Ueber die Beziehungen der Kristallpolyeder zu den regelmässigen Körpern.

Von

Ernst Sommerfeldt in Tübingen.

Mit 1 Textfigur.

In meinem Buche „Geometrische Kristallographie" habe ich zur Beschreibung der Symmetrie von Kristallpolyedern gewisse „Vergleichskörper" eingeführt, welche sämtlich zu den regelmäßigen Polygonen oder regelmäßigen (platonischen) Körpern gehören. Als regelmäßige Polygone benutzte ich dort nicht nur die ebenen Polygone (von denen das Sechs-, Vier-, Drei-, Zweieck allein kristallographisch brauchbar sind), sondern auch zwei unebene n-Ecke, welche ich als trigonotypes Sechseck und sphenoisches Quadrat bezeichnete, da sie zur Veranschaulichung der trigonotypen Gruppen des hexagonalen und der sphenoidischen Gruppen des tetragonalen Systems dienen.

Gegen die Einführung dieser unebenen Polygone wurde von F. Becke mit Recht geltend gemacht (vergl. Tschermak's Min. u. petr. Mitt. **25**. 241. 1906), daß sie keine wesentliche Erleichterung für die Anschauung im Vergleich zur Aufzählung der Symmetrieelemente selbst mit sich bringen, ich werde daher hier eine meinem früheren Gedankengang nahestehende, aber die genannten unebenen Polygone vermeidende Beschreibung der Symmetrie durch „Vergleichskörper" mitteilen.

Als Grund dafür, daß ich diese komplizierten Polygone überhaupt einführte, will ich zuvor näher auseinandersetzen, daß mittels derselben der Wahrscheinlichkeitsgrad für das Auftreten der einzelnen Symmetriegruppen sich in einer der Natur besonders entsprechenden Weise angeben läßt.

Über die Häufigkeit von Beispielen für die einzelnen Symmetriegruppen läßt sich im großen und ganzen folgendes sagen: Die Natur begünstigt die Ausbildung zentrisch-symmetrischer Kristallpolyeder in hohem Grade, denn diejenigon Gruppen unter den 32 Fällen, für welche keine sicheren Beispiele bekannt sind, ordnen sich sämtlich den azentrischen unter, auch zeigt sich dieses Bestreben darin, daß da, wo die azentrische Symmetrie durch stereochemische Gründe bedingt ist, sie dennoch häufig an der Polyedergestalt infolge des Fehlens hemiedrisch differenzierter Formen nicht unmittelbar zutage tritt, oder auch darin, daß dort, wo der Gegensatz der enantiomorphen Massenteilchen sich (wie z. B. beim Quarz) nicht bereits stereochemisch ausprägt, besonders häufig der Mangel des Symmetriezentrums auch durch die Bildung von Ergänzungszwillingen sich zu verbergen strebt.

2. Die holoedrischen Gruppen sind nicht wesentlich begünstigt vor den meroedrischen zentrischen, denn z. B. ist die rhomboedrische Hemiedrie sogar wichtiger und weit häufiger als die Holoedrie des hexagonalen Systems.

3. Unter den azentrischen Formen sind die von den eigentlichen regelmäßigen Körpern sich ableitenden (also regulären) begünstigt vor den durch regelmäßige Polygone ihrer Symmetrie nach darstellbaren (also nichtregulären) Kristallen. Hierdurch u. a. scheint der merkwürdige Gegensatz bedingt zu sein, daß die Gesamtgruppe des Tetraeders, d. h. die tetraedrische Hemiedrie, recht häufig, die Gesamtgruppe des Dreiecks, d. h. die hexagonal-trigonotype Hemiedrie, sehr selten (wenn überhaupt in der Natur vorkommend) ist. Es läßt sich das Prinzip 3 dadurch bestätigen, daß nur unter den azentrischen nichtregulären Gruppen solche, für welche bisher kein Beispiel gefunden wurde, existieren, daß die azentrischen regulären hingegen zahlreiche Repräsentanten besitzen.

4. Die Symmetrie der ebenen Polygone kann von der Natur sehr viel leichter verwirklicht werden als diejenige der

unebenen Polygone, denn die durch kein Beispiel vertretenen Fälle der hexagonalen trigonotypen Tetartoedrie und tetragonalen sphenoidischen Tetartoedrie gehören beide der (überhaupt nur drei Fälle besitzenden) Klasse jener Gruppen an, welche von den unebenen regelmäßigen n-Ecken abgeleitet wurden. Nur die letzte Gruppe dieser Klasse, nämlich die tetragonale sphenoidische Hemiedrie hindert uns daran, den Satz auszusprechen, daß Symmetriegruppen, welche unebene n-Ecke als Vergleichskörper besitzen, nicht in der Natur vorkommen.

Dieser Tatsache läuft nun ein interessanter geometrischer Unterschied parallel: Sowohl das trigonotype Sechseck als auch das sphenoidische Quadrat können wir entweder mit vertikalen, also der Hauptachse parallelen Symmetrieebenen behaften oder aber uns als frei von solchen vorstellen: Die tetragonale sphenoidische Tetartoedrie und hexagonale trigonotype Tetartoedrie sind die so entstehenden „Ursprungsgruppen“, die hexagonale trigonotype Hemiedrie und tetragonale sphenoidische Hemiedrie die so entstehenden „Gesamtgruppen“ der unebenen n-Ecke, erstere ist überdies identisch mit der Gesamtgruppe des zugehörigen ebenen n-Ecks, d. h. mit der Gesamtgruppe des Dreiecks. Die Gesamtgruppen der unebenen n-Ecke erscheinen von der Natur begünstigt vor den Ursprungsgruppen, denn die tetragonale sphenoidische Hemiedrie kommt weit häufiger vor als die sphenoidische Tetartoedrie. Im ganzen sind also die kompliziertesten n-Ecke zugleich die am seltensten in Betracht kommenden.

Nunmehr wenden wir uns einer Beschreibung der 32 Symmetriegruppen zu, welche den von Becke betonten Mangel nicht besitzt, aber die soeben besprochenen Beziehungen zur Häufigkeit der Kristallformen verdunkelt. Ähnlich wie früher leiten wir das reguläre, tetragonale und hexagonale System vom Würfel, Quadrat und Sechseck ab, und zwar bilden wir die Meroedrien dieser Systeme dadurch, daß wir die Flächensymmetrie dieser regelmäßigen Körper niedriger annehmen, als es der rein geometrische Umriß bedingt. Immer aber muß die Flächensymmetrie so hoch bleiben, um den Umriß des Vergleichskörpers aus einem Ausgangselement zu erzeugen (um also aus einer einzigen Ecke alle übrigen durch die meroedrischen Symmetrieelemente hervorzubringen und ebenso aus einer einzigen Kante alle übrigen Kanten).

Bei Beschreibung der Symmetrie einer Fläche empfiehlt es sich, zwischen den beiden Seiten dieser Fläche zu unterscheiden und anzugeben, ob beide Seiten einander gleichwertig sind oder nicht. In ersterem Fall müssen Symmetrieoperationen existieren, welche die eine Flächenseite in die andere überführen; dementsprechend unterschieden wir zwischen „geschlossenen“ und „offenen“ n-Ecken, je nachdem ihnen beide entgegengesetzten Flächenseiten oder nur eine derselbe beigelegt wurde und wir wollen betonen, daß jede Ecke des Vergleichspolygons auf zweifache Art nämlich entweder zur Oberseite oder zur Unterseite gehörig aufgefaßt werden kann.

Daher werden z. B. durch die Symmetrieelemente der tetragonalen Holoedrie alle Ecken des Vergleichsvierecks doppelt erzeugt, wenn eine derselben z. B. eine auf der Oberseite befindliche zur Ausgangsecke gewählt wird; nämlich einmal erscheinen sie der oberen Flächenseite, zweitens der unteren Flächenseite zugewiesen und sind daher bei der Übertragung auf eine Konstruktionskugel in ersterem Fall als Grenzpunkt der oberen, im zweiten als Grenzpunkte der unteren Halbkugel aufzufassen.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß die hexagonal-trigonotype Tetartoedrie und tetragonal-sphenoidische Tetartoedrie aus einem Sechseck resp. Quadrat dadurch erhalten werden können, daß man die Gleichwertigkeit beider Flächenseiten dieser n-Ecken aufrecht erhält und sie hinsichtlich ihrer Symmetrie so spezialisiert, daß die Spiegelungen, durch welche eine Flächenseite in sich übergeführt wird, fortzulassen und zugleich der Grad der Drehungssymmetrie auf die Hälfte zu reduzieren ist.

Um hierbei der Nebenbedingung zu genügen, daß trotz dieser geringen Symmetrie die Ecken des n-Ecks sämtlich aus einer Ausgangsecke etwa aus der zur Oberseite gerechneten Ecke erzeugbar sind, muß zunächst für das Quadrat folgendes statthaben: Es muß die Ecke 3 so erzeugt werden, daß sie der Oberseite, die Ecke 2 und 4 hingegen so, daß sie der Unterseite des Quadrats zugewiesen erscheint, hierdurch ist aber die vierzählige Drehspiegelung definiert. Wünscht man diese Symmetrie des Quadrats direkt geometrisch sichtbar zu machen, so kann dieses dadurch geschehen, daß man Ober- und Unterseite des Quadrats mit Schraffierungen, die aufeinander senkrecht stehen, versieht (vergl. Figur, in welcher das Quadrat nur deshalb mit einem Prisma kombiniert ist, um die Ober- und Unterseite bequemer unterscheiden zu können).

Überhaupt gilt das an diesem Beispiel besonders leicht ersichtliche Prinzip, daß man für die Meroedrien geeignete Vergleichskörper erhält, wenn man Schraffierungen auf den Flächen des zur Holoedrie des betreffenden Systems gehörigen regelmäßigen Körpers anbringt. Die Einführung derartig ge-

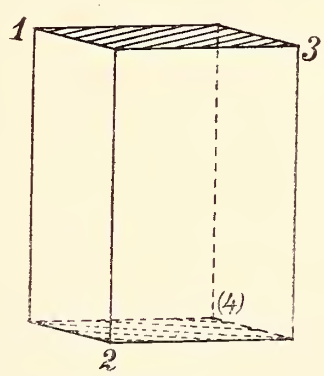

Fig. 1.

streifter Vergleichskörper ist auch dazu didaktisch gut brauchbar, um die Symmetrie der auf den Basisflächen entstehenden Ätzfiguren zu erklären. Unterscheiden wir in derselben Weise, wie bei Kristallformen gebräuchlich, auch bei den polygonal (nämlich nach Sechs-, Vier-, Drei- oder Zweiecken) angeordneten Schraffierungslinien solche von erster, zweiter und dritter Stellung in bezug auf die Koordinatenachsen und denken wir uns den Vergleichskörper selbst stets in erster Stellung befindlich, so ist zunächst ersichtlich, daß für die hexagonale trigonotype Tetartoedrie das einfachste Vergleichobjekt geliefert wird durch ein regelmäßiges Sechseck, welches nach Dreiecken dritter Stellung auf Ober- und Unterseite übereinstimmend gestreift ist.

Die folgende Tabelle liefert für die Mehrzahl der tetragonalen und hexagonalen Gruppen die aus obigem Prinzip sich ergebenden Vergleichskörper:

Symmetriegruppe	Art der Streifung	Verhältnis der auf Ober- und Unterseite befindlichen Streifung
a) Vergleichsobjekt das Quadrat		
Tetragonale Hemimorphie .	Quadrate 1. Stell.	Auf einer ders. fehlend
Pyramidale Hemiedrie . . .	„ 3. „	„ beiden identisch
Tetartomorphie	„ 3. „	„ einer ders. fehlend
Sphenoidische Hemiedrie . .	Einf. Linien 2. Stell.	Senkrecht aneinander
„ Tetartoedrie . .	„ „ 3. „	„ „
b) Vergleichsobjekt das regelmäßige Sechseck		
Hexagonale Hemimorphie .	Sechsecke 1. Stell.	Auf einer ders. fehlend
Pyramidale Hemiedrie . . .	„ 3. „	„ beiden identisch
Tetartomorphie	„ 3. „	„ einer ders. fehlend
Rhomboedr. Hemiedrie . . .	Dreieck 1. „	Invers zueinander
„ Tetartoedrie . .	„ 3. „	„ „ „
Trigonotype Hemiedrie . .	„ 2. „	Auf beiden identisch
„ Tetartomorphie	„ 1. „	„ einer ders. fehlend
„ Tetartoedrie .	„ 3. „	„ beiden identisch
Ogdoedrie	„ 3. „	„ einer ders. fehlend

Die hier nicht aufgeführten holoedrischen und trapezoedrischen Gruppen beschreibt man am einfachsten ohne Zuhilfenahme von Streifungen als Gesamtsymmetriegruppe und Drehungssymmetrie des Sechsecks resp. Quadrats, im regulären System bedingt höchstens in der pentagonalen Hemiedrie die Zuhilfenahme von Streifungen eine kleine Vereinfachung, wenn die z. B. auf manchen Pyritwürfeln befindliche bekannte Streifung benutzt wird. Im rhombischen, monoklinen und triklinen System wird durch die Einfachheit der Symmetrieelemente das Hilfsmittel der Streifung entbehrlich.