten wir ein sphärisches Quadrat, dessen Ecken nicht in einer Ebene liegen, also ein einem Kleinkreise nicht einschreibbares Quadrat. Es ist leicht zu sehen, dass die correlative Figur des sphärischen Quadrates wieder ein Quadrat ist, weshalb beides, Rhombus und Rechteck, durch Particularisirung das Quadrat liefern.

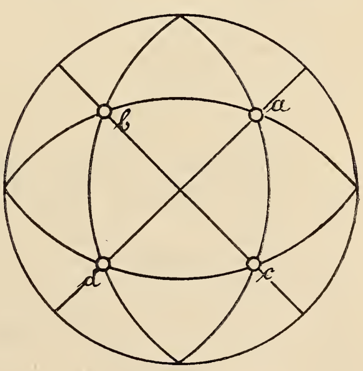

Fig. 7.

Die Symmetrieelemente des einschreibbaren Quadrates sind: eine vierzählige Drehungsaxe in der Richtung des Kugeldurchmessers nach dem Pole des umgeschriebenen Kleinkreises und vier Symmetrieebenen durch diese Drehungsaxe und durch je zwei gegenüberliegende Ecken und Seitenmitten. Durch Hinzufügung des Gegenquadrates wird diese Symmetrie zur Symmetrie der quadratischen Holoëdrie, für uns zu derjenigen des tetragonalen oder quadratischen Systems (Fig. 7).

Die Symmetrie des schiefen (nicht einschreibbaren) Quadrates ist: eine vierzählige Inversions-Drehungsaxe in der Richtung des Kugeldurchmessers nach den Mitten der Diagonalen, zwei Symmetrieebenen durch diese Axe und je zwei gegenüberliegende Ecken und zwei auf derselben Axe senkrecht stehende zweizählige Drehungsaxen nach den Seitenmitten. Die Ergänzung durch die Gegenpole stellt die volle quadratische Symmetrie wieder her (Fig. 8).

VI. Eine neue, dem sphärischen Viereck aufzuerlegende Bedingung bestünde darin, dass man sämmtliche (sechs) Seiten des als vollständiges Viereck betrachteten Quadrates von derselben Grösse macht. Das heisst so viel, als die gewöhnlichen Diagonalen des Quadrates den Seiten desselben gleich zu setzen.

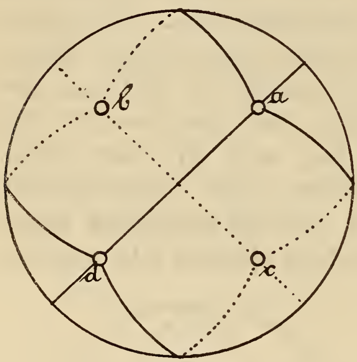


Fig. 8.

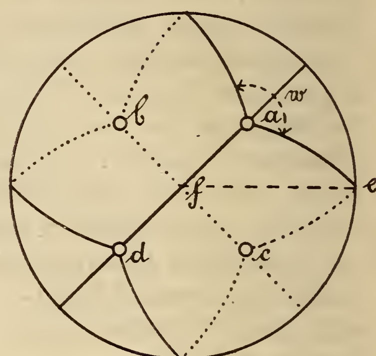


Fig. 9.

Wir fangen mit dem schiefen Quadrat an. Werden die sonst auch gleichen Diagonalen $(ad)$ und $(bc)$ den Seiten $(ab) = (ac) = \ldots\ldots$ gleich gedacht, so wird durch die sechs gleichen Kreisbogen $(ab)$, $(cd)$, $(ca)$, $(db)$, $(ad)$, $(bc)$ $(< 180^0)$ die Kugelfläche in vier gleiche gleichseitige sphärische Dreiecke getheilt, deren Elemente sich leicht folgendermaassen feststellen lassen (Fig. 9): die entsprechenden Dreiecke der Fig. 8, dem quadratischen System angehörig, sind gleichschenkelig, und diejenigen des rhombischen Gebildes, Fig. 6, sind ungleichseitig.

In dem von der halben Seite $(ae) = \frac{1}{2}\mathrm{s}$ und der halben Diagonalen $(af) = \frac{1}{2}\mathrm{t} = \frac{1}{2}\mathrm{s}$ gebildeten sphärischen Dreieck mit den Winkeln $45^0$, $45^0$ $(f\hat{a}e) = \pi - \frac{1}{2}\mathrm{w}$ und den Seiten $\frac{1}{2}\mathrm{s}$, $\frac{1}{2}\mathrm{t} = \frac{1}{2}\mathrm{s}$, $\frac{1}{2}\pi$ (s. Fig. 9), ist

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{1}{2} s},$$

woraus

$$\cos w = -\frac{1 + \cos s}{1 - \cos s}.$$

Ersetzt man nun in der auf das Dreieck $(abc)$ angewendeten Hauptgleichung der sphärischen Trigonometrie

$$\cos t = \cos^2 s + \sin^2 s \cos w,$$

t durch s und cos w durch obigen Werth, so folgt

$$3 \cos^2 s - 2 \cos s - 1 = 0$$

und schliesslich

$$\cos s = -\tfrac{1}{3}, \quad \cos w = -\tfrac{1}{2}$$

(wir schliessen ohne weiteres die Lösung $\cos s = 1$ aus), welche Werthe das (reguläre) Tetraëder charakterisiren. Die Symmetrie desselben, bekannt genug, geht durch Heranziehung der Gegenpole $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ in diejenige des (regulären) Oktaëders über, welche mit derjenigen der tesseralen Holoëdrie übereinstimmt, und zur Symmetrie des regulären oder tesseralen Systems wird.

Beim einschreibbaren Quadrat kann man die Diagonalen nicht den Seiten gleichmachen, ohne damit das Quadrat als solches zu zerstören. Es giebt aber eine ausgezeichnete einzige Dimension, welche durch die Relation

$$s + t = 180^0$$

gekennzeichnet ist; die unmöglich gewordene Gleichsetzung von s und t geht in Ergänzung zu $\pi$ über. In dem, von der halben Seite $(ae) = \frac{1}{2} s$, von der halben Diagonale $(af) = \frac{1}{2} t = 90^0 - \frac{1}{2} s$ und von dem halben Abstand $(ef)$ zweier gegenüberliegender Seiten, gebildeten Dreieck (Fig. 10), dessen Winkel $45^0$, $90^0$, $\frac{1}{2} w$ sind, gilt

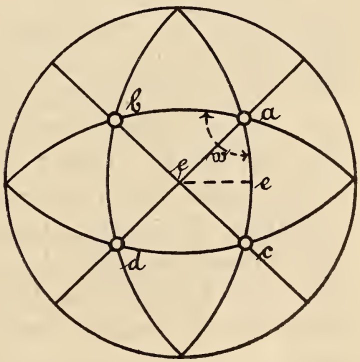

Fig. 10.

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{1}{2} s}$$

und

$$\cos w = -\frac{1 - \cos s}{1 + \cos s}.$$

Da andererseits

$$\cos t = \cos^2 s + \sin^2 s \cos w$$

und

$$t = \pi - s,$$

so folgt

$$3 \cos^2 s + 2 \cos s - 1 = 0$$

und schliesslich

$$\cos s = + \tfrac{1}{3}, \ \cos w = - \tfrac{1}{2},$$

d. h. $s = 70^0\ 31'$, der bekannte Oktaëderwinkel.

Zieht man die Gegenpole $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ in Betracht, so wird die Kugelfläche (da z. B. $(da') = 180^0 - (ad) = (ab) = (ac) = \ldots.$) durch die weniger als $90^0$ (also $70^0\ 31'$ ca.) betragenden Grosskreisbogen in sechs gleiche sphärische Quadrate von der angegebenen Seitengrösse getheilt, deren Endpunkte die Oktaëderpole darstellen. Die Pole der diesen Quadraten um- und eingeschriebenen Kleinkreise sind diejenigen des Würfels, der correlativen Figur des Oktaëders, dessen Symmetrie also gleich derjenigen des letzteren ist. Diese Symmetrie ist vorhin als die für das tesserale System charakteristische angenommen worden.

Endlich wäre noch an die Einführung von $\frac{1}{2}\pi$ betragenden Bogen und Winkeln zu denken. Bei den untersten, nicht mehr als zwei gleiche Elemente besitzenden, Vierecken führt diese Beschränkung zu keiner neuen Symmetrieart; erst dort, wo sich vier oder drei gleiche Elemente finden, hat man eine solche Prüfung vorzunehmen. Aber gerade dort, wo die vier Seiten oder die vier Winkel des Vierecks (Rhombus, Rechtecks, Quadrates) unter sich gleich sind, dürfen dieselben nicht bis zu $\frac{1}{2}\pi$ wachsen, resp. abnehmen, ohne dass zugleich das Viereck aufhört, zu existiren. Es bleibt also das centrirte Dreieck des rhomboëdrischen Systems übrig.

Macht man die Seiten dieses Dreiecks zu solchen von $\frac{1}{2}\pi$, wodurch seine Winkel zugleich dasselbe Maass erhalten, so wird hierdurch die Theilung der Kugelfläche in gleiche (und gleichseitig dreieckige) Oktanten bewirkt, deren Ecken die Pole des Würfels darstellen. In den Mittelpunkten der diesen Dreiecken um- und eingeschriebenen Kleinkreise befindet sich der Kugelpunkt $d$ und die mit demselben, bezüglich der Kugeldurchmesser durch $a$, $b$, $c$ als vierzählige Drehungsaxen, symmetrischen und ersichtlich rationalen Punkte, deren Gesammtheit die Polfigur des Oktaëders bildet.

Mit von den eben abgeleiteten verschiedenen Symmetrieeigenschaften begabte sphärische Vierecke resp. Doppelvierecke, wenn jedesmal Pol und Gegenpol in Betrachtung gezogen werden, sind nicht denkbar.

Man sieht hieraus, dass die Untersuchung der symmetrischen Eigenschaften des sphärischen Vierecks sich dazu verwenden lässt, die möglichen und nothwendigen Krystallsysteme zu unterscheiden. Die Gegenpole $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, welche jedesmal zur Aufstellung der Systemsymmetrie herangezogen worden sind, sind nichts Neues, indem sich dieselben von selbst durch den zweiten Schnitt der die Ecken $a$, $b$, $c$, $d$, verbindenden Grosskreise ergeben.

Der erste Theil dieser Notiz stellte in keiner Weise die directe Lösung der Hauptaufgabe dar, die möglichen Gruppen krystallographischer Complexe nach der bezüglichen Symmetrie aufzustellen. Vielmehr hatten wir nur dabei versucht, die als bekannt vorausgesetzten 32 Symmetrieclassen von krystallographischen Polyëdern solcher Art in Gruppen höherer Ordnung unterzubringen, dass sämmtliche Classen einer solchen Gruppe (Krystallsystems) dasselbe symmetrische Verhalten dem Zonengesetz gegenüber aufzuweisen hätten.

In diesem zweiten Theil haben wir nun gezeigt, dass, auch ohne Kenntniss der genannten Symmetrieclassen und auf Grund des fundamentalen Vierecks allein, sich eine Eintheilung der krystallographischen Complexe nach symmetrischen Eigenschaften mit aller Strenge durchführen lässt, und dass die so aufgestellten Gruppen eben dieselben sind wie die Krystallsysteme des ersten Theiles.

Diese Aufstellung der Krystallsysteme, unabhängig von den krystallographischen Symmetrieclassen, scheint uns von der grössten theoretischen Wichtigkeit zu sein. Hierdurch wird die geometrische Krystallographie im engeren Sinne, d. h. die mathematische Lehre von dem aus dem Zonengesetz fliessenden krystallographischen Complex, von der Kenntniss der Krystallclassen auch unabhängig, sie kann letztere sogar ignoriren. Es genügt, die Resultate der allgemeinen geometrischen Krystallographie auf sechs Complexe anzuwenden, deren jedem eines unter den sechs verschieden symmetrischen Doppelvierecke zu Grunde gelegt wird.

Dadurch erhalten jene Resultate und die bezüglichen Formeln gewisse, im tesseralen System am weitesten gehende Vereinfachungen, welche gerade den besonderen Gegenstand der speciellen geometrischen Krystallographie ausmachen, und damit hat die geometrische Krystallographie im engeren Sinne ihren Gegenstand erschöpft. Alles Übrige, wie Aufstellung der Krystallclassen, Beschreibung von deren einfachen Formen etc., ist Aufgabe der physikalischen Krystallographie (Wachsthums- und Auflösungseigenschaften), wird aber zweckmässigerweise im Anschluss an die geometrische Krystallographie behandelt.

Dem eben berührten Umstand betreffs der Zugehörigkeit der geometrischen Symmetrielehre zur physikalischen Krystallographie ist schon von Th. Liebisch in seinem Werk (Physikalische Krystallographie. 1891) Rechnung getragen worden. Nur scheint es dort an einem allgemeinen Princip zu fehlen, nach welchem die Krystallclassen zu Systemen und Systemabtheilungen gruppirt wären. Wir wollen ein solches Princip völlig unabhängig von krystallographischen Betrachtungen aufzustellen versuchen, und dabei zugleich zeigen, dass immer wieder die Krystallsysteme zur Erscheinung gelangen.

Es handelt sich zunächst darum, eine einheitliche Auffassung der Symmetrieelemente zu gewinnen.

Auf die Definition von symmetrischen Figuren, wonach dieselben sich selbst auf mehr als eine Art gleich und ähnlich sind, mögen sie dabei congruent sein oder nicht, hat Möbius seine eigenthümliche Methode der Symmetriegleichungen begründet. Ohne auf die Vorzüge und Leistungen dieser Methode hier weiter einzugehen, ist es doch unverkennbar, dass in den fünf ersten Capiteln der Möbius'schen Abhandlung: Theorie der symmetrischen Figuren, II (Gesam. Werke. 2. 561) sich die rein geometrischen Sätze entwickelt finden, aus denen man, nach kinematischer Auffassung, die möglichen Symmetrieelemente und elementaren

Symmetrieoperationen ableiten kann. Dem krystallographischen Gegenstand entsprechend, denken wir uns die Figuren aus Punkten einer Kugelfläche gebildet, welche immer als die sphärischen Schnitte der durch den Kugelmittelpunkt gezogenen Normalen der Flächen eines Polyëders angesehen werden können.

Wir können dann die Möbius'schen Sätze folgendermaassen übersetzen und zusammenfassen:

I. Die Punkte können zu zwei einander zugeordnet sein. Daraus fliesst die zweizählige Symmetrie im Allgemeinen, welche dreierlei Art ist: 1. Symmetrie gegen einen Punkt, dem in seiner Art einzigen Kugelmittelpunkt (Centrum der Symmetrie); 2. Symmetrie gegen eine Gerade, einen Kugeldurchmesser (zweizählige Drehungsaxe); 3. Symmetrie gegen eine Ebene, eine Diametralebene der Kugel (Symmetrieebene). Je zwei zugeordnete Punkte befinden sich im ersten Fall an den beiden Enden eines Kugeldurchmessers, im zweiten an den Enden einer die Drehungsaxe rechtwinkelig schneidenden Sehne, im dritten an den Enden einer zur Symmetrieebene normalen Sehne.

II. Die Punkte können zu 3, 5 etc. allgemein zu $(2\,m + 1)$ einander zugeordnet sein, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet. Daraus fliesst die ungeradzählige Drehungsaxe, welche die gemeinschaftliche geometrische Axe[1] der von den Punktzuordnungen gebildeten, Kleinkreisen einschreibbaren, regulären sphärischen $(2\,m + 1)$-Ecke ist. Die ungeradzählige Symmetrie ist von einer einzigen Art und hat, wie gesagt, eine reine Drehungsaxe als kinematisches Darstellungsmittel.

III. Die Punkte der Kugelfläche können zu 4, 8, 12 allgemein zu $(2^2 m)$ einander zugeordnet sein. Die Pole jeder Zuordnung besetzen die Ecken eines regulären sphärischen $(2^2 m)$-Ecks, und sämmtliche so gebildete Polygone besitzen denselben Kugeldurchmesser als geometrische Axe.

---

[1] Unter geometrischer Axe wird hier diejenige Gerade verstanden, welche die von allen Ecken des regulären Polygons gleich entfernten Punkte verbindet. Ist das Polygon uneben, so ist dessen orthogonale Projection auf die Mittelebene in Betracht zu ziehen.

Ein reguläres sphärisches $(2^2 m)$-Eck kann aber von zweierlei Art sein; entweder liegen seine sämmtlichen Ecken in einer Ebene, das Polygon ist einem Kleinkreise einschreibbar, oder die Ecken liegen abwechselnd in zwei Ebenen, welche unter sich und einer von beiden Ebenen gleich entfernten Diametralebene parallel sind. Im ersten Fall hat die Figur in ihrer gemeinschaftlichen geometrischen Axe eine $(2^2 m)$-zählige Drehungsaxe, im zweiten ist die, zur Mittelebene normale, geometrische Axe eine $(2^2 m)$-zählige zusammengesetzte oder besser Deformations-Drehungsaxe, indem durch eine kleinste Drehung von $2\pi/2^2 m$, verbunden mit der Inversion gegen das Kugelcentrum oder der Spiegelung gegen die Mittelebene, die von der Selbstgleichheit angedeutete Deckung zu Stande kommt. Die Inversion ebenso wie die Spiegelung dürfen als reine Dilatationen mit negativem Coëfficient $(-2)$, also unphysisch, angesehen werden. Daher die Bezeichnung Deformations-Drehungsaxe, wodurch zugleich ausgedrückt wird, dass in diesem Fall Inversion und Spiegelung zu demselben Resultat führen.

Es giebt also im Ganzen zwei Arten doppeltgeradzähliger Symmetrieelemente: doppeltgeradzählige Drehungsaxen und doppeltgeradzählige Deformations-Drehungsaxen.

IV. Die Punkte können endlich zu 6, 10 allgemein zu $(2[2m+1])$ einander zugeordnet sein. Wir haben wieder lauter reguläre $(2[2m+1])$-Ecke mit einem Kugeldurchmesser als gemeinschaftliche geometrische Axe, sie sind aber hier von drei verschiedenen Arten, entsprechend den zweizähligen Symmetriearten, für welche m den Werth Null erhält, und die eigentlich bei dieser Gelegenheit hätten mit behandelt werden können. Es sind dies: 1. die Polygone, welche einem Kleinkreise einschreibbar sind und eine doppeltungerad-, $(2[2m+1])$-zählige reine Drehungsaxe zum Symmetrieelement besitzen; 2. die schiefen (nicht einschreibbaren) Polygone, bei denen die durch eine Ecke gezogene, der Mittelebene normale Sehne am anderen Endpunkt keine Ecke trägt (entsprechend dem zweizähligen Symmetriecentrum wenn $m = o$ wird) und speciell durch eine doppeltungerad-, $(2[2m+1])$-zählige Spiegelungs-Drehungsaxe charakterisirt werden; 3. solche schiefe Polygone, bei denen die zur Mittelebene normalen Sehnen in ihren Kugelschnitten entweder zwei oder keinen Polygonpunkt tragen und eine doppeltungerad-, $(2[2m+1])$-zählige Inversions-Drehungsaxe haben (zweizählige Symmetrieebene für $m = 0$).

Hiernach giebt es drei Arten doppeltungeradzähliger Symmetrieelemente. Sie sind aber, im Gegensatz zu den beiden starren doppeltgeradzähligen Symmetrieaxen, zerlegbar, und zwar jedesmal in die ungeradzählige (reine) Drehungsaxe von der halben Zähligkeit $(2m+1)$ und (1.) die zweizählige Drehungsaxe von derselben Richtung, oder (2.) das Symmetriecentrum, oder (3.) die zur Axe senkrechte Symmetrieebene, je nachdem die doppeltungeradzählige Axe eine reine Drehungsaxe oder eine Spiegelungs- oder eine Inversions-Drehungsaxe ist.

Vergleichen wir nun die doppeltgeradzähligen und die doppeltungeradzähligen Deformations-Drehungsaxen miteinander, so fällt auf den ersten Blick folgende Relation auf: die doppeltgeradzählige Deformations-Drehungsaxe ist als dasjenige Symmetrieelement anzusehen, welches bei den doppeltgeradzählig symmetrischen Gebilden beides, Inversions- und Spiegelungs-Drehungsaxen der doppeltungeradzähligen Gebilde, zugleich vertritt, indem sie ebenso als Inversions- wie als Spiegelungsaxe angesehen werden kann.

Geht man aber in das Wesen der Sache etwas näher ein, so fragt es sich, ob die Symmetrieebene und das Symmetriecentrum als zweizählige, also als doppeltungeradzählige Elemente nicht durch Axen irgend einer der angeführten Arten ersetzt gedacht werden können und sollen, wodurch die Theorie bedeutend an Einheitlichkeit gewinnen würde. In der That stellt sich leicht heraus, dass die Symmetrieebene eine zweizählige Inversions-Drehungsaxe ist, und zwar von bestimmter, zur Spiegelungsebene normaler Richtung; das Symmetriecentrum dagegen kann zwar als zweizählige Spiegelungs-Drehungsaxe angesehen werden, diese Axe würde aber jeder beliebige Durchmesser der Kugel sein können, sie wäre der Richtung nach unbestimmt und es würde ihr somit das fundamentale Merkmal einer Symmetrieaxe fehlen.

Dieses mittelst des niedrigsten Werthes von m ($= 0$) gewonnene Resultat verallgemeinernd, werden wir forthin nur noch neben dem Symmetriecentrum reine Drehungsaxen und Inversions-Drehungsaxen als Symmetrieelemente aufnehmen. Die Symmetrieebene wird durch eine zweizählige Inversions-Drehungsaxe ersetzt, und die doppeltungeradzählige ($(2[2m+1])$-zählige) Spiegelungs-Drehungsaxe soll weiterhin als die Verbindung der ungeradzähligen Drehungsaxe von der halben Zähligkeit mit dem Centrum der Symmetrie angesehen werden. Das Centrum selbst bleibt als eigenthümliches, in seiner Art einziges Element, von den eigentlichen Symmetrieaxen ausgeschlossen, da.

Die hier empfohlene Beseitigung des bis jetzt einzig und allein angenommenen Begriffes der Spiegelungs-Drehungsaxe, welche für $m = 0$, resp. $(2[2m+1]) = 2$ keine Axe von bestimmter Richtung mehr wäre, und die Ersetzung desselben durch denjenigen der Inversions-Drehungsaxe scheint uns eine Folge von streng durchgeführten Entwickelungen und bringt Einfachheit und Ordnung in die Sache.

Wir dürfen zunächst, da wir jetzt nur einer Art von Deformations-Drehungsaxen Existenzberechtigung zuschreiben, die umständliche Bezeichnung „Inversions-Drehungsaxe“ beseitigen. Wir wissen, dass eine eine Deformations-Drehungsaxe darstellende Möbius'sche Symmetriegleichung die Gleichheit von zwei mit verschiedenen Vorzeichen behafteten Gliedern anzeigt, entsprechend der Thatsache, dass die zur Deckung zu bringenden Figuren von entgegengesetztem Sinn sind und deshalb durch die charakteristische Axenoperation nicht physisch zur Deckung gebracht werden können. Damit in Übereinstimmung werden wir die reinen Drehungsaxen, positive Symmetrieaxen oder Axen schlechthin, die Inversions-Drehungsaxen dagegen negative Axen nennen.

Zugleich gestaltet sich die Eintheilung der 32 krystallographischen Symmetrieclassen sehr einfach nach dem Princip von der Anzahl der Axenrichtungen von der höchsten unzerlegbaren Zähligkeit. Die Definition von Symmetriesystem, sei es ein krystallographisches oder nicht krystallographisches, lautet hiernach: Symmetriesystem ist der Inbegriff all derjenigen Symmetrieclassen, welche ein und dieselbe Anzahl Richtungen von Symmetrieaxen mit der höchsten unzerlegbaren Zähligkeit besitzen. Auf Grund dieser Definition lassen sich folgende krystallographische Symmetriesysteme unterscheiden, welche identisch mit den Krystallsystemen sind:

1. Triklines System. Keine Axe vorhanden; eine Classe ohne jegliche Symmetrie und eine mit dem Symmetriecentrum.
2. Monoklines System. Eine einzige Richtung zweizähliger Axen; letztere ist: a) positiv, b) negativ (Symmetrieebene), c) beides zugleich.
3. Rhombisches System. Drei orthogonale Richtungen zweizähliger Axen, wobei entweder: a) alle drei positiv, oder b) eine positiv, die beiden anderen negativ, oder c) alle drei zugleich positiv und negativ sind.
4. Trigonales System (auch rhomboëdrisches und hexagonales System, doch weniger geeignet). Eine einzige Richtung dreizähliger Axen. Hier lassen sich folgende Unterabtheilungen unterscheiden:

   $\alpha$) Trigonale Abtheilung oder Hauptabtheilung; in die Richtung der dreizähligen Axe fällt keine weitere (zweizählige) Axe. Es ist dies das von manchen Autoren mit gewissem Recht aufgestellte fünfclassige rhomboëdrische System, bestehend aus der rhomboëdrischen Hemiëdrie, der rhomboëdrischen, trapezoëdrischen und pyramidalen (oder besser gonoëdrischen) Tetartoëdrie und der Ogdoëdrie des üblichen hexagonalen Systems.

   $\beta$) Positive hexagonale oder einfach hexagonale Abtheilung; in die Richtung der dreizähligen Axe fällt auch eine positive zweizählige Axe. Es ist dies die übliche voll hexagonale Abtheilung des hexagonalen Systems, mit fünf Classen, deren jede eine sechszählige Drehungsaxe (positive sechszählige Axe) besitzt.

   $\gamma$) Negative hexagonale oder sphenoidische Abtheilung; in die Richtung der dreizähligen Axe fällt noch eine negative zweizählige Axe (normale Symmetrieebene). Die Hauptaxe wird zu einer negativen sechszähligen Axe (sechszählige Inversions-Drehungsaxe). Es ist die übliche zweiclassige sphenoidische Abtheilung des hexagonalen Systems.

5. Tetragonales System. Eine einzige Richtung vierzähliger Axen. Zerfällt in zwei Abtheilungen:
   $\beta$) Positive tetragonale oder einfach tetragonale Abtheilung; fünfclassig wie üblich.
   $\gamma$) Negative tetragonale oder sphenoidische Abtheilung; zweiclassig.
6. Tesserales System. Vier Richtungen dreizähliger Axen. Fünfclassig.

Es ergeben sich hier, wie wir sehen, ganz dieselben Systeme wie bei der krystallographischen Methode mittelst der fundamentalen Vierecke. Es ist auch einleuchtend, wie sich die unendlich vielen, nicht krystallographischen, diëdrischen Symmetriesysteme zusammensetzen, zu denen nur noch das ikosaëdrische hinzukommt.

Insbesondere stellt sich auch hier die rhomboëdrische Symmetrie als die für ein System charakteristische heraus.

Lehrreich ist unter anderem der Vergleich des trigonalen Systems mit dem tetragonalen und dem tesseralen. Mit der trigonalen oder Hauptabtheilung des trigonalen Systems lässt sich das tesserale vollkommen parallelisiren, jeder Classe der ersteren entspricht eine Classe des letzteren; in beiden ist die Richtung einer dreizähligen Axe weder Richtung einer positiven, noch einer negativen zweizähligen Axe (Normale einer Symmetrieebene). Ebenso lassen sich die zwei Abtheilungen $\beta$) und $\gamma$) des trigonalen Systems mit den gleichnamigen Abtheilungen des tetragonalen Systems Classe für Classe parallelisiren.

Jede andere als die hier auseinandergesetzte Bildung der Symmetriesysteme dürfte einer sicheren theoretischen Grundlage entbehren, und es hat die vorliegende gerade den Vorzug, die krystallographisch möglichen Symmetriesysteme mit den früher abgeleiteten Krystallsystemen identisch zu machen.

Anmerkung I. Die Bezeichnung sphenoidisch passt nicht gut für die zwei Classen, welche neben einer dreizähligen auch eine zweizählige negative Axe von derselben Richtung besitzen.

Die Gruppen- und Abtheilungsbezeichnungen werden entweder von der Polyedergestalt selbst (z. B. sphenoidisch) oder von der Flächengestalt (z. B. trapezoëdrisch) abgeleitet. Benutzen wir letztere Ableitungsweise, so dürfen wir für jene zwei Classen das Adjectivum isoskeloëdrisch (isoskeloëdrische Hemiëdrie und Tetartoëdrie) wegen der die charakteristische Form zusammensetzenden gleichschenkeligen Dreiecke vorschlagen. Will man die Analogie der quadratischen Gruppen mit negativer Hauptaxe mit den eben genannten zwei Gruppen, und zugleich die fundamentale Verschiedenheit des quadratischen Sphenoids von dem rhombischen hervortreten lassen, so kann man auch im tetragonalen System sphenoidisch durch isoskeloëdrisch ersetzen, ja Sphenoid durch Isoskeloëder. Letztere Bezeichnung wäre eigentlich auf manche andere Formen, besonders auf gewisse Bipyramiden im Princip anwendbar, man benützt aber auch Skalenoëder (aus ungleichseitigen Dreiecken begrenztes Polyeder) einseitig, indem eine solche Bezeichnung im Princip ebenso gut auf die Bipyramiden der Holoëdrien, wie auf die üblichen Skalenoëder passt.

Anmerkung II. Praktisch könnte man die trigonale (rhomboëdrische) Abtheilung des trigonalen Systems von den hexagonalen Abtheilungen trennen, da jener Abtheilung ein krystallographisches Bezugssystem (das rhomboëdrische, bestehend aus den drei Flächenrichtungen eines Rhomboëders und der Basis) zukommt, welches für letztere Abtheilungen kein solches ist. Dem steht die besondere rhomboëdrische Symbolik von Naumann zur Seite.

Dadurch, dass der Winkel des Bezugsrhomboëders 90° erreicht, geht dieses Bezugssystem in das tesserale über, in Übereinstimmung mit der Analogie zwischen rhomboëdrischer Abtheilung und tesseralem System.

Das rhomboëdrische Bezugssystem lässt sich natürlich nicht auf die sphenoidischen Classen anwenden, da letztere dieselben allgemeinen Richtungen gleichwerthiger Flächen besitzen wie diejenigen, welche eine sechszählige reine Drehungsaxe haben. Es dürfte kaum einen Vorzug haben, die rhomboëdrische Abtheilung, auf Grund dieses ihres Bezugssystems, von den beiden übrigen Abtheilungen des Systems zu trennen. Im Gegentheil wird die Behandlung an Einfachheit und Einheitlichkeit gewinnen, wenn man sämmtlichen zwölf Classen das Bravais'sche Bezugssystem zu Grunde legt und bei rechnerischen Aufgaben einfach eine Basalaxe ausschliesst.

October 1900.