III. SECTION.

DIE REFLEXIONSERSCHEINUNGEN AN BEWEGTEN WASSERFLÄCHEN

VON

DR. BARON BÉLA HARKÁNYI

MIT 8 FIGUREN IM TEXT.

EINLEITUNG.

Herr v. Cholnoky beschäftigt sich in der vorangehenden Mittheilung eingehend mit den Reflexionserscheinungen, welche er am Balatonsee beobachtet hatte und welche er nach dem dort üblichen volksthümlichen Ausdruck: «goldene Brücke» bezeichnet. Er untersucht mit Hilfe einfacher geometrischer Methoden die Form und Dimensionen jener glänzenden Streifen, welche durch die Reflexion der Strahlen der Sonne und des Mondes an der bewegten Wasserfläche des Sees entstehen und trachtet aus den beobachteten Lichterscheinungen Schlüsse zu ziehen bezüglich der Neigung der Wellen. Da jedoch seine — sich grösstentheils an die ähnlichen Untersuchungen des Herrn Piccard anlehnende — genäherte Theorie mehrere Lücken aufweist, schien es mir wünschenswerth, die Theorie jener Erscheinungen einer strengeren Behandlung zu unterziehen, sowohl für den Fall der ebenen, als auch für den der sphärischen Wasserfläche, welch' letztere den in der Natur beobachteten Erscheinungen genauer entspricht.

In den folgenden Zeilen habe ich es versucht, die Grundzüge einer derartigen Theorie zu entwickeln, doch konnte ich bei der kurzen Zeit, die mir zur Verfügung stand und bei der hier gebotenen Raumbeschränkung mich nicht in die erschöpfende Behandlung dieser schwierigen und complicirten Probleme einlassen. Deshalb beschränke ich mich hier ausser der Aufstellung der Grundgleichungen nur auf die Erklärung einiger für die Praxis wichtigen Fragen.

Budapest, am 31. Januar 1905.

Dr. Baron Béla Harkányi.

DIE REFLEXIONSERSCHEINUNGEN AN BEWEGTEN WASSERFLÄCHEN.

Die interessanten Lichterscheinungen, welche ihre Entstehung der Reflexion der Strahlen heller Gestirne oder irdischer Lichtquellen an bewegten Wasserflächen verdanken, scheinen von Seiten der Theoretiker nur wenig Beachtung gefunden zu haben. Demzufolge habe ich in der optischen Literatur dieses Problem betreffend kaum irgendwelche Angaben gefunden, ausser einigen Bemerkungen in der Optik von HEATH[1] über diesen Gegenstand, wo sich auch die Diskussion einer ähnlichen, jedoch viel einfacheren Aufgabe vorfindet, die auch einige Anhaltspunkte für die analytische Formulirung der gegenwärtigen Aufgabe bietet. HEATH beschäftigt sich nicht mit dem Reflexionsproblem an Wasserflächen, erwähnt es aber unter den zu lösenden Aufgaben[2] und citirt auch eine diesbezügliche Formel ohne Ableitung, worauf ich weiter unten, Seite 15. zurückkommen werde.

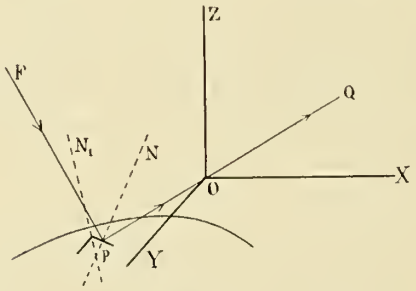

Fig. 1.
Bestimmung der Richtung der reflektirten Strahlen.

Die präcise Formulirung des gegenwärtigen Problems, die auch bei ganz beliebiger Form der bewegten Wasserfläche mit keinerlei besonderen Schwierigkeiten verbunden ist, scheint mir nur nach Einführung gewisser beschränkender Voraussetzungen über die Form und Dimensionen der Wellen möglich zu sein. Ich setze in der Folge voraus, dass sämmtliche Wellen die gleiche Form haben, und zwar die eines (in den praktischen Fällen meist ziemlich stumpfen) Kreiskegels, dessen Axe mit der Normale der ruhig gedachten Wasserfläche zusammenfällt. Den Winkel der Erzeugenden des Kegels mit der Tangentialebene der ruhigen Wasserfläche: den Neigungswinkel der Wellen, bezeichne ich mit i und vernachlässige die Höhe der Wellen. Falls unter diesen Voraussetzungen eine Welle im Punkte P den vom Lichtpunkte F ausgegangenen Strahl in das in O befindliche Auge des Beobachters reflektiren soll, darf der Ort der Welle nicht willkürlich gewählt werden. Es soll der geometrische Ort der Punkte P berechnet werden, welche dieser Forderung genügen, oder anders ausgedrückt, diejenige

[1] HEATH: A Treatise on geometrical Optics. 2. edition. (1895). pag. 133—139.
[2] Loc. cit. pag. 139.

glänzende Curve bestimmt werden, die der Beobachter infolge der Spiegelung der aus F kommenden Lichtstrahlen auf der bewegten Wasserfläche wahrnimmt.

Um die Gleichung der Curve ableiten zu können, müssen wir die Richtung der reflektirten Strahlen bestimmen. Zu diesem Zwecke wählen wir den Punkt O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und seien x, y, z die darauf bezogenen Koordinaten von P,

1.) $$\varphi(xyz) = 0$$

die Gleichung der ruhig gedachten Wasserfläche, α, β, γ die Richtungscosinus des aus F kommenden Strahles, l, m, n die Richtungscosinus der Normalen N, welche zum spiegelnden Flächenelement in P gehört, endlich λ, μ, ν die Richtungscosinus des von P nach O reflektirten Strahles PQ. Die Aufgabe ist gelöst, falls es gelingt, eine Gleichung zwischen den letzteren Grössen aufzustellen, weil diese in Verbindung mit der bekannten Identität:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

jene Kegelfläche vollständig bestimmt, welche durch die in O sich vereinigenden Strahlen gebildet ist und gleichzeitig in Verbindung mit der Gleichung 1.) auch die gesuchte Curve der reflektirenden Punkte vollkommen definirt.

Das Problem lässt sich auf Grund elementarer Sätze sehr einfach formuliren. Damit eine im Punkte P der Fläche φ befindliche Welle von der oben definirten Beschaffenheit einen aus F kommenden Strahl nach O reflektiren könne, muss:

$$\widehat{FPN} = \widehat{NPO}$$

sein, ferner müssen die Richtungen: FP, NP und OP in derselben Ebene liegen. Die beiden Forderungen führen nach bekannten Sätzen zu folgenden Gleichungen:

2.) $$\alpha l + \beta m + \gamma n = \lambda l + \mu m + \nu n;$$

3.) $$\begin{vmatrix} l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

hierzu tritt selbstverständlich noch die Identität:

4.) $$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Eine weitere Bedingung folgt noch aus der Gleichung der Fläche φ, auf Grund der oben erklärten Annahmen über die Gestalt der Wellen. Nach dem Gesagten bildet nämlich die Flächennormale: N_1 im Punkte P mit jeder Normale der Mantelfläche des in P gedachten Kegels den konstanten Winkel i, wie auch der Ort von P auf der Fläche φ gewählt sein mag; da nun die Richtungscosinus der Normalen N_1 gleich sind:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad R^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

so folgt die Gleichung:

5.) $$l\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi}{\partial y} + n\frac{\partial\varphi}{\partial z} = R\cos i.$$

Die Gleichungen 2.)—5.) genügen vollständig zur Lösung des Problems. Am einfachsten gelangen wir zum Ziele, wenn wir die Variablen l, m, n aus den Gleichungen 2.) 3.) und 4.) berechnen; die Einsetzung dieser Werthe in 5) führt zum gesuchten Resultat.

Die Gleichungen 2.) und 3.) bilden ein System von linearen, homogenen Gleichungen mit l, m, n als Unbekannten. Schreiben wir das System in die einfachere Form:

6.) $$\left.\begin{aligned} u_1 l + u_2 m + u_3 n = 0 \\ v_1 l + v_2 m + v_3 n = 0 \end{aligned}\right\}$$

und bezeichnen die aus dem System:

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \right\|$$

gebildeten Determinanten zweiten Grades mit L, M, N nach folgenden Gleichungen:

7.) $$L = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}; \quad M = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}; \quad N = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix};$$

dann werden die Grössen l, m, n proportional den entsprechenden Determinanten:

8.) $$\frac{l}{L} = \frac{m}{M} = \frac{n}{N} = \frac{1}{K}$$

wo der Werth von K^2 aus der Vergleichung von 8.) und 4) sich ergibt:

9.) $$K^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Wenn wir jetzt die aus 2.) und 3.) folgenden Werthe der u und v in die Determinanten in 7.) einsetzen, so folgt nach einigen Reductionen:

10.) $$\left.\begin{aligned} L &= (\beta\lambda - \alpha\mu)(\beta - \mu) - (\alpha\nu - \gamma\lambda)(\gamma - \nu) = (\alpha + \lambda)(1 - \sigma) \\ M &= (\gamma\mu - \beta\nu)(\gamma - \nu) - (\beta\lambda - \alpha\mu)(\alpha - \lambda) = (\beta + \mu)(1 - \sigma) \\ N &= (\gamma\mu - \beta\nu)(\beta - \mu) - (\alpha\nu - \gamma\lambda)(\alpha - \lambda) = (\gamma + \nu)(1 - \sigma) \end{aligned}\right\}$$

wo der Kürze halber:

11.) $$\sigma = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

gesetzt worden ist, welch letztere Grösse gleich ist dem Cosinus des Winkels $\widehat{OPF}$. Mit Benutzung dieser Werthe folgt aus 9.):

12.) $$K^2 = 2(1 - \sigma^2)(1 + \sigma)$$

ferner aus 8.):

13.) $$l = \frac{\alpha + \lambda}{\sqrt{2(1 + \sigma)}}; \quad m = \frac{\beta + \mu}{\sqrt{2(1 + \sigma)}}; \quad n = \frac{\gamma + \nu}{\sqrt{2(1 + \sigma)}}.$$

Hiernach können wir die gesuchte Gleichung sofort hinschreiben, wenn wir die Werthe von l, m, n aus 13.) in die Gleichung 5.) einsetzen; das Resultat dieser Substitution wird, wenn wir noch zur Wegschaffung der Quadratwurzeln beiderseits quadriren:

14.) $$\left[(\alpha + \lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\beta + \mu)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (\gamma + \nu)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]^2 = 2K^2(1 + \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)\cos^2 i.$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen den Richtungscosinus: λ, μ, ν. Um daraus die explicite Gleichung der Kegelfläche herzuleiten, müssen wir nur mehr die Grössen α, β, γ und λ, μ, ν in Function der laufenden Koordinaten: x, y, z ausdrücken und in die Gleichung 14.) einsetzen. Falls der leuchtende Punkt F im Unendlichen liegt, sind die α, β, γ konstante Grössen, was die weitere Discussion nicht unwesentlich vereinfacht.

Die Gleichung 14.) ist ganz allgemein und kann für jede, nach den Koordinaten differentiirbare Funktion φ angesetzt werden, doch wird die nach Durchführung der angedeuteten Substitutionen entstehende Gleichung schon bei den einfachsten Flächen sehr verwickelt und ihre Discussion stösst auf bedeutende Schwierigkeiten.

Der einfachste Fall ist selbstverständlich derjenige, bei welchem die ruhig gedachte Wasserfläche eine Ebene ist. Bevor ich jedoch auf die analytische Behandlung dieser Aufgabe übergehe, erachte ich es als wünschenswerth, die hauptsächlichsten Eigenschaften der so entstehenden Curven auf elementarem, geometrischen Wege auseinanderzusetzen. — Der Einfachheit halber wähle ich die Z-Axe senkrecht zur Wasserfläche, die X-Axe derart, dass der Lichtpunkt F in die XZ-Ebene falle und zwar auf die positive Seite der YZ-Ebene. Da nach den Obigen die Axen der spiegelnden Kegel sämmtlich der Z-Axe parallel sind, kann man die Richtung der reflektirten Strahlen mittelst einer einfachen sphärischen Konstruktion leicht bestimmen.

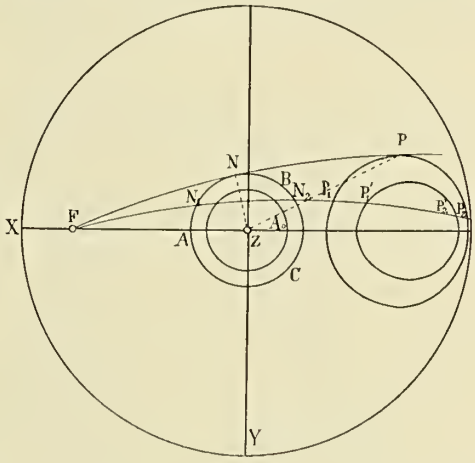

Fig. 2.
Konstruktion der sphärischen Curve in Horizontalprojektion.

Konstruiren wir um den Punkt O als Centrum eine Kugelfläche mit beliebigem Radius und bezeichnen die Schnittpunkte der Koordinatenaxen mit X, Y, Z. Da nach den Bisherigen die Normalen N der spiegelnden Kegelflächen mit der Z-Axe den konstanten Winkel i bilden, liegen die zu ihnen durch O gezogenen Parallelen auf der Oberfläche eines Kreiskegels vom Öffnungswinkel i, der somit die Kugel in einem kleinen Kreise: ABC vom sphärischen Radius i schneidet. Der vom unendlich entfernten Punkte F kommende Strahl schneide die Kugel im Punkte F, dann muss laut dem Reflexionsgesetz eine der Normalen: N_1 mit F und der mit P_1 bezeichneten Richtung des reflektirten Strahles in derselben Ebene liegen, und zwar derart, dass die Bögen $\widehat{FN_1}$ und $\widehat{N_1P_1}$ gleich seien. Um nun die Richtung des reflektirten Strahles zu konstruiren, schneiden wir den kleinen Kreis ABC mit dem Bogen eines durch F gehenden grössten Kreises und tragen darauf den Bogen $2\widehat{FN_1}$ von F aus in der Richtung nach N_1 ab; der Endpunkt: P_1 dieses Bogens bestimmt die Richtung des über O hinaus verlängerten reflektirten Strahles. Dem zweiten Schnittpunkt N_2 des aus F gezogenen Kreisbogens entspricht eine zweite Richtung P_2, die bei der Grenzlage des genannten Kreisbogens, in welcher derselbe den kleinen Kreis berührt, mit P_1 zusammenfallen wird. Der geometrische Ort der so konstruirten Punkte ist eine geschlossene sphärische

Curve, in welcher die Kugel die durch die reflektirten Strahlen gebildete Kegelfläche schneidet; ein horizontaler, ebener Schnitt der letzteren ist die gesuchte Curve der reflektirenden Punkte auf der Wasserfläche.

Der höchste Punkt der sphärischen Curve liegt in der XZ-Ebene und es kann seine Lage leicht bestimmt werden. Diese entspricht der linksseitigen Grenzlage der Normale. Da nun:

$$\widehat{FON} = \zeta - i$$

ist, wenn die Zenitdistanz von F mit ζ bezeichnet wird, so folgt laut dem Reflexionsgesetz:

$$\widehat{Zp_1} = \zeta - 2i$$

für die Zenitdistanz des höchsten Punktes und auf analogem Wege wird:

$$\widehat{Zp_2} = \zeta + 2i$$

die Zenitdistanz des tiefsten Punktes, endlich:

$$\widehat{Zp_2} - \widehat{Zp_1} = 4i$$

der Winkel dieser beiden Richtungen.

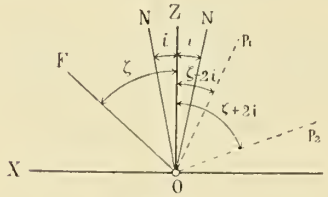

Fig. 3.
Die beiden Grenzlagen der reflektirten Strahlen.

Die hauptsächlichsten Eigenschaften der Curven der reflektirenden Punkte können auf Grund der bisherigen Angaben bei verschiedenen Werthen von ζ und i leicht diskutirt werden. Für das Folgende ist die Thatsache sehr wichtig, dass bei gegebenem ζ die zu verschiedenen Werthen von i gehörigen sphärischen Curven die Eigenschaft haben, dass die zum grösseren i gehörige Curve die zum kleineren i gehörige vollständig umschliesst. Wenn nämlich die beiden in Figur 2 gezeichneten sphärischen Curven zu den Werthen i und i' gehören und $i > i'$, dann muss jeder Punkt P_1' der zu i' gehörigen sphärischen Curve, welcher mit dem Punkte P_1 der zu i gehörigen Curve auf demselben sphärischen Bogen: FN_1 liegt, infolge der Konstruktion auch gleichzeitig zwischen P_1 und P_2 liegen und es können sich die beiden Curven nirgends schneiden. Deshalb zeigen auch die zu den sphärischen Curven gehörigen ebenen Schnitte die analoge Eigenschaft: alle Punkte der zum kleineren i gehörigen ebenen Curve liegen in demjenigen Theil der Ebene, der von der, zum grösseren i gehörigen Curve begrenzt ist und den Anfangspunkt O' (den Fusspunkt von O auf der Wasserfläche) nicht enthält. — Wenn i allmählich abnimmt, so zieht sich auch die sphärische Curve immer mehr zusammen, bis schliesslich für $i = 0$ p_1 und p_2 zusammenfallen und somit auch die Curve in einen Punkt zusammenschrumpft, dessen Zenitdistanz selbstverständlich gleich ζ wird; diese Richtung entspricht nämlich der Reflexion des Strahles OF an einer horizontalen, ebenen Fläche.

Der leichteren Übersicht halber habe ich in der Figur 4 die Kugelfläche mit der darauf gezeichneten sphärischen Curve und dem zu i gehörigen kleinen Kreis in Seitenansicht dargestellt. Die sphärische Curve $p_1 p p_2$ bestimmt den Kegel der reflektirten Strahlen und dessen ebenen Schnitte mit der Wasserfläche vollständig. Es sei nun O' der Fusspunkt von O, h die Höhe des letzteren über der Fläche

und $X'Y'$ die zu den früheren Koordinatenaxen XY parallele Axen, welche in der Wasserfläche liegen. Die Gestalt der Schnittcurven wird hauptsächlich davon abhängen, ob die Erzeugende Op_2 die Wasserfläche schneidet, oder nicht schneidet. Im ersten Falle muss Zp_2 ein spitzer Winkel sein, folglich:

15.) $$\zeta + 2i < 90^0;$$

dann ist die Schnittcurve eine geschlossene Curve; je tiefer p_2 liegt, um so weiter entfernt sich der Punkt P_2 der Curve von O', um so länger gestreckt erscheint die Curve auf der Wasserfläche. Ist

16.) $$\zeta + 2i > 90^0;$$

so kann Op_2 die Koordinatenebene nicht mehr schneiden und die Curve dehnt sich dann ins Unendliche aus; dasselbe gilt für den Grenzfall, wo:

17.) $$\zeta + 2i = 90^0,$$

und somit Op_2 der X'-Axe parallel wird.

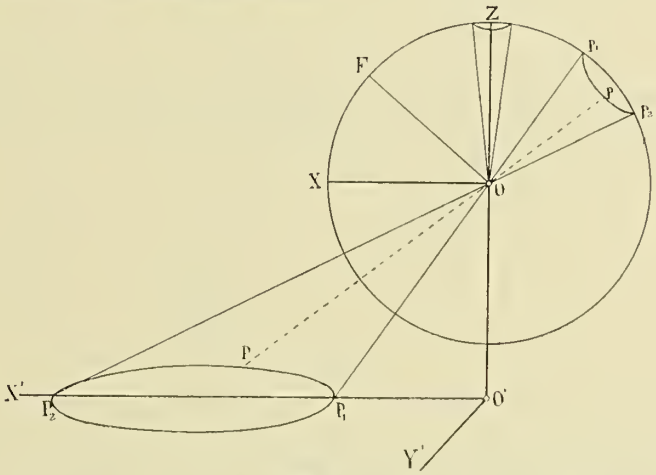

Fig. 4.
Die sphärische Curve und die Kegelfläche in Seitenansicht.

Der Neigungswinkel: $\zeta - 2i$, der am wenigsten geneigten Erzeugenden des Kegels ist für die Gestalt der Curven weniger wichtig, als die Neigung von Op_2, wenn wir uns auf die praktisch wichtigsten Fälle beschränken, wo ζ und i spitze Winkel sind und ζ stets grösser als $2i$ angenommen wird.

Die Abscisse des nächsten Punktes P_1 der auf der Wasserfläche liegenden Curve wird nach der Figur:

$$x_1 = h \operatorname{tg}(\zeta - 2i);$$

die Abscisse des entferntesten Punktes P_2 wird, falls die Curve geschlossen ist:

$$x_2 = h \operatorname{tg}(\zeta + 2i).$$

Ich bemerke noch, dass der Winkel $\widehat{p_1 O p_2}$ nach den Bisherigen von ζ unabhängig ist.

Da der Lichtpunkt F nach der bisherigen Annahme in der XZ-Ebene liegt, so ist die Kegelfläche, wie auch sämmtliche ebenen Horizontalschnitte derselben symmetrisch zur XZ-Ebene.

Auf Grund der besprochenen Eigenschaften lassen sich die reflektirenden Curven bei gegebenen Werthen von ζ und i in der Ebene auf folgende Art verhältnissmässig einfach konstruiren. Projiciren wir aus dem Mittelpunkt O die Punkte der — diesmal mit dem Radius h konstruirten — Kugelfläche auf die horizontale Tangentialebene derselben im Punkte Z und legen diese zweite Bildebene um FZ um, wo F den Schnittpunkt des nach O gezogenen einfallenden Strahles mit der Tangentialebene bezeichnet. Der Kegel der um den Winkel i geneigten Normalen schneidet diese Bildebene im Kreise ABC vom Radius ZN; da die Kreisbögen, welche bei der Konstruktion der sphärischen Curve benutzt worden sind, als Schnittcurven der durch die Gerade OF gehenden Ebenen mit der Kegelfläche aufgefasst werden können, so werden die Spuren dieser Ebenen auf der zweiten Bildebene durch F gezogene Geraden sein. Zur Bestimmung eines Punktes P der Curve brauchen wir blos den Einfallswinkel zu kennen, das heisst, den Winkel, den OF mit der betreffenden Flächennormale bildet. Zu diesem Zwecke ziehen wir den Strahl FN und bestimmen dadurch den Punkt N; dann ist der Einfallswinkel der bei O liegende Winkel des ebenen Dreieckes, dessen Seiten die Erzeu-

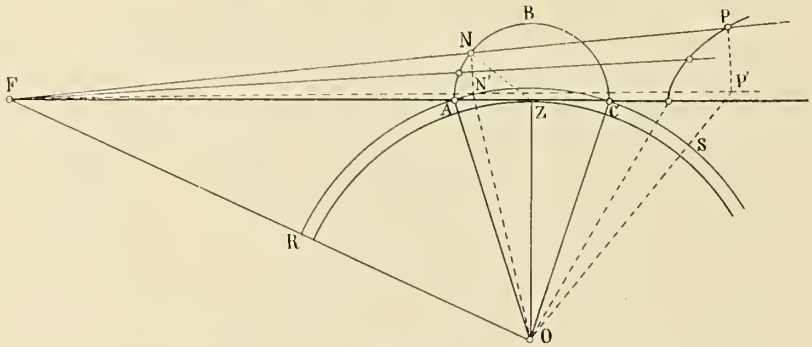

Fig. 5.
Konstruktion der reflektirenden Curve im Falle der ebenen Wasserfläche.

gende OA des Kegels der Normalen, ferner OF und FN sind. Um dieses Dreieck zu konstruiren, ziehen wir mit dem Radius OA und dem Mittelpunkt O den Kreis $RACS$ und schneiden mit der Zirkelöffnung FN den Punkt N' darauf ein. Die Ebene des so bestimmten Dreieckes: die Einfallsebene bildet im allgemeinen mit der Vertikalebene einen von Null verschiedenen Winkel und enthält den reflektirten Strahl; der letztere bildet mit der Richtung ON' den gleichen Winkel, wie der einfallende Strahl OF. Um den reflektirten Strahl zu konstruiren, müssen wir nur mehr den Bogen $2RN'$ auf den Kreis $RACS$ auftragen, dann verlängern wir die Seite FN' des obigen Dreieckes und ziehen die Gerade OS; diese beiden Geraden schneiden sich in P'. Durch Übertragung dieses Punktes mittelst eines Kreisbogens vom Radius FP' und dem Mittelpunkte F auf den Strahl FN nach P erhalten wir einen Punkt der Curve. Nachdem auf diese Weise eine beliebige Anzahl von Punkten bestimmt worden ist (in der Figur sind nur 3 Punkte gezeichnet, doch sind die konstruktiven Hilfslinien, mit Ausnahme der Strahlen von F aus, nur für den mit P bezeichneten Punkt ausgezogen) lässt sich die gesuchte Curve durch Verbindung der Punkte genau zeichnen.

In der Figur 6. sind auf diese Art 3 Curven dargestellt worden, die zu dem gleichen Werth von ζ und verschiedenen Werthen von i: $i_1 > i_2 > i_3$, gehören;

letztere habe ich so gewählt, dass sie den 3 typischen Gestalten der Curven: der geschlossenen Curve und den beiden Formen der unendlichen Curven entsprechen sollen. Bei der ersten Curve ist somit: $\zeta + 2\,i_1 > 90^0$, bei der zweiten: $\zeta + 2i_2 = 0$, bei der dritten: $\zeta + 2\,i_3 < 90^0$. In der Figur sind von den wichtigsten Konstruktionselementen nur die Winkel: ζ, i_1, i_2, i_3, die zu den letzteren gehörigen Kreise und die Entfernung: $OZ = h$ dargestellt, welch letztere den Masstab der Curven bestimmt. Die Curven sind den auf analogem Wege aus dem Kreiskegel abgeleiteten Curven zweiter Ordnung sehr ähnlich. — Ich bemerke nur noch, dass die Orientirung der so dargestellten Curven — wie dies aus der Konstruktion ersichtlich sein dürfte — nicht identisch ist mit der Lage der auf der Wasserfläche von O aus gesehenen Curven; um die Übereinstimmung herzustellen, muss die Zeichnung in ihrer Ebene um 180^0 gedreht werden, derart, dass der Punkt Z rechts vom Scheitel der Curven zu liegen komme.

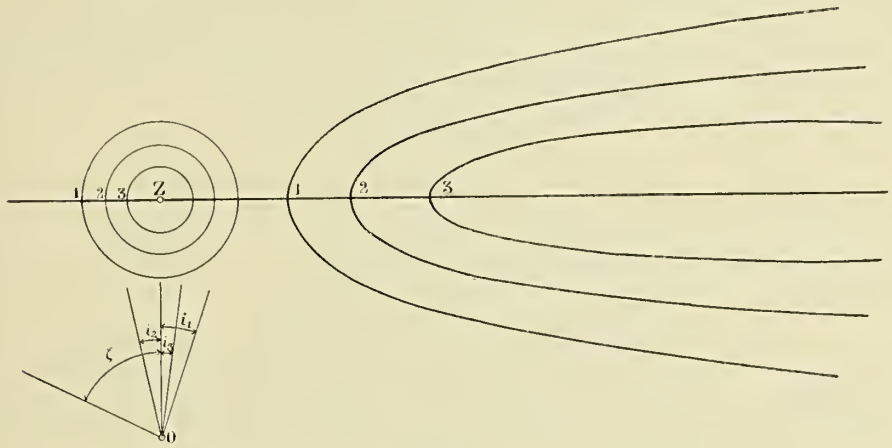

Fig. 6.
Die drei Hauptformen der reflektirenden Curven.

Die beschriebene Konstruktion ist sehr bequem und zweckmässig in Fällen, wo bei mässigen Werthen von ζ der darzustellende Curventheil sich nicht weit vom Anfangspunkte erstreckt, und wenn gleichzeitig i nicht sehr klein ist. Leider aber versagt die obige Methode bei der Konstruktion der entfernteren Curvenpunkte gänzlich in den, gerade für die Praxis wichtigen Fällen, wenn i ziemlich klein ist und der Lichtpunkt F in geringer Höhe über dem Horizont angenommen wird, also in Fällen, wo die Curven in der Y-Richtung eine geringe Ausdehnung besitzen. In solchen Fällen schneiden sich die zur Konstruktion von P' dienenden Strahlen OS und FN' unter einem so kleinen Winkel, dass dadurch die Bestimmung von P' und somit auch von P eine sehr unsichere wird.

Nun werde ich zur analytischen Ableitung der Curvengleichung auf Grund der Gleichung 14.) übergehen. Der Einfachheit halber setze ich auch hier voraus, dass der Punkt F in der XZ-Ebene liegt und behandle den Fall des unendlich entfernten Lichtpunktes. Die Axen wähle ich ebenso, wie bei den bisherigen Ableitungen und bezeichne die Höhe des Punktes O über der Wasserfläche wieder mit h. Dann wird die Gleichung der Wasserfläche:

18.) $$z + h = 0$$

Die Richtungscosinus des aus F ausgehenden Strahles werden konstant und wenn ich noch die Zenitdistanz von F mit ζ bezeichne, so wird:

19.) $$\alpha = \sin\zeta;\ \beta = 0;\ \gamma = \cos\zeta.$$

Dann folgt aus 5.) — was auch unmittelbar evident ist —:

20.) $$n = \cos i;$$

die Konstante: $\cos i$ der Kürze halber mit n bezeichnet, folgt aus 14.) die Grundgleichung:

21.) $$(\gamma + \nu)^2 = 2n^2(1 + \alpha\lambda + \gamma\nu);$$

die in dieser Form die Gleichung der oben besprochenen sphärischen Curve auf der Einheitskugel:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1;$$

darstellt. Um daraus die Gleichung des Kegels der reflektirten Strahlen abzuleiten, haben wir nur mehr statt der Richtungscosinus λ, μ, ν ihre, in den laufenden Koordinaten ausgedrückten Werthe nach den Gleichungen:

22.) $$\lambda = \frac{x}{\Delta};\ \mu = \frac{y}{\Delta};\ \nu = \frac{z}{\Delta};\quad \Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

einzusetzen; das Resultat dieser Substitution wird:

$$\left(\gamma + \frac{z}{\Delta}\right)^2 = 2n^2\left(1 + \frac{\alpha x + \gamma z}{\Delta}\right);$$

mit den Nennern ausmultiplizirt und geordnet, folgt daraus:

$$2\Delta\left[n^2\alpha x + \gamma(n^2 - 1)z\right]^2 = z^2 + (\gamma^2 - 2n^2)\Delta^2.$$

Da noch auf der linken Seite die Quadratwurzel Δ vorkommt, müssen wir zur Rationalisirung der Gleichung beiderseits quadriren und erhalten:

$$+\Delta^2\left[n^2\alpha x + \gamma(n^2 - 1)z\right]^2 = z^4 + 2(\gamma^2 - 2n^2)\Delta^2 z^2 + (\gamma^2 - 2n^2)^2\Delta^4.$$

Die angedeuteten Operationen ausgeführt und statt Δ^2 seinen Werth aus 22.) eingesetzt, lässt sich die Gleichung in folgender Form schreiben:

23.) $$A(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(Bx^2 + 2Cxz + Dz^2)(x^2 + y^2 + z^2) + z^4 = 0,$$

wo die der Kürze halber eingeführten Konstanten folgende Werthe haben:

24.) $$A = (\gamma^2 - 2n^2)^2;\ B = 2n^4\alpha^2;\ C = 2n^2\alpha\gamma(n^2 - 1);\ D = 2\gamma^2(n^2 - 1) - \gamma^2 + 2n^2.$$

Da die reflektirende Curve der ebene Schnitt der Kegelfläche ist, ergibt sich ihre Gleichung aus 23.) einfach dadurch, dass man statt der Koordinate z nach 18.) $-h$ einsetzt.

Die Theorie der so entstehenden Curven 4. Ordnung könnte nur auf Grund der eingehenden Discussion der Gleichung 23.) entwickelt werden. Da dies jedoch einerseits complicirte algebraische Untersuchungen erfordern würde, andererseits aber auch die Grenzen meiner mehr für die Praxis bestimmten Abhandlung überschreiten würde, kann ich mich bei dieser Gelegenheit darauf nicht näher ein-

lassen; ich will nur noch einige Bemerkungen bezüglich der theoretischen Seite des Problems hier hinzufügen.

Die Gleichung 23.) enthält wegen der oben betonten Symmetrie des Kegels und seiner Schnittcurven nur die geraden Potenzen von y. Infolge dessen kann sie nach y^2 einfach aufgelöst und somit auch der Grenzwerth: $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y}{x}$ leicht berechnet werden in Fällen, wenn die Winkel ζ und i der Ungleichheit 16.) genügen. Dieser Grenzwerth ist die trigonometrische Tangente des halben Asymptotenwinkels, den ich weiter unten auf einfachere Art berechnen werde.

Statt der Gleichung 23.) kann man bei der Discussion des Problems auch die einfachere Gleichung 21.) als Ausgangspunkt wählen, was zu einer anderen, geometrisch interessanten Erzeugung der schon mehrfach behandelten sphärischen Curve führt. Denken wir uns in der Gleichung 21.) statt der Richtungscosinus λ, μ, ν auf das obige Axensystem bezogene rechtwinklige Koordinaten ξ, η, ζ geschrieben, dann können die Gleichungen:

24.) $$(\gamma + \zeta)^2 = 2\,n^2\,(1 + \alpha\xi + \gamma\zeta);$$

25.) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

auch so interpretirt werden, dass die auf der Einheitskugel konstruirte sphärische Curve aus dem Schnitt der Fläche zweiten Grades: 24.) mit der Kugel: 25.) entstanden ist. Da nun 24.) η nicht enthält, ist sie die Gleichung einer Cylinderfläche, dessen Erzeugenden der Y-Axe parallel sind. Die Gleichung des Schnittes dieser Cylinderfläche mit der XZ-Ebene, — d. h. die Gleichung 24.) selbst — kann durch eine Paralleltransformation der Koordinaten leicht auf die bekannte Scheitelgleichung der Parabel zurückgeführt werden. Bezeichnen wir die laufenden Koordinaten der Curve, bezogen auf die neuen Axen $X'\,Z'$ mit ξ_1, ζ_1, indem wir setzen:

$$\xi_1 = \xi - a;\ \zeta_1 = \zeta - c;$$

dann ergibt sich aus 24) nach einfachen Reduktionen:

26.) $$\zeta_1{}^2 = 2\,n^2\,\alpha\,\xi_1;$$

falls die Konstanten a und c — die Koordinaten des neuen Anfangspunktes — aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} \gamma\,(1 - n^2) - c = 0 \\ c^2 - 2\,\gamma\,(1 - n^2)\,c + 2\,n^2\,\alpha\,a + \gamma^2 - 2\,n^2 = 0 \end{array}\right\}$$

bestimmt werden. Folglich ist die sphärische Curve die Schnittcurve der Kugel 25.) und eines parabolischen Cylinders, dessen Erzeugenden der Y-Axe parallel sind; die Leitcurve des Cylinders ist eine Parabel, dessen Axe der X-Axe parallel ist und dessen Parameter gleich $n^2\alpha$ ist.

Da die oben mitgetheilte Konstruktionsmethode in wichtigen Fällen der Praxis mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist und zu ungenauen Resultaten führt, schien es mir wünschenswerth, eine rechnerische Methode zu erproben, welche in solchen Fällen die Konstruktion ersetzen könnte. Ich habe versucht, die Punkte der sphärischen Curve und dem entsprechend auch die Koordinaten der ebenen Curve mittelst der Formeln der sphärischen Trigonometrie zu berechnen, was zwar auf keinerlei Schwierigkeiten stösst, jedoch zu schwerfälligen Gleichungen führt,

die sich für die praktische Berechnung wenig eignen. Die Gleichung 23.) lässt sich nach y leicht auflösen und auf diese Art können die Werthe von y aus den passend gewählten Werthen von x berechnet und zur Konstruktion der Curve verwendet werden, doch ist auch dieses Verfahren wegen der complicirten Gestalt der Gleichung 23) ein sehr mühsames und langwieriges. Ich halte es für zweckmässiger, die viel einfachere Gleichung 21.) zu diesem Zwecke zu benutzen, die, wenn sie auch für logarithmische Berechnung nicht besonders bequem ist, doch zu einer viel übersichtlicheren Rechnung führt. Wenn wir ν als unabhängige Variable wählen, dessen Grenzwerthe sowohl bei endlichen, als auch bei unendlichen Curven bekannt sind und den Hilfswinkel φ nach der Gleichung:

$$\nu = \cos\varphi$$

einführen, dann kann ν aus den passend gewählten Werthen von φ berechnet, und hiermit λ aus ν nach 21.) und Δ aus h und ν nach der Gleichung:

$$\nu = \frac{h}{\Delta}$$

ermittelt werden; schliesslich ergeben sich x und y aus den aus 22.) folgenden Gleichungen:

$$x = \Delta\lambda; \quad y = \Delta\mu = \Delta\sqrt{1 - \nu^2 - \lambda^2} = \Delta\sqrt{\sin^2\varphi - \lambda^2}.$$

In den wichtigeren Fällen der Praxis zeigt sich auch hier die, bei der Konstruktion beobachteten analoge Schwierigkeit, dass μ als Funktion der Differenz zweier Grössen sehr ungenau bestimmt wird, wenn diese Differenz klein ist; damit wird auch die Ordinate y sehr ungenau. Infolge dessen muss die Rechnung in solchen Fällen mit mehr Dezimalen ausgeführt werden, als es aus Bequemlichkeits-Rücksichten wünschenswerth wäre.

In dem Falle der Curven, wenn: $\zeta + 2i > 90^0$ ist, können die Asymptoten der unendlichen Curvenzweige, oder anders ausgedrückt, die Richtungswinkel der horizontalen Erzeugenden des Kegels leicht berechnet werden. Der Cosinus der Neigungswinkel dieser Erzeugenden gegen die X-Axe ist offenbar jener Werth: λ_0 von λ, der zu $\nu = 0$ gehört, daher folgt aus 21.):

$$2n^2(1 + \alpha\lambda_0) = \gamma^2;$$

nach λ_0 aufgelöst und die Werthe von α und γ aus 19.) eingesetzt wird:

27.) $$\lambda_0 = \frac{\gamma^2 - 2n^2}{2n^2\alpha} = \frac{\cos^2\zeta - 2\cos^2 i}{2\cos^2 i \sin\zeta};$$

folglich wird λ_0 im Falle von $\zeta > i$ negativ, was sich aus den geometrischen Verhältnissen leicht ergibt; λ_0 ist nämlich der Cosinus des Winkels, den die Verlängerung des reflektirten Strahles über O hinaus mit der X-Axe einschliesst, dieser Richtungswinkel wird daher in diesem Falle jedenfalls stumpf sein, weil F auf der linken Seite der XZ-Ebene liegt. Es lässt sich leicht zeigen, dass der absolute Werth von λ_0 stets kleiner als Eins ist, wenn nur:

$$\zeta + 2i > 90^0; \text{ und zugleich auch: } \zeta > i$$

weil dann nothwendigerweise immer:

$$|\lambda_0| < \frac{1}{2 \sin \zeta};$$

folglich $|\lambda_0|$ kleiner wird als Eins, wenn:

$$\zeta > 30^0;$$

doch kann ein der ersten Bedingung genügender Werth von ζ nur dann kleiner werden als 30^0, wenn i grösser wäre, als 30^0, was wieder der zweiten Bedingung widersprechen würde. — Bezüglich der Berechnung muss bemerkt werden, dass in Fällen, wo i klein und ζ gross ist, λ_0 aus 27.) durch seinen Cosinus sehr ungenau bestimmt wird. Es ist dann zweckmässig, den Sinus des halben Asymptotenwinkels als Unbekannte einzuführen und durch Einsetzung der Potenzreihen statt der trigonometrischen Funktionen von ζ und i die Gleichung passend umzuformen.

Schliesslich will ich noch eine Formel für die Berechnung der im Winkelmass gemessenen Breite der reflektirenden Curven mittheilen, die für geschlossene Curven gilt. Zur Ableitung derselben gehen wir wieder auf die sphärische Curve zurück und suchen das Azimut desjenigen Curvenpunktes P, welcher aus dem aus F gezogenen, den kleinen Kreis vom Radius i berührenden Kreisbogen liegt (Fig. 2.). Dieser Bogen entspricht der Grenzlage aller hier in Betracht kommenden Bögen aus F und berührt die sphärische Curve im Punkte P. Ich bezeichne das Azimut von P, oder den Winkel, den der Bogen ZP mit der Fortsetzung des Bogens XZ über Z hinaus einschliesst, mit A_0. A_0 lässt sich einfach bestimmen aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck: NZP, da offenbar:

$$\widehat{ZN} \perp \widehat{FP}, \text{ und } \widehat{FN} = \widehat{NP};$$

folglich ist das Dreieck NZP gleichschenklig, daher:

$$\widehat{ZP} = \widehat{ZF} = \zeta;$$

ferner:

$$\widehat{NZP} = 90^0 - \frac{1}{2} A_0$$

und:

28.) $$\sin \frac{1}{2} A_0 = \operatorname{tg} i \operatorname{ctg} \zeta.$$

Diese Formel entspricht der bei Heath citirten Gleichung,[1] ich behaupte jedoch nicht, dass sie mit derselben identisch sei; bei der hier mitgetheilten Ableitung entspricht sie nicht der Wirklichkeit. Nach Heath sollte nämlich A_0 den Maximalwerth des Azimuts darstellen, was aber im gegenwärtigen Falle nicht richtig sein kann, weil der Bogen ZP keine Tangente der sphärischen Curve sein kann. Da jedoch Heath über die Form der Wellen nichts aussagt, noch von den sonstigen Nebenumständen, welche das Problem bestimmen, irgend etwas mittheilt, und die Gleichung ohne Beweis anführt, kann aus dem Texte nicht entnommen werden, ob sich seine Aussage auf die hier diskutirten Curven bezieht. — Doch bleibt die obige Gleichung von Heath auch hier annähernd giltig: der Winkel A_0 stellt die im Winkelmass ausgedrückte halbe Maximalbreite der Curven mit ziemlicher Annäherung dar, besonders bei sehr langgestreckten Curven.

Beispielshalber führe ich hier folgende Zahlenangaben an. Wenn: $i = 5^0$, und $\zeta = 85^0$ ist, dann wird der Asymptotenwinkel aus 27.) $22' 46''$; bei der endlichen Curve mit: $i = 5^0$ und: $\zeta = 75^0$ wird nach 28.) $A_0 = 2^0 41' 11''$.

[1] Loc. cit. pag. 139.

In den bisherigen Ableitungen habe ich immer vorausgesetzt, dass die Gestalt der Wellen ein Kreiskegel sei mit vertikaler Axe, darum war die Neigung der spiegelnden Flächenelemente auf der ganzen Wasserfläche, wo überhaupt Wellen vorhanden sind, überall gleich. Die zu einem gegebenen i gehörige reflektirende Curve kann im Falle einer unendlich entfernten, punktförmigen Lichtquelle für alle hier in Betracht kommenden Werthe von ζ und i, durch direkte Konstruktion, oder durch Auftragung der berechneten Koordinaten stets mit der erwünschten Genauigkeit gezeichnet werden. Falls nur Kegel mit einerlei Neigungswinkeln vorkommen, wird die Lichterscheinung nur aus der zum betreffenden i gehörigen Curve bestehen, zu welcher ein Flächenelement einer jeden auf ihr liegenden Welle einen glänzenden Punkt liefert; diese Lichtpunkte werden je nach der Dichtigkeit der Wellen mehr oder weniger nahe bei einander liegen. Wenn mehrere verschiedenen Werthe von i vorkommen, wird jedem derselben eine mehr oder weniger kontinuirliche Folge von glänzenden Punkten entsprechen, die auf der zu dem betreffenden i gehörigen Curve liegen. Wenn nun alle Werthe von i von Null bis zu einem gewissen Maximalwerth: I vertreten sind, so wird das Resultat ein breites Band werden: die «goldene Brücke», dessen Grenze durch die zu I gehörige Curve gebildet wird Die glänzenden Punkte werden längs der Curven um so dichter liegen, je häufiger die zum betreffenden i gehörige Kegelfläche längs der Curve vorkommt.

Ähnliche Erscheinungen werden auch bei unregelmässig geformten Wellen entstehen können. Da die Gestalt solcher Wellen von der eines Kreiskegels bedeutend abweichen wird, sogar selbst mit Rotationsflächen mit verticaler Axe kaum vergleichbar sein dürfte, ist die Neigung solcher Wellen — um mich eines kurzen, jedoch nicht ganz exacten Ausdruckes zu bedienen — an verschiedenen Seiten derselben sehr verschieden und auch die Grenzen, zwischen denen i variirt, an den verschiedenen Seiten sehr ungleich. Damit unter solchen Verhältnissen ein Flächenelement einer auf der i-Curve liegenden Welle Licht nach dem Punkte O reflektiren könne, ist es nicht nur nöthig, dass der Neigungswinkel i auf der betreffenden Welle überhaupt vorkomme, sondern es muss auch die Normale eines solchen Flächenelementes eine bestimmte Richtung haben, deren Horizontalprojektion parallel ist der in Fig. 5. gezeichneten Geraden ZN. Da diese beiden Bedingungen, besonders bei dem Maximalwerth: I des Neigungswinkels nur in wenigen Punkten der zu I gehörigen Grenzcurve gleichzeitig erfüllt werden, so wird diese Grenzcurve, wie es auch die Erfahrung bestätigt, nur aus isolirten, hie und da aufblitzenden Punkten bestehen, welche eventuell durch grössere Zwischenräume getrennt sind. Hingegen kommen die kleineren Neigungswinkel bei den verschiedensten Azimuten der Normale auf den meisten Wellen vor, was zur Erklärung jener Beobachtungsthatsache genügt, dass die Helligkeit der goldenen Brücke längs der Mittellinie und in der Nähe derselben auf beiden Seiten am grössten ist und dass dort dunkle Zwischenräume kaum vorkommen. Die goldene Brücke kann auch bezüglich ihrer idealen Mittellinie unsymmetrisch werden, falls die maximalen und nahe daran liegenden Wellenneigungen bei gewissen Azimuten der Normale (z. B. auf der rechten Seite der Wellen) überhaupt nicht auftreten, was bei seitlicher Windrichtung mitunter vorkommen kann.

Wenn wir die beschriebene Lichterscheinung zur Bestimmung der Wellenneigung in irgend einem Punkte der Wasserfläche verwenden wollen, brauchen wir

im Falle einer punktförmigen Lichtquelle dazu nichts weiter, als eine Reihe der zum bekannten, respektive messbaren Werthe von ζ und verschiedenen i gehörigen Curven im passenden Masstabe gezeichnet. Nachdem der betreffende Punkt mit einem entsprechenden Messinstrument von O aus anvisirt und dessen Zenitdistanz und Azimut gemessen worden sind, können aus diesen Daten und dem bekannten Werthe von h die rechtwinkligen, auf das oben definirte Axensystem bezogenen Koordinaten desselben berechnet werden und der anvisirte Punkt in die Ebene der Curven eingezeichnet werden. Der Werth von i, welcher zu der durch den eingetragenen Punkt gehenden Curve gehört, ist der gesuchte Werth der Wellenneigung; falls der Punkt zwischen zwei Curven liegen sollte, kann die entsprechende Neigung aus den Werthen, welche den beiden benachbarten Curven entsprechen, durch einfache Interpolation bestimmt werden.

Leider ist dieses Verfahren, gerade bei den wichtigsten Fällen der Praxis, wo die Sonne oder der Mond die Erscheinung hervorbringen, nicht so einfach, da diese Lichtquellen nicht mehr als leuchtende Punkte betrachtet werden dürfen, sondern eine messbare Scheibe besitzen. Dieser Umstand würde, wenn wir über alle Einzelheiten der Erscheinung Rechenschaft geben wollten, zu grossen Complicationen führen, dazu wäre nämlich erforderlich, die Enveloppe der zu sämmtlichen Punkten der Scheibe des Himmelskörpers gehörenden i-Curven zu bestimmen. Dieses Problem liesse sich auf Grund der hier abgeleiteten Gleichungen ziemlich leicht formuliren, doch wäre die Lösung mit so grossen Schwierigkeiten verbunden, dass ich mich nicht weiter darauf einlassen kann. Ich bemerke nur noch, dass die endlichen Dimensionen der Scheibe des Himmelskörpers annähernd auf die Art berücksichtigt werden können, dass wir bei dem nächsten, respektive bei dem entferntesten Punkte der goldenen Brücke den untersten, respektive den höchsten Punkt der Scheibe als Lichtquelle betrachten, dementsprechend bei der rechtsseitigen Begrenzung der goldenen Brücke jenen Punkt des Randes, dessen rechtsseitiges Azimut am grössten ist, bei der linksseitigen Begrenzung den dazu symmetrisch liegenden linksseitigen Punkt des Randes.

Den zweiten wichtigen Fall der hier zu behandelnden Reflexionsprobleme bildet die Reflexion der Strahlen an kugelförmigen Wasserflächen, welche bei der Behandlung derartiger Probleme gewissermassen die zweite Näherung darstellt. Die Behandlung dieser Aufgabe ist wesentlich complicirter, als die desselben Problems an ebenen Wasserflächen, weshalb ich mich hier neben der Aufstellung der Grundgleichung nur auf einige wichtigere Bemerkungen beschränken muss.

Indem ich die Lichtquelle wieder als punktförmig und unendlich entfernt voraussetze, wähle ich das Koordinatensystem so, dass der Lichtpunkt F in der XZ-Ebene, auf der positiven Seite der XY-Ebene liege. Es sei die Z-Axe der durch den Punkt O gehende, nach oben gerichtete Radius der Kugelfläche, R dessen Halbmesser, h die Höhe des Punktes O über der ruhig gedachten Wasserfläche. Folglich wird die Gleichung der Kugel:

$$\varphi(xyz) = x^2 + y^2 + (z + h + R)^2 - R^2 = O:$$

die Richtungscosinus der Normalen im Punkte xyz werden:

$$\frac{x}{R}; \frac{y}{R}; \frac{z+h+R}{R};$$

und die Quadratsumme der Zähler offenbar gleich R^2.

Daher wird, wieder den Fall kegelförmiger Wellen mit der Neigung i vorausgesetzt, aus 14.):

$$29.)\qquad \left\{\left[\alpha+\frac{x}{\Delta}\right]x+\left[\beta+\frac{y}{\Delta}\right]y+\left[\gamma+\frac{z}{\Delta}\right](z+h+R)\right\}^2=$$
$$=R^2\left[1+\alpha\frac{x}{\Delta}+\beta\frac{y}{\Delta}+\gamma\frac{z}{\Delta}\right]\cos^2 i\,;$$

wo:
$$\Delta^2=x^2+y^2+z^2$$

bedeutet. Mit Δ^2 beiderseits multiplicirt, folgt nach einigen Umformungen:

$$30.)\qquad [(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)\,\Delta-z\,(R+h)-2\,Rh]^2=$$
$$=R^2\Delta\,(\Delta+\alpha x+\beta y+\gamma z)\cos^2 i.$$

Wenn wir diese Gleichung rationalisiren wollen, müssen wir auch hier noch nach Δ ordnen und die Irrationalität durch Quadriren beseitigen; das Resultat wird eine ziemlich complicirte Gleichung 8-ten Grades sein, auf deren Untersuchung ich mich hier nicht näher einlassen kann.

Es ist mir noch nicht gelungen, eine numerische oder konstruktive Methode für die Diskussion der Curven ausfindig zu machen, die durch den Schnitt der Kegelfläche 30.) mit der Kugel entstehen. Vielleicht dürfte eine Näherungsmethode am leichtesten zum Ziele führen, welche auf dem günstigen Umstand beruhen würde, dass im Falle der Erde xy und z im Vergleich zu R kleine Grössen sind und infolge dessen die ersten zwei Glieder auf der linken Seite von 29.) im Vergleich zum dritten Gliede sehr klein werden.

Schliesslich möchte ich noch die trigonometrische Berechnung der beiden Grenzen der goldenen Brücke hier mittheilen; diese Daten werden den bedeutenden Unterschied zeigen zwischen dem gegenwärtigen Problem und der analogen Aufgabe der ebenen Wasserfläche.

Es sei P der Ort der Welle in dem durch die XZ-Ebene gebildeten Schnitte der Kugelfläche vom Radius R, i der Neigungswinkel der Welle, ζ die Zenitdistanz der aus F kommenden Strahlen in A,[1] wo sich das Auge des Beobachters befindet. Es sei ferner ϑ der Winkel, den die Normale des Punktes P mit der Z-Axe einschliesst und Z der Winkel der Verlängerung des reflektirten Strahles mit derselben Koordinatenaxe, oder kurz die Zenitdistanz von P; dann wird nach dem Reflexionsgesetz (s. Figur 8):

$$31.)\qquad Z=\zeta+2\,i-2\,\vartheta\,;$$

da die Normale in P in diesem Falle mit der Richtung FP des einfallenden Strahles einen kleineren Winkel bildet, als im Falle der ebenen Wasserfläche und die durch die Krümmung der Fläche verursachte Verkleinerung dieses Winkels eben gleich ϑ ist. Dann folgt aus dem Dreieck OAP:

$$\frac{\sin Z}{R}=\frac{\sin(Z+\vartheta)}{R+h}.$$

[1] In der Figur 7 ist dieser Winkel irrthümlich mit ϑ bezeichnet worden; der Winkel von OA mit AF soll ζ heissen.

Wenn jetzt der Kürze halber die kleine Grösse η nach der Gleichung:

$$\eta = \frac{h}{R}$$

eingeführt wird, so folgt nach einigen Umformungen:

$$\sin\vartheta \cos Z + \cos\vartheta \sin Z = (1 + \eta) \sin Z;$$

oder:

32.) $$\sin\vartheta = (1 - \cos\vartheta + \eta) \operatorname{tg} Z = \left[\eta + 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right] \operatorname{tg} Z.$$

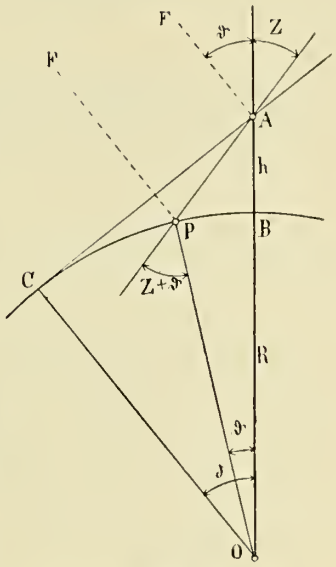

Fig. 7.
Bestimmung der Richtung der reflektirten Strahlen im Fall der kugelförmigen Wasserfläche.

Wenn ϑ klein ist, wird $\cos\vartheta$ nahe gleich 1, und wenn noch $\operatorname{tg} Z$ nicht sehr gross ist, so kann der Faktor: $1 - \cos\vartheta$ unterdrückt werden; die so entstehende Gleichung:

33.) $$\sin\vartheta = \eta \operatorname{tg} Z$$

entspricht der Rechnung des Herrn v. Cholnoky. Er bestimmt (S. 33.) aus den, den Gleichungen 32.) und 33.) analogen Formeln den Werth von ϑ durch successive Näherungen, deren Resultat der Gleichung 33.) vollständig genügt, doch nicht der strengen Gleichung 32.), wie ich mich durch Einsetzung seines Endwerthes überzeugt habe, und der Fehler ist ziemlich beträchtlich. Darum hielt ich es für wünschenswerth, eine strengere Formel abzuleiten, bei welcher auch die zweite Potenz von ϑ berücksichtigt wird.

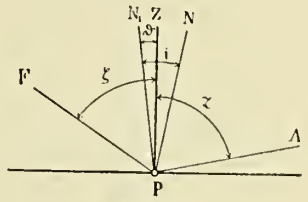

Fig. 8.
Bestimmung des entferntesten Punktes der goldenen Brücke.

Führen wir statt Z dessen Complement: m nach der Gleichung:

$$m = 90^0 - Z$$

ein und schreiben der Kürze halber:

$$\mu = 90^0 - \zeta - 2\,i;$$

dann wird aus 31.):

$$m = \mu + 2\,\vartheta;$$

ferner aus 32.):

$$\sin\vartheta = (1 - \cos\vartheta + \eta) \frac{1}{\operatorname{tg} m}.$$

Wenn wir den Sinus, respektive die Tangente der kleinen Winkel ϑ und m proportional dem Bogen annehmen (wodurch die dritten und höheren Potenzen der Bögen vernachlässigt werden) und die Winkel in Sekunden ausgedrückt denken, worauf das Zeichen $''$ hindeuten soll, so wird aus 31.) und 32.), etwas anders geordnet:

$$\frac{\vartheta''^2 + \dfrac{2\,\eta}{\sin^2 1''}}{2\,\vartheta''} = m'' = \mu'' + 2\,\vartheta'';$$

daraus folgt für die Berechnung von ϑ die quadratische Gleichung:

$$\frac{3}{2}\vartheta''^2 + \mu''\vartheta'' = \frac{\eta}{\sin^2 1''};$$

dessen Lösung wird:

34.) $$\vartheta'' = \frac{1}{3}\left[-\mu'' + \sqrt{\mu''^2 + 6\frac{\eta}{\sin^2 1''}}\right];$$

wo die Quadratwurzel immer mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist. Aus ϑ folgt m einfach aus der Gleichung:

$$m'' = \mu'' + 2\vartheta''$$

und die Entfernung von P, gerechnet vom Fusspunkte B des Punktes A aus:

35.) $$\overline{PB} = R\vartheta'' \sin 1''.$$

Im Beispiele von v. Cholnoky ist: $\zeta = 79^0 50'$; $i = 5^0$; $h = 10$ m. Aus diesen Daten finde ich nach Formel 33.) in guter Übereinstimmung mit seiner Rechnung: $\vartheta = 1' 26''.47$[1]; die Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung 32.) zeigte jedoch, dass dieses Resultat vom genauen Werthe ziemlich abweicht. Darum habe ich nach 34.) einen genaueren Werth berechnet und: $\vartheta = 1' 30''.79$ gefunden, welch letzterer der Gleichung 32.) vollkommen genügt. Auf diese Art wird der ursprüngliche Werth von m: $12' 52''.9$, welcher dem Näherungswerth von ϑ entspricht, auf: $13' 1''.6$ erhöht. — Aus diesem, nun definitiven Werthe von ϑ finde ich nach der Gleichung 35.): $\overline{PB} = 2802$ m.

Ich habe diese Frage nur deshalb eingehender diskutirt, weil die Gleichung 34.), besonders bei grösseren Werthen von $\operatorname{tg} Z$ auf einfacherem, direkten Wege zu genaueren Resultaten führt, als die wiederholte Anwendung der Näherungsformel 33.), ohne dass ich auf die auf $1''$ oder $0''.1$ genaue Berechnung der hier gesuchten Winkel ein besonderes Gewicht legen würde. Ich halte nämlich, bei Berücksichtigung der hier erreichbaren Beobachtungsgenauigkeit, welche die der Sextantenbeobachtungen kaum überschreiten dürfte und bei dem beträchtlichen Einfluss der Refraktion auf derartige Bestimmungen die Rechnungsgenauigkeit von etwa $10''$ für die Praxis vollkommen ausreichend.

Die somit berechneten Werthe von ϑ und Z beziehen sich auf den entfernteren Endpunkt der goldenen Brücke. Den Grenzwerth von ϑ bildet offenbar jener Winkel, welcher der aus A zur Kugelfläche gezogenen Tangente: AC entspricht, d. h. die Depression des Horizontes. Dieser Winkel lässt sich aus der bekannten Gleichung:

$$\delta = \frac{1}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{R}} = \frac{\sqrt{2\eta}}{\sin 1''}$$

berechnen. $90^0 - \delta$ bildet gleichzeitig den Grenzwerth von Z, somit kann man immer im voraus angeben, wann die goldene Brücke bis zum Horizonte reicht. Die Bedingung dafür ist:

$$\zeta + 2i - \delta < 90^0;$$

falls:

$$\zeta + 2i - \delta > 90^0;$$

[1] Den zur Rechnung nothwendigen Werth von R ($\log R = 6{,}80385$) habe ich aus dem ersten, bei v. Cholnoky auf S. 33 angeführten Werthpaar: t_1, ϑ_1 abgeleitet.

reicht sie nicht bis zum Horizont, und wenn endlich:

$$\zeta + 2i - \delta = 90^0;$$

dann erreicht ihr entfernteres Ende gerade den Horizont. Für den näheren Endpunkt der goldenen Brücke kann auf analoge Art die Gleichung:

36.) $$Z = \zeta - 2i - 2\vartheta$$

abgeleitet werden; der hierzu gehörige Werth von ϑ kann nach den Bisherigen einfach aus der Formel 33.) respective 32.) berechnet werden, wo in diesem Falle statt μ der Winkel $90^0 - \zeta + 2i$ gesetzt werden muss.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass auf Grund der bisherigen Ableitungen auch jene Fälle der Reflexionsprobleme erledigt werden können, bei welchen der Lichtpunkt F in endlicher Entfernung liegt. Die in diesem Falle gültigen Grundgleichungen können sowohl bei der Ebene, als auch bei der Kugel einfach abgeleitet werden, wenn in die Gleichungen 23) respective 30.) statt der konstanten Richtungscosinus: α, β, γ, ihre durch die Koordinaten von F ausgedrückten, diesmal variablen Werthe eingesetzt werden. Die so entstandenen Gleichungen sind viel komplicirter, als im Falle des unendlich entfernten Punktes und ihre Diskussion stösst auch auf viel grössere Schwierigkeiten.

Durch die hier mitgetheilten Entwickelungen ist die Theorie der Reflexionserscheinungen an bewegten Wasserflächen noch keineswegs erschöpft, nicht einmal in den beiden einfachsten Fällen, wie aus den Obigen zu ersehen ist, doch glaube ich, dass durch die gegenwärtigen Zeilen mir gelungen ist, die zu den weiteren Untersuchungen nothwendigen Grundgleichungen in der gewünschten Allgemeinheit streng abzuleiten, deren weitere Diskussion eine rein mathematische Aufgabe ist, andrerseits habe ich auf die wichtigsten Thatsachen hingewiesen, deren Beobachtung mit verhältnissmässig einfachen Hilfsmitteln ausführbar ist, und vom Standpunkte der Praxis besonders wichtig erscheint.

Ich möchte nur noch bemerken, dass es zweckmässig wäre, bei den Messungen neben den üblichen Instrumenten für Winkelmessung auch die photogrammetrischen Messinstrumente zu erproben; diese Methode vereinigt bei ihrer Schnelligkeit und Genauigkeit alle jenen Vortheile, welche das Gelingen derartiger Untersuchungen sichern können. Stereoskopische Aufnahmen sind für die Erforschung derartiger Erscheinungen auch sehr geeignet; nach dem Urtheil des Herrn Pulfrich[1] dürfte man nach den ersten Versuchen, die zur Bestimmung der Form der Meereswellen ausgeführt worden sind, die schönsten Resultate von diesem Verfahren erwarten.

---

[1] C. Pulfrich: Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellschaft. 2. Jahrg. pag. 258.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Resultate der wissenschaftlichen Erforschung des Balatonsees

Jahr/Year: 1901

Band/Volume: 1_5

Autor(en)/Author(s): Harkanyi Bela

Artikel/Article: III. Section. Die reflexionserscheinungen an bewegten Wasserflächen 1-21