

Über die allgemeine Verwendung des gleichseitigen Tetraeders für die Darstellung von Vierstoffsystemen, mit einer Anwendung auf alkali- und tonerdehaltige Hornblende.

Von

H. E. Boeke.

Mit 4 Textfiguren.

Im vorhergehenden Aufsätze, sowie bei der graphischen Behandlung der Augitzusammensetzung¹, wurden die Punkte im Tetraeder stets auf Ebenen in der Zone zweier Tetraederflächen projiziert. Manchmal wird es aber erwünscht sein, die Projektion auf eine beliebige Ebene vorzunehmen, wie es schon l. c. p. 427, Fußnote, angedeutet wurde. Auch für diesen allgemeinen Fall sind nachfolgend die Formeln entwickelt worden, mit Anwendung auf ein mineralogisch wichtiges Beispiel (alkali- und tonerdehaltige Hornblende).

Wir nehmen an, daß die Projektionsebene durch die Durchschnitte mit zwei Tetraederflächen festgelegt ist. Dies ist im allgemeinen der Fall, weil die zweckmäßige Projektionsebene meist durch die Wahl von stöchiometrisch bestimmten Verbindungen, zu denen man die Beziehung des Systems ermitteln will, definiert ist.

Zunächst verschieben wir die Projektionsebene parallel sich selbst, bis sie durch einen Eckpunkt des Tetraeders

¹ H. E. BOEKE, Centralbl. f. Min. etc. 1915. 422. Nachfolgend als l. c. bezeichnet.

geht (wenn diese Bedingung nicht von vornherein erfüllt ist). Die orthogonale Projektion ändert ihre Lage in der Projektionsebene dadurch nicht. In Fig. 1 ist angenommen worden, daß die Projektionsebene EFC durch C geht. Sie schneidet die Symmetrieebene CBNO des Tetraeders in NC. Jetzt bringen wir eine Hilfsebene durch NC parallel der Tetraederkante DA an. Für die Koordinaten der Projektion eines beliebigen Punktes P auf die Hilfsebene sind die Formeln bekannt (vergl. vorhergehenden Aufsatz). Tritt nun die ursprüngliche Projektionsebene an die Stelle der Hilfsebene, so

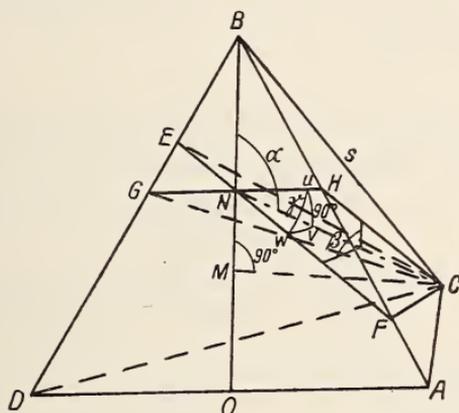


Fig. 1.

ist dies als eine Drehung um die Linie NC aufzufassen, wobei sich die Richtung und die Größe der Ordinate y nicht ändert (weil die projizierende Ebene senkrecht auf der Drehungsachse — zugleich Ordinatenachse — NC steht). Es empfiehlt sich nur, den Koordinatenursprung in einen Punkt zu verlegen, der bei der Drehung der Projektionsebene seine Lage nicht verändert, also in N. Im übrigen ist der Ursprungspunkt des Koordinatensystems (wie das letztere überhaupt) natürlich ohne Einfluß auf die Gestalt der Projektion; nur der mathematische Ausdruck der Projektion hängt vom Koordinatensystem ab.

Die Ordinate y , gemessen von N als Nullpunkt aus, besitzt somit die Größe (l. c. p. 427):

$$y = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{3}c) \sqrt{3} \cos \alpha + \frac{1}{3}c \sqrt{6} \sin \alpha - ON \cos \alpha \quad (I)$$

Der Winkel α ist der Winkel zwischen der Hilfsebene und der Tetraederfläche ABD, also

$$\alpha = \angle BNC.$$

Oft wird α nicht unmittelbar bekannt sein. Er findet sich aber leicht, wenn man ein Lot CM aus C auf die Tetraederfläche ABD fällt. Es ist dann (vergl. Fig. 1):

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{MC^1}{MN}.$$

$MC = \frac{1}{3}s\sqrt{6}$, $OM = \frac{1}{3}OB = \frac{1}{6}s\sqrt{3}$ und MN läßt sich planimetrisch aus der Lage des Durchschnittes EF berechnen, oder sonst konstruktiv aus einer genauen Zeichnung ermitteln. Dasselbe gilt für ON.

Die Änderung der Abszisse x durch die Drehung der Projektionsebene hängt vom Drehungswinkel β und von der Entfernung e des Punktes P von der Hilfsebene ab. Die Fig. 2, welche quer zur Linie NC gedacht ist, zeigt:

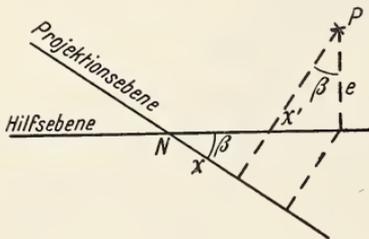


Fig. 2.

$$x = x' \cos \beta - e \sin \beta.$$

Hierin ist x' vom Punkte N (Fig. 1) als Nullpunkt aus gerechnet. Unter Verwendung der Formel I l. c. p. 426, wo der Anfangspunkt der Abszissen um $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ links von N angenommen war, findet man somit:

$$x' = \frac{1}{2}(a - d).$$

Es sind nunmehr noch e und β in bekannten Größen auszudrücken. Die Strecke $(-e - ON \sin \alpha)$ ist schon l. c. p. 426 und 427 berechnet und dort als $o'r'$ resp. y_2 bezeichnet worden. Diese Beziehung ergibt sich ohne weiteres, wenn man bedenkt, daß in l. c. Fig. 3 die Projektionsebene durch die Tetraederkante DA verläuft und daß in l. c. Fig. 3 und in der obigen Fig. 2 verschiedene Seiten der Projektions- bzw. Hilfsebene als positiv angenommen sind. Für die

¹ Ist $\alpha < 90^\circ$, so wäre MN negativ zu nehmen.

Figuren muß man sich auf eine bestimmte Lage der Ebenen festlegen; bei Fig. 1 und 2 ist schon auf das nachfolgend behandelte Hornblendebeispiel Rücksicht genommen. Die Formeln gelten jedoch allgemein, ganz unabhängig davon, ob α größer oder kleiner als 90° , e positiv oder negativ ist. Weiterhin ist $ON \sin \alpha$ nur eine Konstante, die von der Wahl des Nullpunktes des Koordinatensystems abhängt. Folglich:

$$e = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{3}c) \sqrt{3} \sin \alpha - \frac{1}{3}c \sqrt{6} \cos \alpha - ON \sin \alpha.$$

In besonderen Fällen vereinfacht sich die Formel für e , wie auch die obige (I) für y oft wesentlich.

Der Drehungswinkel β geht aus dem bei $u v$ rechtseitigen sphärischen Dreieck $u v w$ hervor (Fig. 1). Darin ist der Winkel bei v der gesuchte Winkel β , während die Seite uw oder γ aus der Lage der Projektionsebene gegeben ist (die trigonometrischen Funktionen von γ können aus den Prämissen berechnet oder sonst konstruktiv ermittelt werden). Schließlich ist der Winkel bei u gleich $180^\circ - \alpha$. Also:

$$\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma.$$

Wir finden somit für die Abszisse x , von N als Nullpunkt aus gerechnet:

$$x = \frac{1}{2}(a - d) \cos \beta - \left\{ \frac{1}{2}(b + \frac{1}{3}c) \sqrt{3} \sin \alpha - \frac{1}{3}c \sqrt{6} \cos \alpha - ON \sin \alpha \right\} \sin \beta. \quad (\text{II})$$

Die oben abgeleiteten allgemeinen Formeln sollen nunmehr auf die alkali- und tonerdehaltige Hornblende¹ in ihrer Beziehung zu dem Metasilikat der zweiwertigen Metalle $RO \cdot SiO_2$ (Tr), dem Glaukophan bzw. Riebeckit $R_2O \cdot R_2O_3 \cdot 4SiO_2$ (Gl), dem oft als Hornblendekomponente angenommenen² Orthosilikat $Ca Mg_2 Al_2 Si_3 O_{12}$ ($3RO \cdot R_2O_3 \cdot 3SiO_2$, als Gr — Abkürzung für Granat — bezeichnet) und R_2O_3 angewandt werden.

¹ Eine Anzahl Daten für eine statistische Behandlung der Hornblendegruppe hat schon mein früherer Assistent in Halle a. S., Dr. P. KLING, gesammelt. Der Ausbruch des Krieges verhinderte die Vollendung der Arbeit. Allerdings war damals nur eine Projektion des Hornblende-Mischkörpers auf die kristallographischen Achsenebenen des Tetraeders geplant.

² Siehe z. B. TSCHERMAK-BECKE, Lehrbuch der Mineralogie. 1915. 559. Eine allgemeine Erörterung der Theorien über die Hornblendezusammensetzung ist in diesem Aufsätze nicht beabsichtigt.

Als Komponenten in Molprozenten nehmen wir an:

- RO (Oxyde von Ca, Mg, Fe und Mn) = a
- SiO₂ (Silicium- und Titandioxyd) = b
- R₂O₃ (Oxyde von Al und Fe) = c
- R₂O (Alkali und H₂O) = d.

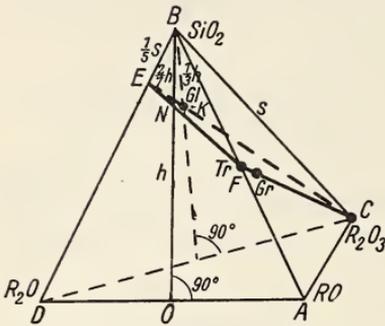


Fig. 3.

Die Reihenfolge der Komponenten ist in dieser Weise gewählt, um mit Fig. 1 im Einklang zu bleiben;

$$a + b + c + d = s = 100.$$

Wie aus Fig. 3 ersichtlich, liegt der Punkt Gr auf der Verbindungslinie von Tr und R₂O₃. Die 4 Punkte Tr, Gl, Gr und R₂O₃ befinden sich somit in einer Ebene, die als Projektionsebene gewählt wird¹.

Die Koordinaten der Punkte Tr, Gl und Gr sind:

Symbol	Formel	a	b	c	d
Tr	RO . SiO ₂	50	50	—	—
Gl	R ₂ O . R ₂ O ₃ . 4SiO ₂	—	66,67	16,67	16,67
Gr	3RO . R ₂ O ₃ . 3SiO ₂	42,86	42,86	14,29	—

Tr befindet sich somit halbwegs zwischen A und B auf der Tetraederkante, Gl auf der Höhenlinie der Tetraederfläche BCD, und zwar um $\frac{1}{3}$ dieser Linie von B entfernt. Aus dieser Lage von Tr und Gl geht gleich hervor, daß die Projektionsebene auf der Tetraederfläche BCD senkrecht steht und außerdem, daß der Winkel zwischen Tr—Gl und EC gleich 90° ist. Diese besonderen Umstände spielen in der nachfolgenden Koordinatenberechnung keine (unmittelbare) Rolle.

¹ Auch das oft als Hornblendekomponente angeführte hypothetische Silikat RO . R₂O₃ . SiO₂ ($\overset{II}{R}Al_2SiO_6$) wird durch einen Punkt der Verbindungslinie FC dargestellt.

Planimetrisch in $\triangle BCD$ findet man, daß:

$$BE = \frac{1}{3} s.$$

($\text{tg} \angle ECB = \frac{1}{3} \sqrt{3}$, man wende dann den Sinussatz an).

Ebenfalls planimetrisch ergibt sich daraus in $\triangle BAD$:

$$BN = \frac{2}{7} BO.$$

Bringt man jetzt die Hilfsebene durch NC parallel DA an (in Fig. 3 der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet; man vergl. Fig. 1), so läßt sich leicht berechnen, daß

$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{57}} \text{ und } \cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{114}}.$$

Die auf p. 119 für die Ordinate y gegebene Formel vereinfacht sich mithin zu:

$$y = \frac{2}{\sqrt{38}} \left(2c - b + \frac{500}{7} \right). \quad (\text{III})$$

Der Winkel $\angle HNF = \gamma$ (vergl. Fig. 1) läßt sich wiederum planimetrisch in $\triangle BAD$ berechnen

$$\text{tg } \gamma = \frac{3}{7} \sqrt{3}.$$

Für den Drehungswinkel β der Projektionsebene findet man somit:

$$\text{tg } \beta = \sin \alpha \text{ tg } \gamma = \frac{3}{\sqrt{19}}.$$

Daraus folgt: $\sin \beta = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ und

$$\cos \beta = \frac{1}{2\sqrt{133}}.$$

Stellt man die für α und β gefundenen Werte in Formel (II) p. 121 ein und bedenkt man, daß $a + b + c + d = 100$, so ergibt sich für die gesuchte Abszisse der Projektion:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{133}} (20a + 3c + d - 300). \quad (\text{IV})$$

Nachfolgend sind die Koordinaten für die Punkte Tr , Gl und Gr , sowie für die Eckpunkte des Tetraeders zusammengestellt. Fig. 4 zeigt die gesuchte orthogonale Projektion.

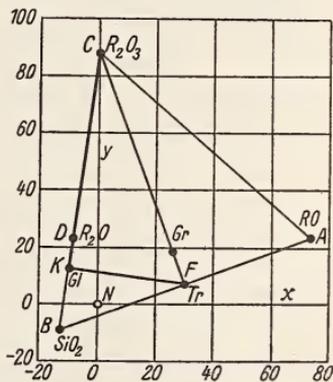


Fig. 4.

Symbol	Formel	x	y
Tr	$\text{R O} \cdot \text{Si O}_2$	30,34	6,95
Gl	$\text{R}_2 \text{O} \cdot \text{R}_2 \text{O}_3 \cdot 4 \text{Si O}_2$	— 10,12	12,36
Gr	$3 \text{R O} \cdot \text{R}_2 \text{O}_3 \cdot 3 \text{Si O}_2$	26,01	18,53
	RO	·73,69	23,17
	Si O_2	— 13,00	— 9,27
	$\text{R}_2 \text{O}_3$	0,00	88,05
	$\text{R}_2 \text{O}$	— 8,67	23,17

Für die vollständige Darstellung der Lage der Hornblendepunkte im Tetraeder wäre noch eine zweite Projektionsebene nötig. Als eine solche kann man z. B. die Tetraederfläche BCD, welche nach p. 122 senkrecht auf der ersten Projektionsebene (durch Tr, Gl und Gr) steht, oder die durch Tr und Gl gehende Symmetrieebene wählen. Die Koordinatenformeln für die Projektion auf die Tetraederfläche sind schon in der Zeitschr. f. Krist. 1914. 53. 446 mitgeteilt worden, diejenigen für die Projektion auf die Symmetrieebene finden sich im vorhergehenden Aufsätze p. 100.

Sobald die darstellenden Punkte einzelner Hornblenden außerhalb der Ebene Tr—Gl— $\text{R}_2 \text{O}_3$ fallen, wäre dadurch erwiesen, daß die Hornblende nicht als eine Mischung der genannten Komponenten (Tr, Gl, Gr und $\text{R O} \cdot \text{R}_2 \text{O}_3 \cdot \text{Si O}_2$) aufgefaßt werden kann. Mit der Ausführung der statistischen Arbeit — die insbesondere über die Grenzen der Mischkristallbildung in der Hornblende Aufschluß geben wird — wollen wir aber Herrn KLING (vergl. p. 121) nicht vorgreifen.

Bemerkung. Die besonderen Umstände, daß die Ebene ECF für die Hornblendedarstellung (Fig. 3) auf der Tetraederfläche BCD senkrecht steht, und daß der Winkel FKC = 90° ist (p. 122), legen den Gedanken nahe, daß die Formeln für die Koordinaten eines beliebigen projizierten Punktes in diesem Fall wohl einfacher werden, wenn man den Punkt für Gl (K) als Koordinatenursprung und die Richtungen KF und KC als Koordinatenachsen annimmt. Tatsächlich hat eine solche Transformation des Koordinatensystems eine Vereinfachung einer der beiden Formeln zur Folge.

Verlegt man somit den Koordinatenursprung nach dem Punkte K (Fig. 4) und dreht man dann die Koordinatenachsen in positivem Sinne (mit dem Uhrzeiger) um einen Winkel NCK, so werden die neuen Koordinaten x' und y' gleich

$$\begin{aligned}x' &= (x - x_k) \cos NCK - (y - y_k) \sin NCK \\y' &= (x - x_k) \sin NCK + (y - y_k) \cos NCK.\end{aligned}$$

Nach den Formeln (III) und (IV) ist

$$x_k = -\frac{700}{6\sqrt{133}} \quad \text{und} \quad y_k = \frac{1600}{21\sqrt{38}}.$$

Der Winkel NCK findet sich in $\triangle NCE$ (Fig. 3). Aus den Werten für BE, BN und BK geht nämlich hervor:

$$EN = \frac{20}{7} \sqrt{19}, \quad NC = \frac{100}{7} \sqrt{38} \quad \text{und} \quad EC = 20\sqrt{21}.$$

Daraus folgt:

$$\sin NCK = \frac{1}{57} \sqrt{57} \quad \text{und} \quad \cos NCK = \frac{2}{57} \sqrt{798}.$$

Die Formeln für x' und y' bekommen somit die folgende Gestalt:

$$x' = \frac{1}{3} a \sqrt{6}, \quad (V)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{21}} (-4b + 5c - d + 200). \quad (VI)$$

Wegen der einfachen Beziehung für x'^1 wird die Verwendung von (V) und (VI) an Stelle von (III) und (IV) bei der statistischen Lösung der Frage nach der Hornblende-zusammensetzung wohl eine Zeitersparnis bedeuten.

Frankfurt a. M., Min.-petrogr. Institut d. Universität.

¹ Diese Beziehung für das aus P auf die Tetraederfläche gefällte Lot wurde im übrigen schon l. c. p. 427 abgeleitet.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie](#)

Jahr/Year: 1916

Band/Volume: [1916](#)

Autor(en)/Author(s): Boeke Hendrik Enno

Artikel/Article: [Über die allgemeine Verwendung des gleichseitigen Tetraeders für die Darstellung von Vierstoffsystemen, mit einer Anwendung auf alkaliund tonerdehaltige Hornblende. 118-125](#)