Über kristallographische Kaleidoskope.

Von

E. A. Wülfing in Heidelberg.

Mit Taf. II, III und 6 Textfiguren.

Literatur.

1. A. F. Möbius, Über das Gesetz der Symmetrie der Kristalle und der Anwendung dieses Gesetzes auf die Einteilung der Kristalle in Systeme. Ber. über d. Verh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. **1**. (1849.) p. 65—75. Abgedruckt in Crelle's Journal. **43**. (1852) und in Möbius' Gesammelten Werken. **2**. 360.
2. E. Hess, Sitz.-Ber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. Marburg 1879. p. 7—20.
3. — Ebenda, 15. Febr. 1882. Vergl. Beiblätter. Ann. Phys. Chem. **6**. (1882.) p. 742.
4. G. Werner, Ein kristallographisches Anschauungsmittel. Programm des Realgymnasiums in Stuttgart. 1882. p. 3—28.
5. E. Hess, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung. Leipzig 1882. p. 262—265.
6. — Sitz.-Ber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. Marburg, Januar 1888.
7. — dies. Jahrb. 1889. I. p. 54—65.
8. E. Fedorow, dies. Jahrb. 1890. I. p. 234—247.
9. E. Hess, Katalog der Ausstellung der Deutsch-mathem. Vereinigung. München 1892. 6 p. (Hat mir nicht vorgelegen.)
10. E. A. Wülfing, Vortrag vor der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft in Köln, September 1908, dessen wesentlicher Inhalt bezüglich der Kaleidoskope erst hier zur Veröffentlichung gelangt. Verh. Ges. D. Naturf. u. Ärzte. 1908. II. 1. p. 177.
11. K. Vrba, Sitz.-Ber. K. Böhm. Ges. Wiss. Prag. November 1908. 8 p.

Es gibt kaum ein Hilfsmittel, das den Begriff der Symmetrieebenen besser zu veranschaulichen vermag als der ebene Spiegel. Auf dieser Erfahrung fußend kann man 11 von den 32 kristallo-

graphischen Symmetrieklassen durch passend angeordnete Spiegel zur Darstellung bringen. Die frühesten Angaben hierüber finden sich in einer aus dem Jahre 1849 stammenden Arbeit des Mathematikers A. F. Möbius, wo die betreffende Stelle, die ich hier nach des Autors gesammelten Werken anführe, folgendermaßen lautet:

„Ähnlicherweise wird man den Anblick aller 24 zu einer Gruppe [1] des regulären Systems gehörenden Träger [2] haben, wenn man drei Spiegel unter Winkeln von 90°, 60° und 45° aneinandersetzt und mit einem in die solchergestalt gebildete Pyramide gehaltenen Stabe die Spitze derselben berührt. Ein ebenes Dreieck, dessen Ecken in den Kanten der Pyramide liegen, gibt den Anblick eines sogen. Achtundvierzigflächners, und in den speziellen Fällen, wenn die Dreiecksebene auf den Kanten des Flächenwinkels von 90°, 60° und 45° normal ist, den Anblick eines Rhombendodekaeders, eines Oktaeders, oder eines Würfels."

Diese Darstellung hat wegen ihrer Kürze keine Berücksichtigung, weder bei Mathematikern noch bei Kristallographen, gefunden, obgleich sie das Wesentliche des kaleidoskopischen Vorgangs in der Holoedrie des regulären Systems enthält. Aber auch die Wiederholung der Erfindung durch den Mathematiker E. Hess und durch andere, worüber die Literaturangaben oben Näheres mitteilen, hat noch nicht genügt, ihre, wie ich glaube, hohe pädagogische Bedeutung erkennen zu lassen. Denn in den Lehrbüchern hatte sie bis vor drei Jahren nur in Th. Liebisch's Physikalischer Kristallographie von 1891 (p. 33) und in des gleichen Autors „Grundriß" von 1896 (p. 41), ferner in E. Sommerfeldt's Geometrischer Kristallographie von 1906 (p. 21, 32, 39, 130 [3]) Erwähnung gefunden. Und seit ich vor drei Jahren der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft in Köln 1908 diese Apparate in neuer Form vorführen konnte, scheint sich hierin auch kaum etwas geändert zu haben.

[1] Kristallklasse in der heutzutage üblichen Bezeichnung.

[2] Flächennormalen.

[3] In einem an letzterer Stelle zitierten anonym erschienenen Werkchen: Leicht faßliche Darstellung der Tesseralgestalten und ihres Spiegelbildwesens. Mit einer Anleitung, verschiedene Tesseralmodelle aus starkem Papier herzustellen. Nebst 4 (lith.) Tafeln mit Netzstücken und 1 Tafel (2 Tabellen) mit berechneten Tesseralgestalten (in qu. Fol.). Freiberg. Verlag von J. G. Engelhardt. 1853. Gr. 8°. 2 Bl. 88 p., habe ich über Kaleidoskope keinerlei Angaben finden können.

Wenn ich es wage, von neuem auch in dieser Zeitschrift, in der schon zweimal, 1889 und 1890, derselbe Gegenstand behandelt worden ist, darauf zurückzukommen, geschieht es zunächst mit Hinblick auf einige dem Unterricht angepaßte Veränderungen, die ich an diesen Kaleidoskopen vorgenommen habe. Dann aber drängt es mich, gleich hier zu betonen, daß über den Zweck, der mit solchen Kaleidoskopen zu erreichen ist, keine vollkommene Klarheit herrscht. Sicherlich will man mit diesen Apparaten die Symmetrieverhältnisse der Kristalle in bequemer Form zur Darstellung bringen und also, da es sich um eine Demonstration mit ebenen Spiegeln handelt, vor allem die Symmetrieebenen verdeutlichen. Hiernach wird es wohl nicht zweckmäßig sein, die tetragonale sphenoidische Tetartoedrie unter die „partiell kaleidoskopischen Klassen" zu stellen, wie das vereinzelt geschehen ist. Denn diese Klasse des tetragonalen Systems besitzt keine Symmetrieebenen, während doch bei der Darstellung durch Spiegel die Vorstellung solcher Ebenen leicht hervorgerufen werden könnte. Aber mir will die ganze Gruppe dieser „partiell kaleidoskopischen Klassen" und damit die bei E. Sommerfeldt (l. c. p. 39) zu findende Einteilung in

Rein kaleidoskopische Klassen,
Partiell kaleidoskopische Klassen,
Nichtkaleidoskopische Klassen,

die auch schon bei E. Hess und neuerdings bei K. Vrba, wenn auch nicht unter diesem Namen, vorkommt, weniger zusagen. Allerdings kann man ein Dyakisdodekaeder mit seinen im Oktanten vorne oben rechts liegenden drei Flächen (321), (132), (213) in ein dreiflächiges rechtwinkeliges Spiegeleck einsetzen und das Dyakisdodekaeder kaleidoskopisch darstellen, aber diese Spiegelung gibt uns kein richtiges Bild von den Symmetrieverhältnissen der parallelflächigen Hemiedrie. Bei der Betrachtung über morphologische Symmetrie handelt es sich doch vor allem um Aufklärung über die symmetrische Wiederholung der Fundamentalbereiche. Man leitet mit Hilfe der Symmetrieelemente — Ebenen, Achsen, Symmetriezentrum — aus einer einzigen Fläche alle anderen ab. Das ist bei einem Dyakisdodekaeder durch einfache Spiegelung natürlich nicht möglich. Man hat daher den Kunstgriff angewandt und in das Spiegeleck nicht eine Fläche, sondern eine Gruppe von drei Flächen hineingesetzt

und damit die dem rechtwinkeligen Spiegeleck fehlende dreizählige Symmetrieachse ihm gleichsam aufgezwungen. Man hat dabei aber nicht einen Fundamentalbereich, sondern eine Gruppe von drei Fundamentalbereichen symmetrisch sich wiederholen lassen, ein Kunstgriff, der nur auf Kosten des Verständnisses der Symmetrieverhältnisse bei dieser „partiell kaleidoskopischen Klasse“ wie bei andern zur Anwendung kommt. Für meine Auffassung sind die Symmetrieklassen in zwei Gruppen zu teilen: in der einen sind die Klassen kaleidoskopisch darstellbar, in der andern sind sie es nicht. Zu der ersteren gehören nur 11 von den 32 Klassen, wie dies auch schon Fedorow 1890 hervorgehoben hat.

Neben der eben betonten Unklarheit über den Zweck dieser interessanten Spiegelecke scheinen überhaupt ihre Eigenschaften in weiteren Kreisen sehr wenig bekannt zu sein. Ich habe mich hiervon im Laufe der letzten sechs Jahre, seit ich die Apparate in der auf den Taf. II und III dargestellten neuen Form konstruiert hatte, oft überzeugen können, wenn ich das Erstaunen, sogar der Fachgenossen, bei der Entwicklung der Kristallformen in diesen Apparaten, bemerken durfte. Da diese geringe Bekanntschaft möglicherweise mit den fehlenden oder den mangelhaften Abbildungen in den bisherigen Publikationen über Kaleidoskope zusammenhängt, wurden die auf den Taf. II und III wiedergegebenen Figuren so ausgeführt und durch Deckblätter verdeutlicht, daß sie das Wesentliche des kaleidoskopischen Vorgangs unzweideutig darzustellen vermögen.

Ich beginne mit dem Kaleidoskop zur Darstellung der Symmetrieverhältnisse in der holoedrischen Klasse des regulären Systems. Man verwendet hierzu nach Möbius drei ebene Glasspiegel, die, mit ihren Spiegelflächen nach innen gekehrt, ein dreikantiges Eck so umschließen, daß der erste und der zweite Spiegel einen Winkel von 45°, der zweite und der dritte Spiegel einen Winkel von 90° und der dritte und der erste Spiegel einen Winkel von 60° einschließen. Wenn auch mit diesen Angaben das Spiegeleck vollkommen eindeutig bestimmt ist, mag zum weiteren Verständnis doch noch hinzugefügt werden, daß diese Spiegel, wenn man sie auseinanderfaltet und in einer Ebene nebeneinander legt wie in Fig. 1, an der inneren Ecke ebene Winkel von 54° 44′, 45° 0′

und $35^0\,16'$ besitzen. Nach außen können sie beliebig, z. B. kreisförmig oder, wie in Fig. 1, geradlinig begrenzt sein. Das fertige Spiegeleck mit passendem Fuß ist in Taf. II Fig. 1 abgebildet, wenn man vorläufig von der darin schwebenden Würfelgestalt absieht. In den mehr oder weniger schräg nach hinten laufenden, vorne durch die Buchstaben A, B und C kenntlich gemachten Kanten treffen sich die Spiegel unter den oben erwähnten Winkeln von 45^0, 90^0 und 60^0. Diese Kanten sind farbig unterschieden, was man in den Abbildungen daran erkennen mag, daß die rote Kante A am dunkelsten und die weiße Kante B am hellsten dargestellt ist. Blickt man nun in diese hohle, innen spiegelnde dreiseitige Pyramide hinein, so sieht man alle Symmetrieachsen der regulären Holoedrie. Man erkennt auch in der Abbildung Taf. II Fig. 1 auf den ersten Blick die drei aufeinander senkrecht stehenden Achsen des regulären Systems, während von den übrigen Symmetrieachsen einige wegen der wiederholten Spiegelung etwas weniger deutlich, in Wirklichkeit aber auch noch sehr gut erkennbar hervortreten. Die verschiedene Färbung der Kanten erleichtert die Orientierung unter den 26 Halbstrahlen ganz ungemein, so daß man bald die sechs roten Normalen der Würfelflächen von den acht gelben Oktaedernormalen und den zwölf weißen Rhombendodekaedernormalen zu trennen vermag. Auch kann man den vier-, drei- und zweizähligen Symmetriecharakter dieser Achsen demonstrieren, indem man passende dreieckige Flächen hinhält oder mit etwas Wachs anheftet, wie dies in Fig. 2 auf Taf. II zu sehen ist[1].

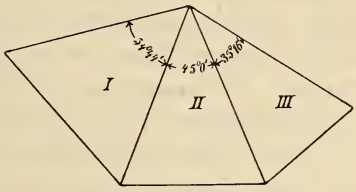


Fig. 1.

[1] In den Tafelfiguren sind die eingesetzten Flächen punktiert, um sie von ihren Spiegelbildern recht deutlich zu unterscheiden. Diese Punktierung hat natürlich auf der fertigen Photographie, die der Autotypie zugrunde liegt, stattgefunden, nicht auf dem Originaleinsatz, da ja sonst auch die Spiegelbilder die Punktierung tragen würden. Zum weiteren Verständnis der Figuren sollen die Deckblätter dienen, auf denen auch die in den Autotypien kaum sichtbaren Symmetrieachsen ausgezogen sind. Hierbei wurden die 4-, 3- und 2zähligen Symmetrieachsen des regulären Systems durch dicke Linien, Doppellinien und quer gestrichelte Linien unterschieden.

Für die kaleidoskopische Darstellung der eigentlichen Kristallformen beginnt man wohl am zweckmäßigsten mit dem Würfel, indem man eine dreieckige ebene Fläche aus Metall oder Pappe so herrichtet, daß sie in den von Spiegel I und II (wegen der Numerierung s. Fig. 1 auf p. 41) gebildeten Winkel bei A hineinpaßt, dabei senkrecht auf der Kante A steht und bei genügend tiefem Hineinschieben den Spiegel III in einer senkrechten Kante berührt. Es handelt sich in diesem Fall um ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck. Dieses legt man zunächst ziemlich weit nach vorne an die Kante A, wie dies in Taf. II Fig. 2 auf der linken Seite zu sehen ist, und demonstriert die siebenmalige Spiegelung, also die zunächst achtzählig erscheinende Symmetrie der Achse A, die sich unter dem Einfluß der dritten Spiegelebene auf eine vierzählige verringert. Ebenso zeigt man durch Verschiebung dieses Dreiecks parallel mit sich selbst quer durch den Raum des Spiegelecks bis zur Kante B die dreimalige und schließlich die fünfmalige Spiegelung bei einem Verschieben des Einsatzes parallel mit sich selbst bis zur Kante C. In Taf. II Fig. 2 ist nicht dieselbe Fläche in dreifacher Wiederholung zur Demonstration dieser Symmetrieachsen abgebildet worden, der Zweck ist hier mit Hexaeder-, Rhombendodekaeder- und Oktaederflächen erreicht.

Um sich von der kaleidoskopischen Wiederholung der Symmetrieachsen nun eine Vorstellung zu machen und damit den ganzen Spiegelungsvorgang zu begreifen, muß man sich erinnern, daß das Spiegelbild eines Gegenstandes sich von neuem spiegeln und daß auch mit dessen Spiegelbild dieser Spiegelungsprozeß sich wiederholen kann.

Wenn in nachstehender Fig. 2 die Spiegel des Kaleidoskops schematisch, in Fig. 3 die vierzähligen und in Fig. 4 die dreizähligen Symmetrieachsen angegeben sind (in Fig. 4 ist das Hexaeder nur zur besseren Orientierung angedeutet), so erhält man zunächst die Bilder der Halbachse a durch folgende Überlegung:

a wird durch Spiegel BC in b gespiegelt,
b „ „ „ AC „ c „ [1]
c „ „ „ AB „ $\bar{c}$ „

[1] Die Vorstellung von der Spiegelung wird leichter gewonnen, wenn man sich den Spiegel AC nach oben erweitert denkt.

$\bar{c}$ wird durch Spiegel A C in $\bar{b}$ gespiegelt[1],
$\bar{b}$ „ „ „ B C „ $\bar{a}$ „ [2].

Ferner leitet sich ebenso einfach das Büschel der acht Oktaedernormalen aus der einen Kaleidoskopkante C (1 in nachstehender Fig. 4) ab.

1 wird durch Spiegel A B in 2 gespiegelt,
2 „ „ „ A C „ 3 „
3 „ „ „ A B „ 4 „
4 „ „ „ B C „ $\bar{3}$ „
$\bar{3}$ „ „ „ A C „ $\bar{2}$ „
$\bar{2}$ „ „ „ A B „ $\bar{1}$ „
$\bar{3}$ „ „ „ A B „ $\bar{4}$ „

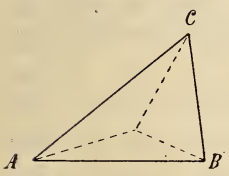


Fig. 2.

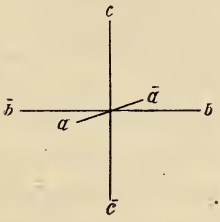


Fig. 3.

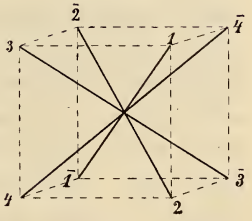


Fig. 4.

Auch die im Kaleidoskop zu überblickenden zwölf Rhombendodekaedernormalen kann man sich durch ähnlich einfache Spiegelungsvorgänge aus der bei B in Taf. II Fig. 1 austretenden Kaleidoskopkante ableiten.

In ganz analoger Weise erfolgt nun schließlich auch die Wiederholung jedes in das Spiegeleck gebrachten Gegenstandes, z. B. auch jeder Fläche. Überraschend — trotz aller Einfachheit des optischen Vorgangs — ist aber hier die Wirkung erst, wenn eine solche Fläche nicht vorne liegt, sondern ganz nach hinten geschoben wird, und die Spiegelung an allen drei Spiegeln gleichzeitig zu übersehen ist. Bei der senkrecht zur vorderen Kante A gelegenen Fläche tritt das Bild des Würfels deutlich hervor und ist bei den großen Dimensionen des Spiegelecks — die Kanten haben bis zu 70 cm Länge und die gespiegelten Formen 20 bis 25 cm Ausdehnung — auch von einem zahlreichen Publikum zu erkennen.

[1] Die Vorstellung von der Spiegelung wird leichter gewonnen, wenn man sich den Spiegel A C nach unten erweitert denkt.

[2] Die Vorstellung von der Spiegelung wird leichter gewonnen, wenn man sich den Spiegel B C nach hinten erweitert denkt.

Diese Spiegelung wiederholt sich bei den übrigen sechs Holoedertypen, wenn man den zu spiegelnden Flächen geeignete Lagen gibt, wie dies an der Darstellung eines Achtundvierzigflächners in Taf. II Fig. 3 zu erkennen ist. An trüben Tagen und in Hörsälen, in denen die Kaleidoskope vom Fenster abgewandt stehen, erhöht eine mit Reflektor versehene, nach vorne abgeblendete Glühlampe, wie sie das Kaleidoskop Taf. III Fig. 6—8 trägt, die Wirkung der ganzen Erscheinung.

Um nun bei Demonstrationen während des Vortrags möglichst schnell die richtige Lage der Flächen zu erhalten, befestigt man sie auf Einsätzen, die in das Spiegeleck hineinpassen[1]. Ferner sind diejenigen Kanten der Flächen, die bei der Spiegelung als Kanten des Polyeders auftreten, etwa $\frac{3}{4}$ cm breit schwarz angestrichen, damit man sie sofort von den infolge der Spiegelung auftretenden Trennungsfugen unterscheidet, die der Neuling zuerst wohl auch für Kanten halten könnte, was sie ja nicht in allen Fällen sind. Bei dem Würfel sieht man nun je acht, bei dem Oktaeder je sechs, bei dem Rhombendodekaeder je vier, bei den drei Vierundzwanzigflächnern je zwei Flächenstücke in eine Ebene fallen, während bei den Achtundvierzigflächnern jede Fläche eine andere Lage hat. Man kann hier also auch sehr überzeugend dartun, daß in der regulären Holoedrie eigentlich jedes Holoeder ein Achtundvierzigflächner ist, anders ausgedrückt, daß man es hier immer mit 48 Fundamentalbereichen zu tun hat, oder daß unser holoedrisches Kaleidoskop den 48. Teil des ganzen Raumes umspannt, wie er auf der Kugel in Taf. II Fig. 4 von dem weißen sphärischen Dreieck überdeckt wird. Dieser wichtige Zusammenhang zwischen Spiegeleck und Fundamentalbereich kann noch dadurch verdeutlicht werden, daß man aus einer Kugel das weiße Dreieck in Taf. II Fig. 4 herausschneidet, das Spiegeleck so hineinsteckt, daß seine Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt und nun das herausgeschnittene sphärische Dreieck in das Kaleidoskop hineinstellt. Hier ergänzt sich dann das Dreieck durch die Spiegelung zur Kugel (Taf. II Fig. 5).

Durch Vereinigung mehrerer Flächenlagen in einem Einsatz lassen sich auch Kombinationen kaleidoskopisch darstellen. Bei undurchsichtigen Flächeneinsätzen sieht man nur die vordere

[1] Über die Art der Berechnung dieser Einsätze siehe Anhang p. 47—50.

Hälfte der Körper, bei dem Würfel also nur drei Flächen. Will man noch die hinteren Flächen zur Darstellung bringen, so kann man Stäbe oder Rahmen einsetzen. Bei der Würfeldarstellung bringt man einen solchen Stab senkrecht zum Spiegel A B dicht an den Spiegel B C und schiebt ihn möglichst weit nach hinten; man sieht dann nicht nur neun Kanten des Würfels, wie in Taf. II Fig. 1, sondern alle zwölf, also auch die hinteren drei Würfelkanten.

Als zweites Kaleidoskop beschreibe ich das zur Darstellung der Gestalten der geneigtflächigen Hemiedrie des regulären Systems. Die hierzu erforderlichen Spiegel sind in nebenstehender Fig. 5 abgebildet, wo die in einem Punkt sich berührenden Dreiecke Winkel von 54° 44′, 70° 32′ und 54° 44′ besitzen und im übrigen wieder beliebig begrenzt sein können. Faltet man diese drei Spiegel

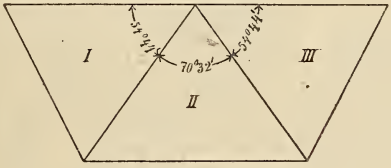


Fig. 5.

mit den Spiegelflächen nach innen zu einem körperlichen Eck zusammen, so bilden Spiegel I und II, wie auch II und III, je einen Winkel von 60°, Spiegel I und III einen Winkel von 90° miteinander. Ein solches Spiegeleck umfaßt einen Fundamentalbereich von der doppelten Größe des vorigen, also von dem Umfang der beiden in Taf. II Fig. 4 markierten Dreiecke, von denen das eine ganz weiß, das andere nur punktiert weiß hervorgehoben ist. Dieses fertige Spiegeleck ist in Taf. III Fig. 6 abgebildet, wenn man von der darin schwebenden Tetraedergestalt zunächst wieder absieht. Seine große Dimension (längste vordere Kante 75 cm) und seine erhebliche Apertur erlaubt, auch bei genau aufrechter Lage der vertikalen Achse, eine besonders bequeme Übersicht der gespiegelten Formen; es kann also bei dem gespiegelten Körper wenigstens in bezug auf die vertikale Achse, die kristallographisch richtige Orientierung eingehalten werden. Die horizontalen Achsen muß man bei einem größeren Auditorium allerdings ein wenig

nach rechts und links wandern lassen, um die Erscheinung allen Zuschauern zu zeigen.

Die Kanten des Spiegelecks sind auch hier zur schnelleren Orientierung verschieden gefärbt. Man sieht auf den ersten Blick, daß die zweizähligen Symmetrieachsen der regulären Holoedrie, also die zwölf Rhombendodekaeder-Halbnormalen, verschwunden und im ganzen nur 14 Halbnormalen geblieben sind. Unter diesen lassen sich die sechs Würfelnormalen leicht von den acht Oktaedernormalen trennen, und auch der zweizählige Charakter der ersteren, der dreizählige Charakter der letzteren ist an Hand der in Taf. III Fig. 6 und 7 gespiegelten Tetraedergestalt mühelos zu demonstrieren. Der undurchsichtige Einsatz in Taf. III Fig. 7 läßt die hinteren Flächen des Tetraeders, der Stab in Taf. III Fig. 6 dagegen die ganze tetraedrische Gestalt zur Erscheinung kommen.

Setzt man in ein solches hemiedrisches Kaleidoskop nicht diesen hemiedrischen Tetraedereinsatz, sondern den ihm in der Flächenlage gleichen holoedrischen Oktaedereinsatz, den man durch ein wenig Wachs in seiner Lage festhält, so kann man sehr hübsch die Verschiedenheit der Oktanten in der geneigtflächigen Hemiedrie demonstrieren (s. Taf. III Fig. 8). Auch läßt sich durch Austausch der entsprechenden Würfeleinsätze der Unterschied zwischen einem holoedrischen und einem hemiedrischen Würfel recht wirkungsvoll erläutern. Verschiedene Einsätze, die nach den im Anhang mitgeteilten Methoden zu berechnen sind, bringen auch hier einfache und kombinierte Kristallgestalten kaleidoskopisch zum Ausdruck.

Zur Darstellung der Formen der quadratischen, hexagonalen, trigonalen und rhombischen Holoedrie bedarf es eines horizontalen Spiegels, auf den zwei andere Spiegel senkrecht aufgesetzt und gegeneinander unter 45°, 30°, 60° und 90° geneigt sind. Für die Darstellung der diesen vier Kristallklassen entsprechenden Hemimorphien genügen die Winkelspiegel allein ohne den horizontalen Spiegel, und für die elfte kaleidoskopische Klasse, die Hemiedrie des monoklinen Systems, ist nur ein einfacher Spiegel erforderlich, um die ganze diesem Kristallgebäude innewohnende Symmetrie zum Ausdruck zu bringen. Die verschiedenen, zu den letzten neun Klassen passenden Einsätze lassen sich wieder nach den im Anhang mitgeteilten Methoden berechnen.

Zur Übersicht seien die elf Klassen und die zu ihrer kaleidoskopischen Darstellung erforderlichen Spiegel mit den Flächenwinkeln zusammengestellt.

1.	Holoedrie des regulären Systems . .	Spiegeleck von 45°, 90°, 60°
2.	Geneigtfl. Hem. des regulären Systems	„ „ 90°, 60°, 60°
3.	Holoedrie des quadratischen Systems	„ „ 90°, 90°, 45°
4.	„ „ hexagonalen Systems .	„ „ 90°, 90°, 30°
5.	„ „ trigonalen Systems . .	„ „ 90°, 90°, 60°
6.	„ „ rhombischen Systems .	„ „ 90°, 90°, 90°
7.	Hemimorphie des quadratischen Systems . .	Winkelspiegel von 45°
8.	„ „ hexagonalen Systems . . .	„ „ 30°
9.	„ „ trigonalen Systems	„ „ 60°
10.	„ „ rhombischen Systems . . .	„ „ 90°
11.	Hemiedrie des monoklinen Systems	Einfacher Spiegel.

Bei den letzten neun Klassen sind die Vorgänge bei den Spiegelungen so einfach, daß es genügen wird, in Taf. III Fig. 9 ein Modell der Holoedrie des quadratischen Systems mit der quadratischen Bipyramide 1. Art. abzubilden.

Wenn man darauf verzichtet, alle elf Klassen nebeneinander zu demonstrieren, kann man zunächst den einfachen Spiegel 11 entbehren und ferner die Winkelspiegel 7 bis 10 aus den Spiegelecken 3 bis 6 durch Abdecken der horizontalen Spiegel herstellen. Zur weiteren Vereinfachung lassen sich dann auch die vier Spiegelecke 3 bis 6 durch ein einziges Kaleidoskop mit beweglichem Winkelspiegel ersetzen, und schließlich kann man das erste Kaleidoskop aus dem zweiten einfach herstellen, wenn man dieses durch einen horizontalen Einsatzspiegel halbiert. Man kann also alle kaleidoskopischen Klassen — allerdings nicht nebeneinander — darstellen mit Kaleidoskop No. 2, einem Einsatzspiegel (der auch als horizontaler Spiegel bei 3 bis 6 dienen kann) und einem beweglichen Winkelspiegel nebst zugehörigen Einsätzen für die verschiedenen Kristallformen.

Anhang.

Als Einsätze, die in die Spiegelecke passen, lassen sich dreiseitige Pyramiden verwenden, die ihre Spitze in das Eck hineinsenken und ihre Basis als die zu spiegelnde Fläche nach außen kehren. Die Berechnung dieser dreiseitigen Einsatzpyramiden nach ihren Flächen- und Kantenwinkeln ist folgendermaßen ausführbar.

1. Berechnung der Flächenwinkel. Diese Winkel werden von den Flächen der aus dem Netz Fig. 6 herzustellenden dreiseitigen Pyramide eingeschlossen, wenn man die drei Flächen I, II, III nach hinten umbiegt und in einer Spitze zusammenstoßen läßt. Die zu spiegelnde Fläche ist bei diesem Netz mit 0, die anderen Flächen, die sich bei dem fertigen pyramidalen Einsatz den Spiegelflächen glatt anlegen lassen, sind mit I, II, III bezeichnet, entsprechend der Bezeichnung in Fig. 1 auf p. 41.

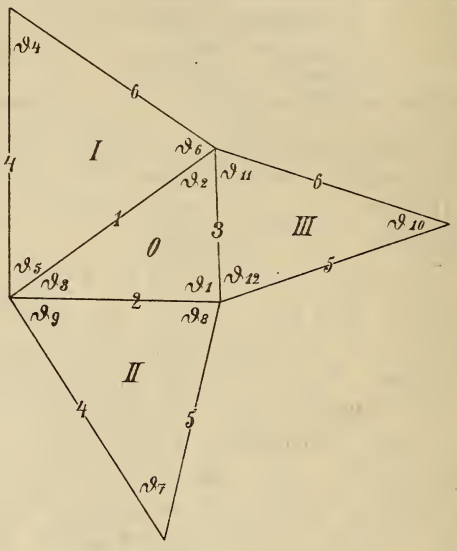


Fig. 6.

Die Symbole dieser vier Flächen seien $(h_o k_o l_o)$, $(h_I k_I l_I)$, $(h_{II} k_{II} l_{II})$, $(h_{III} k_{III} l_{III})$. Das erste Symbol ist also das der Kristallfläche, die kaleidoskopiert werden soll. Die Symbole der drei anderen Flächen stimmen mit denen der Spiegel des jeweilig zur Anwendung kommenden Spiegelecks überein. Die gesuchten Flächenwinkel sind die Winkel zwischen den Flächen 0 und I, 0 und II, 0 und III, I und II, II und III, III und I. Die letzten drei Winkel sind die gleichen bei allen Einsätzen ein und desselben Spiegelecks, und zwar sind es die Flächenwinkel dieses Spiegelecks selbst, da ja die Einsätze diesen Ecken sich nach hinten genau anschließen sollen. Diese Winkel sind mit dem Eck ohne weiteres gegeben und betragen z. B. bei

allen Einsätzen des holoedrisch-regulären Kaleidoskops 45°, 90° und 60°, bei allen Einsätzen der quadratischen Kaleidoskope 90°, 90° und 45° und so entsprechend bei den andern Spiegelecken. Die anderen drei Winkel zwischen 0 und I, 0 und II, 0 und III, können aber bei den verschiedenen Einsätzen voneinander abweichen. Für den Wert der Normalenwinkel φ_{oI}, φ_{oII}, φ_{oIII}, φ_{oIV} dieser Flächen gilt bei rechtwinkeligem Achsenkreuz und bei dem Achsenverhältnis a : b : c die Formel

$$\cos\varphi_{oI} = \frac{(bc)^2 h_o h_I + (ac)^2 k_o k_I + (ab)^2 l_o l_I}{\sqrt{(bc)^2 h_o^2 + (ac)^2 k_o^2 + (ab)^2 l_o^2}\,\sqrt{(bc)^2 h_I^2 + (ac)^2 k_I^2 + (ab)^2 l_I^2}},$$

die durch zyklische Vertauschung der Indizes zu den Werten für φ_{oII}, φ_{oIII}, φ_{oIV} führt. Diese Formel gilt für das rhombische System, für das reguläre System nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\cos\varphi_{oI} = \frac{h_o h_I + k_o k_I + l_o l_I}{\sqrt{h_o^2 + k_o^2 + l_o^2}\,\sqrt{h_I^2 + k_I^2 + l_I^2}}.$$

In manchen Fällen lassen sich diese Winkel φ, auch ohne die Formel, durch ganz einfache stereometrische Überlegungen finden, z. B. muß der Hexaedereinsatz die Normalenwinkel $\varphi_{oI} = 90°$, $\varphi_{oII} = 90°$, $\varphi_{oIII} = 135°$ tragen, da die Hexaederfläche diese Winkel mit den durch die Spiegel dargestellten Symmetrieebenen bildet.

2. Berechnung der Kantenwinkel. Diese Winkel werden von den Kanten der Netze gebildet. Jedes Netz hat zwölf solcher Kantenwinkel, die in Fig. 6 mit ϑ_1 bis ϑ_{12} bezeichnet sind und sechs verschiedene Kanten, die in Fig. 6 die Ziffern 1 bis 6 tragen.

Die Kantensymbole dieser sechs Kanten seien $[h_1 k_1 l_1]$, $[h_2 k_2 l_2]$, ... $[h_6 k_6 l_6]$, die sich nach bekanntem Rechenschema aus den aneinanderstoßenden Flächen 0, I, II, III berechnen. Die Winkel der Kanten findet man nach den Formeln:

$$\begin{aligned}
\cos\vartheta_1 &= \cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3\\
\cos\vartheta_2 &= \cos\alpha_3\cos\alpha_1 + \cos\beta_3\cos\beta_1 + \cos\gamma_3\cos\gamma_1\\
\cos\vartheta_3 &= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\\
\cos\vartheta_4 &= \cos\alpha_4\cos\alpha_6 + \cos\beta_4\cos\beta_6 + \cos\gamma_4\cos\gamma_6 \text{ usw.},
\end{aligned}$$

wo $\cos\alpha_1$ usw. die Richtungskosinusse der Kanten sind. Diese Richtungskosinusse berechnen sich aus den Kantensymbolen $(h_1 k_1 l_1)$ usw. nach folgenden Formeln:

$$\cos\alpha_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}};$$

$$\cos\beta_1 = \frac{k_1}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}}; \quad \cos\beta_2 = \frac{k_2}{\sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}};$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{l_1}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2}}; \quad \cos\gamma_2 = \frac{l_2}{\sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}.$$

Auch die Winkel ϑ kann man in vielen Fällen ohne diese Formeln durch ganz einfache stereometrische Überlegungen finden. z. B. müssen die Kantenwinkel ϑ_4 für alle Einsätze eines Spiegelecks untereinander gleich sein und mit dem betreffenden Kantenwinkel dieses Spiegelecks übereinstimmen; dasselbe gilt für ϑ_7 und ϑ_{10}.

Herr Dr. F. Krantz in Bonn hat die Anfertigung dieser Kaleidoskope nach meinen Angaben übernommen.

Heidelberg, 3. November 1911.

Tafel-Erklärungen.

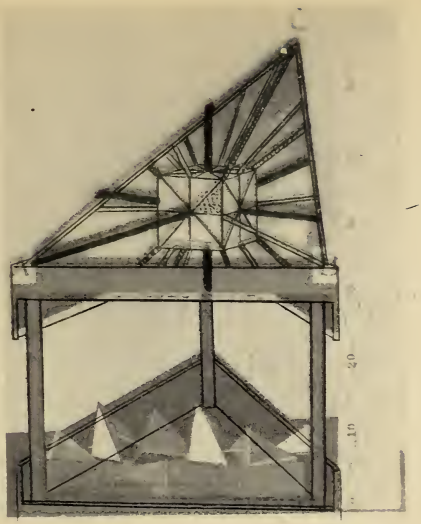
Die Punktierung der in die Kaleidoskope eingesetzten Flächen etc. wurde auf den fertigen Photographien, die den Autotypien zugrunde liegen, angebracht, um diese Einsätze von ihren Spiegelbildern zu unterscheiden.

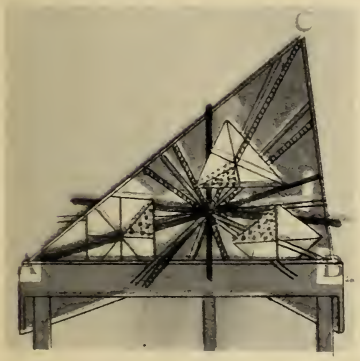
Tafel II.

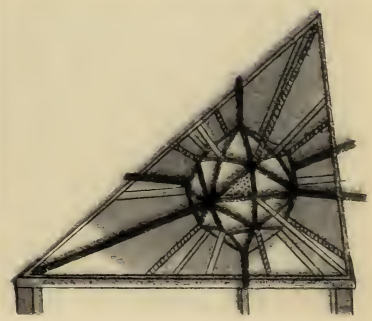
Fig. 1. Kaleidoskopierung des Hexaeders.
„ 2. Demonstrierung der 4-, 3- und 2zähligen Symmetrieachsen.
„ 3. Kaleidoskopierung des Hexakisoktaeders.
„ 4. Fundamentalbereich der regulären Holoedrie: Weiß ausgefülltes Dreieck. Fundamentalbereich der geneigtflächigen Hemiedrie: Weiß ausgefülltes und weiß punktiertes Dreieck zusammen genommen.
„ 5. Kaleidoskopierung des Fundamentalbereichs der regulären Holoedrie.

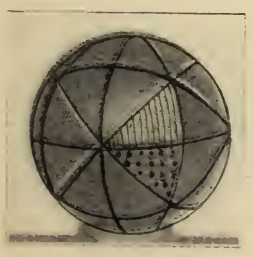
Tafel III.

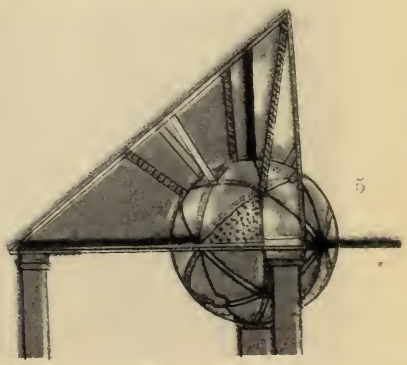
Fig. 6. Kaleidoskopierung des Tetraeders mittelst eines Stabeinsatzes.
„ 7. Kaleidoskopierung des Tetraeders mittelst eines Flächeneinsatzes.
„ 8. Demonstrierung der Ungleichwertigkeit tetraedrisch-hemiedrischer Oktanten.
„ 9. Kaleidoskopierung einer quadratischen Bipyramide.



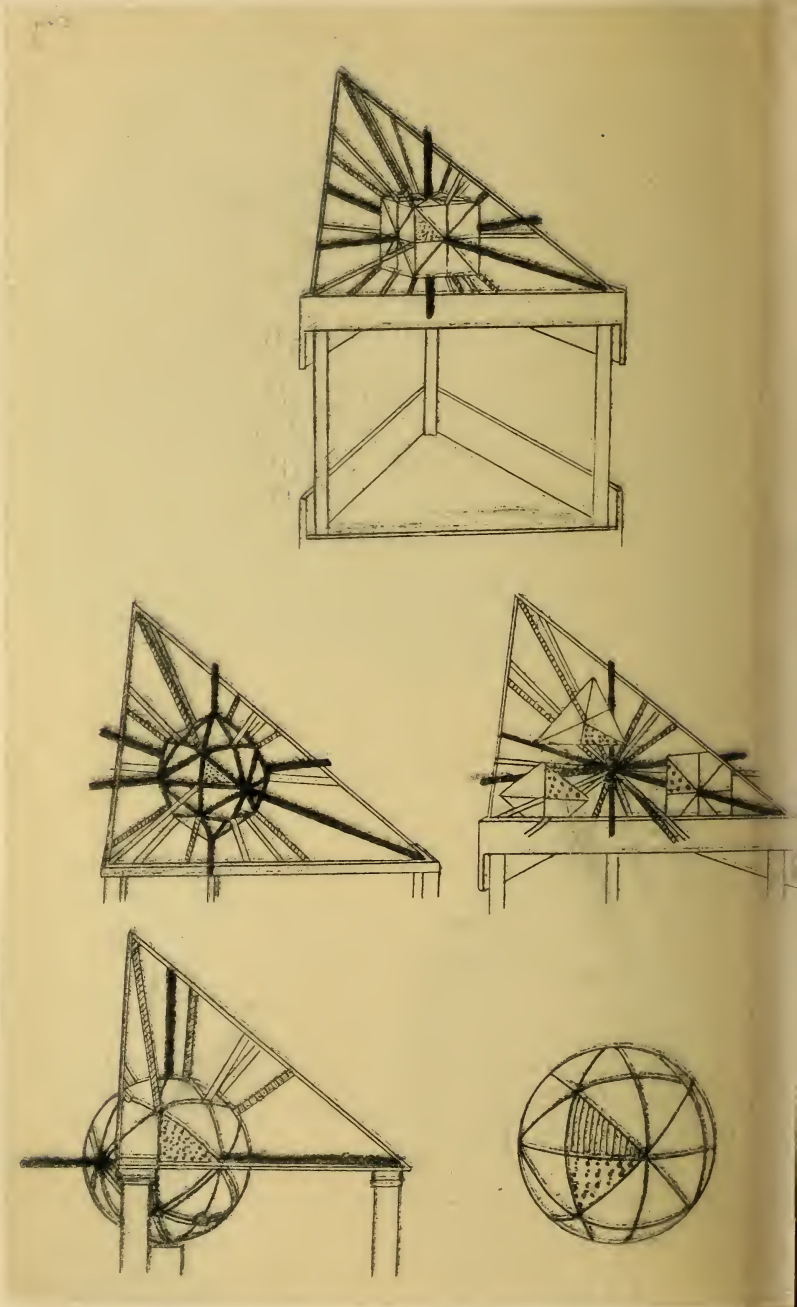


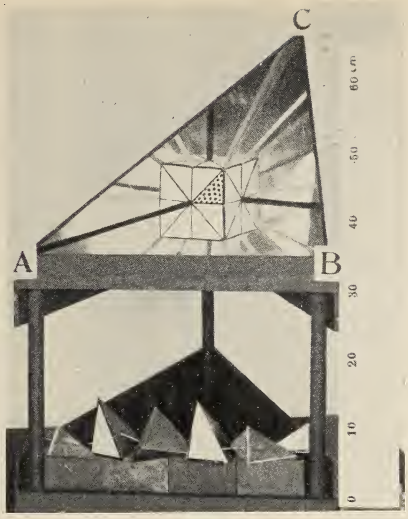




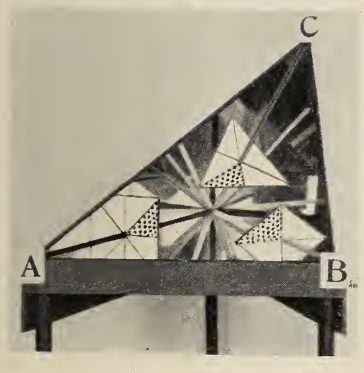


E. A. Wülfing: Ueber kristallographische Kaleidoskope.

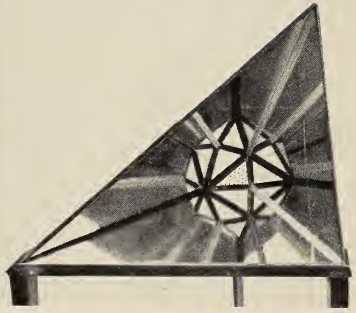




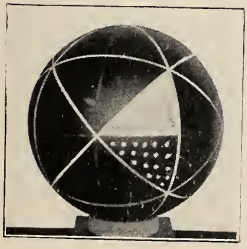
1



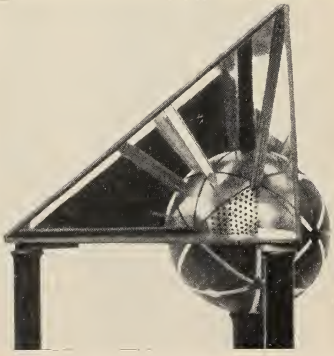
2



3

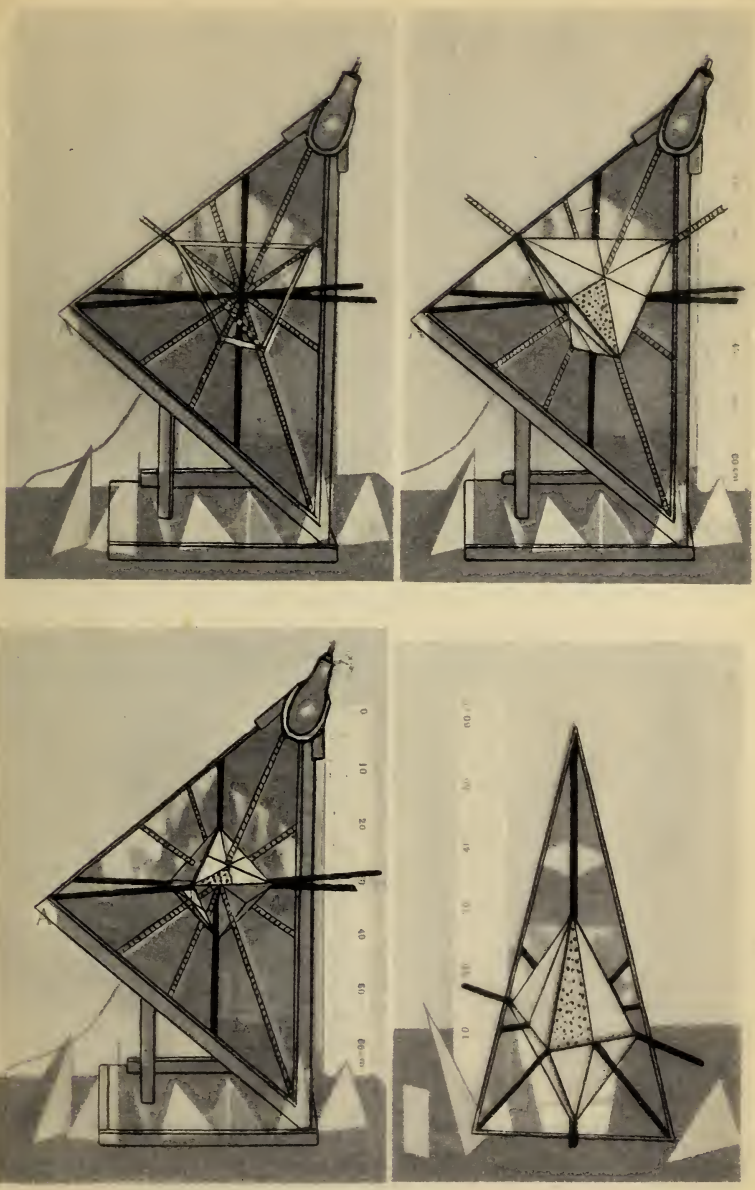


4

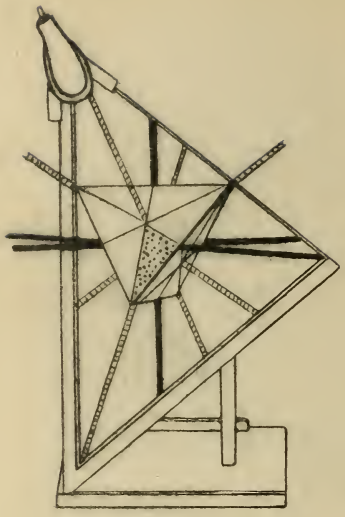


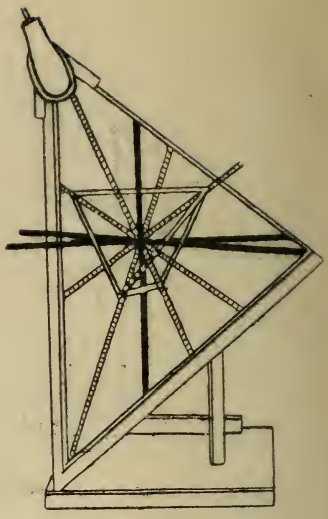
5

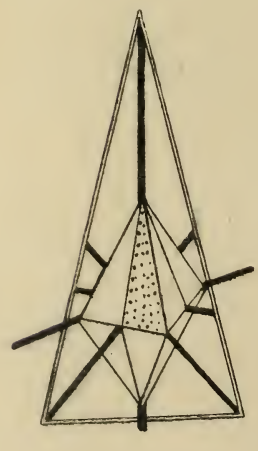
E. A. Wülfing: Ueber kristallographische Kaleidoskope.

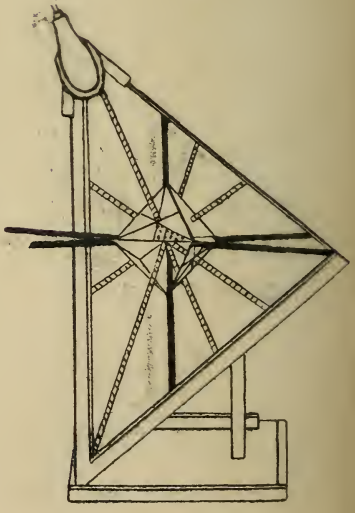


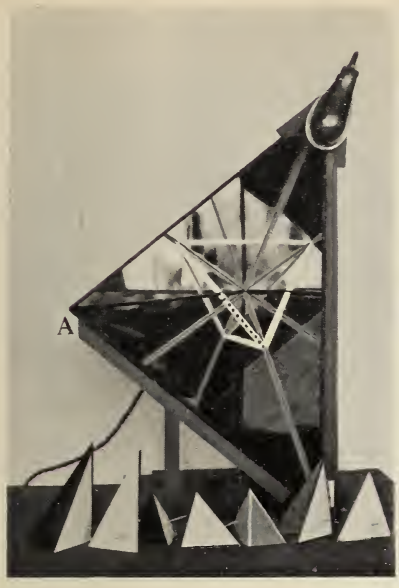
E. A. Wülfing: Ueber kristallographische Kaleidoskope.



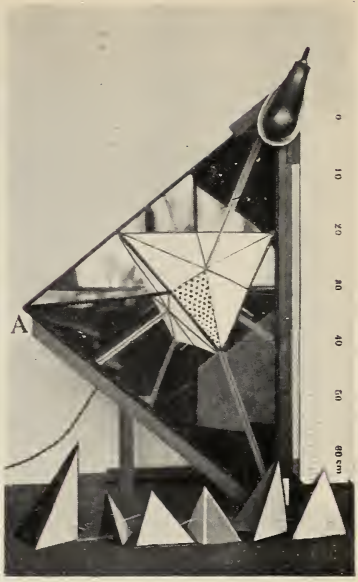








6



7

8

9

E. A. Wülfing: Ueber kristallographische Kaleidoskope.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1912

Band/Volume: 1912

Autor(en)/Author(s): Wülfing Ernst Anton

Artikel/Article: Über kristallographische Kaleidoskope. 37-50