

## Eine einfache Form für die POTIER'sche Relation bei durchsichtigen inaktiven Kristallen und das Gesetz von der Reziprozität der Zustrahlung für ein Kristallprisma.

Von

Fr. Schwietring in Celle (Hannover).

Mit 6 Textfiguren.

A. POTIER<sup>1</sup> hat eine sehr allgemeine Relation für durchsichtige inaktive Kristalle dadurch gewonnen, daß er zwei Punkte des FRESNEL'schen Ellipsoids mit den beiden entsprechenden Punkten des Indexellipsoids verglich. Für zwei beliebige in einem Kristall fortschreitende Wellen stellt die Relation eine Beziehung zwischen den Orientierungswinkeln der Normalen und den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dar. Für die vier Wellen im Kristall, die nach der Konstruktion von J. MAC CULLAGH einer in einem einfachbrechenden Außenmedium einfallenden Welle entsprechen, liefert die Relation sechs Gleichungen zwischen je zwei Orientierungswinkeln der Normalen. Aus diesen Gleichungen, die sich für spezielle Fälle schon bei F. E. NEUMANN und J. MAC CULLAGH finden, fließt in der Lehre von der Reflexion und Brechung des Lichtes eine große Reihe allgemeiner Gesetze. So hat POTIER mit ihrer Hilfe das Gesetz von der Reziprozität der Zustrahlung

<sup>1</sup> A. POTIER, Journ. d. Phys. (2.) 10. 349—357. 1891. Vgl. P. KAEMMERER, Inaug.-Diss. Göttingen 1904. Dies. Jahrb. Beil.-Bd. XX. 191—208. 1905.

bei der Kristallreflexion und beim Durchgang durch ein Kristallprisma als gültig erwiesen; außerdem ist er auf diese Weise zu einem schönen Resultat für das Polarisationsazimut<sup>1</sup> der aus einem Kristall austretenden Welle geführt. BRUNHES<sup>2</sup> hat mit demselben Hilfsmittel für die Amplitudenverhältnisse der vier im Innern einer Kristallplatte reflektierten Wellen Ergebnisse erzielt, welche die zu dem gleichen Zwecke von F. E. NEUMANN abgeleiteten Formeln an Übersichtlichkeit erheblich übertreffen. Auf der nämlichen Grundlage ist von mir<sup>3</sup> ein allgemeines Gesetz für die uniradiellen Polarisationsrichtungen in der einfallenden und in der reflektierten Wellenebene bewiesen worden. Ferner habe ich gezeigt<sup>4</sup>, daß POTIER'S Resultat für die austretende Welle bei einem starkbrechenden Außenmedium auch auf das Zwischengebiet der beiden Grenzkegel zu übertragen ist, weil die fragliche Relation auch auf erlöschende Wellen angewendet werden kann.

In der vorliegenden Abhandlung soll gezeigt werden, daß die POTIER'Sche Relation mit Benutzung des Vektorbegriffes auf eine sehr einfache Form gebracht werden kann. Diese läßt sich unabhängig von jedem Koordinatensystem in einen kurzen Satz über das FRESNEL'Sche Ellipsoid und das Indexellipsoid kleiden, der das eigentliche Wesen der Relation anschaulich zum Ausdruck bringt und damit dem besonderen Interesse der Kristallographen dient. Schon J. MAC CULLAGH hat bemerkt, daß die Relation eine Eigenschaft der Strahlenfläche darstellen müsse; deshalb soll untersucht werden, auf welche Tatsachen sich die Herleitung der Relation wesentlich stützt. Ferner soll ein Versehen in der Arbeit von P. KAEMMERER aufgedeckt werden, das sich auf das Vorzeichen des Winkels zwischen Strahl und Normale bezieht. Endlich wird darauf aufmerksam gemacht, daß der POTIER'Sche Beweis für das Reziprozitätsgesetz bei der

<sup>1</sup> Vgl. F. SCHWIETRING, Inaug.-Diss. Göttingen 1908. Dies. Jahrb. Beil.-Bd. XXVI. 328. 1908.

<sup>2</sup> B. BRUNHES, Ann. d. chim. et d. phys. VI. 30. 119. 1893. Vgl. E. GENZKEN, Inaug.-Diss. Berlin 1910. Dies. Jahrb. Beil.-Bd. XXX. 390, 403, 404. 1910.

<sup>3</sup> F. SCHWIETRING, a. a. O. 331.

<sup>4</sup> F. SCHWIETRING, a. a. O. 350—352.

Brechung durch ein Kristallprisma an unrichtigen Formeln durchgeführt ist, deshalb wird der POTIER'sche Gedankengang noch einmal ausführlich mit den richtigen Gleichungen dargestellt.

## I. Die Herleitung der neuen Form für die POTIER'sche Relation.

1. Das FRESNEL'sche Ellipsoid  $F$  sei bezogen auf ein rechtwinkliges englisches Koordinatensystem  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ , dessen Ursprung im Mittelpunkt  $O$  des Ellipsoides liegt. Die Richtungskosinus der Koordinatenachsen  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  gegen die optischen Symmetrieachsen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  des Kristalls seien gegeben durch das Schema:

	$X$	$Y$	$Z$
$\mathfrak{X}$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$\mathfrak{Y}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$\mathfrak{Z}$	$w_1$	$w_2$	$w_3$

Bezeichnen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Hauptlichtgeschwindigkeiten des Kristalls, so haben die sechs Polarisationskonstanten für einfarbiges Licht die Werte:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2 + c^2 u_3^2 \\
 a_{22} &= a^2 v_1^2 + b^2 v_2^2 + c^2 v_3^2 \\
 a_{33} &= a^2 w_1^2 + b^2 w_2^2 + c^2 w_3^2 \\
 a_{23} &= a^2 v_1 w_1 + b^2 v_2 w_2 + c^2 v_3 w_3 \\
 a_{31} &= a^2 w_1 u_1 + b^2 w_2 u_2 + c^2 w_3 u_3 \\
 a_{12} &= a^2 u_1 v_1 + b^2 u_2 v_2 + c^2 u_3 v_3.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung des FRESNEL'schen Ellipsoides  $F$  lautet dann:

$$2f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}xz + 2a_{12}xy = 1, \quad 1.$$

wo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Koordinaten eines Punktes  $P$  auf  $F$  angeben. Wird um  $O$  das Indexellipsoid  $J$  beschrieben, so entspricht jedem Punkte  $P$  auf  $F$  ein Punkt  $Q$  auf  $J$ . Denn  $F$  und  $J$  sind reziprokale Flächen, die durch die Pol- und Polarenverwandtschaft für die Kugel vom Radius 1 einander zugeordnet sind. Einem Punkte  $P$  auf  $F$  entspricht also die Polarebene  $\mathfrak{P}$ , die  $J$  in  $Q$  berührt; umgekehrt entspricht  $Q$  die Polarebene  $\mathfrak{Q}$ , die  $F$  in  $P$  berührt (Fig. 1).  $OP$  und  $OQ$  sind nun aber zwei Vektoren, deren absolute

Werte für eine Welle die Strahlengeschwindigkeit und den zugehörigen Brechungsindex vorstellen. Bezeichnet man diese Vektoren mit  $p, q$ , den von ihnen bei  $O$  gebildeten Winkel mit  $\varphi$ , ihre absoluten Beträge  $|OP|, |OQ|$  mit  $|p|, |q|$ , ihre Schnittpunkte mit den Ebenen  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{Q}$  mit  $A$  und  $B$ , so ist nach der Konstruktion:

$$|OQ| \cdot |OB| = 1, \quad |OP| \cdot |OA| = 1.$$

Weiter ist nach Fig. 1:

$$|OQ| \cdot \cos \varphi = |OA|.$$

Jetzt soll der Begriff des skalaren Produktes  $p \cdot q$  zweier Vektoren  $p$  und  $q$  benutzt werden, d. h. das Produkt aus dem absoluten Betrage des einen Vektors und der Projektion des andern Vektors auf den ersten:

$$p \cdot q = |p| \cdot |q| \cdot \cos \varphi = |OP| \cdot |OQ| \cdot \cos \varphi = |OP| \cdot |OA| = 1. \quad 2.$$

Damit ergibt sich:

Zwei einander entsprechende Punkte  $P, Q$  des FRESNEL'schen Ellipsoides  $F$  und des Indexellipsoides  $J$  sind solche Punkte, deren zugehörige Vektoren  $p, q$  das skalare Produkt  $p \cdot q = 1$  besitzen.

2. Der Punkt  $Q$  auf  $J$  habe die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ . Um sie zu bestimmen, wird die Gleichung der Tangentialebene  $\mathfrak{Q}$  in  $P$  an  $F$  aufgestellt;  $P$  ist dabei ein beliebiger, aber fest gewählter Punkt auf  $F$  mit den Koordinaten  $x, y, z$ . Hat ein in  $\mathfrak{Q}$  beweglicher Punkt die Koordinaten  $u, v, w$ , so lautet die Gleichung von  $\mathfrak{Q}$ :

$$(u-x) \frac{\partial f}{\partial x} + (v-y) \frac{\partial f}{\partial y} + (w-z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Die HESSE'sche Normalform für eine beliebige Ebene heißt:

$$u \cos \psi + v \cos \pi + w \cos \omega - d = 0,$$

wo  $\cos \psi, \cos \pi, \cos \omega$  die Richtungskosinus der Normalen und  $d$  die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Ebene bedeuten. Das Lot  $OB$  hat demnach die Richtungskosinus:

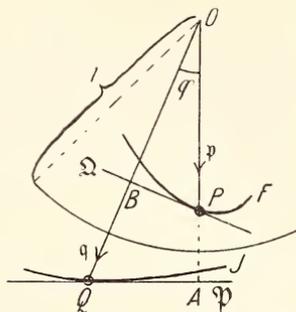


Fig. 1. Die Verwandtschaft zwischen dem FRESNEL'schen Ellipsoid  $F$  und dem Indexellipsoid  $J$ .

$$\cos \psi = \frac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}, \quad \cos \pi = \frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}},$$

$$\cos \omega = \frac{f'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}};$$

ferner ist das Lot selbst:

$$OB = \frac{x f'_x + y f'_y + z f'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}.$$

Da:

$$OQ = \frac{1}{OB},$$

und:

$$\xi = OQ \cos \psi, \quad \eta = OQ \cos \pi, \quad \zeta = OQ \cos \omega,$$

so ist:

$$\xi = \frac{f'_x}{x f'_x + y f'_y + z f'_z}, \quad \eta = \frac{f'_y}{x f'_x + y f'_y + z f'_z},$$

$$\zeta = \frac{f'_z}{x f'_x + y f'_y + z f'_z}. \quad 3.$$

Nach 1 ist  $f_{(x, y, z)}$  eine homogene Funktion 2. Grades, folglich ist:

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = 2f,$$

so daß nach 1:

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = 1.$$

Mithin ist:

$$\xi = f'_x, \quad \eta = f'_y, \quad \zeta = f'_z. \quad 4.$$

3. Es seien jetzt  $P_1, P_2$  zwei Punkte auf  $F$  mit den Koordinaten  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$ ; die entsprechenden Punkte auf  $J$  seien  $Q_1, Q_2$  mit den Koordinaten  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  und  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ ; die vier zugehörigen Vektoren seien  $p_1, p_2, q_1, q_2$ . Nach 2 ist dann:

$$p_1 q_1 = p_2 q_2 = 1. \quad 5.$$

Hat  $p_1$  die Richtungskosinus  $\cos \lambda_1, \cos \mu_1, \cos \nu_1$  und  $q_2$  die Richtungskosinus  $\cos \psi_2, \cos \pi_2, \cos \omega_2$  und ist  $\delta$  der Winkel der beiden Vektoren, so ist das skalare Produkt:

$$p_1 \cdot q_2 = |p_1| \cdot |q_2| \cos \delta,$$

oder da:

$$\cos \delta = \cos \psi_2 \cdot \cos \lambda_1 + \cos \pi_2 \cos \mu_1 + \cos \omega_2 \cos \nu_1$$

und:

$$x_1 = |p_1| \cos \lambda_1, \quad \xi_2 = |q_2| \cos \psi_2 \quad \text{usw.},$$

$$p_1 \cdot q_2 = x_1 \xi_2 + y_1 \eta_2 + z_1 \zeta_2. \quad 6.$$

Ebenso ist:

$$p_2 \cdot q_1 = x_2 \xi_1 + y_2 \eta_1 + z_2 \zeta_1. \quad 7.$$

Aus 4 folgt:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot q_2 &= x_1 (f'_{x'})_2 + y_1 (f'_{y'})_2 + z_1 (f'_{z'})_2 \\ p_2 \cdot q_1 &= x_2 (f'_{x'})_1 + y_2 (f'_{y'})_1 + z_2 (f'_{z'})_1. \end{aligned} \quad 8.$$

Die Indizes 1 und 2 bedeuten hierbei, daß nach der Differentiation  $x, y, z$  durch die Koordinaten von  $P_1$  oder  $P_2$  zu ersetzen sind. Weil nun  $f_{(x, y, z)}$  nach 1 eine homogene Funktion ist, sind die rechten Seiten von 7 und 8 gleich; also ist:

$$p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1. \quad 9.$$

Damit folgt in geometrischer Fassung:

Das skalare Produkt aus einem beliebigen Vektor  $p_1$  des FRESNEL'schen Ellipsoides und einem beliebigen Vektor  $q_2$  des Indexellipsoides ist gleich dem skalaren Produkt der beiden entsprechenden Vektoren  $q_1$  und  $p_2$ .

Den Vektoren  $p$  und  $q$  entsprechen zwei andere Vektoren  $p', q'$  der Strahlenfläche und der Indexfläche, die durch eine Drehung von  $90^\circ$  aus jenen hervorgegangen sind.  $p', q'$  stellen den Strahlengeschwindigkeitsvektor und den Indexvektor einer Welle dar, ferner ist:  $p \cdot q = p' \cdot q'$ . Folglich lautet das obige Resultat, physikalisch ausgedrückt:

Für zwei beliebige in einem Kristall fortschreitende Wellen  $W_1$  und  $W_2$  ist das skalare Produkt aus dem Strahlengeschwindigkeitsvektor von  $W_1$  und dem Indexvektor von  $W_2$  gleich dem skalaren Produkt der entsprechenden Vektoren, d. h. dem skalaren Produkt des Strahlengeschwindigkeitsvektors von  $W_2$  und des Indexvektors von  $W_1$ .

Damit ist die POTIER'sche Relation in einen einfachen Satz und in die einfache Gleichung 9 gebracht, die beide unabhängig von jedem Koordinatensystem sind. Bislang war die kürzeste Fassung für die Relation:

$$x_1 \xi_2 + y_1 \eta_2 + z_1 \zeta_2 = x_2 \xi_1 + y_2 \eta_1 + z_2 \zeta_1. \quad 10.$$

Diese Gleichung folgt aus 6, 7, 9; sie ist nur bei Einführung eines Koordinatensystems verständlich und läßt im Gegensatz zu 9 einen geometrischen oder einen physikalischen Inhalt nicht anschaulich hervortreten.

4. Die angegebene Herleitung von 9 lehrt, daß die POTIER'sche Relation auf zwei wesentlichen Dingen beruht: einmal

darauf, daß das FRESNEL'sche Ellipsoid  $F$  und das Indexellipsoid  $J$  reziprokale Flächen sind und zweitens darauf, daß  $f_{(x, y, z)}$  eine homogene Funktion ist. Eine homogene Funktion zweiten Grades ist eine solche, die in bezug auf  $x, y, z$  kein lineares Glied enthält, oder die sich beim Umtauschen der Vorzeichen von  $x, y, z$  nicht verändert. Sie stellt demnach immer eine zentrisch symmetrische Fläche dar und umgekehrt. Wenn J. MAC CULLAGH meinte, daß die POTIER'sche Relation in den von ihm benutzten speziellen Fällen eine allgemeine Eigenschaft der Strahlenfläche zum Ausdruck brächte, so ist also die zentrische Symmetrie jene Eigenschaft. Aber hiermit hat MAC CULLAGH doch nur auf die eine Stütze der Relation hingewiesen.

Die POTIER'sche Relation beruht auf zwei wesentlichen Tatsachen: darauf, daß das FRESNEL'sche Ellipsoid ein Symmetriezentrum besitzt und darauf, daß das FRESNEL'sche Ellipsoid und das Indexellipsoid reziprokale Flächen sind.

5. P. KAEMMERER (a. a. O. p. 195) bestimmt die Richtungskosinus für zwei entsprechende Vektoren  $p$  und  $q$  von  $F$  und  $J$ , um die Koordinaten  $x, y, z$  von  $P$  und  $\xi, \eta, \zeta$  von  $Q$  zu erhalten. Er bezieht die Rechnung auf den Normalenwinkel  $\varphi$  und das Polarisationsazimut  $\gamma$  der zugehörigen Welle  $W$ . Dabei weist er darauf hin, daß der Strahl  $OS$  innerhalb und außerhalb des rechten Winkels liegen kann, den die Wellennormale  $ON$  und der Vektor  $q$  bilden; beide Fälle unterscheidet er durch das Vorzeichen von  $\operatorname{tg} s$ , wo  $s$  der Winkel zwischen Strahl und Normale ist. Es sei hier bemerkt, daß dieser Unterschied nicht richtig ist. Denn zu einer Welle  $W$  im Kristall gehören zunächst nicht nur die beiden Punkte  $P$  und  $Q$ , sondern auch die beiden Punkte  $P'$  und  $Q'$ , die durch die inversen Richtungen  $p^*, q^*$  von  $p, q$  gegeben werden (Fig. 2). Liegt nun etwa für  $P', Q'$  der Strahl außerhalb des bezeichneten rechten Winkels, so befindet er sich für  $P, Q$  offenbar innerhalb derselben, weil eben  $q^*$  durch die inverse Richtung  $q$  ersetzt ist. Folglich kann für eine jede Welle bei der Wahl der entsprechenden Punkte  $P, Q$  der letztere Fall angenommen werden, für den das negative Vorzeichen von  $\operatorname{tg} s$  zutreffend ist. Dann

ist p. 197 in den Gleichungen 6, 7 für  $\pm$  jedesmal das negative Vorzeichen zu wählen, ebenso p. 200 in 8 und p. 206 in 15; p. 207 bleiben 16, 17 unverändert. Ordnet man jedoch einer Welle nicht die Punkte P, Q, sondern die inversen Punkte P', Q' zu, so werden bei diesem Übergang die Koordinaten  $x, y, z$  und  $\xi, \eta, \zeta$  durch ihre negativen Werte ersetzt. Hierbei ändert sich dann allerdings auch das Vorzeichen von  $\text{tgs}$  in den Formeln für die Koordinaten, weil alle Glieder ihr Vorzeichen umkehren. Die weitere Rechnung für die POTIER'sche Relation wird aber in

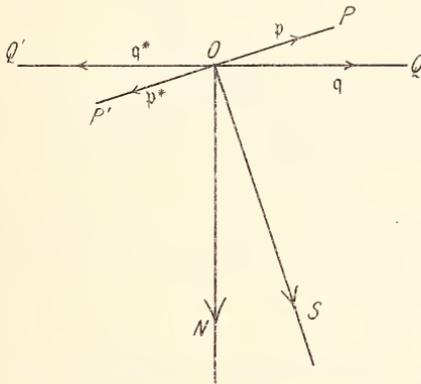


Fig. 2. Der Strahl OS liegt innerhalb des rechten Winkels QON, aber außerhalb des rechten Winkels Q'ON. Die Ebene der Zeichnung ist die Schwingungsebene.

diesem Falle genau so wie bei der Wahl von P, Q. Für KAEMMERER's Formeln 5a, p. 196 und alle folgenden ist damit nur das negative Vorzeichen von  $\text{tgs}$  richtig und zwar allgemein für eine beliebige Welle.

Entspricht also einer Welle mit bestimmter Fortschrittsrichtung ein auf die angegebene Weise gewähltes Punktepaar P, Q, so entspricht der Welle W' mit der inversen Fortschrittsrichtung das inverse Punktepaar P', Q'. Die Festsetzung, daß der Strahl innerhalb des rechten Winkels zwischen der Wellennormalen und dem Vektor q liegen soll, bezieht sich demnach nicht auf spezielle Fälle von Wellen; sie ist vielmehr

nötig, um einer Welle mit bestimmter Fortschreitungsrichtung eindeutig ein Punktepaar P, Q zuzuordnen zu können.

Weiter sei hervorgehoben, daß p. 206 die dreikonstantige Formel 15 für tgs sich sehr einfach aus den Werten für  $\Pi_1$  in 5a und 12 ergibt, wenn für  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  nach 11 die Ausdrücke eingesetzt werden.

Die dreikonstantige Formel für tgs nimmt dann entsprechend der obigen Vorzeichenbetrachtung für eine beliebige Welle die Form an:

$$- \text{tgs} = \frac{(a_{11} - q^2) \sin \gamma \cos \varphi - a_{12} \cos \gamma - a_{13} \sin \gamma \sin \varphi}{q_2 \sin \varphi},$$

wo  $q$  die Normalengeschwindigkeit ist.

Auch bei F. PÖCKELS, Lehrbuch der Kristalloptik, p. 184 ist die Formel für tgs mit der Vorzeichenregel, also unrichtig, angegeben.

Ebenso sind die Formeln für die uniradialen Polarisationsazimute  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  in der einfallenden und  $q_1, q_2$  in der reflektierten Wellenebene auf p. 185 damit unrichtig. Sie müssen lauten:

$$\begin{aligned} \text{tg } \varepsilon_1 &= \cos(i - q_1) \text{tg } \gamma_1 - \frac{\sin^2 q_1 \text{tg } s_1}{\sin(i + q_1) \cos \gamma_1} \\ \text{tg } q_1 &= \cos(i + q_1) \text{tg } \gamma_1 + \frac{\sin^2 q_1 \text{tg } s_1}{\sin(i - q_1) \cos \gamma_1}, \end{aligned}$$

wo  $i$  der Einfallswinkel<sup>1</sup> ist. Für  $\varepsilon_2, q_2$  gelten die analogen Ausdrücke.

## II. Der Beweis des Gesetzes von der Reziprozität der Zustrahlung bei der Brechung des Lichtes durch ein Kristallprisma.

Auf die Grenzebene  $\mathcal{G}_1$  eines Prismas aus einem durchsichtigen inaktiven Kristall falle parallel der Prismenkante die ebene, linear polarisierte Welle  $W_e$  unter dem Einfallswinkel  $i$ ; die Amplitude sei  $E$  und das Polarisationsazimut sei  $\varepsilon$ . Für die reflektierte Welle  $W_r$  seien die entsprechenden Größen mit  $R$  und  $q$  bezeichnet; die gebrochenen Wellen

<sup>1</sup> Über die hier benutzten Definitionen von  $i, q, \gamma$  vgl. F. SCHWIERRING, a. a. O. p. 300—304.

$W_1, W_2$  sollen die Amplituden  $G_1, G_2$  besitzen. Für die Rechnung werde ein rechtwinkliges englisches Koordinatensystem  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  benutzt, das durch die Einfallsebene und durch die Grenzebene  $\mathfrak{G}_1$  auf die in der Fig. 3 angegebene Weise festgelegt ist (Fig. 3).  $i$  sei der Winkel zwischen der  $+\mathfrak{Z}$ -Achse und der positiven Richtung der Normalen von  $W_e$ , in

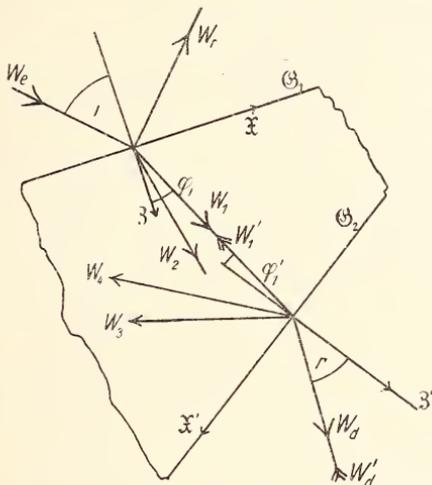


Fig. 3. Die Brechung des Lichtes durch ein Kristallprisma. Die Ebene der Zeichnung ist die Einfallsebene.

positivem Sinne von der  $+\mathfrak{Z}$ -Achse nach der  $+\mathfrak{X}$ -Achse hingerechnet;  $W_r$  hat dann entsprechend den Normalenwinkel  $-i$ .  $\varphi$  und  $\gamma$  bedeute den Normalenwinkel und das Polarisationsazimut einer gebrochenen Welle, ferner sei:

$$\begin{aligned}
 l &= \cos \gamma \cos \varphi, & m &= \sin \gamma, & n &= \cos \gamma \sin \varphi, \\
 p &= \frac{\sin \varphi}{q^2} [\sin \gamma (a_{11} \cos \varphi - a_{13} \sin \varphi) - a_{12} \cos \gamma] & & & & 11. \\
 &= \sin \varphi \cos \varphi \sin \gamma - \operatorname{tg} s \sin^2 \varphi,
 \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten  $a_{h k}$  die Polarisationskonstanten,  $q$  die Normalengeschwindigkeit und  $s$  den Winkel zwischen Strahl und Normale angeben. Für die verschiedenen Wellen im Kristall werden  $l, m, n, p$  durch die zugehörigen Indizes unterschieden. Dann lauten die Grenzbedingungen<sup>1</sup> für  $\mathfrak{G}_1$ :

<sup>1</sup> Vgl. F. SCHWIETRING, a. a. O. p. 318. Bei A. POTIER (a. a. O. p. 353, 354) sind die Grenzbedingungen unrichtig. Dieses rührt daher, daß bei der Definition der Größen  $\lambda, \varrho, \mu, \nu$  irrtümlich der Faktor

$$\begin{aligned}
 (E \cos \varepsilon + R \cos \varrho) \cos i &= G_1 l_1 + G_2 l_2 & \text{a.} \\
 E \sin \varepsilon + R \sin \varrho &= G_1 m_1 + G_2 m_2 & \text{b.} \\
 (E \cos \varepsilon - R \cos \varrho) \sin i &= G_1 n_1 + G_2 n_2 & \text{c.} \\
 (E \sin \varepsilon - R \sin \varrho) \sin i \cos i &= G_1 p_1 + G_2 p_2 & \text{d.}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Die Grenzbedingungen an der Grenzfläche  $\mathcal{G}_2$  seien ähnlich wie für  $\mathcal{G}_1$  auf ein durch die Einfallsebene und durch  $\mathcal{G}_2$  festgelegtes Koordinatensystem  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{Y}'$ ,  $\mathcal{Z}'$  bezogen.  $W_1$  habe jetzt den neuen Normalenwinkel  $\varphi_1'$  und das neue Polarisationsazimut  $\gamma_1'$ ; der Winkel  $s_1$  zwischen Strahl und Normale ist dagegen unverändert geblieben. Normalenwinkel, Amplitude und Polarisationsazimut der gebrochenen Welle  $W_d$  seien  $r$ ,  $D$  und  $\alpha$ . Durch Reflexion von  $W_1$  mögen  $W_3$ ,  $W_4$  mit den Amplituden  $G_3$ ,  $G_4$  entstehen. Die Größen  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  von  $W_1$  sind nun andere geworden als für  $\mathcal{G}_1$  und seien deshalb mit einem Strich bezeichnet; dasselbe gelte für die entsprechenden Größen bei  $W_3$ ,  $W_4$ . Dadurch soll angedeutet werden, daß die ungestrichenen Buchstaben  $l_1$ ,  $l_2$  usw. zu Wellen gehören, die dem Winkel  $i$  im Außenmedium entsprechen; während  $l_1'$ ,  $l_3'$ ,  $l_4'$  usw. zu Wellen gehören, die dem Winkel  $r$  im Außenmedium entsprechen. Die Grenzbedingungen lauten für die Reflexion und Brechung von  $W_1$ :

$$\begin{aligned}
 G_1 l_1' + G_3 l_3' - G_4 l_4' &= D \cos \alpha \cos r & \text{a.} \\
 G_1 m_1' + G_3 m_3' - G_4 m_4' &= D \sin \alpha & \text{b.} \\
 G_1 n_1' + G_3 n_3' - G_4 n_4' &= D \cos \alpha \sin r & \text{c.} \\
 G_1 p_1' + G_3 p_3' - G_4 p_4' &= D \sin \alpha \sin r \cos r & \text{d.}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Es handelt sich nun darum, aus 12  $G_1$  als Funktion von  $E$  und aus 13  $D$  als Funktion von  $G_1$  zu bestimmen. Dann folgt nämlich  $D$  als Funktion von  $E$  und die Amplitudenverhältnisse bei direktem und bei inversem Strahlengang können miteinander verglichen werden.

$\sin i$  fortgelassen ist. Der angegebene Fehler durchzieht die Rechnung p. 355, 356; allerdings genügt das falsche Schlußresultat doch dem Gesetze von der Reziprozität der Zustrahlung. Ferner sei bemerkt, daß p. 355 der Winkel zwischen Strahl und Einfallslot  $\gamma_1$  fälschlich als Winkel zwischen Strahl und Grenzfläche definiert ist. p. 354 muß in Gleichung (15) das --Zeichen ein +-Zeichen sein; bei der zweiten Klammer derselben Gleichung ist der Faktor  $\cos \alpha$ , vergessen; in Gleichung (17) fehlt im Nenner des zweiten Bruches bei  $\sin i$  der Faktor  $r$ .

1. Zur Lösung der ersten Aufgabe werde die Amplitude  $E$  von  $W_0$  in die Komponenten  $E_1, E_2$  nach den uniradialen Polarisationsrichtungen  $\epsilon_1, \epsilon_2$  zerlegt. Sind  $\epsilon_1, \epsilon_2$  die uniradialen Polarisationsazimute, so ist nach dem Sinusatz (Fig. 4):

$$\begin{aligned} E_1 &= E \frac{\sin(\epsilon - \epsilon_2)}{\sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)}, \\ E_2 &= E \frac{\sin(\epsilon_1 - \epsilon)}{\sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \end{aligned} \quad 14.$$

Die einfallende Amplitude  $E_1$  ruft nur die gebrochene Welle  $W_1$  hervor; für diesen Vorgang der uniradialen Brechung lauten die Gleichungen 12:

$$\begin{aligned} (E_1 \cos \epsilon_1 + R_1 \cos \varrho_1) \cos i &= G_1 l_1 & \text{a.} \\ E_1 \sin \epsilon_1 + R_1 \sin \varrho_1 &= G_1 m_1 & \text{b.} \\ (E_1 \cos \epsilon_1 - R_1 \cos \varrho_1) \sin i &= G_1 n_1 & \text{c.} \\ (E_1 \sin \epsilon_1 - R_1 \sin \varrho_1) \sin i \cos i &= G_1 p_1 & \text{d.} \end{aligned} \quad 15.$$

wo  $R_1, \varrho_1$  Amplitude und uniradiales Polarisationsazimut der reflektierten Welle angeben. Aus 15 folgt:

$$\begin{aligned} E_1 \cos \epsilon_1 \cdot 2 \sin i \cos i &= G_1 (l_1 \sin i + n_1 \cos i) \\ E_1 \sin \epsilon_1 \cdot 2 \sin i \cos i &= G_1 (m_1 \sin i \cos i + p_1), \end{aligned} \quad 16.$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \epsilon_1}{m_1 \sin i \cos i + p_1} &= \frac{\cos \epsilon_1}{l_1 \sin i + n_1 \cos i} = \frac{G_1}{E_1 \cdot 2 \sin i \cos i} \\ &= \frac{\beta_1}{2 \sin i \cos i} = \frac{1}{H_1}, \end{aligned} \quad 17.$$

wo  $\beta_1$  der Schwächungskoeffizient für die zu  $\epsilon_1$  gehörige uniradiale Brechung ist und  $H_1$  somit für einen festen Winkel  $i$  eine Konstante bedeutet. Durch Quadrieren von 16 und Addition ergibt sich mit Hilfe von 17:

$$4 E_1^2 \sin^2 i \cos^2 i = G_1^2 H_1^2$$

und nach 14:

$$2E \frac{\sin(\epsilon - \epsilon_2)}{\sin(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \sin i \cos i = G_1 H_1. \quad 18.$$

2. Um  $D$  als Funktion von  $G_1$  auszudrücken, wird die POTIER'sche Relation benutzt. Zu einem bestimmten Einfallswinkel gehören nach der Konstruktion von J. MAC CUL-

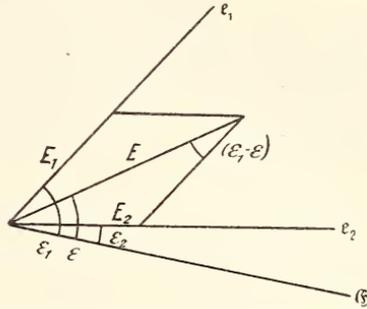


Fig. 4. Die Zerlegung der Amplitude  $E$  in die Komponenten  $E_1, E_2$ . Die Ebene der Zeichnung ist die Wellenebene von  $W_0$ ;  $\mathcal{E}$  Einfallsebene.

LAGH vier Wellen im Kristall; für irgend zwei dieser vier Wellen lautet die Relation<sup>1</sup>:

$$l_h n_k + l_k n_h + p_h m_k + p_k m_h = 0, \quad 19.$$

wo l, m, n, p die durch 11 definierten Größen und h, k die Indizes für die beiden Wellen sind. Durch Multiplikation von 13a mit  $n_1'$ , 13b mit  $p_1'$ , 13c mit  $l_1'$ , 13d mit  $m_1'$  und Addition ergibt sich bei zweimaliger Anwendung von 19:

$$D [\sin \alpha (p_1' + m_1' \sin r \cos r) + \cos \alpha (l_1' \sin r + n_1' \cos r)] = 2 G_1 (l_1' n_1' + p_1' m_1'). \quad 20.$$

Nach 11 ist:

$$l_1' n_1' + p_1' m_1' = \sin q_1' \cos q_1' - \operatorname{tg} s_1 \sin^2 q_1' \sin \gamma_1'.$$

Bildet der Strahl  $OS_1'$  von  $W_1$  mit dem Einfallslot für  $\mathcal{G}_2$  den Winkel  $z_1'$ , so ist nach Fig. 5:

$$\cos z_1' = \cos s_1 \cos q_1' - \sin s_1 \sin q_1' \sin \gamma_1';$$

so daß:

$$l_1' n_1' + p_1' m_1' = \frac{\cos z_1' \cdot \sin q_1'}{\cos s_1} \quad 21.$$

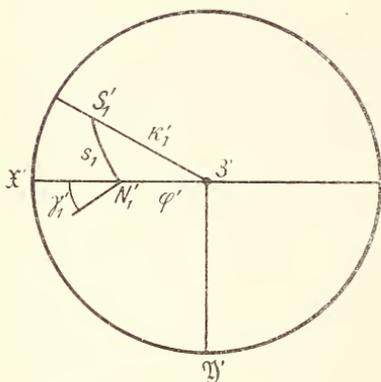


Fig. 5. Stereographische Projektion der Welle  $W_1$  auf die Grenzebene  $\mathcal{G}_2$ .  $OS_1'$  Strahl,  $ON_1'$  Normale,  $\gamma_1'$  Polarisationsazimut.

Es werde nun an der Grenzfläche  $\mathcal{G}_2$  der umgekehrte Strahlengang betrachtet: die unter dem Winkel  $r$  einfallende Welle  $W_d$  besitze das uniradiale Polarisationsazimut  $e_1$  und rufe im Kristall nur die Welle  $W_1'$  hervor, die in der entgegengesetzten Richtung fortschreitet wie  $W_1$ .  $W_1$  und  $W_1'$  sollen inverse Wellen genannt werden, ebenso  $W_d$  und  $W_d'$ . Ganz ähnlich wie für  $\varepsilon_1$  die Gleichung 17 besteht, gilt dann für  $e_1$ :

$$\frac{\sin e_1}{m_1' \sin r \cos r + p_1'} = \frac{\cos e_1}{l_1' \sin r + n_1' \cos r} = \frac{G_1}{D \cdot 2 \sin r \cos r} = \frac{1}{H_1'}$$

so daß:

$$\begin{aligned} m_1' \sin r \cos r + p_1' &= H_1' \cdot \sin e_1 \\ l_1' \sin r + n_1' \cos r &= H_1' \cdot \cos e_1. \end{aligned} \quad 22.$$

<sup>1</sup> Vgl. P. KAEMMERER, a. a. O. p. 207.

Unter Benutzung von **21**, **22** lautet **20**:

$$D = \frac{2 G_1 \cos z_1' \cdot \sin \varphi_1'}{H_1' \cos s_1 (\sin \alpha \sin e_1 + \cos \alpha \cos e_1)} \quad 23.$$

Nach einem Satz von POTIER<sup>1</sup> ist das Azimut  $\alpha$  der austretenden Welle  $W_d$  mit dem uniradialen Azimut  $e_2$  der inversen Welle  $W'_d$  verbunden durch:

$$\alpha = e_2 + 90^\circ. \quad 24.$$

Folglich ist:

$$D = \frac{2 G_1 \cos z_1' \sin \varphi_1'}{H_1' \cos s_1 \sin (e_1 - e_2)}. \quad 25.$$

3. Aus **18** und **25** folgt jetzt  $D$  als Funktion von  $E$ :

$$D = 4 E \frac{\sin (\varepsilon - \varepsilon_2)}{H_1 \cdot H_1' \cdot \sin (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \cdot \frac{\sin i \cos i \cdot \cos z_1' \sin \varphi_1'}{\cos s_1 \sin (e_1 - e_2)}. \quad 26.$$

Die Lichtmengen  $L_e$  und  $L_d$  des einfallenden und des austretenden Lichtbündels sind proportional dem Amplitudenquadrat und dem Querschnitt des Strahlenbündels. Für  $\mathcal{G}_1$  bildet der einfallende Strahl mit dem Einfallslot den Winkel  $i$ , der entsprechende Winkel für den gebrochenen Strahl sei  $z_1$  (Fig. 6). Die Querschnitte im einfallenden und im gebrochenen

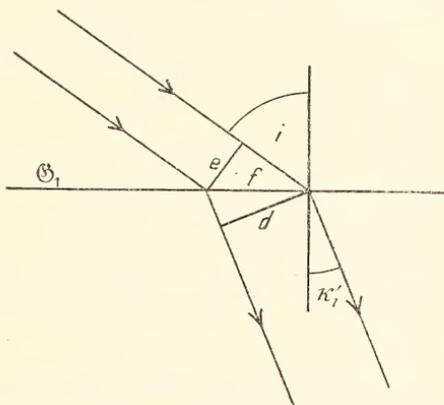


Fig. 6. Das einfallende und das gebrochene Strahlenbündel für die Grenzfläche  $\mathcal{G}_1$ .

Strahlenbündel seien  $e$  und  $d$ ; die Schnittfläche zwischen den Strahlenbündeln und  $\mathcal{G}_1$  sei  $f$ . Aus Fig. 6 folgt:

$$\frac{e}{d} = \frac{\cos i}{\cos z_1}.$$

Ist  $g$  der Querschnitt des an  $\mathcal{G}_2$  austretenden Strahlenbündels, so ist ähnlich:

$$\frac{d}{g} = \frac{\cos z_1'}{\cos r}.$$

Setzt man  $d = 1$ , so ist:

$$e = \frac{\cos i}{\cos z_1}, \quad g = \frac{\cos r}{\cos z_1'}.$$

<sup>1</sup> Vgl. F. SCHWIETRING, a. a. O. p. 328.

Also ist:

$$\frac{L_e}{L_d} = \frac{D^2}{E^2} \cdot \frac{\cos r \cdot \cos z_1}{\cos z_1' \cdot \cos i}$$

Geht das austretende Licht noch durch einen Nicol, der nach dem Azimut  $e$  polarisiert, so ist nach 24:

$$\frac{L_e}{L_d} = \frac{D^2}{E^2} \cdot \frac{\cos r \cdot \cos z_1}{\cos i \cdot \cos z_1'} \cdot \sin^2(e - e_2).$$

und nach 26:

$$\frac{L_e}{L_d} = \frac{16}{H_1^2 \cdot H_1'^2} \cdot \frac{\sin^2(\varepsilon - \varepsilon_2) \cdot \sin^2(e - e_2)}{\sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin^2(e_1 - e_2)} \cdot \frac{\sin^2 i \cos i \cdot \cos z_1' \cdot \cos z_1 \cdot \cos r \cdot \sin^2 \varphi_1'}{\cos^2 s_1} \quad 27.$$

Das Brechungsgesetz besagt:

$$\frac{\sin i}{\sin \varphi_1} = \frac{\sin r}{\sin \varphi_1'}$$

so daß:

$$\sin i \sin \varphi_1' = \sin r \sin \varphi_1$$

und:

$$\sin^2 i \sin^2 \varphi_1' = \sin i \sin r \sin \varphi_1 \sin \varphi_1'.$$

Mithin lautet 27:

$$\frac{L_e}{L_d} = \frac{16}{H_1^2 \cdot H_1'^2} \cdot \frac{\sin^2(\varepsilon - \varepsilon_2) \sin^2(e - e_2)}{\sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin^2(e_1 - e_2)} \cdot \frac{\cos i \cos r \cos z_1 \cos z_1'}{\cos^2 s_1} \cdot \sin i \sin r \sin \varphi_1 \sin \varphi_1' \quad 28.$$

Bei der Umkehrung des Strahlenganges werden  $i$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $z_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $H_1$  einerseits und  $r$ ,  $e$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $z_1'$ ,  $\varphi_1'$ ,  $H_1'$  andererseits miteinander vertauscht; die rechte Seite von 28 bleibt hierbei aber unverändert und damit auch  $L_e/L_d$ .

Also wird das Verhältnis der einfallenden und der gebrochenen Lichtmenge  $L_e/L_d$  für den Durchgang des Lichtes durch ein Kristallprisma bei der Umkehrung des Strahlenganges nicht geändert, oder die Schwächung der Lichtmenge beim Durchgang durch ein Kristallprisma ist unabhängig von der Strahlenrichtung. Damit ist das Prinzip von der Reziprozität der Zustrahlung bewiesen; und zwar offenbar auch für einfallendes natürliches Licht.

Celle, Juli 1914.

Brachiopoden.

Quiring, H.: Beiträge zur Kenntnis der Spiriferenfauna des Mitteldevons der Eifel. (Jahrb. d. k. preuß. geol. Landesanst. 1914. 35. I/2. 327—335. 1 Taf.)

---

Pflanzen.

Wehrli, Leo: Der versteinerte Wald zu Chemnitz. (Neujahrsblatt, herausgeg. v. d. naturf. Ges. in Zürich. 1915. 117. 1—21. 22 Originalaufnahmen u. 5 Taf.)

---

Berichtigung.

Auf p. 78 sind a, b, c nicht die Hauptlichtgeschwindigkeiten, sondern die Hauptbrechungsindizes. Erst von p. 84 an sind die Polarisationskonstanten aus den Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c gebildet.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1915

Band/Volume: [1915](#)

Autor(en)/Author(s): Schwietring Fr.

Artikel/Article: [Eine einfache Form für die Potier'sche Relation bei durchsichtigen inaktiven Kristallen und das Gesetz von der Reziprozität der Zustrahlung für ein Kristallprisma. 76-90](#)