Graphische Ableitung des Deformationsellipsoides der Kristallschiebung aus den Kippungen zweier beliebiger Flächen oder Kanten.

Von

A. Johnsen in Frankfurt a. M.

Mit 2 Stereogrammen.

Einleitung.

Aus den Transformationsformeln der Kristallschiebung erster oder zweiter Art folgt, daß man das Deformationsellipsoid nach Stellung und Gestalt zu berechnen vermag, wenn die Indizes zweier rationaler oder irrationaler Flächen vor der Kippung und nach ihr bekannt sind[1].

Es soll nunmehr gezeigt werden, wie man Form und Lage jener Ellipsoide auch durch stereographische Projektion finden kann, wenn die Positionen von irgend zwei Flächen vor und nach der Deformation festgelegt sind. Es gibt ein Hauptverfahren „A", das von der Rationalität oder Irrationalität der Gleitfläche in keiner Weise beeinflußt wird. Daneben bestehen zwei Sonderverfahren „AI" und „AII" für Schiebungen erster Art und für solche zweiter Art; man beginnt dann mit der Generalmethode „A" und biegt, sobald sich die Gleitfläche als rational oder als irrational ergeben hat, in den Weg „AI" oder „AII" ein. Das Verfahren „AII" setzt die Kenntnis der Kippungen zweier Kanten, also dreier Flächen voraus.

[1] O. Mügge, Dies. Jahrb. Beil.-Bd. VI. p. 290 u. 293. 1889, sowie Handwörterb. d. Naturw. 5. p. 1145. 1914.

Das Hauptverfahren „A“ (Fig. 1).

Wir betrachten in dem Stereogramm der Fig. 1 die Schiebung von Titanit, der trotz seiner monoklinen Syngonie den allgemeinsten Fall darstellt, da beide Kreisschnittsebenen schräg zur Symmetrieachse liegen. Der Übersicht halber sind die Pole von {100}, {010} und {001} vermerkt. Zwei Flächenpole F_1 und F_2 wandern infolge der Deformation nach $\underline{F_1}'$ und $\underline{F_2}'$. Die beiden Großkreise $[F_1, \underline{F_1}']$ und $[F_2, \underline{F_2}']$ schneiden sich offenbar im Pol der Gleitfläche K_1. Die zwei Zonenkreise $[F_1, F_2]$ und $[\underline{F_1}', \underline{F_2}']$ haben den Pol einer Ebene $F\sigma_1$ gemeinsam, die keine Kippung erfährt und daher ebenso wie die Gleitfläche parallel der Gleitrichtung σ_1 liegt. Der durch $F\sigma_1$ und K_1 gelegte Großkreis enthält im Abstande $\frac{\pi}{2}$ von K_1 den Pol S der „Ebene der Schiebung“. S ist also der Pol eines Großkreises $\mathfrak{S}$, der außer K_1 auch den Pol der Gleitrichtung σ_1, den der „Grundzone“ σ_2 und den der zweiten Kreisschnittsebene K_2 schneidet; von diesen drei Polen ist σ_1 durch den Abstand $\frac{\pi}{2}$ von K_1 bestimmt. Zu ermitteln bleibt noch einer der beiden andern Pole, K_2 oder σ_2, die ebenfalls um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind. Man findet σ_2 auf folgende einfache Weise. Da die Zonenkreise $[F_1, F_2]$ und $[\underline{F_1}', \underline{F_2}']$ den Großkreis $\mathfrak{S}$ in den Punkten F und $\underline{F}'$ schneiden, so geht der Flächenpol F durch die Schiebung in $\underline{F}'$ über. Nun gilt aber ganz allgemein für jede beliebige Ebene E des auf S senkrechten Ebenenbüschels $\mathfrak{S}$ die Gleichung

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg} \widehat{K_1 \sigma_2} = \frac{\operatorname{ctg} \delta - \operatorname{ctg} \delta'}{2},$$

wobei δ und δ' die Außenwinkel zwischen K_1 und jener Ebene vor und nach ihrer Kippung bedeuten[1]. Setzt man $\delta = \widehat{K_1 F}$ und $\delta' = \widehat{K_1 \underline{F}'}$, so liefert die Formel (α) den Bogen zwischen K_1 und σ_2, und zwar liegt der Pol σ_2 in der gleichen

[1] In dem speziellen Falle, wo $E = K_2$, also $\delta = \widehat{K_1 K_2}$ ist, geht (α) über in

$$(\alpha') \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg} \widehat{K_1 \sigma_2} = \frac{\operatorname{ctg} \delta - \operatorname{ctg} (180 - \delta)}{2} = \operatorname{ctg} \delta.$$

Zu S. 2.

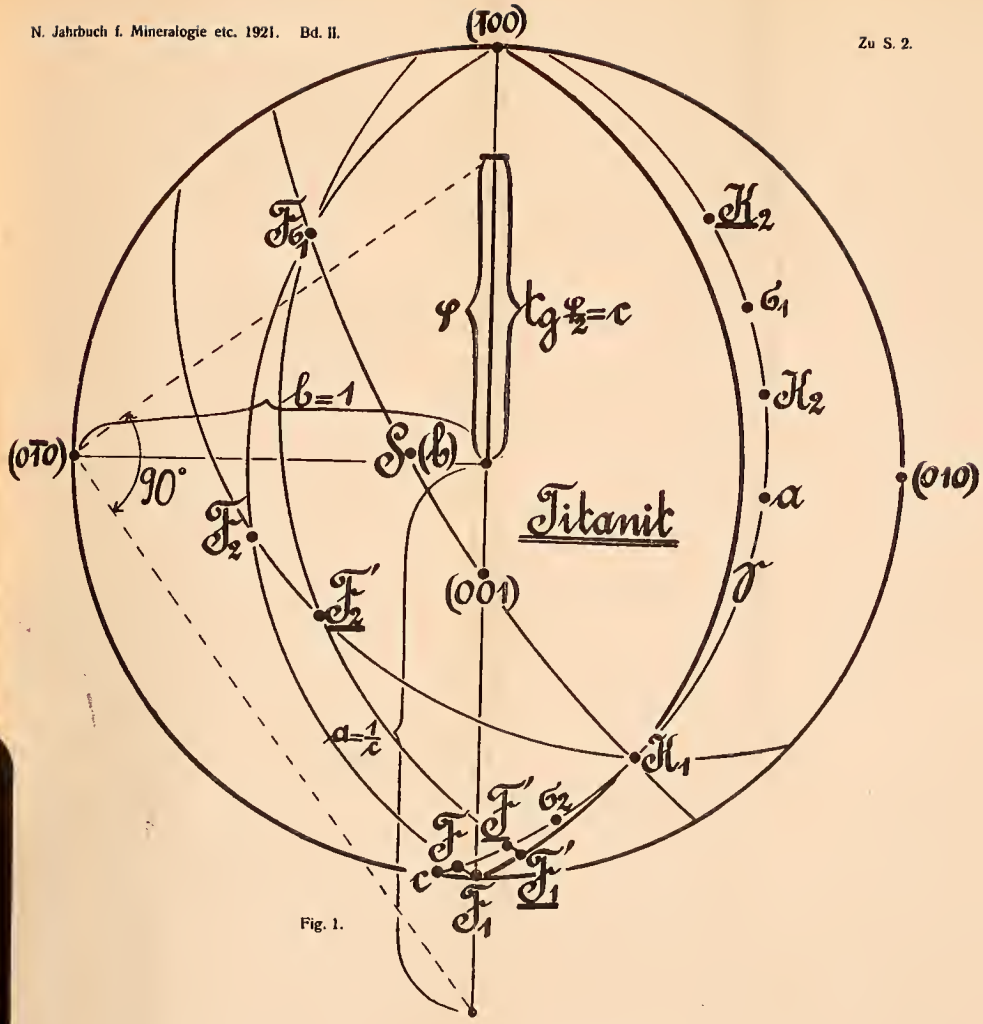

Fig. 1.

Richtung von K_1 wie F und $\underline{F'}$ oder in der entgegengesetzten, je nachdem $\delta > \delta'$ oder $\delta < \delta'$ ist[1]. Die zweite Kreisschnittsebene K_2 hat nach der Schiebung die in bezug auf σ_1 symmetrische Stellung $\underline{K_2}$ und der Pol der kleinsten Ellipsoidachse c halbiert denjenigen Bogen φ zwischen K_1 und $\underline{K_2}$, der kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist; der Pol der größten Achse a halbiert den Bogen $(\pi - \varphi)$ zwischen K_1 und $\underline{K_2}$ und der Pol der mittleren Achse b ist identisch mit dem Pole S der Schiebungsebene.

Jetzt können die Achsenlängen a, $b = 1$ und $c = \frac{1}{a}$ des Deformationsellipsoids konstruiert werden, das aus einer Kugel vom Radius $b = 1$ hervorgeht. Da $c = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ ist, so hat man einfach den Bogen $2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi$ auf der geradlinigen Meridianprojektion des Wulff'schen Netzes vom Grundkreiszentrum aus abzutragen (Fig. 1); dann ist offenbar die Länge dieser geraden Strecke gleich $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = c$, wofern man dem Radius der Projektionskugel und somit auch dem des Grundkreises die Länge $b = 1$ zuschreibt. Beträgt dieser Radius wie gewöhnlich einen Dezimeter, dann ist die konstruierte Strecke gleich c Dezimeter, so daß c auf einem angelegten Zentimetermaßstab direkt abgelesen werden kann. Endlich wird $a = \frac{1}{c}$ Dezimeter dadurch erhalten, daß wir ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, in welchem der Grundkreisradius die Höhe und c einen der beiden Hypothenusenabschnitte bildet; der andere Hypothenusenabschnitt ist dann gleich a, weil $a : 1 = 1 : c$ (Fig. 1). Die „Größe der Schiebung" ist $s = a - c$.

In Fig. 1 ist bei Des Cloizeaux'scher Aufstellung des Titanit: $F_1 = (100)$, $\underline{F_1'} = (\bar{1}3\bar{1})$, $F_2 = (0\bar{2}1)$, $\underline{F_2'} = (1\bar{1}\bar{2})$, $\sigma_1 = [1\bar{1}0]$ und $K_2 = (\bar{1}31)$, während die Stellungen von K_1 und S sowie die Richtungen von σ_2, a, b und c irrational sind; wie man die Indizes von Flächen und Kanten aus den stereographischen Projektionen ihrer Kugelpole findet, ist bekannt.

---

[1] F und $\underline{F'}$ liegen stets in einer und derselben Richtung von K_1.

In der folgenden Tabelle sind einige graphisch abgeleitete Winkel und Längen mit den berechneten verglichen.

Tabelle für Titanit (Hauptverfahren „A").

Winkel und Längen	$\varphi = \widehat{K_1 K_2}$	$\widehat{\sigma_1 K_2} = 90 - \varphi$	c	$a = \frac{1}{c}$	$s = a - c$
Graphisch ermittelt	$73\frac{1}{2}^0$	$16\frac{1}{2}^0$	0,75	1,33	0,58
Berechnet	73° 21′	16° 39′	0,745	1,343	0,598

Da der Grundkreisradius der Fig. 1 gleich 1 dcm ist, so kann sie zur Nachprüfung der obigen Daten durchgepaust und die Pause über dem üblichen Wulff'schen Netz ausgewertet werden.

Bei der hier als Beispiel gewählten Titanitschiebung ist K_1 irrational und σ_1 rational, doch erkennt man nunmehr, daß das soeben beschriebene Hauptverfahren „A" infolge der Allgemeingültigkeit der Gleichung (α) in völlig gleicher Weise auch auf Schiebungen mit rationalem K_1 und irrationalem σ_1 angewandt werden kann.

Im folgenden wird die Gleichung (α), die eine Unterbrechung des graphischen Weges darstellt, durch Konstruktionen überbrückt.

Das Sonderverfahren „A I" (Fig. 2).

Die Spezialmethode „AI" für Schiebungen erster Art mag an dem monoklinen Lithiumsulfatmonohydrat erläutert werden; auch dieses Beispiel gehört zum allgemeinsten Fall, da beide Kreisschnittsebenen schräg zur Symmetrieachse verlaufen. Zur Übersicht sind die Pole von {100}, {010} und {001} in das Stereogramm der Fig. 2 eingetragen. Es gehen nun wieder zwei Flächen F_1 und F_2 durch Kippung in $\underline{F_1}'$ und $\underline{F_2}'$ über und man findet zunächst nach dem Hauptverfahren „A" nacheinander den Pol der Gleitfläche K_1 und den der Schiebungsebene S sowie den zu S polaren Großkreis $\mathfrak{S}$ mit dem Pol der Gleitrichtung σ_1 im Abstande $\frac{\pi}{2}$ von K_1.

Nun beginnt die Spezialmethode „AI", die lediglich zur Ermittelung des Grundzonenpoles σ_2 dient; er liegt in $\mathfrak{S}$ um

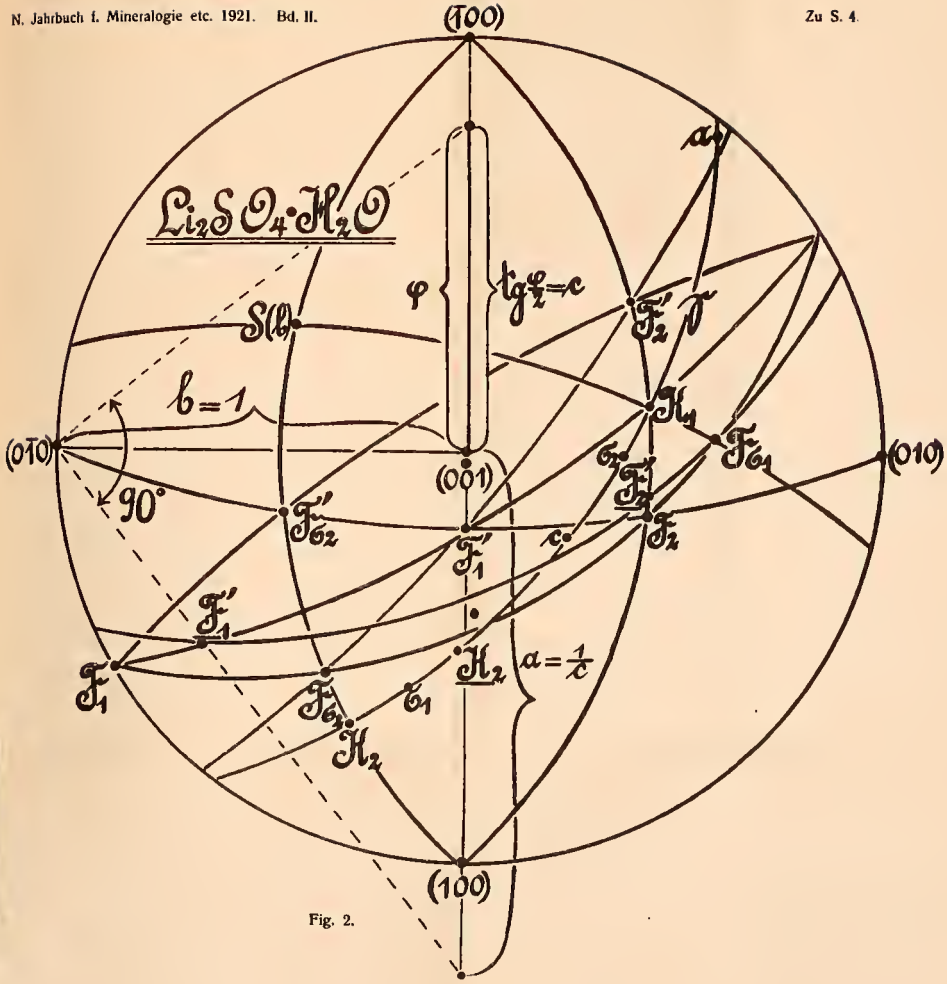
(1̄00)
Li₂SO₄·H₂O
φ
tg φ/2 = c
a
S(b)
F'₂
γ
b = 1
H₁
(01̄0)
(001)
σ₂
F'₂
F σ₁
(010)
90°
F'σ₂
F'₁
c
F₂
F'₁
F₁
H₂
a = 1/c
F σ₂
σ₁
H₂
(100)

Fig. 2.

den unbekannten Bogen φ von σ_1 entfernt. Das Verfahren „A I“ beruht auf einer von O. Mügge (l. c.) angegebenen Relation. Konstruiert man die zu $\underline{F_1}'$ und $\underline{F_2}'$ in bezug auf K_1 symmetrischen Flächenpole F_1' und F_2' des nicht deformierten Kristallteiles, so schneiden sich die Zonenkreise $[F_1, F_2]$ und $[F_1', F_2']$ in einem Flächenpol $F\sigma_2$ und die Zonenkreise $[F_1, F_2']$ und $[F_2, F_1']$ in einem Flächenpole $F\sigma_2'$ derart, daß der Zonenpol $[F\sigma_2, F\sigma_2']$ identisch mit dem Grundzonenpol σ_2 ist. Alles weitere ergibt sich, wie bei „A“ beschrieben.

In Fig. 2 ist: $F_1 = (1\bar{1}0)$, $F_2 = (121)$, $\underline{F_1}' = (\underline{101})$, also $F_1' = (101)$, $\underline{F_2}' = (\underline{\bar{3}21})$, also $F_2' = (\bar{3}21)$, $K_1 = (\bar{1}21)$ und $\sigma_2 = [012]$, während σ_1, K_2 und S ebenso wie die Richtungen von a, b und c irrational sind. In der folgenden Tabelle findet man einige graphisch abgeleitete Winkel und Längen mit den berechneten verglichen.

Tabelle für Lithiumsulfatmonohydrat (Sonderverfahren „A I“).

Winkel und Längen	$\varphi = \widehat{K_1 K_2}$	$\widehat{K_1 \sigma_2} = (90 - \varphi)$	c	$a = \frac{1}{c}$	$s = a - c$
Graphisch ermittelt	$76\frac{1}{2}^0$	$13\frac{1}{2}^0$	0,79	1,27	0,48
Berechnet	76° 42′	13° 18′	0,791	1,264	0,473

Das Sonderverfahren „A II“.

Diese Methode dient bei Schiebungen zweiter Art zur Ableitung der zweiten Kreisschnittsebene K_2, nachdem auch hier wieder K_1, S, σ_1 und $\mathfrak{S}$ wie beim Verfahren „A“ festgelegt sind. Man findet K_2 auf Grund einer Relation, die der im vorigen Kapitel benutzten analog ist, indem wir statt zweier Flächenkippungen zwei Kantenkippungen verwenden; da aber Drehungen von Kanten bei weitem nicht so genau gemessen werden können wie die von Flächen, so hat man die Positionen von drei Flächen, die überdies nicht tautozonal sein dürfen, vor und nach der Deformation festzustellen. Es mögen die drei Flächenpole F_1, F_2 und F_3 in $\underline{F_1}'$, $\underline{F_2}'$ und $\underline{F_3}'$ übergehen; ferner seien F_1', F_2' und F_3' die drei zu $\underline{F_1}'$, $\underline{F_2}'$ und $\underline{F_3}'$ in bezug auf die Gleitrichtung σ_1 symmetrischen Flächenpole des nicht deformierten Kristall-

teils. Wir führen nun für die hiermit gegebenen Zonenachsen oder Zonenpole folgende Symbole ein: $[F_3, F_3'] = L_{K_2}$. $[F_1, F_3] = L_1$. $[F_2, F_3] = L_2$, $[F_1, F_3'] = L_1'$ und $[F_2, F_3'] = L_2'$. Dann bestimmen die beiden Flächen (L_1, L_2') und (L_2, L_1') einen Zonenpol L_{K_2}' derart, daß der Flächenpol (L_{K_2}, L_{K_2}') gleich dem gesuchten Pol K_2 der zweiten Kreisschnittsebene ist. Alles weitere leitet sich wieder so ab wie bei „A" beschrieben. Das Stereogramm der Fig. 2 kann zur Erläuterung dieser Methode „A II" dienen; da wir hier genau so mit Kantenpolen zu operieren haben, wie nach „A I" mit Flächenpolen und umgekehrt, so braucht man lediglich die Kanten- und Flächenbezeichnungen dieses Kapitels an die Stellen der analogen Flächen- und Kantenbezeichnungen der Fig. 2 zu setzen. Es haben dann die projizierten Pole und Zonenkreise des Stereogramms diejenige neue Bedeutung, die aus der beistehenden Tabelle zu ersehen ist.

Tabelle für die Beziehungen zwischen den beiden Sonderverfahren „A I" und „A II" (Fig. 2).

Alte Bedeutung („A I")	F_1	F_2	$\underline{F_1'}$	$\underline{F_2'}$	K_1	$F\sigma_1$	S(b)	$\mathfrak{S}$	σ_1
Neue Bedeutung („A II")	L_1	L_2	$\underline{L_1'}$	$\underline{L_2'}$	σ_1	L_{K_1} $(//K_1)$	b(S)	$\mathfrak{S}$	K_1
Alte Bedeutung („A I")	F_1'	F_2'	$F\sigma_2$	$F\sigma_2'$	K_2	σ_2	$\underline{K_2}$	c	a
Neue Bedeutung („A II")	L_1'	L_2'	L_{K_2}	L_{K_2}'	σ_2	K_2	$\underline{\sigma_2}$	a	c

Nunmehr soll nachträglich die Relation $([L_{K_2}], [L_{K_2}']) = K_2$, auf der das Verfahren „A II" beruht, abgeleitet werden. Zu diesem Zweck führen wir folgende allgemeinen Indizes ein:

	$\sigma_1 = [\mu\,\nu\,\pi]$	$K_2 = (m\,n\,p)$	
$F_1 = (r_1\,s_1\,t_1)$	$F_2 = (r_2\,s_2\,t_2)$		$F_3 = (r_3\,s_3\,t_3)$
$F_1' = (r_1'\,s_1'\,t_1')$	$F_2' = (r_2'\,s_2'\,t_2')$		$F_3' = (r_3'\,s_3'\,t_3')$
$L_1 = [\varrho_1\,\sigma_1\,\tau_1]$	$L_2 = [\varrho_2\,\sigma_2\,\tau_2]$	$L_1' = [\varrho_1'\,\sigma_1'\,\tau_1']$	$L_2' = [\varrho_2'\,\sigma_2'\,\tau_2']$

Hieraus kann man die Indizes der beiden Kanten $L_{K_2} = [F_3 . F_3']$ und $L_{K_2}' = [(L_1 . L_2') . (L_2 . L_1')]$ berechnen. Es

soll nun zuerst gezeigt werden, daß $L_{K_2} \parallel K_2$, und sodann, daß auch $L_{K_2}' \parallel K_2$ ist. Das erste ergibt sich daraus, daß

$$(1) \quad . \; . \; . \quad m(s_3 t_3' - t_3 s_3') + n(t_3 r_3' - r_3 t_3') + p(r_3 s_3' - s_3 r_3') = 0$$

wird, wenn man die Flächenindizes r_3', s_3', t_3' durch die rechtsseitigen Terme der bekannten Flächentransformationsformeln (2) ausdrückt:

$$(2) \quad . \; . \; . \quad \begin{cases} r_3' = r_3(m\mu + n\nu + p\pi) - 2m(r_3\mu + s_3\nu + t_3\pi) \\ s_3' = s_3(m\mu + n\nu + p\pi) - 2n(r_3\mu + s_3\nu + t_3\pi) \\ t_3' = t_3(m\mu + n\nu + p\pi) - 2p(r_3\mu + s_3\nu + t_3\pi). \end{cases}$$

Das zweite folgt daraus, daß

$$(3) \quad . \quad \begin{cases} m\big((\tau_1\varrho_2'\varrho_2\sigma_1' - \tau_1\varrho_2'\sigma_2\varrho_1' - \varrho_1\tau_2'\varrho_2\sigma_1' + \varrho_1\tau_2'\sigma_2\varrho_1') - \\ \qquad (\tau_2\varrho_1'\varrho_1\sigma_2' - \tau_2\varrho_1'\sigma_1\varrho_2' - \varrho_2\tau_1'\varrho_1\sigma_2' + \varrho_2\tau_1'\sigma_1\varrho_2')\big) \\ + n\big((\varrho_1\sigma_2'\sigma_2\tau_1' - \varrho_1\sigma_2'\tau_2\sigma_1' - \sigma_1\varrho_2'\sigma_2\tau_1' + \sigma_1\varrho_2'\tau_2\sigma_1') - \\ \qquad (\sigma_1\tau_2'\varrho_2\sigma_1' - \sigma_1\tau_2'\sigma_2\varrho_1' - \tau_1\sigma_2'\varrho_2\sigma_1' + \tau_1\sigma_2'\sigma_2\varrho_1')\big) \\ + p\big((\sigma_1\tau_2'\tau_2\varrho_1' - \sigma_1\tau_2'\varrho_2\tau_1' - \tau_1\sigma_2'\tau_2\varrho_1' + \tau_1\sigma_2'\varrho_2\tau_1') - \\ \qquad (\tau_1\varrho_2'\sigma_2\tau_1' - \tau_1\varrho_2'\tau_2\sigma_1' - \varrho_1\tau_2'\sigma_2\tau_1' + \varrho_1\tau_2'\tau_2\sigma_1')\big) = 0 \end{cases}$$

wird, wenn wir die Kantenindizes ϱ_1', σ_1', τ_1' und ϱ_2', σ_2', τ_2' durch die rechtsseitigen Terme der Kantentransformationsformeln (4) ausdrücken:

$$(4) \quad . \; . \; . \quad \begin{cases} \varrho_i' = 2\mu(\varrho_i m + \sigma_i n + \tau_i p) - \varrho_i(m\mu + n\nu + p\pi) \\ \sigma_i' = 2\nu(\varrho_i m + \sigma_i n + \tau_i p) - \sigma_i(m\mu + n\nu + p\pi) \\ \tau_i' = 2\pi(\varrho_i m + \sigma_i n + \tau_i p) - \tau_i(m\mu + n\nu + p\pi). \end{cases}$$

Somit gilt für Schiebungen mit irrationaler Gleitfläche K_1 die Formel

$$(5) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (K_2) = ([L_{K_2}], [L_{K_2}']).$$

Man kann daher mittels (5) analog unserm graphischen Verfahren „AII“ auch rechnerisch die gesamte Deformation ableiten, wenn die Kippungen zweier beliebiger Kanten festgestellt sind.

Schluß.

Im vorhergehenden sind jedesmal einige empirische Größen graphisch dargestellt und aus dieser Darstellung konstruktiv neue Größen abgeleitet, die in den Gleichungen der betr. Kristallschiebung als Konstanten auftreten, so daß man alle weiteren Messungen durch graphisches oder rechne-

risches Verfahren zu ersetzen oder auch nachzuprüfen vermag. Die beschriebene Methode ist also prinzipiell gleich der des Physikers, wenn er zwei einander zugeordnete Größenserien in ein Koordinatensystem einträgt und durch die figurativen Punkte eine Kurve legt, die das Gesetz der Abhängigkeit veranschaulicht und unendliche viele Wertepaare zu intrapolieren oder zu extrapolieren gestattet: unsere Größenpaare kennzeichnen je eine Flächenstellung oder Kantenrichtung vor und nach der Kippung.

Unter den graphischen Darstellungen der Gesteinskunde gibt es solche, die jenes „nomographischen“ Charakters ermangeln und daher fast als überflüssig erscheinen; sie sind „idiographisch“ und zeigen somit nur die beschränkte Anzahl der in das Diagramm übertragenen Eigentümlichkeiten eines individuellen Falles.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1921

Band/Volume: 1921_2

Autor(en)/Author(s): Johnsen Arrien

Artikel/Article: Graphische Ableitung des Deformationsellipsoides der Kristallschiebung aus den Kippungen zweier beliebiger Flächen oder Kanten. 1-8