Beitrag zur Lehre von der Spaltbarkeit der Krystalle.

Von

C. Viola in Rom.

Bekanntlich verhalten sich die elastischen Constanten in einem homogenen Zustande derart, dass nur gewisse Symmetrieelemente auftreten können. Solche sind das Centrum, die Symmetrieebenen, die 2-, 3- und 4-zähligen Symmetrieaxen und die Axe der Isotropie. Das Symmetriecentrum ist nothwendig und kann allein auftreten; die übrigen Symmetrieelemente hängen miteinander zusammen. Die möglichen daraus sich ergebenden Symmetrien sind 9, wie Minnigerode [1] zuerst bewiesen hat. Bei den Krystallen rechnet man 11 Symmetrien mit dem Symmetriecentrum. Die zwei Symmetrien, welche bei den elastischen Erscheinungen nicht zu Tage treten, gehören eine dem System mit der 6-zähligen Axe und die zweite dem System mit vier 3-zähligen Axen an.

Ich möchte mir erlauben zu beweisen, dass auch die Erscheinungen der Cohäsion oder vielmehr der Spaltbarkeit nur 9 Symmetrieabtheilungen zulassen.

Wir wissen, dass die elastischen Erscheinungen im Allgemeinen an 21 Coëfficienten gebunden sind, welche auf ein orthogonales System bezogen werden können. Insofern als die drei Axen des orthogonalen Systems in Bezug auf die Symmetrieaxen eine symmetrische Lage annehmen können,

---

[1] B. Minnigerode, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen. 1884. p. 195, 378, 488; auch Th. Liebisch, Physik. Krystallogr. Leipzig 1891. p. 545 ff.

reduciren sich die unabhängigen Elasticitätscoëfficienten auf eine kleinere Anzahl als 21. Sobald die Symmetrieaxe 2-, 3- und 4-zählig ist, behält das orthogonale System eine symmetrische Lage in Bezug auf die Symmetrieaxe; irgend eine andere Zähligkeit der Symmetrieaxe steht im Widerspruch mit der Symmetrie eines orthogonalen Systems, und sie kann infolgedessen bei den elastischen Erscheinungen nicht vorkommen. So ist ausser den 2-, 3- und 4-zähligen Axen nur noch eine Axe der Isotropie möglich.

Um die Spaltbarkeit zu untersuchen und zu messen, müssen wir die Schubkräfte berücksichtigen, welche parallel einer Spaltungsfläche wirken und die Spaltung hervorrufen. Die Spaltungsfläche sei durch die Winkel festgestellt, welche ihre Normale mit den Axen des Coordinatensystems einschliesst. Die Cosinuse dieser Winkel seien $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$. Senkrecht zu der Richtung $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ (oder parallel der Spaltungsfläche) wirken zwei Schubkräfte von der Grösse T pro Flächeneinheit. Die Richtungen dieser Kräfte bilden mit den Coordinatenaxen x y z Winkel, deren Cosinuse beziehungsweise folgende sind: $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3$ und $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$, wobei $\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0$ ist.

Solange die Tangentialkräfte von der Grösse T die Elasticitätsgrenze nicht überschreiten, werden sie in der genannten Spaltungsfläche eine gewisse Deformation τ hervorbringen, welche durch die 21 Elasticitätscoëfficienten, die wir mit $s_{11}\, s_{12}\, s_{13} \ldots s_{65}\, s_{66}$ bezeichnen, dargestellt werden kann. Ich mache auf folgende lineare Beziehungen, welche zwischen den Deformationen $x_x\, y_y\, z_z \ldots x_y$ und den entsprechenden Kräften $X_x\, Y_y \ldots X_y$ bestehen, aufmerksam:

$$
1) \qquad \left\{ \begin{array}{l}
x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + \ldots + s_{16} X_y \\
y_y = s_{21} X_x + s_{22} Y_y + \ldots + s_{26} X_y \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_y = s_{61} X_x + s_{62} Y_y + \ldots + s_{66} X_y
\end{array} \right.
$$

Wie gesagt, beziehen sich diese elementaren Deformationen und die bezüglichen elastischen Kräfte auf ein rechtwinkeliges Axensystem x y z.

Aus dem Krystall wird ein Parallelopipedon mit den Richtungen $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$, $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3$ und $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$ herausgeschnitten. Die Beanspruchung auf den Seiten dieses Parallelopipedons besteht nur in den zwei Schubkräften von der Grösse T. Aus dieser

Wirkung entstehen Deformationen und innere elastische Kräfte, von denen wir jene berücksichtigen wollen, welche auf die zu x, y, z senkrechten Ebenen wirken. Ihre Grössen, bezogen auf die Flächeneinheit, werden folgendermaassen ausgedrückt sein.

$$2)\quad \begin{cases} X_x = 2\beta_1\gamma_1 \,.\, T, & Y_z = (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)\,T, \\ Y_y = 2\beta_2\gamma_2 \,.\, T, & Z_x = (\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3)\,T, \\ Z_z = 2\beta_3\gamma_3 \,.\, T, & X_y = (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)\,T. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die entsprechenden elementaren Deformationen:

$$3)\quad \begin{cases} x_x = [s_{11}a_{11} + s_{12}a_{12} + s_{13}a_{13} + s_{14}a_{14} + s_{15}a_{15} + s_{16}a_{16}]\,T, \\ y_y = [s_{21}a_{11} + s_{22}a_{12} + s_{23}a_{13} + s_{24}a_{14} + s_{25}a_{15} + s_{26}a_{16}]\,T, \\ z_z = [s_{31}a_{11} + s_{32}a_{12} + s_{33}a_{13} + s_{34}a_{14} + s_{35}a_{15} + s_{36}a_{16}]\,T, \\ y_z = [s_{41}a_{11} + s_{42}a_{12} + s_{43}a_{13} + s_{44}a_{14} + s_{45}a_{15} + s_{46}a_{16}]\,T, \\ z_x = [s_{51}a_{11} + s_{52}a_{12} + s_{53}a_{13} + s_{54}a_{14} + s_{55}a_{15} + s_{56}a_{16}]\,T, \\ x_y = [s_{61}a_{11} + s_{62}a_{12} + s_{63}a_{13} + s_{64}a_{14} + s_{65}a_{15} + s_{66}a_{16}]\,T; \end{cases}$$

worin der Einfachheit halber

$$4)\quad \begin{cases} a_{11} = 2\beta_1\gamma_1, & a_{14} = \beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2 \\ a_{12} = 2\beta_2\gamma_2, & a_{15} = \beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3 \\ a_{13} = 2\beta_3\gamma_3, & a_{16} = \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Analog können wir auch die Deformation parallel der betrachteten Spaltungsfläche, τ, durch die Deformationen $x_x\, y_y \ldots x_y$ ausdrücken. Die bekannte hier angewendete Transformation giebt folgendes[1]:

$$\tau = a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y.$$

Substituirt man hier die in 3) angegebenen Grössen, so erhalten wir das Verhältniss:

$$5)\quad \begin{aligned} \frac{\tau}{T} = s_{11}a_{11}^2 &+ 2s_{12}a_{11}a_{12} + 2s_{13}a_{11}a_{13} + 2s_{14}a_{11}a_{14} + 2s_{15}a_{11}a_{15} + 2s_{16}a_{11}a_{16} \\ &+ s_{22}a_{12}^2 \quad + 2s_{23}a_{12}a_{13} + 2s_{24}a_{12}a_{14} + 2s_{25}a_{12}a_{15} + 2s_{26}a_{12}a_{16} \\ &\qquad\qquad\quad + s_{33}a_{13}^2 \quad + 2s_{34}a_{13}a_{14} + 2s_{35}a_{13}a_{15} + 2s_{36}a_{13}a_{16} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + s_{44}a_{14}^2 \quad + 2s_{45}a_{14}a_{15} + 2s_{46}a_{14}a_{16} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + s_{55}a_{15}^2 \quad + 2s_{56}a_{15}a_{16} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + s_{66}a_{16}^2 \end{aligned}$$

Es ist dies der elastische Schubcoëfficient für eine bestimmte durch $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ gegebene Fläche und für eine bestimmte Richtung der Schubkraft.

---

[1] Cr. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris 1866. p. 46.

Dieser Schubcoëfficient kann als constant angesehen werden, wenn die Schubkraft eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Für eine grössere Beanspruchung werden die Coëfficienten s_{11}, $s_{12} \dots s_{66}$ andere Grössen erhalten, und folglich wird auch der Schubcoëfficient $\frac{\tau}{T}$ verschieden. Das kann nur durch Erfahrung bestimmt werden. Solange die Schubkraft T keinen Bruch längs der betrachteten Fläche $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$ hervorruft, können die Gesetze der Elasticität gelten, und als Form für den Schubcoëffiicienten kann die in 5) angegebene gerechtfertigt sein. Nur müssen wir bei der Elasticitätsgrenze, oder vielmehr bei der Grenze, wo der Riss, d. h. die Spaltung, eintreten muss, andere Coëfficienten einführen, wie z. B. s_{11}', $s_{12}' \dots s_{66}'$. Wir werden daher den Bruch längs der gegebenen Fläche $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$ entweder dadurch hervorbringen, dass wir parallel der betrachteten Fläche die zwei Schubkräfte der Grösse T' anbringen, oder indem wir auf die zu x y z senkrechten Flächen Kräfte wirken lassen, welche durch 2) bestimmt sind. Der Riss wird genau dann eintreten, wenn zwischen der Schubkraft T' und der gehörigen Deformation τ' ein solches Verhältniss besteht, wie das in 5) angegebene, oder indem die Elasticitätscoëfficienten s_{11}', s_{12}', $s_{13}' \dots s_{66}'$ gelten.

Ist eine Symmetrie vorhanden, so liegen mehrere gleichwerthige Flächen vor, längs welcher die Spaltbarkeit unter denselben Bedingungen eintreten muss, wie sie nur längs einer derselben eintritt. Also wenn längs einer Fläche $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$ durch die in 2) angegebenen Kräfte die Schiebung oder Spaltung eintreten wird, so muss die Spaltung längs den zu der gegebenen Fläche gleichwerthigen Flächen ebenfalls eintreten und zwar entweder gleichzeitig, oder indem man die Beanspruchungen in dem Coordinatensystem symmetrisch vertauscht.

Das gilt im Allgemeinen; wir wollen jetzt zu den speciellen Fällen übergehen. Für alle Fälle muss das Symmetriecentrum immer vorhanden sein.

1. Zuerst sei bei den elastischen Erscheinungen nur das Symmetriecentrum vorhanden. Unter dieser Bedingung liegen 21 unabhängige Elasticitätscoëfficienten vor. In diesem Fall können die Coordinatenaxen x, y, z nicht unter sich gleich-

werthig sein; auch kann der Sinn derselben nur so vertauscht werden, dass bei allen drei Axen die nämliche Vertauschung gleichzeitig vor sich geht; daraus ist zu schliessen, dass eine Spaltungsfläche keine andere gleichwerthige haben darf.

Wir gehen jetzt zu den Fällen über, wo eine höhere Symmetrie vorliegt. Da das Symmetriecentrum immer vorhanden sein muss, so brauchen wir nur einige Symmetrieelemente zu erwähnen, um die Symmetrie des homogenen Zustandes zu charakterisiren, da die übrigen Symmetrieelemente mit denselben gleichzeitig bedingt sind.

2. Eine 2-zählige Symmetrieaxe ist allein vorhanden. Die elastischen Erscheinungen sind, wenn eine solche Symmetrie auftritt, durch 13 unabhängige Coëfficienten bestimmt. Legt man eine Axe des Coordinatensystems, z. B. die Axe y, in die 2-zählige Symmetrieaxe, so ist die Vertauschung

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \bar{x} & y & \bar{z} \end{pmatrix}$$

möglich. Eine ebensolche Vertauschung nehmen wir in der Beanspruchung vor; dann geht die Spaltungsfläche, wo die Schubkraft T′ wirkt, in eine solche, welche durch Drehung um 180^0 um die Axe y entsteht, über. Also zeigt in allen solchen elastischen Symmetrien, welche nur durch eine 2-zählige Symmetrieaxe charakterisirt sind, die Spaltbarkeit ebenfalls eine 2-zählige Axe und sonst keine weitere Symmetrie. Die Spaltungsform ist also im Allgemeinen prismatisch.

3. Die elastischen Erscheinungen zeigen drei aufeinander senkrechte 2-zählige Symmetrieaxen. Die Elasticitätscoëfficienten, welche von einander unabhängig sind, reduciren sich auf 9. Man versetzt am besten die x, y und z-Axen in die drei Symmetrieaxen. Die hier möglichen Vertauschungen der Coordinatenaxen sind:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ \bar{x} & y & \bar{z} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x & y & z \\ \bar{x} & \bar{y} & z \end{pmatrix}.$$

Bringen wir diese Vertauschungen in den beanspruchenden Kräften an, so entstehen aus einer Spaltungsfläche drei neue gleichwerthige, welche mit derselben im Allgemeinen eine rhombische Pyramide bilden. Also ist auch hier die Spaltbarkeit in Bezug auf drei orthogonale 2-zählige Symmetrieaxen symmetrisch, genau so wie die elastischen Erscheinungen.

4. Die elastischen Erscheinungen zeigen eine 4-zählige Symmetrieaxe. Hier sind nur zwei Fälle möglich, nämlich entweder ist die 4-zählige Axe allein vorhanden, oder sie ist an vier 2-zählige Axen gebunden. In beiden Fällen wird die Lage einer der Coordinatenaxen, z. B. der z-Axe, in die 4-zählige Axe verlegt.

Im ersten Falle reduciren sich die Elasticitätsconstanten auf 7. Die mögliche Vertauschung der Coordinatenaxen ist

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \bar{y} & x & z \end{pmatrix},$$

da x und y gleichwerthig sind. Wir brauchen nur die wirkenden Kräfte genau so zu vertauschen, um alle möglichen gleichwerthigen Spaltungsflächen zu erhalten; die Form derselben ist also im Allgemeinen eine quadratisch-pyramidale.

5. Im zweiten Falle der 4-zähligen Symmetrieaxe treten noch 2-zählige Symmetrieaxen hinzu, und die unabhängigen Elasticitätscoëfficienten reduciren sich auf 6. Man kann der Einfachheit halber die Axen x und y mit den 2-zähligen Symmetrieaxen zusammenfallen lassen. Dann sind die möglichen Vertauschungen so ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \bar{y} & x & z \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}.$$

Im Allgemeinen ist also hier die Spaltungsform eine diquadratische, so wie sie die vollständige Symmetrie bei den elastischen Erscheinungen bestimmt.

6. Die 3-zählige Symmetrieaxe liefert uns drei verschiedene Symmetrien, welche durch die elastischen Erscheinungen auseinandergehalten werden können. Die 3-zählige Axe kann nämlich entweder allein bestehen, oder gleichzeitig mit drei 2-zähligen Axen, oder endlich mit drei 3-zähligen Axen. Wir können beweisen, dass eben solche Symmetrien auch bei den Spaltungserscheinungen möglich sind, und zwar allein möglich.

Ist nur die 3-zählige Symmetrieaxe vorhanden, so ist nur eine cyclische Vertauschung möglich

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

falls die Symmetrieaxe denselben Winkel mit den Coordinatenaxen einschliesst. Dadurch erhält die Spaltbarkeit eine 3-zählige Axe, und ihre allgemeine Form ist die rhomboëdrische.

7. Im Falle, dass die 3-zählige Symmetrieaxe mit drei 2-zähligen Symmetrieaxen verbunden ist, tritt bei der Spaltbarkeit dieselbe scalenoëdrische Symmetrie ein, wie sie bei den elastischen Erscheinungen vorhanden ist. Die Anzahl der Elasticitätscoëfficienten ist hier 7.

8. Der dritte Fall mit der 3-zähligen Axe besteht, wie gesagt, in dem gleichzeitigen Auftreten von vier 3-zähligen Symmetrieaxen. Dieselben sind die Diagonalen eines Würfels. Die elastischen Erscheinungen lassen nur eine Möglichkeit zu, nämlich die, dass die unabhängigen Elasticitätscoëfficienten 3 sind.

Verlege man die Coordinatenaxen x, y, z in die drei Kanten des Würfels, so sind die x, y, z untereinander gleichwerthig, und sie können daher beliebig untereinander vertauscht werden; dadurch entstehen eben die drei unabhängigen Coëfficienten.

Die höchste bei den elastischen Erscheinungen vorkommende Symmetrie wird natürlich auch bei der Spaltbarkeit auftreten müssen; um das darzuthun, brauchen wir nur alle möglichen Vertauschungen vorzunehmen.

Man könnte sich nun fragen, ob ausser dieser elastischen Symmetrie noch eine zweite bei der Spaltbarkeit möglich sein kann. Diese zweite Symmetrie, welche bei den Krystallen beobachtet wird, ist die dodekaëdrisch-pentagonale.

Denke man sich, eine Spaltungsfläche sei einer Fläche des Pentagondodekaëders parallel. Um die genannte Spaltung hervorzurufen, wird eine gewisse Schubkraft T′ nothwendig sein, wobei eine gewisse tangentielle Deformation τ' bis zur Grenze des Risses erfolgen wird. Das Verhältniss desselben geht aus dem allgemeinen Ausdruck 5) hervor:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{\tau'}{T'} = s_{11}'(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) + 2\,s_{12}'(a_{11}a_{12} + a_{12}a_{13} + a_{13}a_{11}) \\ \qquad\qquad + s_{44}'(a_{14}^2 + a_{15}^2 + a_{16}^2). \end{cases}$$

Die Schubkraft T′, welche die Grenze der Elasticität angiebt, wird auch durch elementare Kräfte X_x' Y_y' . . . . X_y' hervorgebracht, welche die in 2) angegebene Form erhalten.

Vertauschen wir nun das Coordinatensystem wie die Symmetrieverhältnisse verlangen, so entstehen die Schubkräfte von der Grösse T′ nach und nach parallel allen Flächen des Pentagondodekaëders; und da diese untereinander gleichwerthig sind, so wird nach denselben die Schubkraft T′ die Spaltung genau hervorbringen. Die möglichen Vertauschungen sind folgende:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x' & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

Das ist also ein nothwendiges Resultat. Fügen wir noch die Vertauschung

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$$

hinzu, so gelangen wir zur oktaëdrischen Symmetrie; d. h. durch eine solche Vertauschung werden die Flächen des II Pentagondodekaëders erhalten, und die auf diesen Flächen wirkenden Schubkräfte werden genau von der Grösse T′ sein. Nun sind aber X_x' Y_y' .... X_y' die Grenzen der möglichen wirkenden Kräfte, für welche die Coëfficienten s_{11}'. s_{12}' und s_{44}' gelten, also ist auch T′ eine solche, und folglich wird die Schubkraft von der Grösse T′ die Spaltung nach einer Fläche des II Pentagondodekaëders ebenso hervorrufen, wie sie unter den gleichen Verhältnissen die Spaltung nach den Flächen des I Pentagondodekaëders erzeugt.

Wir schliessen daraus, dass die einzige Symmetrie mit vier 3-zähligen Axen, welche bei den elastischen Erscheinungen möglich ist, auch bei der Spaltbarkeit die einzig mögliche ist, und die pentagonaldodekaëdrische Symmetrie wird daher bei der Spaltbarkeit nicht auftreten dürfen.

9. Ausser der acht hier erwähnten möglichen Symmetrien, nach welchen die elastischen Erscheinungen in einem homogenen Zustande vor sich gehen können, tritt noch der Fall auf, dass keine Symmetrieaxe vorkommt, wohl aber eine Axe der elastischen Isotropie. Man gelangt dazu, indem man den Ausdruck der Potentialfunction der elastischen Kräfte betrachtet, wie eben zuerst Minnigerode gezeigt hat. Der genannte Ausdruck erfährt keine Änderung für eine Drehung des Coordinatensystems um 60°, wenn alle Richtungen, welche denselben Winkel mit der Symmetrieaxe einschliessen, untereinander elastisch gleichwerthig sind.

Man kommt aber zu demselben Ziele durch folgende Überlegung. Man lege die z-Axe des Coordinatensystems in diese Axe der elastischen Isotropie. Die unabhängigen Elasticitätscoëfficienten reduciren sich auf 5.

Das Verhältniss der tangentiellen Deformation der sie hervorbringenden Schubkraft ist für irgend welche gegebene Ebene folgendes:

$$\frac{\tau}{T} = s_{11}\left[a_{11}^2 + a_{12}^2 + \frac{a_{16}^2}{2}\right] + s_{12}\left[2\,a_{11}\,a_{12} - \frac{a_{16}^2}{2}\right]$$
$$+ 2\,s_{13}\,(a_{11} + a_{12})\,a_{13} + s_{33}\,a_{13}^2 + s_{44}\,(a_{13}^2 + a_{15}^2).$$

Um T hervorzurufen, brauchen wir gewisse Kräfte X_x, $Y_y \ldots . X_y$ auf die zu x, y, z senkrechten Ebenen wirken zu lassen, welche die in 2) gegebenen Grössen haben müssen.

Erfolgt die Drehung dieser beanspruchenden Kräfte um 60^0 um die 6-zählige Axe, so kann die neue Lage der wirkenden Kräfte nicht die Schubkraft T hervorbringen, falls nicht gleichzeitig das Coordinatensystem x y z um ebensoviel gedreht wird, was geschehen sollte, wenn eine 6-zählige Symmetrieaxe wirklich vorläge. Dasselbe würde man erhalten, wenn anstatt einer 6-zähligen irgendwelche n-zählige Axe gegeben wäre. Man schliesst daraus, dass ausser der 2-, 3- und 4-zähligen Symmetrieaxe nur noch eine Axe der Isotropie bei den elastischen Erscheinungen möglich ist.

Denselben Weg können wir einschlagen, um die Symmetrie der zulässigen Spaltbarkeit zu bestimmen.

Wir nehmen an, die Kräfte X_x' $Y_y' \ldots . X_y'$ bringen eine Schubkraft T' auf einer gewissen Fläche hervor, welche die Grenze der Elasticität angiebt, über welche hinaus der Bruch eintreten muss.

Die Beziehung zwischen dieser Schubkraft T' und der ihr angehörenden Deformation ist wie vorher:

$$\frac{\tau'}{T'} = s_{11}'\left[a_{11}^2 + a_{12}^2 + \frac{a_{16}^2}{2}\right] + s_{12}'\left[2\,a_{11}\,a_{12} - \frac{a_{16}^2}{2}\right]$$
$$+ 2\,s_{13}'\,[a_{11} + a_{12}]\,a_{13} + s_{33}'\,a_{13}^2 + s_{44}'\,(a_{13}^2 + a_{15}^2).$$

Wir denken uns nun das Coordinatensystem um irgend welchen Winkel φ um die elastische Axe der Isotropie gedreht, und um ebensoviel die wirkenden Kräfte. Da nach dieser Drehung dieselben Elasticitätscoëfficienten gelten müssen, so werden wir eine ebenso grosse Schubkraft T' erhalten. Die daraus sich ergebende Schubkraft T′ wirkt auf einer Fläche, welche aus der vorhergehenden entsteht, wenn sie um den Winkel φ um die Axe der elastischen Isotropie gedreht wird. Aber auch hier wird die Schubkraft T′ die Grenze der Beanspruchung darstellen und die Spaltung hervorbringen. Denn machen wir den Versuch, die Schubkraft T′ stelle nicht die Grenze der Elasticität dar, so würden auch X_x', Y_y' . . . . X_y' keine solche sein. Folglich würden für eine andere Lage der Coordinatenaxen x und y die Elasticitätscoëfficienten andere Werthe haben als s_{11}', s_{12}', s_{13}', s_{33}' und s_{44}', was nicht sein sollte, wenn eine Axe der elastischen Isotropie wirklich existirte. Daraus folgt, dass auch für die Spaltungserscheinungen eine Axe der Isotropie existiren muss, und zwar, sobald dieselbe für die elastischen Erscheinungen vorhanden ist. Die hier gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch im Allgemeinen auf die Cohäsionsverhältnisse ausdehnen, denn wenn die Schubkraft T′ im Stande ist, einen Riss längs einer Fläche hervorzubringen, so ist nicht nothwendig zu verlangen, dass dieser Riss eine richtige Spaltung sei. Wir sehen daher, dass die fundamentalen Gesetze nicht nur der Elasticität, sondern auch der Cohäsion eine theoretische Folge des homogenen Zustandes ist, zu der die Erfahrung nichts beizutragen hat.

Zusammenfassung.

1. Die Spaltbarkeit bei den Krystallen kann nur solche Symmetrien zeigen, welche den elastischen Erscheinungen innewohnen; also sind die möglichen Symmetrien, welche bei der Spaltbarkeit überhaupt zum Vorschein kommen können, 9.

2. In der Abtheilung des hexagonalen Krystallsystems, wo eine 6-zählige Symmetrieaxe, oder eine aus der 3-zähligen Axe durch das Symmetriecentrum 6-zählig werdende, vorkommt, ist nur eine Spaltbarkeit möglich, und zwar die basische.

3. Eine 6-zählige Symmetrieaxe bei den Krystallen kann somit, wenn sie überhaupt möglich ist, durch die Ätzfiguren allein erkannt und bestimmt werden.

Beispiele.

Wir wollen die angestellten Betrachtungen und die sich ergebenden Schlüsse durch Beispiele erläutern.

In dem triklinen System krystallisiren etwa 25 gut bekannte Mineralspecies. Die Spaltbarkeit ist dabei immer pinakoidalisch, und die verschiedenen Spaltungsflächen sind untereinander stets ungleichwerthig.

Das monokline System weist ca. 220 gut bekannte Mineralspecies auf, von denen nur wenige keine Spaltbarkeit zeigen. 150 davon haben pinakoidale Spaltbarkeit (ca. 50 parallel der Symmetrieebene, 100 parallel der Symmetrieaxe) und 50 Species sind prismatisch spaltbar.

Auch das rhombische System zeigt nur die rhombisch-bipyramidale Spaltbarkeit. 122 davon haben pinakoidale und 64 die prismatische Spaltbarkeit; bei wenigen ist keine Spaltbarkeit nachgewiesen worden, und die pyramidale Spaltbarkeit kommt nur bei Geokronit und Fluellit vor.

Die zwei möglichen Symmetrien der Spaltbarkeit im tetragonalen System schmelzen in eine einzige Symmetrie zusammen. Die basische Spaltbarkeit ist nur bei 16 Mineralspecies vorhanden; 23 zeigen die quadratisch-prismatische Spaltbarkeit und 15 die tetragonal-pyramidale.

Das rhomboëdrische System, wo fünf Symmetrien (S_{03}, S_{03}^{s}, S_{23}, S_{63} und S_{63}^{s}) inbegriffen sind, tritt bei etwa 85 Mineralspecies auf, wovon 30 nach einem Rhomboëder spalten, 15 nach einem hexagonalen Prisma und die übrigen sind basisch spaltbar. Die zwei Symmetrieabtheilungen, nämlich $S_{03}\,S_{23}\,S_{63}$ und $S_{03}^{s}\,S_{63}^{s}$, welche bei den Spaltungserscheinungen möglich sein sollten, schmelzen in eine einzige Symmetrie zusammen.

Das merkwürdigste ist das hexagonale System, wo sieben Symmetrien gerechnet werden (S_{03}^{σ}, S_{23}^{s}, S_{06}, S_{06}^{σ}, S_{06}^{s}, S_{26} und S_{26}^{s}), von denen zwei (S_{03}^{σ} und S_{23}^{s}) bei den Krystallen noch nicht nachgewiesen sind. Es werden etwa 31 Mineralspecies zu dem hexagonalen System gerechnet; dazu werden noch das künstlich erhaltene metallische Magnesium und acht chemisch präparirte Salze und Doppelsalze gezählt. Von diesen 31 Mineralspecies müssen wir alle jene von dem Hexagonalsystem ausschliessen, welche prismatische oder pyramidale Spaltbarkeit zeigen, da diese mit der 6-zähligen Axe nicht verträglich sind; es sind Katapleit, Barisilit, Nephelinit, Cancrinit, Davyn, Mikrosommit, Apatit, Pyromorphit, Mimetit und Ettringit. Es bleiben also 21 übrig, deren Symmetrie aber nicht vollkommen bekannt ist. Nur die Symmetrie von Molybdänit, Jodyrit, Beryll, Vanadinit und Comelit wird als gut bestimmt angegeben. H. Vater[1] glaubt aber aus seinen Versuchen über Biegung schliessen zu müssen, dass Beryll und Apatit aus Subindividuen von niederer Symmetrie aufgebaut sein können.

Über metallisches Magnesium wissen wir, dass keine Spaltbarkeit[2] beobachtet worden ist und dass seine Symmetrie nach den Versuchen von Hlawatsch[3] die dihexagonal-bipyramidale (S^{s}_{26}) sei. Allein ich habe Gründe angegeben, weshalb die von Hlawatsch bestimmte Symmetrie des Magnesiums nicht als richtig angesehen werden kann. Das Lithiumsulfat von Kalium, Natrium, Rubidium und Ammonium ($M . LiSO_4$) soll eine hexagonale Symmetrieaxe haben und isomorphen Charakter aufweisen[4]. Von diesen vier Salzen haben die zwei ersten keine Spaltbarkeit und die zwei letzten spalten nach der Basis; ihre Spaltungseigenschaften sind daher für eine 6-zählige Symmetrieaxe günstig. Die nachgewiesene Circularpolarisation und die optischen Anomalien lassen darüber Zweifel, ob es sich um einen hexagonalen oder pseudohexagonalen Typus handelt.

Die zwei scheinbar isomorphen Doppelsalze $Pb(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2 + KNO_3$ und $Ba(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2 + KNO_3$ sollen nach Traube (dies. Jahrb. 1894. I. 245) in der hexagonal-trapezoëdrischen Symmetrie krystallisiren; allein aus den optischen Versuchen, die durch photographische Aufnahme gut wiedergegeben sind, lässt sich doch beurtheilen, dass sie aus Zwillingen von niederer Symmetrie bestehen können. Beide zeigen entweder eine basische Spaltbarkeit oder gar keine.

---

[1] H. Vater, Zeitschr. f. Kryst. **11**. 549 u. 583. Man sehe auch F. J. Wiik, Finsk. Vet. soc. Förh. 1885. p. 27.

[2] A. Des Cloizeaux, Note sur la forme cristalline du Magnesium. Bull. soc. min. franç. **3**. 1880. p. 111.

[3] C. Hlawatsch, Zeitschr. f. Kryst. **32**. 497.

[4] C. Rammelsberg, Pogg. Ann. **128**. 311. 1866. — A. Scacchi, Atti Accad. delle scienze fisiche e mat. Napoli 1868. **3**. No. 27. p. 31. — G. Wyrouboff, Bull. soc. min. franç. 1880. **3**. 198; 1883. **5**. 36; 1890. **13**. 215. — H. Traube, dies. Jahrb. 1892. II. 58 ff.; 1894. I. 171.

Es sind noch zwei Salze zu erwähnen. Das rechtsweinsaure Antimonoxyd-Strontium $Sr(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2$ wurde schon von MARIGNAC[1] als hexagonal bestimmt. Nach TRAUBE (dies. Jahrb. Beil.-Bd. VIII. 1893. 270, 273) krystallisirt es in der hexagonal-pyramidalen Classe, wie aus den Ätzfiguren zu schliessen ist, welche auf Prismenflächen erhalten worden sind. Für eine sichere Bestimmung der Symmetrie genügen wohl die Ätzfiguren auf den Prismenflächen nicht.

Die nach der Angabe von F. KESSLER[2] erhaltenen Krystalle fielen so klein aus, dass ich keine Spaltbarkeit darin erkennen konnte. DES CLOIZEAUX[3] beobachtete ein sehr schwaches Drehungsvermögen des Lichtes, was H. TRAUBE (l. c.) nicht gelungen war zu bestätigen. DES CLOIZEAUX meint, dass eine kleine Öffnung der zwei Balken im convergenten Licht ausreicht, um das Drehungsvermögen vollständig zu verwischen. Meine Präparate erlaubten mir nicht, die von DES CLOIZEAUX beobachtete Lichterscheinung zu erkennen. Die einzige Erscheinung, welche man wahrnimmt, besteht in einer sogen. optischen Anomalie. Also die Frage der Symmetrie des rechtsweinsauren Antimonoxyd-Strontiums geht in die Frage der Verzwillingung von Individuen kleinerer Symmetrie über. Dasselbe können wir auch vom rechtsweinsauren Antimonoxyd-Blei $Pb(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2$, das dem vorhergehenden isomorph zu sein scheint, sagen.

Wir schliessen aus dieser Auseinandersetzung, dass Einwendungen gegen eine 6-zählige Symmetrieaxe nur bei Molybdänit, Jodyrit, Vanadinit, Comelit und Magnesium nicht gemacht werden können, die entweder nach der Basis oder gar nicht spalten. Unbedingt sichere Bestimmungen über die Structur oder Symmetrie von Molybdänit, Jodyrit, Comelit und Magnesium sind nicht gemacht worden, und ich hoffe in dieser Richtung bald Näheres mittheilen zu können.

In dem cubischen System krystallisiren etwa 110 Mineralspecies, wovon 50 keine Spaltbarkeit zeigen. Es sind nur 25, welche nach dem Oktaëder mehr oder weniger deutlich spalten; bei etwa 30 ist die hexaëdrische Spaltbarkeit

[1] C. MARIGNAC, Annales des mines. (5.) **15**. 221. 283. 1859.

[2] F. KESSLER, Pogg. Ann. 75. 410. 1848.

[3] A. DES CLOIZEAUX, Annales des mines. (5.) **14**. 339, 354. 1858.

nachgewiesen, 8 spalten nach den Flächen des Rhombendodekaëders, nur 5 haben gemeinsame Spaltbarkeit.

Während nach der Theorie 9 Symmetrien bei der Spaltbarkeit möglich sind, kommen in der Natur nur 7 vor, wenn man die basische Spaltbarkeit als eine besondere Symmetrie auffasst, da sie zu einer Symmetrieaxe senkrecht steht. Darin liegt kein Widerspruch, da die 9 Symmetrien in den 7 enthalten sind, wo nur wegen der besonderen Lage der Spaltungsflächen zwei Symmetrien in eine vereinigt erscheinen.