Eine allgemeine Methode für die eindeutige Bestimmung der drei Hauptbrechungsindizes an einem beliebigen Schnitt eines optisch zweiachsigen Kristalls.

Von

Fr. Schwietring in Celle (Hannover).

Mit 4 Textfiguren.

Befindet sich ein durchsichtiger, inaktiver Kristall in einer starkbrechenden Flüssigkeit, so weist das an ihm reflektierte Licht zwei Grenzkurven auf. Die den Punkten dieser Kurven entsprechenden Reflexionswinkel Φ sind die Grenzwinkel der totalen Reflexion. Unter allen Grenzwinkeln, die bei einer kontinuierlichen Änderung der Einfallsebene auftreten, zeigen vier extremale Werte; sie mögen Φ_1, Φ_2 für die innere und Φ_3, Φ_4 für die äußere Grenzkurve heißen. Ist n der Brechungsindex des Außenmediums, so liefert die Gleichung

$$n \sin \Phi = \frac{1}{r} \qquad 1.$$

die Radien r für die Fußpunktskurve (F), die der Schnittkurve (S) der Strahlenfläche mit der Grenzebene $\mathfrak{G}$ entspricht. Die zu den Winkeln $\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3 < \Phi_4$ gehörigen Radien seien $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$. Sind nun $a > b > c$ die drei Hauptlichtgeschwindigkeiten des Kristalls und $n_a < n_b < n_c$ die drei Hauptbrechungsindizes, so bestehen nach Ch. Soret[1] die Beziehungen:

[1] Ch. Soret, Compt. rend. **106**. 176. 479. 1888. Vergl. F. Pockels. Lehrb. d. Kristalloptik. 129—133. 1906.

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a} = n_a, \qquad \frac{1}{r_4} = \frac{1}{c} = n_c. \qquad 2.$$

Der größte und der kleinste extremale Grenzwinkel ergeben mithin nach **1** und **2** mit leichter Mühe den größten und den kleinsten Hauptbrechungsindex. Der mittlere Hauptbrechungsindex n_b wird auch ähnlich gefunden; aber es ist zunächst fraglich, ob er durch Φ_2 oder durch Φ_3 zu ermitteln ist. Der Grund für diese Zweideutigkeit liegt darin, daß für einen gegebenen Diametralschnitt zwei verschiedene Strahlenflächen existieren, die sich eben durch den mittleren Hauptbrechungsindex unterscheiden.

Zur Beseitigung der Zweideutigkeit für n_b beobachtet C. Viola[1] diejenigen Azimute eines vor das Auge geschalteten Nicols, d. h. die Winkel zwischen seiner Polarisationsebene und der Einfallsebene, bei denen jedesmal die Grenze für Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 verschwindet oder ein Minimum von Deutlichkeit zeigt. Für Φ_1 bringt er z. B. die innere Grenze zum Verschwinden, so daß nur die äußere sichtbar bleibt[2]. Mittels dieser Nicolazimute stellt er zwei Regeln für die Unterscheidung von Φ_2 und Φ_3 auf, für die er aber keine strenge Begründung angibt. Beide Regeln versagen außerdem, wenn die Grenzebene des Kristalls nahe der Ebene der optischen Achsen liegt[3]. Für die praktische Anwendung erfordert die erste Regel einige Messungen und eine kurze Rechnung[4], die zweite und einfachere dagegen nur eine einzige Beobachtung[5]. Weiterhin sollen sie daher die Rechnungsregel und die Beobachtungsregel genannt wer-

[1] C. Viola, Zeitschr. f. Krist. **31**. 40—48; **32**. 113—118. 1899; **32**. 317—337. 1900; **36**. 245—251. 1902.

[2] Aus Viola's Angaben, a. a. O. **31**. p. 44 Zeile 1—4, ist nicht zu ersehen, welche der beiden Grenzen bei der Nicoleinstellung verschwinden soll. Die Bemerkung p. 45 Zeile 9—11 lehrt jedoch, daß für die inneren extremalen Grenzwinkel die inneren Grenzen zum Verschwinden gebracht werden und umgekehrt bei den äußeren extremalen Grenzwinkeln die äußeren Grenzen. Zu dieser Auffassung ist auch F. Kolaček gelangt (Ann. d. Phys. (4.) **20**. 451, 469—473. 1906).

[3] C. Viola, a. a. O. **31**. 48; **36**. 251.

[4] C. Viola, a. a. O. **32**. 116, 117, 320—324.

[5] C. Viola, a. a. O. **36**. 251.

den. In meiner Dissertation[1] habe ich darauf hingewiesen, daß VIOLA bei seinem Beobachtungsverfahren den Unterschied der Nicolazimute bei streifendem Einfall und bei Totalreflexion des Lichtes, sowie auch denjenigen zwischen dem Einfall des Lichtes von rechts und von links in derselben Einfallsebene nicht beachtet hat. In der vorliegenden Abhandlung werden die beiden Regeln an den von VIOLA erhaltenen Messungswerten auf ihre Brauchbarkeit geprüft. Dabei stellt sich heraus, daß die Rechnungsregel und die Beobachtungsregel in mehreren Fällen einander widersprechen. Weiter tritt hervor, daß jede, einzeln für sich benutzt, z. T. auf falsche Schlüsse führt. Folglich sind beide Regeln in hohem Maße unsicher. Deshalb wird eine neue Unterscheidungsregel aufgestellt, die im Gebrauch zwar mehr Zeit erfordert als VIOLA's Regeln, die indessen dafür strenge und allgemeine Gültigkeit besitzt. Ferner wird gezeigt, daß sich eine allgemeine und auch in praktischer Hinsicht einfache Unterscheidungsregel ergibt, wenn der Nicol nach einem Vorschlage von F. POCKELS[2] in den Gang der streifend einfallenden Strahlen eingeschaltet wird. Zunächst werden die beiden Regeln VIOLA's und die Art ihrer Herleitung dargelegt.

I. Die beiden Unterscheidungsregeln von VIOLA für die extremalen Grenzwinkel Φ_2 und Φ_3.

1. Die Richtungen in der Grenzebene $\mathfrak{G}$ des Kristalls, in denen die extremalen Grenzwinkel Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 auftreten, seien A, B, Δ, Γ; sie sind in Fig. 1, der stereographischen Projektion der Einheitskugel auf die Grenzebene $\mathfrak{G}$, dargestellt (Fig. 1). Das Einfallslot heiße $\mathfrak{Z}$. Die optischen Symmetrieachsen, die den Hauptlichtgeschwindigkeiten $a > b > c$ entsprechen, sollen X, Y, Z genannt werden. Es sei jetzt etwa in Fig. 1 Φ_2 der Winkel für den mittleren Hauptbrechungsindex n_b. $\mathfrak{Z}A$, $\mathfrak{Z}B$, $\mathfrak{Z}C$ sind dann die Einfallsebenen, welche die X-, Y-, Z-Achse enthalten, so daß $A\Delta = BB = C\Gamma = 90^0$. Die Winkel ζ_a, ζ_b, ζ_c der X-, Y-,

[1] F. SCHWIETRING, Inaug.-Dissertation. Göttingen 1908. Dies. Jahrb. Beil.-Bd. XXVI. 372—376. 1908.

[2] F. POCKELS, Lehrb. d. Kristalloptik. p. 133.

Z-Achse gegen das Einfallslot lassen sich aus den Differenzen der Azimute A, B, Γ berechnen. es ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \zeta_a &= -\frac{\cos B\Gamma}{\cos AB \cos \Gamma A}, \\ \operatorname{tg}^2 \zeta_b &= -\frac{\cos \Gamma A}{\cos B\Gamma \cos AB}, \\ \operatorname{tg}^2 \zeta_c &= -\frac{\cos AB}{\cos \Gamma A \cos B\Gamma}. \end{aligned} \qquad 3.$$

Die Nicolazimute, bei denen das Verschwinden der Grenze für Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 beobachtet wird, seien mit N_1, N_2, N_3, N_4

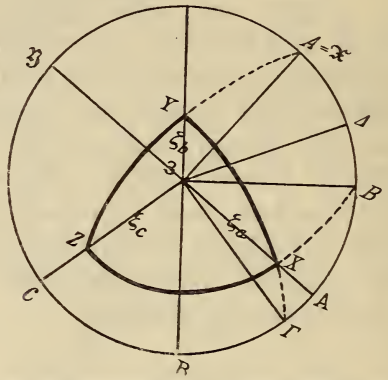

Fig. 1. Stereographische Projektion der Einheitskugel auf die Grenzebene $\mathfrak{G}$. A, B, Δ, Γ Richtungen mit den extremalen Grenzwinkeln. Albit von Amelia, erster Schnitt. Erste Annahme. Φ_2 entspricht n_b.

bezeichnet. Dann bestehen nach Viola, wenn die Wahl von Φ_2 richtig ist, die Gleichungen:

$$\zeta_a = N_1, \quad \zeta_b = N_2, \quad \zeta_c = N_4. \qquad 4.$$

Ist hingegen Φ_3 der zu n_b gehörige Winkel, so ist nach Viola:

$$\zeta'_a = N_1, \quad \zeta'_b = N_3, \quad \zeta'_c = N_4, \qquad 5.$$

wo ζ'_a, ζ'_b, ζ'_c sich aus den Differenzen von A, Δ, Γ genau so berechnen wie ζ_a, ζ_b, ζ_c aus denen von A, B, Γ. Je nachdem, ob die Gleichungen **4** oder **5** erfüllt sind, ist Φ_2 oder Φ_3 der zu n_b gehörige Grenzwinkel; diese Regel sei die Rechnungsregel genannt.

Bei ihrer Aufstellung macht Viola stillschweigend die Voraussetzung, daß das Polarisationsazimut der im Kristall streifend einfallenden Strahlen durch die Brechung ins Außenmedium nicht geändert wird. Beobachtet man z. B. den Grenzwinkel Φ_1 bei streifendem Einfall des Lichtes, so rührt der Intensitätsunterschied an der Grenze nur von den streifend einfallenden schnelleren Strahlen her[1]. Für diese fällt der Fresnel'sche Lichtvektor vor der Brechung in die X-Achse. Wenn die Annahme gemacht wird, daß er auch nach der Brechung noch dieselbe Lage gegen die Einfallsebene besitzt, dann muß die Grenze in der Tat verschwinden, wenn die Polarisationsebene des Nicols mit dem Fresnel'schen Vektor zusammenfällt, d. h. wenn N_1 gleich ζ_a oder gleich ζ'_a ist. Jene Annahme ist indessen völlig unbegründet[2]. Sie wird im allgemeinen nicht erfüllt sein, so daß die beobachteten Nicolazimute von den durch **4** und **5** geforderten Werten abweichen werden. Daher ist die Rechnungsregel eine Näherungsregel, über deren Brauchbarkeit nichts Sicheres feststeht. Sie versagt in den Fällen, wo die Grenzebene $\mathfrak{G}$ einen sehr kleinen, in den Fehlergrenzen enthaltenen Winkel mit der Ebene der optischen Achsen einschließt, weil dann N_2 und N_3 nahezu gleich werden.

2. Die andere Regel von Viola bezieht sich nicht wie die erste auf die Nicolazimute der Grenzwinkel, die n_a, n_b, n_c entsprechen, sondern auf das Nicolazimut des vierten ausgezeichneten Grenzwinkels, der für die Bestimmung von n_b unbrauchbar ist und ausgeschieden werden soll. Viola zeigt, daß für jenen Grenzwinkel der im Kristall streifend einfallende Strahl vor der Brechung senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist. Er nimmt wieder wie bei der ersten Regel stillschweigend an, daß die Lage der Polarisationsebene durch die Brechung nicht geändert wird. Mithin erhält er das Resultat, daß von den Winkeln Φ_2, Φ_3 derjenige für die Berechnung von n_b ausscheidet, dessen Grenze senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist und daher bei einem Nicolazimut von 0^0 verschwindet.

[1] Vergl. F. Schwietring, a. a. O. p. 355.

[2] Vergl. F. Kolářek, a. a. O. p. 470.

Diese Regel verlangt nur die Messung eines Nicolazimutes, sie heiße die Beobachtungsregel. Sie ist aus demselben Grunde wie die Rechnungsregel eine Näherungsregel, die auch wieder unbrauchbar wird, wenn die Grenzebene $\mathfrak{G}$ in der Nähe der optischen Achsen liegt.

II. Die Anwendung der Rechnungsregel und der Beobachtungsregel auf die Messungen von Viola.

1. Viola hat mit seiner Rechnungsregel eine Reihe von Kristallschnitten untersucht, die später aufgestellte Beobachtungsregel ist praktisch noch nicht benutzt worden. Es soll nun erörtert werden, welche Schlüsse die beiden Regeln und die Messungswerte Viola's ergeben. Viola beobachtete mit dem Totalreflektometer von Abbe-Pulfrich, die Brechungsindizes der Glaskugel und des Monobromnaphthalins waren für Na-Licht 1,8904 und 1,6630. Die für die einzelnen Kristallschnitte so ermittelten extremalen Grenzwinkel sind mit den zugehörigen Nicolazimuten in der Tabelle zusammengestellt, die Azimute A, B, Δ, Γ der Einfallsebenen werden durch die Stellungen des horizontalen Teilkreises angegeben. Der nach Viola auszuscheidende extremale Grenzwinkel ist weiterhin stets mit Φ_3 bezeichnet, das entsprechende Nicolazimut heißt stets N_3. Beim Albit von Lakous ist die Rechnungsregel von Viola noch nicht in der durch **4**, **5** dargestellten Form benutzt, sondern durch eine ihr gleichwertige Zeichnung ersetzt (siehe Tabelle).

Nach der Beobachtungsregel muß N_3 stets 0^0 betragen. In den neun von Viola mit der Rechnungsregel behandelten Fällen besitzt N_3 nach der Tabelle die Werte 0^0, 5^0, 9^0, 10^0, 12^0, 67^0, 70^0, 84^0, 110^0. Der Beobachtungsfehler ist für diese Winkel sicherlich nicht klein. Das geht schon daraus hervor, daß sie meistens nur in Zehnern der Grade aufgeführt sind. Die Einstellungen auf verschwindende Grenze lassen sich außerdem mit einem Nicol nicht mit sehr großer Genauigkeit ausführen, weil der Intensitätsunterschied vielfach nur gering ist. Viola gibt bei seinen Beobachtungen nicht an, wie er das Nicolazimut rechnet[1]; folglich sind α

[1] Vergl. F. Schwietring, a. a. O. p. 375.

VIOLA's Messungen der extremalen Grenzwinkel und der zugehörigen Nicolazimute. Na-Licht.

Kristall	Azimut des horizontalen Teilkreises	Innere Grenze: Grenzwinkel	Innere Grenze: Nicolazimut	Äußere Grenze: Grenzwinkel	Äußere Grenze: Nicolazimut
Albit von Lakous	35°			$\Phi_4 = 54^0\,29'\,20''$	60°
	53	$\Phi_1 = 53^0\,59'\,45''$	32°		
	129½			$\Phi_2 = 54\ 13\ 0$	79½
	143	$\Phi_3 = 54\ 7\ 42$	12		
Albit aus dem carrarischen Marmor	7°	$\Phi_1 = 53^0\,56'\,30''$	81°		
	45			$\Phi_3 = 54^0\,27'\,43''$	9°
	96½	$\Phi_2 = 54\ 9\ 8$	81		
	120			$\Phi_4 = 54\ 29\ 35$	9
Albit von Amelia Erster Schnitt	15°			$\Phi_4 = 54^0\,30'\,48''$	70°
	67	$\Phi_2 = 54^0\,11'\,24''$	30°		
	87			$\Phi_3 = 54\ 12\ 0$	110
	117	$\Phi_1 = 53\ 59\ 6$	70		
Albit von Amelia Zweiter Schnitt	0°			$\Phi_3 = 54^0\,28'\,24''$	5°
	75			$\Phi_4 = 54\ 30\ 36$	30
	85	$\Phi_2 = 54^0\,11'\,30''$	40°		
	173	$\Phi_1 = 53\ 59\ 54$	85		
Albit von Prägraten	8°	$\Phi_1 = 54^0\ 1'\,54''$	80°		
	37			$\Phi_3 = 54^0\,13'\ 0''$	84°
	52	$\Phi_2 = 54\ 13\ 42$	15		
	101			$\Phi_4 = 54\ 33\ 24$	75
Periklin vom Kramkogl Erster Schnitt	0°	$\Phi_2 = 54^0\,14'\,48''$	22°		
	18			$\Phi_3 = 54^0\,14'\,59{,}5''$	67°
	50	$\Phi_1 = 54\ 0\ 18$	75		
	137			$\Phi_4 = 54\ 30\ 35{,}5$	80
Periklin vom Kramkogl Zweiter Schnitt	20°			$\Phi_3 = 54^0\,28'\,42''$	10°
	39	$\Phi_1 = 53^0\,59'\,30''$	85°		
	120			$\Phi_4 = 54\ 29\ 36$	20
	123	$\Phi_2 = 54\ 13\ 48$	70		
Albit von Bakersville Erster Schnitt	21°			$\Phi_4 = 54^0\,29'\,54''$	80°
	80	$\Phi_2 = 54^0\,10'\,48''$	20°	$\Phi_3 = 54\ 10\ 36$	70
	114	$\Phi_1 = 53\ 58\ 54$	75		
Albit von Bakersville Zweiter Schnitt	66°			$\Phi_4 = 54^0\,30'\,42''$	20°
	71	$\Phi_2 = 54^0\,11'\ 6''$	70°		
	150			$\Phi_3 = 54\ 28\ 48$	0
	161	$\Phi_1 = 53\ 58\ 42$	90		

und 180^0-α bei ihm nicht zu unterscheiden. Von den ersten fünf Werten für N_3, die zwischen 0^0 und 12^0 liegen, ist deshalb wohl zu sagen, daß sie mit der Beobachtungsregel übereinstimmen. Die entsprechenden Zahlen für N_2 sind dabei auch erheblich größer als die für N_3. Die letzten vier Werte für N_3, die sich zwischen 67^0 und 110^0 bewegen, sind jedoch mit der Beobachtungsregel unvereinbar. Die entsprechenden Werte für N_2 sind in diesen vier Fällen stets kleiner als die für N_3, so daß hier die auf Grund der Rechnungsregel ausgeschiedenen Φ_3 nach der Beobachtungsregel gerade die für n_b brauchbaren Winkel sind. Folglich führen die beiden Regeln Viola's beim ersten Schnitt des Albits von Amelia, beim Albit von Prägraten, beim ersten Schnitt des Periklins vom Kramkogl und beim ersten Schnitt des Albits von Bakersville zu einander widersprechenden Resultaten.

Beim Albit von Amelia sind zwei Schnitte untersucht. Deshalb ist leicht zu sehen, daß an diesem Kristall der von Viola als brauchbar ermittelte Winkel in der Tat der richtige ist; er kommt in beiden Schnitten vor. Ebenso ist es beim Periklin vom Kramkogl und beim Albit von Bakersville. In diesen Fällen hat die Rechnungsregel das richtige Resultat geliefert, die Beobachtungsregel ist hier unzutreffend.

2. Viola hat seine Rechnungsregel bei den drei zuletzt genannten Kristallen nur für die ersten Schnitte benutzt. Um jene Regel auf ihre Sicherheit zu prüfen, soll sie nun auch auf die zweiten Schnitte angewendet werden.

Albit von Amelia. — II. Schnitt. Für die erste Annahme mit Φ_2 als richtigem Winkel ist:

$$AB = 88^0, \quad B\Gamma = 10^0, \quad A\Gamma = 98^0.$$
$$\zeta_a = 85^0\,59', \quad \zeta_b = 63^0\,35', \quad \zeta_c = 26^0\,47'.$$

Beobachtet ist:

$$N_1 = 85^0, \quad N_2 = 40^0, \quad N_4 = 30^0.$$

Zweite Annahme:

$$A\Delta = 173^0, \quad \Delta\Gamma = 75^0, \quad A\Gamma = 98^0.$$
$$\zeta'_a = 53^0\,51', \quad \zeta'_b = 36^0\,21', \quad \zeta'_c = 79^0\,13'.$$

Beobachtet ist:

$$N_1 = 85^0, \quad N_3 = 5^0, \quad N_4 = 30^0.$$

Die Rechnungsregel liefert damit dasselbe Resultat wie beim ersten Schnitt. Die erste Annahme befriedigt **4** viel besser als die zweite **5**. Trotzdem ist bemerkenswert, daß bei der Bildung von **4** für N_2 die erhebliche Abweichung von 23° auftritt, weil Viola keine größeren Differenzen zwischen Rechnung und Messung als 5° gefunden hat.

Periklin vom Kramkogl. — II. Schnitt. Erste Annahme mit Φ_2:

$$AB = 84^0, \quad B\Gamma = 3^0, \quad A\Gamma = 81^0.$$
$$\zeta_a = 82^0\,42', \quad \zeta_b = 50^0\,45', \quad \zeta_c = 39^0\,17'.$$

Beobachtet ist:

$$N_1 = 85^0, \quad N_2 = 70^0, \quad N_4 = 20^0.$$

Zweite Annahme:

$$AA = 19^0, \quad A\Gamma = 100^0, \quad A\Gamma = 81^0.$$
$$\zeta'_a = 68^0\,49', \quad \zeta'_b = 22^0\,17', \quad \zeta'_c = 68^0\,1'.$$

Beobachtet ist:

$$N_1 = 85^0, \quad N_3 = 10^0, \quad N_4 = 20^0.$$

Das Resultat des ersten Schnittes wird wieder bestätigt, die erste Annahme wird besser erfüllt als die zweite. Aber es ist sehr auffällig, daß N_2 und N_4 um etwa 20° von den berechneten Werten abweichen. Für die zweite Annahme wird diese Abweichung für N_4 etwa 40°.

Albit von Bakersville. — II. Schnitt. Erste Annahme mit Φ_2:

$$AB = 90^0, \quad B\Gamma = 5^0, \quad A\Gamma = 95^0.$$
$$\zeta_a = 90^0, \quad \zeta_b = 0^0, \quad \zeta_c = 90^0.$$

Beobachtet ist:

$$N_1 = 90^0, \quad N_2 = 70^0, \quad N_4 = 20^0.$$

Zweite Annahme:

$$AA = 11^0, \quad A\Gamma = 84^0, \quad A\Gamma = 95^0.$$
$$\zeta'_a = 47^0\,52', \quad \zeta'_b = 42^0\,40' \quad \zeta'_c = 84^0\,30'.$$

Beobachtet ist:

$$N_1 = 90^0, \quad N_3 = 0^0, \quad N_4 = 20^0.$$

Die erste Annahme führt bei N_2 und bei N_4 auf die Abweichung von 70° zwischen Beobachtung und Rechnung, für die zweite Annahme tritt bei N_4 eine solche von $64\frac{1}{2}^0$ auf. Die Unterschiede zwischen den berechneten

und den beobachteten Werten werden damit so beträchtlich, daß die Formeln 4, 5 der Rechnungsregel als höchst ungenau bezeichnet werden müssen, bei deren Anwendung große Vorsicht geboten ist. Wird die Rechnungsregel hier aber trotz der großen Differenzen benutzt, so ist die zweite Annahme die richtigere. Die Rechnungsregel führt demnach in diesem Falle auf ein falsches Resultat.

III. Eine strenge Unterscheidungsregel für die extremalen Grenzwinkel Φ_2 und Φ_3.

1. Um eine strenge Regel für die Unterscheidung von Φ_2, Φ_3 aufstellen zu können, muß man die für das Verschwinden der Grenze charakteristischen Nicolazimute genau berechnen und den Beobachtungsfehler für sie zu verringern suchen. Die genaue Berechnung jener Nicolazimute ist zuerst

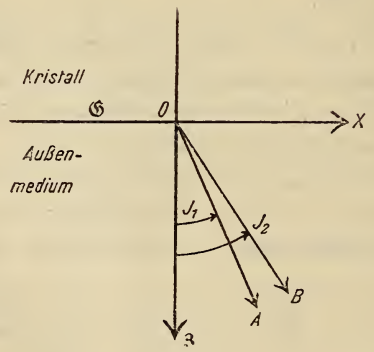

Fig. 2. Streifender Einfall des Lichtes. X3 Einfallsebene, G Grenzebene, 03 Einfallslot.

von mir in meiner Dissertation[1] dargelegt worden. Es sei im folgenden vorausgesetzt, daß das Licht streifend im Kristall einfällt; bei Totalreflexion des Lichtes ändern sich die Nicolazimute. Für eine beliebige Einfallsebene seien J_1, J_2 der innere und der äußere Grenzwinkel, die zugehörigen Grenzstrahlen seien OA, OB (Fig. 2). Das zweite uniradiale Polarisationsazimut einer nach OA einfallenden Welle,

[1] F. Schwietring, a. a. O. p. 355—360.

bei dem im Kristall nur die langsamere gebrochene Welle entsteht, heiße e_2. Von den beiden uniradialen Schwingungen einer nach OB einfallenden Welle ist nur die zweite geradlinig, die im Kristall die streifend gebrochene langsamere Welle liefert. Die zugehörige erste uniradiale Schwingung ist eine Ellipse, ihre große Hauptachse besitze das Azimut e_1. Dann bestehen für die charakteristischen Nicolazimute N_i, N_a an der inneren und an der äußeren Grenze die Gleichungen:

$$N_i = e_2, \qquad N_a = e_1. \qquad \textbf{6.}$$

Das charakteristische Nicolazimut an der inneren Grenze ist gleich dem zweiten uniradialen Polarisationsazimut für umgekehrten Strahlengang. Das charakteristische Nicolazimut an der äußeren Grenze ist gleich dem Azimut der großen Hauptachse von der ersten uniradialen Schwingung, auch für umgekehrten Strahlengang.

Die Unterscheidung von Φ_2, Φ_3 wird dadurch erfolgen, daß die Nicolazimute zweimal nach **6** berechnet werden, indem n_b zuerst mittels Φ_2 und dann mittels Φ_3 bestimmt wird. Der Vergleich der so berechneten Werte mit den beobachteten wird zeigen, ob Φ_2 oder Φ_3 der brauchbare Winkel ist. Die Ermittlung eines Nicolazimutes nach **6** ist allerdings etwas umständlicher als die nach **3**, **4**. Dabei ist jedoch zu beachten, daß nach **6** nicht wie bei Viola 3 Azimute zu berechnen sind, sondern daß schon ein einziges Azimut genügt. In der Tat, die Formel für das uniradiale Polarisationsazimut e_2 enthält die Polarisationskonstanten. Die durch die jeweilige Berücksichtigung von Φ_2 und Φ_3 bedingten Unterschiede müssen sich demnach bei jedem einzelnen Nicolazimut bemerklich machen. Auch für die Beobachtung ist damit nur ein Nicolazimut in Betracht zu ziehen. Am geeignetsten ist ein Azimut an der inneren Grenze, etwa N_i für den Winkel Φ_1. Denn N_i ist nach **6** leichter zu finden als N_a, weil dort eine elliptische Schwingung für die Rechnung in Betracht kommt.

Die Unterscheidung von Φ_2, Φ_3 ist stets dadurch möglich, daß ein Nicolazimut an der inneren Grenze beobachtet und mit den beiden Werten verglichen wird, die das Azimut nach **6** für Φ_2 und für Φ_3 annimmt.

2. Der Gebrauch dieser strengen Unterscheidungsregel setzt voraus, daß das Nicolazimut auch mit einer genügenden Genauigkeit beobachtet werden kann. Wenn das mit einem Nicol nicht immer zu erreichen ist, so ist zu bemerken, daß der Beobachtungsfehler durch Anwendung von zwei Nicols verringert werden kann. Das Fernrohr werde so eingestellt, daß die innere Grenze G_i durch die Mitte des Gesichtsfeldes hindurchgeht (Fig. 3). In den inneren Grenzkegel $\mathfrak{K}_i$ werden langsamere und schnellere Wellen gebrochen, in den Raum zwischen den beiden Grenzkegeln $\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_a$ aber nur langsamere Wellen. Der Intensitätsunterschied für G_i rührt lediglich von den nach dieser Grenze hin gebrochenen schnelleren Wellen her, die streifend im Kristall einfallen. Deshalb muß er am

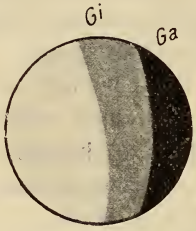

Fig. 3. Gesichtsfeld im Fernrohr. G_i, G_a innere und äußere Grenze.

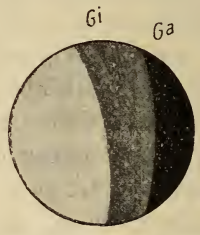

Fig. 4. Gesichtsfeld bei eingeschaltetem Nicol N_I. Die nach G_i gebrochenen langsameren Wellen sind ausgelöscht. Das an G_i nach außen anstoßende Gebiet ist dunkel.

besten hervortreten, wenn die nach G_i gebrochenen langsameren Wellen ausgelöscht werden. Das ist durch einen Nicol zu erreichen; denn die zwischen $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_a$ gebrochenen langsameren Wellen sind zwar elliptisch polarisiert, aber die Elliptizität ist für G_i noch null. Die innere Grenze G_i wird also am schärfsten hervortreten, wenn ein Nicol N_I so in den Gang der gebrochenen Strahlen eingeschaltet wird, daß das an G_i nach außen anstoßende Gebiet verdunkelt wird (Fig. 4). Die äußere Grenze G_a wird dabei im allgemeinen nicht verschwinden, weil nur das direkt an G_i nach außen anstoßende Gebiet verdunkelt wird, und weiter nach G_a hin wegen der größer werdenden Elliptizität der Wellen eine gewisse Helligkeit

bestehen bleiben muß. Ein zweiter vor das Auge geschalteter Nicol N_{II} wird jetzt mit größerer Genauigkeit auf das Verschwinden von G_I einzustellen sein, als es Viola mit nur einem Nicol möglich war. Denn das G_I nach außen hin benachbarte Gebiet ist völlig dunkel, und der nach innen direkt an G_I grenzende Teil des Gesichtsfeldes läßt sich durch N_{II} auch völlig auslöschen.

3. Die Anwendbarkeit der aufgestellten Regel soll am ersten Schnitt des Albits von Amelia mittels des Nicolazimutes N_1 gezeigt werden. Die von Viola gemessenen Werte finden sich in der Tabelle und sind in Fig. 1 für die Annahme von Φ_2 für n_b veranschaulicht. Es ist:

$$\mathcal{A}B = 50^0, \quad B\Gamma = 52^0, \quad \mathcal{A}\Gamma = 102^0.$$
$$\zeta_a = 65^0\,0{,}1', \quad \zeta_b = 35^0\,56{,}2', \quad \zeta_c = 65^0\,57{,}1'.$$

Die Grenzwinkel[1] und die Nicolazimute sollen mit Koláček in bezug auf Monobromnaphthalin berechnet werden. Die von Viola beobachteten Zahlen dürfen auch für Monobromnaphthalin als gültig betrachtet werden, da der Drehungswinkel der Polarisationsebene beim Austritt in die Glaskugel kleiner als der Beobachtungsfehler ist. Für Monobromnaphthalin seien die extremalen Grenzwinkel Φ_1', Φ_2', Φ_3', Φ_4'. Es ist:

$$\Phi_1' = 66^0\,51', \quad \Phi_2' = 67^0\,12' \quad \Phi_4' = 67^0\,45{,}4'.$$

Zur Berechnung von N_1 wird das in Fig. 1 bezeichnete Koordinatensystem $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gewählt. Die drei Hauptbrechungsindizes sind nach **1**, da der Brechungsindex des Monobromnaphthalins 1,6630 beträgt:

$$n_a = 1{,}52908, \quad n_b = 1{,}53304, \quad n_c = 1{,}53926.$$

Die Richtungskosinus der optischen Symmetrieachsen X, Y, Z gegen das System $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sind durch die Winkel ζ und durch $\mathcal{A}B$, $B\Gamma$ bestimmt. Sie liefern die Polarisationskonstanten[2]:

---

[1] In meiner Dissertation p. 372—374 entsprechen $\mathcal{A}$, Φ_1, ζ_1, n_1 dem größten Grenzwinkel. Im Interesse einer größeren Übersichtlichkeit entsprechen in dieser Abhandlung $\mathcal{A}$, Φ_1, ζ_a, n_a wie bei Viola dem kleinsten Grenzwinkel und damit der größten Hauptlichtgeschwindigkeit. In meiner Dissertation ist p. 372 in Fig. 28 durch ein Versehen das Koordinatensystem $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ für die Einfallsebene $\mathfrak{Z}\Gamma$ anstatt für $\mathfrak{Z}\mathcal{A}$ gezeichnet worden.

[2] Vergl. F. Schwietring, a. a. O. p. 307.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0{,}42275 & a_{23} &= -0{,}00118 \\ a_{22} &= 0{,}42710 & a_{31} &= 0{,}00119 \\ a_{33} &= 0{,}42540 & a_{12} &= 0{,}000587. \end{aligned}$$

Fällt eine Welle unter einem der Winkel Φ_1', Φ_2', Φ_4' im Außenmedium ein, so liegen von den vier zugehörigen Wellennormalen im Kristall zwei in der Grenzebene $\mathfrak{G}$. Die KIRCHHOFF'sche Gleichung[1] geht für die Normalenwinkel[2] φ_1, φ_2 der beiden anderen Wellen über in:

$$\{a_{22}(a_{33}-h^2)+a_{11}(a_{22}-h^2)-a_{23}^2-a_{12}^2\}+2\{a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}\}t + \{a_{22}a_{11}-a_{12}^2\}t^2 = 0, \qquad 7.$$

wo: $t = \operatorname{cotg}\varphi$ und

$$h = \frac{1}{1{,}663 \cdot \sin \Phi'}$$

ist. Für Φ_1' sind die beiden Werte für t und damit auch φ_1, φ_2 reell:

$$\varphi_1 = -85^0\,25'\,29'', \quad \varphi_2 = 85^0\,6'\,14''.$$

Die nach OA einfallende Welle ruft im Kristall eine langsamere gebrochene Welle mit einem positiven Normalenwinkel hervor, folglich ist φ_2 der gewünschte Winkel. Das zugehörige Polarisationsazimut ψ_2 bestimmt sich durch:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a_{22}-h^2\sin^2\varphi}{a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi}. \qquad 8.$$

Demnach ist: $\psi_2 = 64^0\,1'\,15''$. Das entsprechende uniradiale Polarisationsazimut e_2 der einfallenden Welle berechnet sich aus:

$$\operatorname{tg} e_2 = \frac{\sin\psi_2 \sin(\Phi_1' + \varphi_2)\cos(\Phi_1' - \varphi_2) \pm \sin^2\varphi_2 \operatorname{tg} s_2}{\cos\psi_2 \sin(\Phi_1' + \varphi_2)}, \qquad 9.$$

wo:

$$\pm \operatorname{tg} s_2 = \frac{(a_{11}^2 - q_2^2)\sin\psi_2\cos\varphi_2 - a_{12}\cos\psi_2 - a_{13}\sin\psi_2\sin\varphi_2}{q_2^2\sin\varphi_2}$$

und: $q_2 = h\sin\varphi_2$ ist. So folgt:

$$N_1 = e_2 = 62^0\,38'\,12''.$$

Für die zweite Annahme, daß Φ_3 und n_b sich entsprechen, ist analog:

$$\begin{aligned} AA &= 30^0, & A\Gamma &= 72^0, & \Gamma\Gamma &= 102^0. \\ \zeta_a' &= 52^0\,38{,}6', & \zeta_b' &= 41^0\,23{,}6', & \zeta_c' &= 74^0\,45{,}8'. \\ \Phi_1' &= 66^0\,51', & \Phi_3' &= 67^0\,13', & \Phi_4' &= 67^0\,45{,}4'. \\ n_a &= 1{,}52908, & n_b &= 1{,}53324. & n_c &= 1{,}53926. \end{aligned}$$

[1] Vergl. F. SCHWIETRING, a. a. O. p. 307.

[2] Die Normalenwinkel sind nach A. POTIER definiert. Vergl. meine Dissertation a. a. O. p. 303.

Die Polarisationskonstanten sind:

$$a_{11} = 0{,}42241 \qquad a_{23} = -0{,}00129$$
$$a_{22} = 0{,}42669 \qquad a_{31} = 0{,}00082$$
$$a_{33} = 0{,}42601 \qquad a_{12} = 0{,}000632.$$

Damit folgt aus **7**, **8**, **9**:

$$\varphi_1 = -85^0\,32'\,34'', \quad \varphi_2 = +85^0\,19'\,16'',$$
$$\psi_2 = 53^0\,29'\,27'',$$
$$N_1 = e_2 = 52^0\,19'\,18''.$$

Die Differenz zwischen den beiden für N_1 berechneten Werten beträgt etwa 10^0. Sie ist mithin so beträchtlich, daß es durchaus möglich erscheint, durch die Beobachtung die zutreffende der beiden Annahmen herauszufinden. Viola hat $N_1 = 70^0$ beobachtet. Demnach wäre Φ_2 der brauchbare Winkel, was auch in der Tat stimmt.

4. Bei einer Besprechung der Arbeiten von Viola gibt F. Pockels[1] mit einem kurzen Hinweise an, daß die Azimute B, Δ von Φ_2, Φ_3 bei streifendem Einfall des Lichtes mittels eines in den Weg der einfallenden Strahlen eingeschalteten Nicols N unterschieden werden können. Dazu ist zu bemerken, daß Viola eine solche Nicoleinschaltung in seinen Abhandlungen nicht untersucht und nicht angewendet hat. Ferner versagt dieses Verfahren nach Pockels, wenn die Grenzebene $\mathfrak{G}$ der Ebene der optischen Achsen nahezu parallel ist. Im übrigen bietet dieser Vorschlag manche Vorzüge. Für den auszuscheidenden Grenzwinkel Φ_3 ist der streifend einfallende Strahl senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Also muß die zugehörige Grenze am undeutlichsten werden, wenn der Nicol N das Azimut 0^0 besitzt. Je nachdem, ob Φ_3 ein innerer oder ein äußerer Grenzwinkel ist, wird die Grenze für diese Stellung von N völlig verschwinden oder ein Minimum von Deutlichkeit zeigen. Es bleibt nur fraglich, ob die Einstellung auf verschwindende Grenze mit N allein stets hinreichend genau erfolgen kann. Im Notfalle ist die innere Grenze G_i jedoch in der vorher erläuterten Weise durch einen in den Gang der gebrochenen Strahlen eingeschalteten Nicol N_I erkennbarer zu machen. Also wird

[1] F. Pockels, a. a. O. p. 133.

der nach Pockels benutzte Nicol N in vielen Fällen eine leichte Unterscheidung von Φ_2, Φ_3 ermöglichen. Ja, er wird sie sogar stets ermöglichen. Die nach **4** und **5** berechneten Nicolazimute, die für das Verfahren von Viola nur unsichere Näherungswerte bedeuten, haben nämlich bei der Einschaltung von N nach Pockels Vorschlage strenge Gültigkeit. Ist Φ_2 brauchbar, so müssen die nach **4** berechneten Werte von N die Grenzen zum Verschwinden bringen, im anderen Falle dagegen die nach **5** bestimmten Azimute. Auch bei dieser experimentellen Anordnung wird die Berechnung eines einzigen Nicolazimutes, etwa die von N_1, zusammen mit der Beobachtung zur Unterscheidung von Φ_2, Φ_3 ausreichen. Mithin wird sich die allgemeine Unterscheidungsmethode mit der Nicoleinschaltung nach Pockels äußerst einfach gestalten, weil sie auf die bequemen Formeln **3**, **4** führt. Folglich muß diese Methode für die experimentelle Untersuchung als sehr zweckmäßig bezeichnet werden.

Zusammenfassung.

Die beiden für die Unterscheidung der extremalen Grenzwinkel Φ_2, Φ_3 von C. Viola aufgestellten Regeln, die Rechnungs- und die Beobachtungsregel, sind in der Herleitung unbegründet und sichern in der Anwendung nicht vor falschen Resultaten. Eine strenge Unterscheidung ist möglich durch die genaue Berechnung eines der Nicolazimute für das Verschwinden der inneren Grenze. Die Genauigkeit in der Beobachtung des Nicolazimutes läßt sich dadurch erhöhen, daß die Grenze zunächst durch einen Nicol N_I erkennbarer gemacht und darauf durch einen zweiten Nicol N_{II} ausgelöscht wird. Der experimentell noch nicht benutzte Vorschlag von F. Pockels, die Grenze durch einen in den Gang der streifend einfallenden Strahlen eingeschalteten Nicol N zum Verschwinden zu bringen, gestattet auch eine allgemeine Unterscheidung und erscheint für die praktische Durchführung sehr geeignet.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1912

Band/Volume: 1912

Autor(en)/Author(s): Schwietring Fr.

Artikel/Article: Eine allgemeine Methode für die eindeutige Bestimmung der drei Hauptbrechungsindizes an einem beliebigen Schnitt eines optisch zweiachsigen Kristalls. 21-36