Sitzungsberichte

der königl. böhmischen

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

in Prag.

Jahrgang 1869.

Januar — Juni.

PRAG, 1869.

Sitzungsberichte

der königl. böhmischen

Gesellschaft der Wissenschaften

in Prag.

Jahrgang 1869.

Januar — Juni.

PRAG.

1869.

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturvissenschaften am 4. Januar 1869.

Anwesend die Herren Mitglieder: Rochleder, Kořistka, Krejčí, Durège, Šafařík, Beneš; als Gäste die Herren: Hoffmann, Küpper, und Weyr.

Herr Emil Weyr, Assistent der Mathematik am Polytechnicum hielt einen Vortrag: „*Ueber die Doppelelemente projectivischer Gebilde und deren Bedeutung für Curven dritter Ordnung und Classe.*"

1. Zwei projectivische Grundgebilde erster Stufe (Strahlenbüschel, Ebenenbüschel oder Punktreihen) sind solche, in welchen Doppelverhältnissgleichheit zwischen vier Paaren entsprechender Elemente herrscht.

Sind nämlich a_1, b_1, c_1, d_1 vier Elemente (Strahlen, Ebenen oder Punkte) des einen Gebildes G_1 und a_2, b_2, c_2, d_2 die ihnen entsprechenden vier Elemente des zweiten Gebildes G_2, so ist zur Projectivität nothwendig aber auch hinreichend dass:

$$(a_1\ b_1\ c_1\ d_1) = (a_2\ b_2\ c_2\ d_2) \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

sei.

Für Punktreihen lautet die Gleichung (1), wenn sie ausgeschrieben wird:

$$\frac{a_1\ c_1}{b_1\ c_1} : \frac{a_2\ c_2}{b_2\ c_2} = \frac{a_1\ d_1}{b_1\ d_1} : \frac{a_2\ d_2}{b_2\ d_2}$$

und für Strahl- und Ebenenbüschel:

$$\frac{\sin a_1\ c_1}{\sin b_1\ c_1} : \frac{\sin a_2\ c_2}{\sin b_2\ c_2} = \frac{\sin a_1\ d_1}{\sin b_1\ d_1} : \frac{\sin a_2\ d_2}{\sin b_2\ d_2}$$

Der Quotient $\frac{a_1\ c_1}{b_1\ c_1}$ bei der Punktreihe, und $\frac{\sin a_1\ c_1}{\sin b_1\ c_1}$ bei dem Büschel stellt das Theilverhältniss des Elementes c_1, in Bezug auf das Elementenpaar a_1 b_1 dar. Bezeichnet man daher kurz die Elemententheilverhältnisse mit denselben aber griechisch geschriebenen Buchstaben wie die Elemente, denen sie angehören, so schreibt sich die Gleichung (1) einfacher:

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \delta_1 : \delta_2$$

oder:

$$\gamma_1 : \delta_1 = \gamma_2 : \delta_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Dabei ist a_1 b_1 das Grundelementenpaar des Gebildes G_1 und γ_1, δ_1 sind die Theilverhältnisse der Elemente c_1, d_1 in Bezug auf dasselbe; ebenso ist a_2, b_2 das Grundelementenpaar des Gebildes G_2 und γ_2, δ_2 sind die Theilverhältnisse der Elemente c_2, d_2 bezüglich desselben.

Jedem Elemente des einen sowie des anderen Gebildes entspricht ein Theilverhältniss und umgekehrt jedem Theilverhältniss ein Element.

„Das Theilverhältniss des ersten Elementes des Grundpaares ist Null, und jenes des zweiten Elementes ist $\pm \infty$."

Wenn man das Grundpaar kurz mit a, b bezeichnet, so dass also a dessen erstes und b das zweite Element vorstellt, so ist das Theilverhältniss des ersten Elementes a, je nachdem man es mit einer Punktreihe oder einem Strahlenbüschel zu thun hat, gleich $\frac{a\,a}{b\,a}$ oder $\frac{\sin\,a\,a}{\sin\,b\,a}$, folglich, weil $aa = 0$, in beiden Fällen selbst gleich Null. —

Das Theilverhältniss $\frac{a\,b}{b\,b}$ oder $\frac{\sin\,a\,b}{\sin\,b\,b}$ des zweiten Elementes ist, weil $bb = 0$ ist, in beiden Fällen gleich $\pm \infty$, wie der ausgesprochene Satz behauptet.

2. Wir denken uns nun zwei (gleichartige) projektivische Gebilde auf demselben Träger, also zwei solche Punktreihen auf derselben Geraden, zwei Strahlbüschel auf demselben Scheitel oder zwei Ebenenbüschel auf derselben Axe.

Dann gibt es bekanntlich immer zwei reele, zusammenfallende oder imaginäre Doppelelemente, welche wir kurz mit e, f bezeichnen wollen.

Dieselben entstehen dadurch, dass bei dem Uebereinanderlegen der beiden Gebilde zweimal ein Element auf das ihm projectivisch entsprechende fällt.

Indem wir die Elemente des Gebildes G_1 mit a_1, b_1, c_1 . . . . bezeichnen, sollen die ihnen entsprechenden Elemente des zweiten Gebildes G_2 mit a_2, b_2, c_2 . . . . benannt werden.

Dann entspricht also das Element e und das Element f sich jedesmal selbst.

Unter der Voraussetzung, dass die Doppelelemente e, f reel seien, nehmen wir sie zu den Grundelementen des einen Gebildes, wesshalb sie, weil sich selbst entsprechend, auch die Grundelemente des zweiten Gebildes sind.

Jedes Element der aufeinanderliegenden Gebilde kann man ebensowohl zu dem einen Gebilde als auch zu dem Anderen rechnen, und in jedem dieser beiden Fälle wird ihm ein anderes Element entsprechen.

Den Fall der Involution, für welchen das Letztgesagte nicht gilt, wollen wir im Vornherein ausschliessen.

Unter der Voraussetzung, dass die beiden Doppelelemente e und f reel sind, wollen wir im folgenden den nachstehenden Satz beweisen:

„Construirt man eine Folge von Elementen a_1, a_2, a_2^2, $a_2^3 \ldots a_2^n$ so, dass jedem Elemente, wenn man es zum Gebilde G_1 rechnet im Gebilde G_2 das nachfolgende entspricht, so nähert man sich beim Fortsetzen dieser Reihe immer mehr und mehr dem einen der beiden Doppelelemente; und construirt man eine Folge von Elementen a_2, a_1, a_1^2, $a_1^3, \ldots a_1^n$ so, dass jedem Elemente, wenn man es zum Gebilde G_2 rechnet, im Gebilde G_1 das nachfolgende entspricht, so nähert man sich beim Fortsetzen dieser Reihe immer mehr und mehr dem anderen der beiden Doppelelemente."

Wenn wir wie früher die beiden Doppelelemente mit e und f bezeichnen, so haben wir nachzuweisen, dass für unendlich wachsenden n, $\lim a_2^n = e$, (f) und $\lim a_1^n = f$, (e) ist.

3. Nach der angegebenen Construction der Elementenfolge a_1, a_2, a_2^2, $a_2^3, \ldots a_2^n$ erhalten wir folgendes Schema, in welchem die unter dem Buchstaben G_1 stehenden Buchstaben die Elemente des Gebildes G_1 bedeuten, denen die unter G_2 in gleicher Höhe stehenden Elemente des Gebildes G_2 entsprechen.

G_1		G_2
e	. . . .	e
f	. . . .	f
a_1	. . . .	a_2
a_2	. . . .	a_2^2
a_2^2	. . . . . .	a_2^3
a_2^3	. . . . . .	a_2^4
.		.
.		.
.		.
a_2^{n-1}	. . . .	a_2^n

Die Elemente e, f entsprechen sich als Doppelelemente selbst.

Es müssen daher die Doppelverhältnisse zwischen je vier Elementen der ersten Columne und den entsprechenden Elementen der zweiten Columne gleich sein.

Dies gibt folgendes System von Gleichungen:

$$\left\{e\ f\ a_1\ a_2\right\} = \left\{e\ f\ a_2\ a_2{}^2\right\} = \left\{e\ f\ a_2{}^2\ a_2{}^3\right\} = \ldots . \left\{e\ f\ a_2{}^{n-1}\ a_2{}^n\right\}$$

Wir wollen den gemeinsamen Werth dieser Doppelverhältnisse mit λ bezeichnen.

Wenn man die Theilverhältnisse der Elemente $a_1, a_2, a_2{}^2, \ldots a_2{}^n$ bezüglich des Elementenpaares e, f resp. mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2{}^2, \ldots . \alpha_2{}^n$ bezeichnet, so lässt sich obiges Gleichungs-System auch in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2{}^2} = \frac{\alpha_2{}^2}{\alpha_2{}^3} = \ldots\ldots \frac{\alpha_2{}^{n-1}}{\alpha_2{}^n} = \lambda$$

Aus dieser Relation folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{\alpha_1}{\lambda} \\
\alpha_2{}^2 &= \frac{\alpha_2}{\lambda} = \frac{\alpha_1}{\lambda^2} \\
\alpha_2{}^3 &= \frac{\alpha_2{}^2}{\lambda} = \frac{\alpha_1}{\lambda^3} \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
\alpha_2{}^n &= \frac{\alpha_2{}^{n-1}}{\lambda} = \frac{\alpha_1}{\lambda^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)
\end{aligned}$$

Die Construction der Elementenfolge $a_2, a_1, a_1{}^2, a_1{}^3 \ldots . a_1{}^n$ liefert ein, dem früheren ähnliches und ähnlich aufzufassendes Schema; nämlich das folgende:

$$\begin{array}{lcl}
G_2 & & G_1 \\
e & \ldots\ldots\ldots & e \\
f & \ldots\ldots\ldots & f \\
a_2 & \ldots\ldots\ldots & a_1 \\
a_1 & \ldots\ldots\ldots & a_1{}^2 \\
a_1{}^2 & \ldots\ldots\ldots & a_1{}^3 \\
\vdots & & \vdots \\
a_1{}^{n-1} & \ldots\ldots & a_1{}^n
\end{array}$$

Aus diesem Schema zieht man wieder:

$$\left\{e\ f\ a_2\ a_1\right\} = \left\{e\ f\ a_1\ a_1{}^2\right\} = \left\{e\ f\ a_1{}^2\ a_1{}^3\right\} = \ldots = \left\{e\ f\ a_1{}^{n-1}\ a_1{}^n\right\}$$

Der gemeinsame Werth dieser Doppelverhältnisse ist, wie sich leicht zeigen lässt gleich $\frac{1}{\lambda}$.

Denn es ist:

$$\left\{e\ f\ a_2\ a_1\right\} = \frac{1}{\left\{e\ f\ a_1\ a_2\right\}} = \frac{1}{\lambda}$$

Bezeichnet man analog dem früheren mit α_2, α_1, $\alpha_1{}^2$, $\alpha_1{}^3 \ldots \alpha_1{}^n$ die Theilverhältnisse der Elemente a_2, a_1, $a_1{}^2$, $a_1{}^3 \ldots a_1{}^n$ bezüglich des Elementenpaares e, f, so lässt sich das letzte Gleichungs-System auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1{}^2} = \frac{\alpha_1{}^2}{\alpha_1{}^3} = \ldots\ldots \frac{\alpha_1{}^{n-1}}{\alpha_1{}^n} = \frac{1}{\lambda}$$

Hieraus erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda\,\alpha_2 \\ \alpha_1{}^2 &= \lambda\,\alpha_1 = \lambda^2\,\alpha_2 \\ \alpha_1{}^3 &= \lambda\,\alpha_2{}^2 = \lambda^3\,\alpha_2 \\ &\vdots \\ \alpha_1{}^n &= \lambda\,\alpha_1{}^{n-1} = \lambda^n\,\alpha_2 \quad \ldots\ldots\ldots (4) \end{aligned}$$

Wir erlangten also die beiden folgenden Gleichungen:

$$\alpha_1{}^n = \lambda^n\,\alpha_2$$

$$\alpha_2{}^n = \frac{\alpha_1}{\lambda^n}$$

Für unendlich wachsende n:

$$\lim\ \alpha_{1n} = \alpha_2 \lim \lambda^n$$

$$\lim\ \alpha_2{}^n = \frac{\alpha_1}{\lim \lambda^n}$$

Es handelt sich nun um den Grenzwerth von λ^n.

Das Doppelverhältniss $\left\{e\ f\ a_1\ a_2\right\} = \lambda$ kann ein verschiedenes Verhalten zeigen.

Erstlich ist, wenn die beiden Gebilde in Involution sind, $\lambda = -1$ Diesen Fall wollen wir, weil dann unsere ganzen Voraussetzungen nicht mehr stattfänden, von der Betrachtung ausschliessen. *)

---

*) Sind die Gebilde G_1 u. G_2 in Involution, so entbehren die aufgestellten Schemata und die Elementenfolgen $a_1\ a_2\ a_2{}^2 \ldots a_2{}^n$, $a_2\ a_1\ a_1{}^2 \ldots a_2{}^n$ jeglichen Sinnes, weil bei der Involution Vertauschungsfähigkeit herrscht.

Den Werth $+1$ kann das Doppelverhältniss λ nicht besitzen, weil sonst a_1 und a_2 ein und dasselbe Element wäre; so dass dann die beiden Gebilde G_1, G_2 drei Doppelelemente besässen und folglich ganz einander decken müssten.

Es ist somit abgesehen von dem Vorzeichen, λ grösser oder kleiner als die Einheit.

Im ersten Falle ist $lim\ \lambda^n = \pm \infty$, und folglich:

$$lim\ \alpha_1^n = \pm \infty$$
$$lim\ \alpha_2^n = 0,$$

und daher:

$$\left.\begin{array}{l} lim\ a_1^n = f \\ lim\ a_2^n = e. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Im zweiten Falle, wenn nämlich der numerische Werth von λ kleiner als die Einheit ist, hat man $lim\ \lambda^n = 0$ und daher:

$$lim\ \alpha_1^n = 0$$
$$lim\ \alpha_2^n = \pm \infty,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l} lim\ a_1^n = e \\ lim\ a_2^n = f. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) enthaltenden Beweis unseren Satzes.

4. Indem wir in diesem und dem folgenden Artikel einen rein geometrischen Beweis des Satzes zu liefern gedenken, können wir uns auf Punktreihen und Strahlenbüschel beschränken, weil man ja Ebenenbüschel dadurch, dass man sie aus einem Punkte ihrer Axe auf eine Ebene projicirt, auf Strahlenbüschel zurückführen kann.

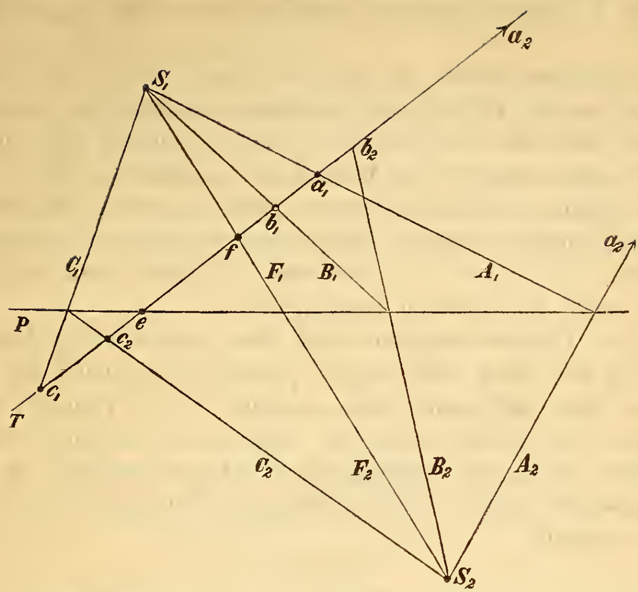
Zwei projectivische Punktreihen auf demselben Träger (auf derselben Geraden) erhält man am einfachsten in folgender Weise.

Seien S_1 und S_2 die Scheitel zweier in perspectivischer Lage befindlichen Büschel (siehe Fig. 1), deren perspectivischer Durchschnitt die Gerade P ist.

Dann entsprechen einander jene Strahlenpaare $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$ $C_1\,C_2$ .... welche sich in Punkten des perspectivischen Durchschnittes P durchschneiden.

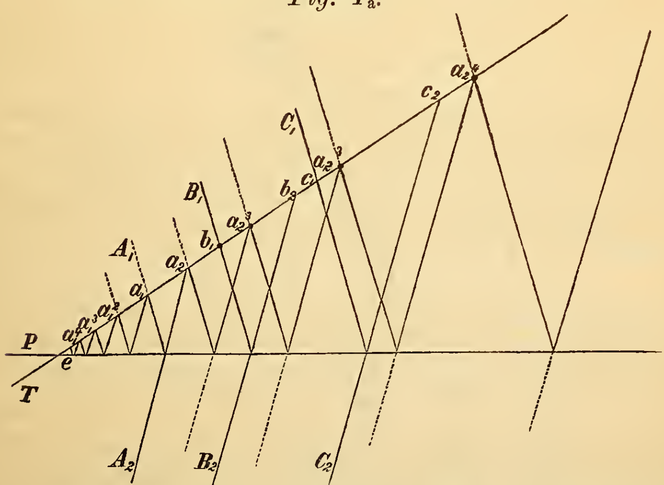
Insbesondere entspricht sich der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel selbst, wesshalb er die Buchstaben F_1 und F_2 trägt. Schneidet man nun die beiden Büschel mit der sonst willkürlichen Transversalen T, so erhält man auf derselben zwei projectivische Punktreihen: a_1, b_1, c_1 ... und a_2, b_2, c_2 .... von welchen sich leicht die beiden Doppelpunkte angeben lassen.

Fig. I.



Der eine Doppelpunkt f ist der Schnittpunkt der Transversalen T mit dem gemeinschaftlichen, sich selbst entsprechenden Strahle

Fig. I_a.



$(F_1\ F_2)$ der beiden Büschel; und der zveite Doppelpunkt ist der Schnittpunkt e der Transversalen T mit dem perspektivischen Durchschnitte P.

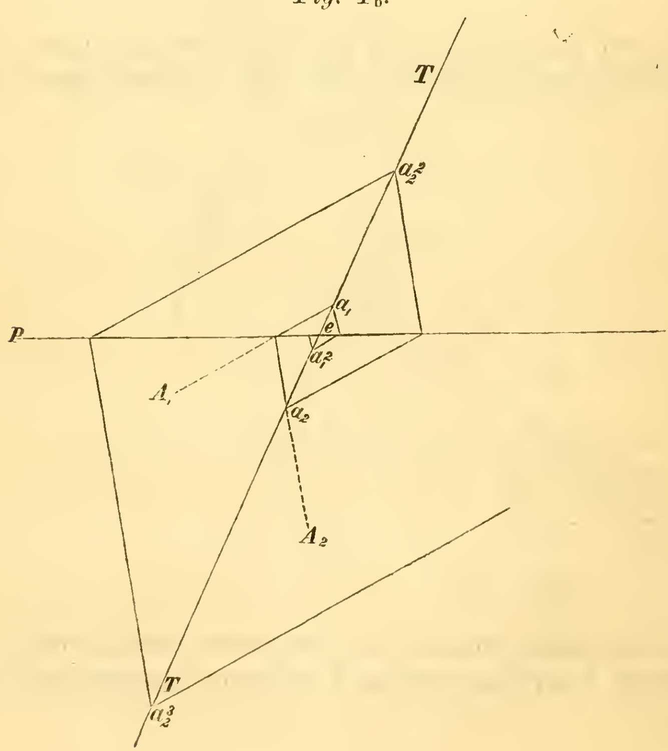
Projicirt man nun die Fig. 1. derartig, dass der gemeinschaftliche Strahl (F_1 F_2) beider Büschel unendlich weit fällt, so erhält man Fig. 1_a.

In derselben haben die angeschriebenen Buchstaben dieselbe Bedeutung, nur ist: (F_1 F_2) und demgemäss auch S_1, S_2, f unendlich weit. Geht man nun vom Punkte a_1 aus, (welchem der Punkt a_2 entspricht) und construirt der Reihe nach die Punkte $a_2{}^2$ $a_2{}^3$ .... so wird man finden, dass man sich immer mehr und mehr dem unendlich weiten Doppelpunkte f nähere. Wenn man dagegen von a_2 ausgehend die Punkte a_1 $a_1{}^2$ $a_1{}^3$ $a_1{}^4$ .... bestimmt, so nähert man sich immer mehr und mehr dem anderen Doppelpunkte e.

Bei der Construction stellt sich eine zickzackartige Linie ein, welche nach der einen Seite gegen e convergirt und nach der andern sich immer mehr und mehr dem unendlich weiten Punkte f nähert.

Liegen die beiden Punkte a_1 und a_2 so, dass sie durch den im Endlichen liegenden Doppelpunkt e getrennt werden, so nimmt diese gebrochene Linie eine Spiralform an, wie es in Fig. 1_b versinnlicht erscheint.

Fig. I_b.

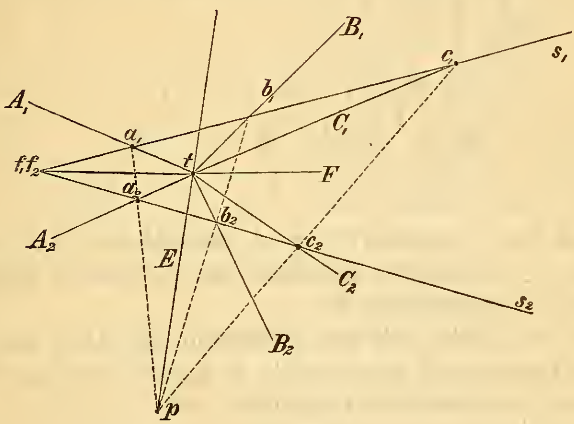


5. Zwei concentrische projectivische Strahlenbüschel erhält man am einfachsten dadurch, dass man den Schein zweier perspectivischen Reihen aus einem Punkte nimmt.

Seien zu dem Behufe s_1, s_2 die Träger zweier perspectivischen Reihen (siehe Fig. 2), deren perspectivisches Centrum der Punkt p ist

Dann sind die Punktepaare $a_1\, a_2$, $b_1\, b_2$, $c_1\, c_2$ .... welche auf Strahlen aus p liegen entsprechende Punkte. Insbesondere entspricht sich der beiden Reihen gemeinschaftliche Punkt, d. i. der Schnitt von s_1 mit s_2 selbst, wesshalb er die beiden Buchstaben f_1, f_2 trägt.

Fig. 2.



Nimmt man nun von diesen zwei perspectivischen Punktreihen aus einem beliebigen Punkte p den Schein, d. i. verbindet man den Punkt p mit den Punktepaaren $a_1\, a_2$, $b_1\, b_2$, $c_1\, c_2$ .... durch die Strahlenpaare $A_1\, A_2$, $B_1\, B_2$, $C_1\, C_2$ .... so erhält man zwei concentrische projectivische Strahlenbüschel, deren beide Doppelstrahlen E und F leicht zu finden sind.

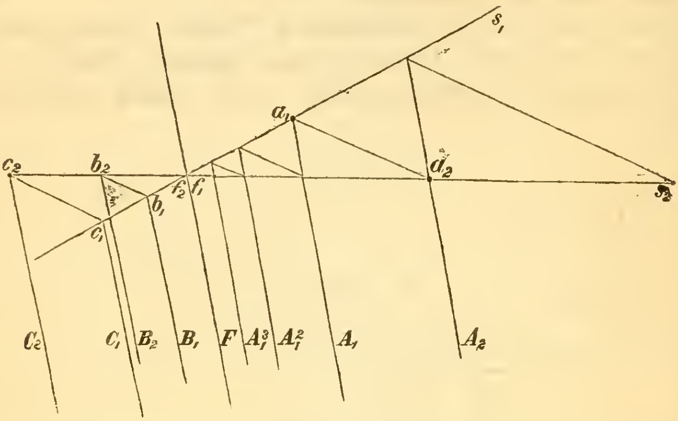
Der eine Doppelstrahl E ist der von t nach p gehende Strahl und der andere Doppelstrahl F ist der von p nach dem, den beiden Reihen gemeinschaftlichen, sich selbst entsprechenden Punkte ($f_1\, f_2$) gehende.

Wir wollen die Fig. 2 abermals centralprojiciren und zwar so, dass der Doppelstrahl E unendlich weit fällt. Dann wird auch der Büschelscheitel t, und das perspectivische Centrum p unendlich weit fallen.

Die Fig. 2 geht in die Fig. 2_a über, in welcher sonst dieselbe

Bezeichnung wie in Fig. 1 verwendet wurde. Geht man nun vom Strahle A_1 (welchem der Strahl A_2 entspricht) aus, und construirt der Reihe nach die Strahlen A_2 $A_2{}^2$ $A_2{}^3$ .... so nähert man sich immer mehr und mehr dem unendlich weiten Doppelstrahle E.

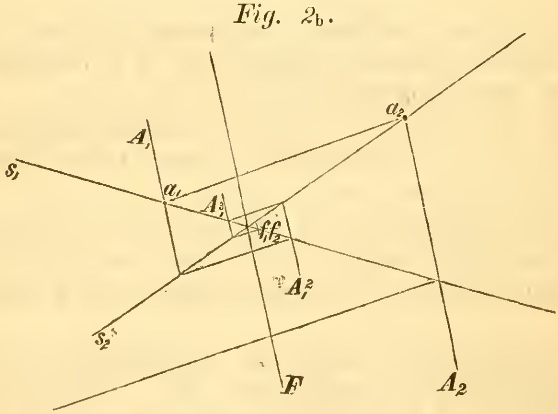
Fig. 2a.



Wenn man umgekehrt von A_2 ausgeht und die Strahlenfolge A_1 $A_1{}^2$ $A_1{}^3$ .... construirt, so nähert man sich immer mehr und mehr dem anderen Doppelstrahle F.

Auch hier stellt sich eine zickzackförmige Linie ein, deren eine Seite sich fortwährend dem Strahle F nähert, während die andere immer mehr und mehr ins Unendliche rückt.

Fig. 2b.

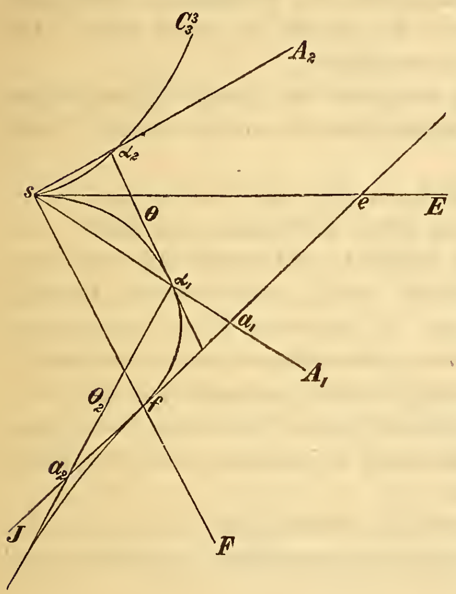


Diese gebrochene Linie nimmt, im Falle der Doppelstrahl F zwischen dem Strahlenpaare A_1 A_2 liegt, wieder wie in Fig. 1b eine spiralförmige Form an. Dieser Fall wurde in Fig. 2b versinnlicht.

Wir wollen nun zu der Bedeutung des bewiesenen Satzes, welcher die Doppelelemente als Grenzelemente auftreten lässt, für die Curven dritter Ordnung und Classe schreiten.

6. Eine Curve dritter Ordnung und Classe, welche wir kurz mit C_3^3 bezeichnen wollen, besitzt eine Spitze s und eine Inflexionstangente I (siehe Fig. 3).

Fig. 3.



Jede Gerade ihrer Ebene trifft sie in drei Punkten, und somit jede ihrer Tangenten ausser im Berührungspunkte nur noch einmal; die Spitzen und die Inflexionstangente schneidet sie in drei zusammenfallenden Punkten.

Jede durch die Spitze gehende Gerade schneidet die Curve ausser in der Spitze nur noch einmal; denn die Spitze ist aus einem Doppelpunkte dadurch entstanden, dass seine beiden Tangenten zusammenfielen.

Man kann daher jedem Punkte der Curve einen Strahl aus s, und umgekehrt jedem Strahle aus s seinen Schnittpunkt mit C_3^8 zu ordnen.

„Die Curve C_3^3 liegt mit dem Stahlenbüschel aus s perspectivisch.“ Von jedem Punkte der Ebene der Curve C_3^3 lassen sich an dieselbe drei Tangenten ziehen, und somit aus einem ihrer Punkte ausser dessen Tangente nur noch eine weitere.

Von der Spitze und dem Inflexirespunkt aus gehen an die Curve drei zusammenfallende Tangenten.

Von jedem Punkte der Inflexionstangente geht an die Curve C_3^3 nur eine Tangente; denn die Inflexionstangente entstand aus einer Doppeltangente dadurch, dass die beiden Berührungspunkte zusammenfielen.

Man kann daher jeder Tangente der Curve einen Punkt auf J, und umgekehrt jedem Punkte von J die von ihm an C_3^3 gehende Tangente zuordnen.

„Die Curve C_3^3 liegt mit der Punktreihe auf J perspectivisch.“

Diese Thatsachen bringen es mit sich, dass man an der Curve C_3 projectivische Tangenten- und Punktsysteme herstellen und untersuchen kann.

Man denke sich irgend einen Punkt α, der Curve $C_3{}^3$, welcher die Tangente Θ_1 besitzt, und nach welchem der Strahl A_1 aus der Spitze s geht.

Die Tangente Θ_1 schneidet die Curve in einem Punkte α_2, welcher von Cremona als der Tangentialpunkt des Punktes α_1 bezeichnet wurde, und nach welchem von s der Strahl A_2 gehen möge. Aus dem Vorhergehenden folgt nun unmittelbar:

„Jedem Punkte der Curve entspricht ein Tangentialpunkt, und umgekehrt gehört zu jedem Tangentialpunkte nur ein einziger Punkt der Curve.“

Gehen wir von den Punkten zu den mit ihrem perspectivisch liegenden Strahlen des Büschels s über, so erkennt man dass:

„Jedem Strahle A_1 nur ein Strahl A_2 und umgekehrt entspricht; desshalb sind die beiden durch A_1 und A_2 beschriebenen Büschel projectivisch.“ Wir kennen diess in folgendem Satze ausdrücken:

„Die Punkte der Curve und die ihnen entsprechenden Tangentialpunkte bestimmen auf s zwei projectivisch concentrische Büschel.“ Die Doppelstrahlen dieser zwei Büschel lassen sich leicht bestimmen. Es ist dies erstens die Spitzentangente E, und der nach dem Inflexionspunkte f gehende Strahl F.

Uebertragen wir die Begriffe der Projectivität von den Büschelstrahlen auf die ihnen entsprechenden Curvenpunkte, so gelangen wir zu folgendem Theoreme.

I. Theorem: „Die Punkte der Curve $C_3{}^3$ und die ihnen entsprechenden Tangentialpunkte bilden zwei projectivische Punktsysteme, deren Doppelpunkte: der Inflexionspunkt, und der Rückehrpunkt sind.“

Ein ähnliches Theorem, und zwar das reciproke lässt sich für die Tangenten der Curve aufstellen und beweisen. Jede Tangente, Θ_1 welche die Inflexionstangante J im Punkte a_1 trifft, besitzt einen Berührungspunht α_1 von welchem sich an die Curve $C_3{}^3$ eine weitere Tangente Θ_2 legen lässt, welche J in a_2 schneidet.

Wir wollen die Tangente Θ_2 als die der Tangente Θ_1 „zugeordnete“ bezeichnen.

Aus dem über die Curve $C_3{}^3$ Gesagten folgt unmittelbar: „Jeder Tangente der Curve $C_3{}^3$ ist e i n e Tangente zugeordnet und umgekehrt ist jede Tangente die zugeordnete e i n e r Anderen.“

Gehen wir von den Tangenten zu den durch sie auf J bestimmten Punkten über, so übersehen wir leicht dass: „jedem Punkte a_1 nur ein Punkt a_2 und umgekehrt entspricht; desshalb sind die beiden durch a_1 und a_2 beschriebenen Reihen projectivisch."

Die Doppelpunkte dieser zwei projectivischen Reihen sind offenbar erstens der Inflexionspunkt f, und zweitens der Schnittpunkt e der Inflexionstangente J mit der Spitzetangente E.

Gehen wir von den Punkten auf J zu den ihnen entsprechenden Tangenten zurück, so erhalten wir das folgende Theorem:

II. Theorem: „Die Tangenten der Curve $C_3{}^3$ und die ihnen zugeordneten Tangenten bilden zwei projectivische Tangentensysteme, deren Doppeltangenten: die Inflexionstangente und die Spitzentangente sind."

In der letzten Sitzung der naturwissenschaftlich-mathematischen Classe d.k. böhm. Gesellschaft der Wisseschaften bewies Herr Professor Dr. H. Durège einen Satz, welchen der Leser sofort als die Anwendung des in 3. bewiesenen Lehrsatzes auf das erste Theorem erkennen wird.

Der Satz lautet folgendermassen:

„Construirt man eine Folge von Punkten der Curve $C_3{}^3$: α_1, α_2, $\alpha_2{}^2$ . . . so, dass jeder Punkt der Tangentialpunkt des vorgehenden ist, so nähert man sich immer mehr und mehr dem Rückkehrpunkte s; construirt man eine Folge von Punkten α_2, α_1, $\alpha_1{}^2$ . . . . so, dass jeder der Tangentialpunkt des nachfolgenden ist, so nähert man sich immer mehr und mehr dem Inflexionspunkte der Curve."

Wir können nun zu diesem Lehrsatze, der reciprocken Natur der Curve wegen und auf das zweite Theorem gestützt, den Folgenden hinzufügen:

„Construirt man eine Folge von Tangenten der Curve $C_3{}^3$: Θ_1, Θ_2, $\Theta_2{}^2$ . . . . so, dass jede Tangente der vorgehenden zugeordnet ist, so nähert man sich immer mehr und mehr der Inflexionstangente J; construirt man eine Folge von Tangenten Θ_2, Θ_1, $\Theta_1{}^2$ . . . . so, dass jede die zugeordnete der nachfolgenden ist, so nähert man sich immer mehr und mehr der Spitzentangente der Curve."

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 27. Januar 1869.

Anwesende die Herren: Rochleder, Kořistka, Krejčí, Amerling, Gust. Schmidt, Durège, v. Zepharowich u. Studnička; als Gäste die Herren: Lieblein, Weyr, Küpper, Dvorský, Bořický und Karl Frost.

Herr Prof. Dr. Studnička hielt einen Vortrag „Ueber Integration von linealen Differentialgleichungen."

Ferner, Herr Prof. Krejčí: „Ueber die Gliederung der böhmischen Kreideformation."

Herr Prof. Hofmann: „Resultate chemisch-analytischer Untersuchungen über das Eozon von Raspenau und den dolomitischen Kalkstein von Cheinow."

Herr Prof. Dr. Durège; „Ueber fortgesetztes Tangentenziehen von Curven dritter Ordnung vierter Classe. (Herren Durège's Vortrag wird im Aktenbande 1869. erscheinen.)

Sezení třídy pro mudrosloví, dějepis a slovozpyt dne 1. února 1869.

Přítomni pánové: Tomek, Wocel, Vrťátko, Zap, Lepař, Emler; co hosté pp. Plaček, Dr. Toman, Duchek.

Pan Prof. Tomek četl článek z druhého dílu svého dějepisu Prahy, jednající o konání spravedlivosti, totiž předně o pramenech práva, kterých se užívalo při soudech městských v Praze ve 14. a na začátku 15. století, za druhé o pravidlech čili zákonech právních samých, pak i o řádu soudním, pokud se s jistotou ví o nich ze stávajících zřídel.

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 10. Februar 1869.

Anwesende, die Herren: Rochleder, Kořistka, Krejčí, Šafařík, v. Zepharowich, Durège, Ant. Frič; als Gäste die Herren Lieblein, Weyr, P. Dvorský, Küpper und Bořický.

Es wurden die in der Sitzung vom 27. Januar gehaltenen Vorträge der Herren Prof. Krejčí und Durège fortgesetzt und beendigt.

Sezení třídy pro mudrosloví, dějepis a slovozpyt dne 17. února 1869.

Přítomni: pp. Tomek, Wocel, Erben, Zap, Štulc, Zoubek; co hosté pp. J. Švadlenka, Jos. Sokol, F. Drůbek, V. Kryšpín, J. Mazanec.

Pan ředitel Erben četl výňatky některé ze staroruské pověsti historické o bitvě velikého knížete Moskevského Dmitrije Ivanovice a bratra jeho knížete Vladimíra Ondřejovice, i jiných knížat ruských a litevských s chánem tatarským Mamajem na stepi Kulikově za Donem l. 1380., v kteréžto bitvě chán nadřečený na hlavu byl poražen a vojsko jeho zúplna potřeno. Sepsána byla tato pověsť dílem na základě listin a podlé vypravování svědků takových, kteří sami v té bitvě bojovali; ale přitom již také užito básně staroruské o Dimitrijovi Donském, jinak také Zádonština nazvané, z kteréžto, jakož i z jiných starých zpěvů ruských snad od pozdějších přepisovatelů, mnohé popisy básnické do ní jsou vloženy. Podlé míst některých, ježto se týkají kláštera S. Trojice (Троице-Серчіева лавра) až 10 mil od Moskvy vzdáli, i opata jeho Sergije, o kterém spisovatel jinak nemluví nežli s nejvyšší úctou a s oddaností neobmezenou, téměř za zázračného jej pokládaje, jakož se obyčejně jen v klášteře na poddaném i nábožném mnichovi shledává, soudí zpravodajce, že ta pověst sepsána byla v klášteře nadřečeném; kteréžto domnění i v tom také nalézá jistou posilu, že dva mnichové téhož Sergijova kláštera, rodem Brjanští bojarové, byli také ve vojsku velikého knížete, na stepi Kulikově s Tatary bojujíce, jichž jeden tu padl, ale druhý se vrátil zase do kláštera. Potud nalezla se ta pověst ve dvou starších rukopisích, jichž jeden za XVI. století vytištěn jest ve sbírce Šacharova Сказаніе Русскаго народа pod titulem: Сказаніе о Мамаевомъ побоищѣ. V překladu českem vyjde tiskem jakožto příloha k výšejmenované staroruské básni Zádonština, jejíž stránku historickou na mnoze doplňuje i objasňuje.

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 24. Februar 1869.

Anwesend die Herren: Rochleder, Kořistka, Krejčí, Mach, von Waltenhofen, Ant. Frič; als Gäste die Herren: E. Weyr, Küpper, Hoffmann und Bořický.

Herr Dr. Ad. Šafařík hielt einen Vortrag über das Vanadium.

Herr Dr. Ant. Frič sprach über die Kreidecephalopoden Böhmens. Photographien und Lithographien dieser Cephalopoden wurden vorgezeigt. —

Endlich hielt Herr Emil Weyr folgenden Vortrag über die *„Erweiterung der Giltigkeit der Entwickelung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch."*

1. Ich hatte in der am 4. Januar abgehaltenen Sitzung die Ehre einen Satz zu beweisen, welcher sich auf zwei gleichartige projectivische Gebilde mit demselben Träger bezog.

Er lässt sich kurz folgendermassen ausdrücken:

„Durch fortgesetzte Construction von aufeinander folgenden, sich der Reihe nach entsprechenden Elementen nähert man sich einerseits immer mehr und mehr dem einen und andererseits dem anderen Doppelelemente."

Dabei ist vorausgesetzt, dass die beiden Doppelelemente reel seien.

Ich will mir nun erlauben, diesen Satz in analytischer Weise auszudrücken, weil eine solche Betrachtung zu einer allgemein giltigen Kettenbruchentwickelung für eine reele Quadratwurzel führt.

2. Die einzelnen Elemente eines Grundgebildes erster Stufe lassen sich vortheilhaft mittelst ihrer Theilverhältnisse bezüglich eines Grundelementenpaares bestimmen.

Seien nun G_1 und G_2 zwei Gebilde, welche denselben Träger besitzen und deren Elemente projectivisch auf einander bezogen sind. Wenn dem Elemente X_1 des Gebildes G_1 das Element X_2 des Gebildes G_2 entspricht, und wenn x_1, x_2 die Theilverhältnisse dieser Elemente in Bezug auf irgend ein Grundelementpaar sind, so wird die Projectivität der beiden Gebilde analytisch durch eine Gleichung von der Form:

$$A\,x_1\,x_2 + B\,x_1 + C\,x_2 = D$$

ausgedrückt.

In der That sind projectivische Gebilde solche, in denen jedem Elemente des Einen ein einziges Element des Anderen entspricht. Die zwischen x_1 und x_2 bestehende Gleichung muss desshalb linear sein und folglich im Allgemeinen die angegebene Form besitzen.

Bringen wir die Gleichung in die Form:

$$x_1\,x_2 + \frac{B}{A}\,x_1 + \frac{C}{A}\,x_2 = \frac{D}{A}$$

und führen statt x_1 und x_2 zwei neue Parameter x_1', und x_2' ein, welche mit Ersteren durch die Gleichungen $x_1' = x_1 + \alpha$ $x_2' = x_2 + \alpha$ verbunden sind, so kann man die Constante α immer so bestimmen, dass aus der Gleichung eines der drei letzten Glieder wegfällt.

Eine derartige Substitution ist ähnlich bedeutend mit einer Transformation des Grundelementenpaares.

Wir wollen uns die Rechnung derart durchgeführt denken, dass der Coefficient von x_2' verschwinde und dass, (die Accente wieder weglassend) die Verwandtschaftsgleichung die Form:

$$x_1 \, x_2 + a x_1 = b \, \ldots\ldots\ldots \, (1)$$

erhalte.

Aus (1) ergibt sich sofort:

$$x_1 = \frac{b}{a + x_2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und:

$$x_2 = \frac{b - a\,x_1}{x_1} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

aus welchen Gleichungen man zu jedem Elemente des einen Gebildes das entsprechende des Anderen bestimmen kann.

3. Zu den zwei Doppelelementen der beiden Gebilde kann man nun in doppelter Art gelangen.

Erstens erhält man die beiden Doppelelemente direct dadurch, dass man in der Verwandtschaftsgleichung (1) $x_1 = x_2$ setzt. Denn die Theilverhältnisse x_1, x_2 sind auf dasselbe Grundelementenpaar bezogen und werden somit für ein Doppelelement gleich.

Bezeichnet man also das Theilverhältniss eines Doppelelementes mit u, so erhält man für dasselbe folgende, aus (1) fliessende Gleichung:

$$u^2 + au = b.$$

Die beiden Doppelelemente besitzen demnach die Theilverhältnisse:

$$u_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

und:

$$u_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

Es ist zu bemerken, dass dabei a und b zwei beliebige, wenn nur reele Grössen sein können.

Unter der Voraussetzung, dass die beiden Doppelelemente reel sind, muss die in u_1 und u_2 vorkommende Quadratwurzel reel sein.

Diess ist erstens der Fall für jedes positive b und zweitens auch dann für ein negatives b, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > b$ ist.

4. Nach dem in Art 1 ausgesprochenen Satze kann man zu den beiden Doppelelementen auch auf folgende Art und Weise gelangen.

Aus Gleichung (1) in Art 3 folgt, wie schon angeführt wurde:

$$x_1 = \frac{b}{a + x_2}$$

Rechnet man nun das Element X_1, welchem das Theilverhältniss x_1 entspricht, zu dem Gebilde G_2, so entspricht ihm in G_1 ein Element $X_1{}^2$, dessen Theilverhältniss $x_1{}^2$ durch die Gleichung:

$$x_1{}^2 = \frac{b}{a + x_1}$$

oder:

$$x_1{}^2 = \frac{b}{a + \frac{b}{a + x_2}}$$

bestimmt ist.

Dem Elemente $X_1{}^2$ entspricht in G_1 ein Element $X_1{}^3$ dessen Theilverhältniss:

$$x_1{}^3 = \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + x_2}}}$$

ist.

Setzt man diese Operation fort, so nähert man sich immer mehr und mehr dem einen Doppelelemente und zwar, wie sich durch eine einfache Ueberlegung zeigen lässt, jenem, dessen Theilverhältniss u_1 ist; so dass man also die Gleichung hat:

$$lim\ x_1{}^n = u_1 = \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \ldots\ldots \textit{ in inf.}}}}$$

Ebensoleicht findet man unter ähnlichen die Bezeichnungsweise betreffenden Vorausetzungen aus (1) in Art. 3

$$x_2 = -a + \frac{b}{x_1}$$

$$x_2{}^2 = -a + \frac{b}{x_2} = -a + \frac{b}{-a + \frac{b}{x_1}} = -a - \frac{b}{a - \frac{b}{x_1}}$$

$$x_2{}^2 = -a + \frac{b}{x_2{}^2} = -a + \cfrac{b}{-a - \cfrac{b}{a - \cfrac{b}{x_2}}} = -a - \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a - \cfrac{b}{x_2}}}$$

Setzt man diess bis zum Gränzübergange fort, so ergibt sich:

$$\lim x_2{}^n = -a - \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots \textit{in inf.}}}}$$

Vergleicht man nun die beiden für u_1 und jene für u_2 gefundenen Werte, so erhält man:

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a \ldots}}}$$

$$-\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} = -a - \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots}}}$$

Aus diesen zwei Gleichungen zieht man unmittelbar:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} = \frac{a}{2} + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a \ldots\ldots}}}$$

Diese letzte Gleichung ist selbstverständlich durchaus nichts Neues und enthält nur die bekannte Entwickelung der Quadratwurzel in einen Kettenbruch. Sie ist jedoch desshalb von Wichtigkeit, weil sie, (wie aus der angewendeten Entwickelungsart hervorgeht) ganz allgemein dann giltig ist, wenn die linker Hand stehende Wurzelgrösse reel ist.

Die Giltigkeit der letzten Gleichung für ein positives b ist lange bekannt.

Für den Fall dass b negativ ist werden gewöhnlich zwei Bedingungen für die Giltigkeit angegeben. Erstens nämlich die Realität der Wurzelgrösse und zweitens die Bedingung: $a \geqq b + 1$. (Vergleiche Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis 1868 auf Seite 311.)

Wir sind nun auf Grund unserer Betrachtungen berechtigt zu behaupten, dass die Gleichung:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a}{2} - \cfrac{b}{a - \cfrac{b}{a - \cfrac{b}{a - \ldots\ldots \text{ in inf.}}}}$$

immer richtig ist, wenn nur $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > b$ ist.

Weil der über projectivische Gebilde bewiesene Satz auch dann noch gilt, wenn die beiden Doppelelemente zusammen fallen, so gilt die letzte Gleichung auch für den Gränzfall $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$.

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 10. März 1869.

Anwesend Herr Durège, als Gäste die Herren: Lieblein, Weyr, Ant. Grünwald, Küpper und Bořický.

Herr Emil Weyr hielt folgenden Vortrag: „*Ueber den perspectivischen Zusammenhang der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Ordnung vierter Classe, und jenen dritter Classe vierter Ordnung.*"

1. Eines der hauptsächlichsten Hilfsmittel der Geometrie zur Aufstellung neuer Sätze und zur Lösung gestellter Probleme ist die Projectionsmethode. Unter den verschiedenen Projectionsarten zeichnet sich insbesodere die perspectivische oder centrale Projectionsart durch ihre Fruchtbarkeit aus. Durch die centrale Projection eines ebenen Systemes erhält man ein mit diesem collinear-verwandtes neues System und man kann aus bekannten Eigenschaften des Einen auf Eigenschaften des Anderen zurückschliessen.

Man kann jedoch auch versuchen, ein räumliches Systems auf eine feste Ebene central zu projiciren, wodurch man aus dem räumlichen System ein ihm verwandtes ebenes System erhält.

Es werden nun immer gewissen Eigenchaften des einen Systems solche des Anderen entsprechen, nur wird es geschehen können, dass die so aus einander abgeleiteten Eigenschaften verschiedener Natur sein werden.

Ich will mir erlauben im Folgenden zu dem Gesagten an den Raumcurven dritter Ordnung ein Beispiel zu geben und zu dem Zwecke in aller Kürze der wichtigsten Eigenschaften dieser Curven gedenken.

2. Eine Raumcurve C_3 dritter Ordnung ist bekanntlich auch gleichzeitig von der dritten Classe. In jeder Ebene E des Raumes liegen drei Punkte derselben und durch jeden Punkt P des Raumes gehen drei Schmiegungsebenen dieser Curve. Sie kann demnach ebensowohl erzeugt werden durch drei projectivische Ebenenbüschel als auch durch drei projectivische Punktreihen, welche auf drei beliebig im Raume gelegten Axen sich befinden. Im ersten Falle tritt sie als Ort des Durchschnittpunktes entsprechender Ebenen und im zweiten Falle als Enveloppe der durch entsprechende Punkte gelegten Ebenen.

Am einfachsten entsteht sie als Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades, welche eine geradlinige Erzeugende gemeinschaftlich haben.

Aus jedem ihrer Punkte wird die Curve durch einen Kegel zweiten Grades projicirt und jede ihrer Schmiegungsebenen schneidet die Gesammtheit der anderen (ihre developable Fläche) in der Tangentenschaar eines Kegelschnittes. Die Verbindungsgerade zweier Punkte der Curve heisst eine Secante und zwar eine eigentliche oder eine ideelle, je nachdem die beiden Punkte reel oder imaginär sind.

Die Durchschnittslinie zweier Schmiegungsebenen heisst eine Axe und kann ebensowohl eine eigentliche als auch ideelle sein.

„Durch jeden Punkt des Raumes, welcher der Curve nicht angehört, geht eine Secante der Curve."

Liegt der Punkt auf der Curve, so bestimmt er mit jedem anderen Punkte derselben ein e Secante.

„In jeder Ebene des Raumes, welche keine Schmiegungsebene der Curve ist, liegt eine Axe der Curve."

Ist die Ebene eine Schmiegungsebene, so schneidet sie jede andere Schmiegungsebene in einer Axe.

3. Die Kenntniss der beiden letzten, einander dual entsprechenden Eigenschaften der Curve setzt uns in Stand, die Natur des Kegels zu untersuchen, welcher einen beliebigen Punkt des Raumes zum Scheitel und unsere Curve zur Leitlinie besitzt, sowie auch die Natur der Curve zu bestimmen, in welcher die developable Fläche unserer Curve von einer beliebigen Ebene des Raumes geschnitten wird.

Wenn man über unserer Curve C_3 aus einem beliebigen Punkte P des Raumes (welcher jedoch nicht der Curve angehören soll) einen Kegel construirt, so wird derselbe jedenfalls ein Kegel dritter Ordnung werden. Denn jede durch P gehende Ebene schneidet C_3 in drei

Punkten, enthält somit drei Kanten des Kegels und folglich wird er von jeder geraden des Raumes in drei Punkten getroffen. Dieser Kegel ist aber nicht allgemeiner Natur.

Ein Kegel dritter Ordnung ist nämlich im Allgemeinen von der sechsten Classe, d. h. durch jeden Punkt lassen sich an ihn sechs Tangentialebenen legen. Der von uns aus P über C_3 construirte Kegel ist jedoch nur von der vierten Classe, weil er eine Doppelkante besitzt. Diese Doppelkante ist die durch den Scheitel P gehende Secante S der Curve.

In der That wird jede durch S gehende Ebene nur noch eine Kante des Kegels enthalten, weil sie die Curve ausser in den beiden auf S liegenden Punkten nur noch einmal schneidet. Wir wollen die beiden auf S liegenden Punkte der Curve mit α_1 und α_2 und deren Curventangenten resp. mit Θ_1 und Θ_2 bezeichnen, und können nun folgenden Satz ausprechen:

„Der aus einem beliebigen Punkte über einer Raumcurve dritter Ordnung construirte Kegel ist von der dritten Ordnung und der vierten Classe. Die durch den Scheitel gehende Secante der Curve ist die Doppelkante des Kegels.“

Der Kegel kann eine verschiedene Natur besitzen. Ist nämlich die Secante S eine eigentliche Secante, so wird sie auch eine eigentliche Doppelkante des Kegels sein. Sind α_1 und α_2, wie angegenommen wurde, die beiden Punkte, welche S mit der Curve gemein hat und Θ_1, Θ_2 deren respective Tangenten, so sind in diesem Falle α_1 und α_2 somit auch Θ_1 und Θ_2 reel.

Die beiden durch S und Θ_1 und Θ_2 gelegten Ebenen sind die Tangentialebenen des Kegels in der Doppelkante S. Diese Tangentialebenen sind also auch reel und folglich die Doppelkante eine eigentliche.

Zweitens kann S eine ideelle Sekante der Curve sein. Dann sind α_1 und α_2 und somit auch Θ_1 und Θ_2 imaginär, folglich auch die Tangentialebenen des Kegels in der Doppelkante; diese ist dann eine isolirte Doppelkante.

Als Gränzfall kann der Fall eintreten, dass die Secante S in eine Tangente übergeht oder dass die beiden Punkte α_1 und α_2 unendlich nahe zu einander rücken. Dann fallen auch die Tangenten Θ_1 und Θ_2 und folglich auch die beiden Tangentialebenen des Kegels in der Doppelkante zusammen. Die Doppelkante S wird in diesem Falle eine Spitzenkante und der Kegel wird nur mehr von der dritten Classe sein. Offenbar wird die Partie jener Punkte, für welche die

Secante S eine Tangente der Curve C_3 wird, die beiden Partien, für welche sie eine eigentliche oder eine ideelle Secante wird, von einander trennen. Nun ist aber klar, dass wenn ein Punkt auf einer Tangente der Curve liegt, er sich auf der developablen Fläche derselben befindet. Somit scheidet die developable Fläche der Curve die Punkte, denen eigentliche Secanten zukommen, von jenen, denen ideelle Secanten angehören. Die developable Fläche kann sich selbst nie durchschneiden, weil es sonst Punkte geben würde, durch welche sich mehr als eine Tangente der Curve legen liesse, was nicht angeht.

Der über eine Raumcurve dritter Ordnung beschriebene Kegel besitzt sonach eine eigentliche oder eine isolirte Doppelkante, je nachdem sein Scheitel auf der einen oder der andern Seite der developablen Fläche der Curve liegt. Liegt er auf der developablen Fläche selbst, so wird der Kegel eine Spitzenkante aufweisen.

4. Schneidet man den Kegel mit einer beliebigen Ebene E, so erhält man die centrale Projection unserer Curve C_3. Dieselbe wird, nach dem was über den projicirenden Kegel gesagt wurde, eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte oder aber mit einer Spitze sein. Im Falle eines Doppelpunktes kann dieser ebensogut ein eigentlicher als auch ein isolirter sein. Dieser Doppelpunkt (Spitze) wird der Schnittpunkt der Projectionsebene E mit der Secante S der Curve sein und wird, wenn S zu E parallel ist, unendlich weit sein.

Wir wollen die Projection von C_3 auf die Ebene E kurz mit C' bezeichnen und den Doppelpunkt von C' mit δ benennen. „Die centrale Projection einer Raumcurve dritter Ordnung ist eine ebene Curve dritter Ordnung mit einem eigentlichen oder isolirten Doppelpunkte oder mit einer Spitze.“

5. Indem wir voraussetzen, dass das Projectioscentrum — der Scheitel P des projicirenden Kegels, nicht auf der developablen Fläche der Curve C_3 liegt, so setzen wir damit voraus, dass die Projection C' keine Spitze sondern einen Doppelpunkt besitze, welcher mit δ bezeichnet wurde.

In diesem Falle existirt ein Satz bezüglich der Raumcurve und ein anderer Satz bezüglich deren ebenen Projection, welcher so zu sagen der dem ersteren perspectivisch entsprechende ist. Durch das Projectionscentrum P gehen seiner allgemeinen Lage wegen drei Schmiegungsebenen der Curve C_3. Wir wollen die Berührungspunkte derselben mit a, b und c bezeichnen. Jede von den drei Schmiegungsebenen schneidet in ihrem Berührungspunkte mit C_3 diese Curve in drei zusammenfallenden Punkten und desshalb werden diese Ebenen die Inflexionsebenen des projicirenden Kegels sein oder aber die Kanten *Pa*, *Pb*, *Pc* die drei Inflexionskanten dieses Kegels.

Die drei Schmiegungsebenen werden die Projectionsebenen E in drei Geraden treffen, welche, wie aus dem Gesagten sofort hervorgeht, die drei Inflexionstangenten der Projection C' sein werden. Die Projectionen a', b', c' der Punkte a, b, c sind desshalb die drei Inflexionspunkte der Curve C'.

Die beiden Sätze, von denen oben die Rede war und welche sich gegenseitig projectivisch entsprechen, sind die folgenden:

I. „Die Berührungspunkte der drei durch einen Punkt gehenden Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung liegen mit diesem in einer und derselben Ebene."

II. „Die drei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte liegen in einer und derselben Geraden."

In der That geht man von dem ersten Satze aus, so gelangt man zum zweiten und umgekehrt.

Denn wenn die vier Punkte P, a, b, c in einer und derselben Ebene e liegen (was doch der Satz I aussagt), so bilden die Projectionsstrahlen *Pa*, *Pb*, *Pc* ein ebenes Strahlbüschel, welches die Projectionsebene E in der geraden Punktreihe a', b', c' treffen wird.

Es liegen dann also wirklich die drei Inflexionspunkte a', b', c' von C' in einer und derselben Geraden, nämlich in der Schnittlinie von E und e wie der II. Satz behauptet. Ebenso in umgekehrter Schlussart.

6. Die gefundenen Ergebnisse setzen uns in Stand, eine weitere Frage bezüglich der Raumcurven dritter Ordnung zu beantworten. Wenn nämlich eine solche Curve C_3 und ein beliebig im Raume gegebener Punkt P vorliegt, so gehen durch P bekanntlich drei Schmiegungsebenen der Curve. Es frägt sich nun: „Für welche Lagen des Punktes P werden alle drei Schmiegungsebenen reel sein und für welche wird bloss eine einzige reel und die beiden anderen imaginär sein"?

Man wird wieder leicht einsehen, dass die Punkte der einen Art von den Punkten der anderen Art durch die developable Fläche der Curve getrennt sein werden; denn die developable Fläche ist der Ort jener Punkte, für welche zwei von den drei Schmiegungsebenen zusammenfallen.

Um zu entscheiden, auf welcher Seite der developablen Fläche Punkte der einen oder der anderen Art sich befinden, projiciren wir aus irgend einem Punkte P, dessen Natur wir bestimmen wollen, unsere Curve C_3 central auf irgend eine Ebene E. Die Projection C' ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte δ. Den Inflexionspunkten a', b', c' derselben entsprechen die drei Schmiegungsebenen der Raumcurve C_3, welche durch den Punkt P hindurchgehen.

Die drei durch P gehenden Schmiegungsebenen werden dann insgesammt reel sein, wenn die drei Inflexionspunkte a', b', c', von C' sämmtlich reel sind; und es wird nur eine Schmiegungsebene reel sein, wenn nur einer von den drei Inflexionspunkten reel bleibt.

Die Realität der drei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte richtet sich nach der Natur des letzteren. Ist der Doppelpunkt ein eigentlicher, so ist nur ein einziger Inflexionspunkt reel, während alle drei reel sind, wenn der Doppelpunkt ein isolirter ist. Der Doppelpunkt δ von C' ist aber dann ein eigentlicher, wenn die durch P gehende Secante der Curve eine eigentiche ist, uud dann ein isolirter, wenn diese Secante eine ideelle ist. Wir können daher folgenden die gestellte Frage beantwortenden Satz aussprechen:

„Durch einen Punkt gehen drei reelle Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung, wenn die durch ihn gehende Sekante der Curve eine ideelle ist; und es geht nur eine reelle Schmiegungsebene durch ihn, wenn diese Secante eine eigentliche ist."

Aus diesem Satze folgt mit Rücksicht auf das Frühere ebenfalls, dass die developable Fläche der Raumcurve die beiden Punktarten von einander scheidet.

7. Die reciproken Betrachtungen führen zu ähnlichen Beziehungen der Raumcurven dritter Ordnung mit den ebenen Curven dritter Classe, vierter Ordnung. Wir wollen dieselben nicht vollständig durchführen, sondern in aller Kürze einen Umriss zu geben versuchen.

Wenn man die developable Fläche der Raumcurve, welche wir kurz mit F bezeichnen wollen, durch eine beliebige Ebene schneidet, so erhält man eine Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente, also von der vierten Ordnung. Die Doppeltangente ist die in der schneidenden Ebene liegende Axe der Raumcurve. Je nachdem diese Axe eine eigentliche oder eine ideelle ist, tritt sie auch als eigentliche oder isolirte Doppeltangente der Schnittcurve auf. Die schneidende Ebene trifft die Raumcurve in drei Punkten, welche die Spitzen der Schnittcurve sein werden. Die den Punkten zugehörigen Schmiegungsebenen schneiden die schneidende Ebene in den Spitzentangenten. Die zwei, die beiden Curvenarten betreffenden Sätze, welche einander wechselseitig entsprechen, sind die folgenden:

I. „Die Schmiegungsebenen der drei Schnittpunkte einer Raumcurve dritter Ordnung mit einer Ebene schneiden sich mit dieser Ebene in einem und demselben Punkte."

II. „Die drei Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente gehen durch einen und denselben Punkt."

Die Schmiegungsebenen der Raumcurve in den 3 Punkten, wo sie von der schneidenden Ebene getroffen wird, gehen mit dieser (nach I.) durch einen und denselben Punkt und somit bilden ihre Schnittlinien mit dieser Ebene ein Strahlenbüschel, d. h. drei durch einen Punkt gehende Gerade. Diese Letzteren sind jedoch die Rückkehrtangenten der Schnittcurve dritter Classe, wodurch der Satz II bewiesen erscheint.

Wegen der Beziehung zwischen den drei Rückkehrtangenten und den drei in der schneidenden Ebene liegenden Curvenpunkten ergibt sich schliesslich auch der folgende Satz:

„In einer Ebene liegen drei reele Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung, wenn die in dieser Ebene befindliche Axe der Curve eine ideelle ist; und es liegt nur ein reeler Punkt in der Ebene, wenn die Axe eine eigentliche ist."

Endlich wäre noch zu bemerken, dass wenn man die developable Fläche der Raumcurve durch eine Ebene schneidet, welche eine Tangente der Curve enthält, man eine Curve dritter Ordnung und dritter Classe also mit einer Spitze und einer Inflexionstangente erhält.

Darauf theilte Herr Dr. Em. Bořický mit den Inhalt einer Abhandlung: *„Zur Entwickelungsgeschichte der in dem Schichtenkomplex der silur. Eisenerzlager vorkommenden Minerale,"* welche sich sowohl auf die Minerale der einzelnen, aufeinander folgenden Gesteine als auf die der Gänge und Klüfte bezieht.

Zu dem genannten Zwecke hat der Verfasser die meisten Lokalitäten des genannten Gebietes besucht, die gesammten aus demselben stammenden Stufen des böhm. Museum, der k. k. Universtätssammlung und mehrerer Privatsammlungen auf das Sorgfältigste untersucht und wurde nebstdem von den Herren Bergrath Wála in Kladno, k. k. Bergmeister Gross in Krušná Hora und k. k. Bergmeister Auer zu St. Benigna durch schätzenswerthe Mittheilungen und neues Materiale auf das Freundlichste unterstützt.

Krušná Hora-Schichten.

a) Eingewachsene Minerale.

Bekanntlich bestehen die im Liegenden der Komorauer Schichten vorkommenden Krušná Hora-Schichten aus verschieden färbigen Sandsteinen (einem Gemenge von Quarz, Feldspath und serpentinähnlichen Körnern) mit Zwischenlagerungen von sandigen Schiefern, schiefrigen Tuffsandsteinen, verschieden färbigen Hornsteinen, zuweilen aus Quarzkonglommeraten mit Kieselschieferbrocken und Schieferfragmenten.

Von eingewachsenen Mineralen sind ausser den Zersetzungsprodukten der Feldspath-und serpentinähnlichen Körner — einer Kaolin und kalkartigen Substanz, die zuweilen als Bindemittel dient — nur kleine Brocken von schwarzgrauem Kieselschiefer, kleine Pyrithexaëder (in den Quarzkonglommeraten von Krušná Hora) und äusserst selten kleine Barranditkügelchen, (die jedoch nur in der Nähe der Klüfte vorkommend, von diesen ihren Ursprung zu nehmen scheinen) vorzufinden.

b) An den Kluftflächen vorkommende Minerale.

An den Kluftflächen dieser Sandsteine beobachtet man gewöhnlich nur Quarzdrusen, seltener dünne Rinden von feintraubigem Psilomelan und Pyrolusit nebst gelbbraunem Fisenocher (letzterer zuweilen in Sideritform) und nur an einigen Punkten, namentlich bei Třenic in der Nähe v. Cerhovic und bei Komorsko kommen wasserhaltige Thonerde- oder Eisenoxyd-Thonerdephosphate vor, unter denen die sternförmig angeordneten Nadeln des Wavellit die Wände der meisten Klüfte bedecken.

Des ältesten Ursprungs unter den Phosphaten erscheint der Barrandit von Zepharovich's, der sich (zuweilen mit Beibehaltung der Kugelform) in Picit Boř., ein gelblich rothes, durchscheinendes schwach wachsglänzendes amorphes Mineral (wesenlich aus Eisenoxyd, Phosphorsäure und Wasser bestehend) und dieses in Kakoxen umwandelt; die Nadeln des Letzteren pflegen in Limonit zu zerfallen; daher die Stufenfolge der metamorphen Bildungen:

1) Barrandit. 2) Picit. 3) Kakoxen. 4) Limonit.

Wenn Barrandit mit Wavellit in Gesellschaft vorkommt, ist letzterer stets jüngeren Ursprungs; daher

1) Barrandit. 2) Wavellit.

In Begleitung des Stilpnosiderit hat der Wavellit ein eigenthümliches Aussehen. Die Nadeln desselben sind gleich kurz, nicht sternförmig sondern kugelig gruppirt, oder fast senkrecht aufgestellt, und bilden einen dichten Ueberzug auf einer meist dünnen Schichte von Stilpnosiderit, der stets Phosphorsäure enthält.

Ausser den genannten Phosphaten kommt auf den Sandsteinen von Třenic ein dichtes, grünlich, gelblich oder graulichweisses, durchscheinendes wasserhaltiges Thonerdephosphat vor, dessen Härte = 5·5 und spez. G. = 2·37. Nr. 1217 der Locals. d. böhm. Museum weist dessen allmähligen Uebergang in Wavellit nach und zwei vom diesem Handstücke ausgeführte Analysen führen zu der Formel:

$$\underbrace{Al_2 O_3 . PO_5 + 6\, HO} + \tfrac{1}{3} \underbrace{(3\, Al_2 O_3 . 2\, PO_5 + 12\, HO)}_{\text{Wavellit}} + \tfrac{1}{15} \left[3 \left.\begin{matrix} CaO \\ MgO \end{matrix}\right\} PO_5 + 3\, HO \right]$$

$$Al_2\, O_3 .\ PO_5 + 6\, HO + \tfrac{1}{17} \underbrace{(3\, Al_2\, O_3 .\ 2\, PO_5 + 12\, HO)}_{\text{Wavellit.}}$$ (bei der Letzteren wurde der sehr geringe Kalkerdegehalt nicht berücksichtigt).

Nro. 299 der system. Sammlung des böhm. Museum zeigt auf einer bräunlichgrauen tuffartigen Sandsteinunterlage abwechselnde, etwa $\frac{1}{2}$—1‴ dicke Schichten des erwähnten Minerals mit weissem erdigen Thonerdehydrat (Gibbsit = $Al_2\, O_3 . 3\, HO$), welch' letzteres in der Zersetzung des ersteren seinen Ursprung zu haben scheint. Eine von dieser Stufe ausgeführte Analyse führte zu der Formel:

$$Al_2\, O_3 .\ PO_5 + 6\, HO + \tfrac{1}{10} \underbrace{(Al_2\, O_3 .\ 3\, HO)}_{\text{Gibbsit.}} + \tfrac{1}{33} (3\, CaO .\ PO_5)$$

Komorauer Schichten.

a) Eingewachsene Minerale.

Die auf den Krušná Hora-Schichten lagernden Komorauer Schichten führen zunächst dünn geschichtete Schiefer, in denen verschiedene Schalsteinbildungen (Schalsteinschiefer, massige Schalsteine, letztere zuweilen in Variolite (Kalkdiabase) übergehend, eingelagert vorkommen, und mit ersteren durch allmählige Uebergänge zuweilen derart verbunden sind, dass sie ihre Enstehung aus denselben erkennen lassen (Ouval). Ihre Zersetzungsprodukte sind Tuffe mannigfacher Art.

In den Schalsteinen sind Kalkspath (in Körnern, Adern und Schnüren) Speckstein, Neolit und Aphrosiderit (letztere zwei zuerst von Ouval durch Reuss bekannt) als gewöhnliche Einschlüsse zu erwähnen; zuweilen kommen auch in denselben ziemlich grosse, aus Limonit bestehende Hexaëder als Umwandlungspseudomorphosen nach Pyrit vor.

Als seltene Gebilde, den erwähnten Schichten eingelagert, erscheinen krystallinisch körnige Kalksteine mit Körnern von chloritischer Grünerde und Kaolinschnürchen (Dubová) und ein lichtgraues krystallinischkörniges Gemenge eines eisen- und magnesiareichen Kalksteins — dem Ankerit am nächsten stehend — mit graugrünen sandigen Grünerdemasse (Josephizeche bei Bukov, Prokopizeche bei Klestenic). Ueber all' den genannten Schichten, seltener mit den oberen Lagen derselben abwechselnd treten Kalkaphanite — v. Lipold Diabasmandelsteine genannt — auf, welche nur an einigen Punkten (in der Umgebung v. Rokycan und bei Mníšek) gänzlich zu fehlen scheinen.

Die Kalkaphanite bestehen aus einer feinkörnigen grauen oder grünlichgrauen feldspathartigen Substanz mit eingestreuten Kügelchen von 1'''—1'' Grösse, die sich in Säuren unter starkem Aufbrausen ohne Rückstand lösen und dem spez. Gewichte nach, das die Zahl 2·99 ergab, dem Ankerit am nächsten stehen. Häufig kommen in den Kalkaphaniten Partien von Grünerde und als Seltenheit Körner von Labradorfeldspath (Krušná Hora) vor.

Von besonderem Interesse ist das Vorkommen von meist dünnen, säulenförmigen, gelblich oder graulichweiss gefärbten und mehr weniger pelluciden Krystallen, die sich durch die Untersuchung als Apatit erwiesen haben und durch Herrn k. k. Bergmeister Gross bereits in den Kalkaphaniten des ganzen Gebirgszuges Krušná Hora-Kublov und bei Točník vorgefunden worden sind. Ihre Härte = 5·5; spez. G = 3·1418 und chem. Zusamensetzung: wesentlich phosphorsaurer Kalk und Chlorkalcium.

Ein häufiger Begleiter der Apatitkryställchen ist der Schwefelkies (in Körnern und Schüppchen), der sie zuweilen in Form von Schüppchen belegt und theilweise durchdringt. Auch sind Trümmer der Apatitkrystalle, mit Schwefelkies gemengt, sowie zerbrochene und durch die Matrix des Kalkaphanits wieder zusammengeleimte Apatitkrystalle vorgefunden worden.

Die bisher erwähnten Gesteine der Komorauer Schichten — Schiefer, Schalsteinschiefer, Schalsteine, Variolite, Kalkaphanite sind — ihrer stofflichen Beschaffenheit, Einschlüsse und Lagerungsverhältnisse gemäss theils als sedimentäre theils als metamorphische Gebilde zu betrachten. An Letztere reihen sich die obersten Gesteinsbildungen, die Labradorporphyre, Diabasaphanite und die Diabase an.

Die Labradorporphyre, dickschiefrig oder massig, lagern auf den Kalkaphaniten, sind mit letzteren zuweilen durch Uebergänge verbunden und an einzelnen Stellen in dieselben eingebettet (Krušná Hora). Sie bestehen aus einer feinkörnigen, schwärzlich grünen Grundmasse mit (oft über einen Zoll grossen) feingerieften Labradortafeln und spärlichen grünlichschwarzen Augitkrystallen und pflegen von Kalkspath mehr weniger imprägnirt zu sein.

Die Diabasaphanite übergehen durch Auftreten des krystallinisch körnigen Gefüges in Diabase, welche — feinkörnig, grobkörnig, zuweilen syenitähnlich — sich als Gemenge von schwärzlichgrünem Augit, graugrünem Labrador und röthlichen Körnern (nach Lipold Orthoklas) erweisen.

Als seltene Einschlüsse dieser Gesteine fanden sich dieselben oberwähnten Apatitkrystalle vor.

In den Labradorporphyren von Krušná Hora fand ich einige Apatitkryställchen in der Grundmasse eingestreut, in dem (stärker aufbrausenden und kleine unregelmässige Kalkspathkörner enthaltenden) Labradorporphyr von Libečov in grösseren Labradorkrystallen eingewachsen.

Auch in den Diabasgebilden von Nassau, die mit denen der Komorauer Schichten grosse Ähnlichkeit haben, sind vor Kurzem mikroskopische Apatitkrystalle nachgewiesen worden.

Die Eisenerze, welche in Schiefern, Schalsteinen, oder den Kalkaphaniten eingelagert vorkommen, sind grösstentheils linsenförmige oder dichte Rotheisensteine (nur selten quarzige anthracithaltige Magneteisensteine) mit linsenförmigen oder dichten Sideriten (Sphärosideriten), welche letztere den Uebergang bilden von den Rotheisensteinen zu einem grünlich oder bläulichschwarzen oder dunkelgrauen chamoisitähnlichen Gestein, das im Streichen des Lagers die tiefsten Stellen einnimmt oder als Einschluss in grösseren derben Hämatitmassen vorkommt.

Dieses chamoisitähnliche Gestein — ein wasserhaltiges Eisenoxydul-thonerdesilikat — ist an den meisten Punkten das ursprüngliche Materiale zur Bildung aller Abarten der Eisenerze. Und als solche sind zu ervähnen:

Siderit, Sphärosiderit, thoniger Sphärosidert, Hämatit, mit stellenweise vorkommendem Glanzeisenerz und rothem Glaskopf, Magneteisenerz, Brauneisenerz mit braunem Glaskopf, Xanthosiderit, Stilpnosiderit und Limonit.

An den zerfressenen Partien der Rotheisensteine kommen zuweilen dünne Ueberzüge von Manganschaum und Psilomelan, in den Roth- u. Brauneisensteinen Einschlüsse von Spekstein, Neolit, Aphrosiderit, in den Sphaerosideriten Eisenkies und Kalkspath (beide in Körnern und Adern) vor. Bloss von einem Punkte der Eisensteinlager, nämlich von Ouval war der Anthracit (durch Reuss) bekannt; derselbe scheint jedoch häufiger und in ziemlich grossen Partien vorzukommen, da bereits schöne Stufen desselben von Krušná Hora, Kvaň und St. Benigna vorliegen.

2) Auf Klüften und Gängen vorkommende Minerale.

Bekanntlich kommen in der Längsrichtung der Erzlager ziemlich grosse Verwerfungsklüfte vor, die nur mit Letten und Trümmern des Nebengesteins ausgefüllt, in ihren Hohlräumen schöne Drusen einiger Minerale (Ankerit, Baryt) zu führen pflegen. Es kommen aber auch Klüfte vor, welche die Erzlager meist quer durchsetzend, dieselben gar nicht oder um ein Unbedeutendes verworfen haben und zu Folge ihrer Ausfüllungsmasse als Gänge zu betrachten sind.

Die meisten von verschiedenen Fundorten stammenden, jedoch gleiche Minerale enthaltenden Stufen dieser Gänge weisen in Betreff der physischen Beschaffenheit und der relativen Altersfolge ihrer Minerale eine solche Aehnlichkeit nach, dass sie eine Feststellung der Letzteren nach ihrer relativen Altersfolge und eine Gruppirung derselben in bestimmte Formationen gestatten.

I. Pyritische Blei-Zinkformation.

Die Formation ist in ihrer vollkommenen Ausbildung von einem neu eröffneten Gange in Krušná Hora bekannt geworden.

An den mit einer gelblich oder gräulich weissen Rinde bedeckten Kluftflächen treten Drusen und Aggregate von winzig kleinen bräunlichen oder schwarzen Zinkblendekrystallen auf, auf denen an manchen Stellen kleine matte scharfkantige Bleiglanzkrystalle (O oder O.∞O∞) sitzen. In dieser Gesellschaft kommen glänzende, speisgelbe oder tombackbraun angelaufene Pyritkrystalle (∞O∞) und erbsengrosse Pyritkugeln vor, die, in der erwähnten Rinde mehr weniger eingewachsen, an der Oberfläche durch hervorragende Kanten und Ecken drusig erscheinen. Die paragenet. Folge dieser Minerale ist: a) Pyrit b) Sphalerit c) Galenit.*)

Mit dieser Formation treten gewöhnlich zwei jüngere Minerale

*) Der Galenit ist noch von zwei anderen Localitäten: Giftberg und Svárov bekannt.

auf (Dolomit und Baryt), von denen in der betreffenden Formation Näheres erwähnt ist.

II. Formation der Eisenerze.

Als das älteste, an den Kluftflächen der meist dichten und z. Th. quarzigen Rotheisensteine vorkommende Eisenerz erscheint der feinkörnige, selten deutliche krystallinische Siderit, der gewöhnlich von Partien krystallinisch (schuppig) körnigen Eisenglanzes umhüllt ist.

Pseudomorphosen des Siderit. 1) Der Eisenglanz erweist sich an den meisten Stufen als pseudomorphe Bildung des Siderit. An den Kluftflächen besitzt der Eisenglanz die mehr weniger erhaltenen linsenförmigen Krystallformen des Eisenspathes; man trifft Sideritkrystalle an, deren Inneres Partien von Eisenglanz enthält, oder deren Umwandlung in Eisenglanz so weit vorgeschritten ist, dass sich nur noch eine dünne, leicht absprengbare Siderithülle erhalten hat. 2) Quarz nach Siderit. An denselben Stufen kommen auch linsenförmige Sideritformen vor, deren Inneres aus Eisenglanz, die Hülle aber aus graulichweisser, durchscheinender Quarzsubstanz besteht, durch welche die Eisenglanzpartien durchschimmern; neben diesen kommen auch Quarzkrystalle in der bekannten Sideritform vor, die nur einzelne Partien von Eisenglanz eingesprengt enthalten oder von diesen vollkommen frei sind. Letztere pflegen vollkommen ausgebildet und scharfkantig zu sein. 3) Die dritte Umwandlungspseudomorphose des Siderit ist die in Limonit, und nicht selten sind alle drei Pseudomorphosen auf derselben Stufe wahrzunehmen.

Zwischen dem Eisenglanz und den Krystallen des Siderit oder in beiden eingesprengt, kommt äusserst häufig feinkörniger Pyrit vor; aufsitzend erscheint derselbe in $\frac{\infty O 2}{2}$ oder $\frac{\infty O 2}{2} . \infty O \infty$ und minder deutlichen $\left[\frac{m O n}{2}\right]$ welche gewöhnlich messinggelb oder kupferroth angeflogen, oder mit sehr kleinen (spärlichen) Chalkopyritkryställchen oder Malachitpartikelchen bedekt sind.

Als Seltenheit erscheint der Pyrit in $O . \infty O \infty$, mit feinkörnigen Zinober gemengt, oder in Formen von $\infty O \infty . O$, in welchem Falle er licht speisgelb und frei von anderen Begleitern zu sein pflegt.

Eine seltenere Erscheinung ist auch der Markasit. Zippe erwähnt eines in Begleitung von Zinober vorkommenden Zwillingskrystalles von der Form $\breve{P} \infty . \infty P . [\bar{P} \infty]$. In der Universitätssammlung gibt es eine Stufe mit derbem und zelligem Markasit und einem Drusenraum, der mit sehr dünnen, spiessigen Markasitkrystallen ausgekleidet ist. Im böhm. Museum finden sich einige Stufen mit traubigem Chalkopyrit (an der Oberfläche mit Malachit bedeckt) vor, dem ein undeutlich faseriger Markasit (der frei von Kupfer ist und dessen spez. G. = 4·788 beträgt) als Unterlage dient.

III. Kupferformation.

Wie schon angedeutet wurde, kommen kleine spärliche Chalkopyritkryställchen $\left(\frac{P}{2}\right.$ oder $\left.\frac{P}{2}.-\frac{P}{2}\right)$ oder Aggregate derselben auf den Pyritkrystallen, und zusammenhängende trauben- und nierenförmige Ueberzüge von derbem Chalkopyrit auf der dünnen Markasitunterlage vor. Ausser diesen sind auch Aggregate und Drusen von grösseren Krystallen derselben Formen, so wie derbe meist eingesprengte oder mit Pyrit gemengte Partien eine häufige Erscheinung.

Von dem einzigen Fundorte „Giftberg“ ist der Tetraedrit bekannt, von dem sich jedoch nur wenige Stufen in den Sammlungen vorfinden mögen. Bei der Untersuchung der Mineralstufen von Giftberg fand ich denselben beim Zerschlagen eines unansehnlichen Stückes in einem Drusenraum in körnigen, mit Malachit und Chrysokol bedeckten Partien und einigen kleinen wohl ausgebildeten Kryställchen $\left(\frac{m\,O\,m}{2}\right)$ die auf feinkörnigem, mit Pyrit gemengtem Eisenspath aufgewachsen und von wasserhellen Barytfragmenten verdeckt waren.

Der Tetraedrit von Giftberg ist die dunkle antimonhältige Varietät.

An den Kluftflächen der Localität Svárov tritt der Chalkosin in kleinen derben Partien auf einem tuffartigen (schwach brausenden) Gestein oder in graulichweissem Quarz eingesprengt auf, und wird daselbst fast immer von Chalkopyrit, zuweilen auch von Pyrit, feinkörnigem, meist porösem Zinnober und winzig kleinen tafelförmigen Barytkryställchen begleitet. Der Chalkosin, gewöhnlich von Kupferschwärze bedeckt, erscheint auch in winzig kleinen minder deutlichen Kryställchen, Formen des Chalkopyrit $\left(\frac{P}{2}\right.$ und $\left.\frac{P}{2}.-\frac{P}{2}\right)$ und erweist sich als metamorphe Bildung desselben.

IV. Quecksilberformation.

Seit älterer Zeit war der Cinnabaryt von Svatá, Giftberg und Březina bekannt; nun ist sein Vorkommen noch auf die Localitäten Svárov, Krušná Hora und Hředel ausgedehnt. Nur in Svatá und am „Giftberg" wurde derselbe bergmännisch gewonnen.

Der Cinanbaryt, in paragenet. Reihe auf die Kupfererze oder, wo diese fehlen, unmittelbar auf die Eisenerze folgend, kommt entweder in Aggregaten oder Drusen von meist kleinen Krystallen oder eingesprengt in feinkörnigen bis dichten Partien vor und pflegt von Siderit, Pyrit und Chalkopyrit, Ankerit und Baryt begleitet zu sein.

Als secundäre Produkte desselben sind zu erwähnen: Quecksilber in Tröpfchen (Giftberg und Březina), Amalgam in verzerrten und z. Th. geflossenen Krystallen (∞O Březina), Kalomel in erdigen Ueberzügen und als Anflug (Giftberg), gediegener Schwefel in erdigen Theilchen (Giftberg).

Gleichen Alters mit dem Cinnabaryt erscheinen die grossen, zuweilen über 6″ langen rektangulär oder rhombisch tafelförmigen Barytkrystalle (älterer Baryt) von Giftberg, welche nicht selten von Zinnoberpartien derart imprägnirt sind, dass durch letztere bestimmte innere Krystallformen (die von den äusseren zuweilen abweichen) regelmässig begränzt werden.

Ankerit-Barytformation.

In Betreff des relativen Alters folgt zunächst auf die Zinnoberformation ein Carbonat, das man bis jetzt unter der Bezeichnung „Dolomit" oder „Braunspath" in die Sammlungen einzureihen pflegte, das sich jedoch als normaler Ankerit erwies.

Der Ankerit von Giftberg, von dem drei Analysen, deren Resultate mit normalem Ankerit übereinstimmen, ausgeführt wurden, hat ein

	spez. Gewicht von	3·072	(mit 1·654 Gr. bestimmt)
der Ankerit v. Zaječov	„ „ „	3·063	(„ 0·49 „ „)
„ „ Chrbina	„ „ „	3·06	(„ 0·84 „ „)

Die mit dem Ankerit in Gesellschaft vorkommenden Barytkrystalle sind grösstentheils säulenförmig durch Vorwalten der Flächen $\breve{P}\infty$. $\bar{P}\infty$ oder $\breve{P}\infty$. $\infty P2$; die Flächen $\infty\breve{P}\infty$ pflegen untergeordneter Art zu sein.

Wenn diese zwei Minerale — der Ankerit in Drusen, der Baryt in aufgewachsenen oder z. Th. eingewachsenen Krystallen — gesellig auftreten, pflegen Minerale älterer Formationen entweder gänzlich zu fehlen oder kommen nur in geringen körnigen Partien, das als Unterlage dienende Gestein einprägnirend, vor.

Ein an den Kluftflächen der Eisenerze selten vorkommendes Mineral ist der Calcit. In dieser Art ist derselbe blos von Krušná Hora bekannt, wo er dicke nierenförmige (schneeweisse) Ueberzüge auf schönen Barytkrystallen bildet. Häufiger kommt der Calcit unmittelbar an den Kluftwänden der tuffartigen Gesteine und zwar in Drusen (aus R. ∞ R bestehend), sowie in grosskörnigen Partien, Klüfte ausfüllend, vor.

Als neueste und wahrscheinlich noch fortschreitende Bildung ist von Krušná Hora der Arragonit bekannt (in den Zerklüftungen der aus linsenförmigem Rotheisenstein bestehenden alten Pfeiler).

Wavellit-Formation.

Diese Formation ist als die jüngste aller genannten Formationen anzusehen, da sie nur an den der Oberfläche nahen Kluftflächen angetroffen wird.

Durch Eindringen löslicher Phosphate bilden sich an den Kluftflächen der Rotheisensteine wasserhaltige Thonerdephosphate, von denen Sphaerit und Wavellit von Zaječov, Wavellit von Ivina und Zdic bekannt sind. In Begleitung des Sphaerit und Wavellit findet sich häufig feinschuppiger Wad in dicken Lagen vor und die paragenet. Folge dieser Minerale ist: *a*) Wad, *b*) Sphaerit, *c*) Wavellit.

Rokycaner Schichten.

Bekanntlich bestehen die Rokyc. Schichten aus glimmerreichen schwarzgrauen, zuweilen sandigen Thonschiefern, und die in denselben eingelagerten Eisenerze sind grösstentheils schiefrige Brauneisensteine mit Lagen und Putzen von Sphaerosideriten.

Von den vielen Localitäten ist bloss die Grube Hrbek bei St. Benigna ihrer Eisen und Thonerdephosphate wegen hervorzuheben. Für die Kakoxenstufen dieser Lokalitäten ist die Folge der metamorphen Bildungen: 1) Dufrenit (Kraurit), 2) Picit und Stilpnosiderit, 3) Kakoxen, 4) Limonit; für die Beraunitstufen: 1) Dufrenit, 2) Beraunit. Neben Picit und Kakoxen erscheint zuweilen auch der Barrandit meist in kleinen Kügelchen (im Querschnitte feinfaserig und seidenglänzend).

Drabover und Zahořaner Schichten.

Ueber den Quarziten dieser Schichten, an deren Kluftflächen Quarzdrusen, Stilpnosideritüberzüge und Limonit (letzterer auch ganze

Felsmassen imprägnirend) zu den gewöhnlichsten Erscheinungen gehören, liegen in Krušná Hora lichtgraue glimmerige Thonschiefer mit Schnüren und 3—6″ dicken Lagen von sandigem Brauneisenstein und schiefrigem dichten quarzigen Rotheisenstein, an deren Klüften Wavellit und Barrandit vorkommen. Beide Minerale pflegen in der Nähe der Oberfläche mehr weniger zerstört, Barrandit theilweise in Limonit, Wavellit in Gibbsit umgewandelt zu sein.

Das Eisensteinlager von Jinočan, Nučic, Chrustenic, dem bekanntlich ein jüngeres geolog. Alter (wahrscheinlich das der Schichten D. d 4) zugesprochen wird, charakterisirt sich durch geringen Mineralreichthum. Ausser weissen erdigen und mehligen, kaolinartigen, und grünlichweissen talkartigen Substanzen findet man nur Pyrit in Krystallen und körnigen Partien.

Aber als konstanter Begleiter dieses Eisenerzlagers erweist sich der Delvauxit, der an den Ausbissen der Liegendschichten (in bröcklige dünn schiefrige Eisensteine eingebettet) längs des ganzen erwähnten Gebietes beobachtet und namentlich in Nučic bereits in grösseren Mengen vorgefunden wurde.

Das Eisensteinlager von Dobřič,

dessen Liegendes von Diabasen und Hangendes von Schiefern der Littener Schichten gebildet wird, charakterisirt sich bekanntlich durch quarzreichen Brauneisenstein, Magneteisenstein und quarzigen Siderit mit Ausscheidungen von Quarz, Jaspis, Achat von braunem Glaskopf.

An den mit Quarzkrystallen ausgekleideten Drusenräumen, die mit einer dünnen Rinde von Limonit bedeckt zu sein pflegen, finden sich zuweilen schöne nadelförmige oder dickere röthlichbraune Gœthitkrystalle meist in Büschelform aggregirt vor. Und mit der jüngsten

Erzlagerstätte von Zbuzan

die sich durch zahlreiche Abdrücke von Versteinerungen der Chuchelbader Schichten auszeichnet, ist das Vorkommen der Eisenerze im oberen silur. System abgeschlossen.

Sezení třídy pro mudrosloví, dějepis a slovozpyt dne 30. března 1869.

Přítomní pánové Wocel, Hanuš, Hattala, Kvíčala, Lepař; co hosté pp. Jindř. Niederle a Vojt. Neumann.

Pan prof. Kvíčala přednášel „*o etymologických bájích řeckých.*“

Sezení třídy pro mudrosloví, dějepis a slovozpyt dne 12. dubna 1869.

Přítomní pánové: Palacký, Tomek, Wocel, Erben, Rieger, Zap, Tieftrunk, Lepař, Emler, Zelený; co hosté pp. Dvorský, Toman, Sobotka, Pažout, Kolář, Schulz, Javůrek, Baum.

Pan Dr. Fr. Palacký přednášel *o Přibíkowi Pulkawowi z Radenína a jeho kronice České.*

Mezi starými kronikami země České obrací k sobě práwem přední pozor kronika Pulkawowa, wydaná již w minulém století ze starých rukopisůw jak w latinském tak i w českém jazyku. Známo jest, že ona sepsána bywši pod císařem Karlem IV, powažowána byla po celá století, až téměř do wěku Dobnerowa, jak doma tak i w cizině wšude za přední swod a sklad, a tak i za hlawní zdroj a studnici starých dějin českých, a že nejznamenitější pozdější kronikáři, Aeneas Sylvius, Hájek i Dubravius, čerpali předewším z něho swé známosti o dáwnowěkosti české. Z toho následuje, že welice na tom záleží, abychom zwěděli, kdo spisowatelem jejím byl, kdy a z jakých pramenůw dílo swé zhotowil, jaké měl k tomu schopnosti, pomůcky a překážky, a kterak počínal sobě we zpytowání, sestawení a líčení historických podawkůw swých.

Když já nyní před 40 léty (1829) spisowal sem swau „Würdigung der alten böhmischen Geschichtschreiber“, byla známost naše o Pulkawowi co spisowateli a o díle jeho ještě welmi nedostatečna i nespolehliwa; samo jmeno jeho podléhalo pochybnosti, o žiwotu jeho newědělo se téměř nic; proto mluwil sem byl o něm ještě pod nápisem „der sogenannte Pulkawa“. Od té doby přibylo nám sice, přičiněním pp. Tomka, Dudíka i jiných našich dějezpytcůw, něco známostí o něm a dílu jeho: a wšak i ty, i ony, kterých také já časem dobral sem se, jsau wždy ještě jen kusé a nedostatečné. Nicméně pokrok stal se předce, jako jinde, tak i w této wěci nenepatrný, kterýž tuto krátce wyložiti chci.

O spůsobu, kterak powstalo dílo Pulkawowo, jsau staré podawky již sice od dáwna před rukama: patrné wšak w nich nalezené odpory a chyby nedaly dopíditi se w nich prawdy s jistotou. Popatřme na nejstarší a nejdůležitější mezi nimi, a sice na slowa, jež podáwá rkp. university Pražské (I. D. 10.) asi z polowice XV. století:

„Explicit chronica Boemorum, quam de anno domini 1374 ad mandatum ser^{mi} ac invict^{mi} principis et domini D. Karoli IV divina favente clementia Rom. imp. ac Boem. regis Przibico de Tradenina, artium liberalium doctor, congregavit ac composuit ab origine terræ Boemiæ, omnium ducum et regum, qui suis temporibus ipsam gubernaverunt et in ea regnaverunt, ex omnibus chronicis omnium monasteriorum et quorumdam baronum, ubicunque potuit conquirere. Scitoque tamen istud, quod omnes res fabulosæ et non veræ ac fidei dissimiles sunt obmissæ et rejectæ: sed quod verum et certum est, de eis excerptum, hoc est in hac chronica mandato prædicti imperatoris positum. Nam illas omnes res certas et veras ac gesta seu facta suæ terræ Bohemiæ idem imperator, quam pervalide super omnes alias suas terras dilexit, solus omnibus chronicis monasteriorum et baronum visis et cum summa diligentia perlectis, memorato Przibiconi demandavit ex eis unam chronicam veram et rectam conscribere et in unum volumen redigere, quod et prout cernis, fecit" etc.

Slowa tato wepsal do rkp. Pražské bibliotheky ne opisowatel kroniky sám, ale tuším sauwěký korrektor jeho. W jiných starých rukopisech latinských, pokud mně wědomo, zpráwa ta we wšech nedostáwá se; pročež již Menke a po něm i Ludewig wydali dílo to co „Anonymi chronicon Bohemicum." Za to ale texty české kroniky této podáwají tím častěji zpráwy o půwodu jejím. Hned nejstarší mezi nimi, psaný na hradě Raudnickém r. 1407 a nyní chowaný w bibliotéce Starobrněnského kláštera, píše: „Tato kronika jest od počátku České země i o wšech kniežetech i králích, ježto sú zprawowali swými časy; a takž pak k přikázaní slawného Karla IV ciesaře Římského, ze wšech kronik wšech klášterów, ježto shledány mohly býti, skrze Přibíka syna Dluhojowa z Tradenína, mistra školnieho od S. Jiljie, řečeného Pulkawa, w český hlahol z latinského, jakž najlépe mohlo býti, jest přeložena. It. jest znamenati, že wšecky wěci básniwé a neprawé jsú opuštěny, a což prawého a jistého jest položeno; neb ty wšecky wěci dřéwe řečený ciesař s welikú pilností w latinskú velmi krásnú řeč shromážditi jest kázal etc. Podobné zpráwy, ač poněkud zkrácenější, podáwají také jiní rukopisowé čeští; jen jeden z nich, musejní z počátku XVII století, prawí, že kronika ta „skrze Přibíka jinak Přibislawa Dluhojowa (sic) syna z Radonína, ze slowanského hlaholu w český přeložena byla.

We wšech těchto swědectwích uráží předewším jmeno „Tradenín", jakožto naprosto chybné, ano „Tradenína" w Čechách nikdy a nikde nebylo a není; musí tedy čteno býti „z Radenína", aneb aspoň „ze Hradenína", (kterážto forma sice tytýž naskytuje se v listinách, ale také chybná jest) na místě „Radenína". Potom i jmeno „Dluhoj", na místě „Dluhowoj", zdá se aspoň mně býti podezřelé.

Dále titulu „artium liberalium doctor", jejž dotčená zpráwa latinská dáwá Pulkawowi, já w listinách českých století XIV nikde nenašel sem, a newím, pokud za zpráwný považowán býti může. Konečně nachází se odpor i w tom, že latinská zpráwa klade Pulkawu za skladatele textu latinského, rukopisy pak české wesměs za překladatele do češtiny. Že text latinský jest originalem, český pak překladem, o tom nemůže býti ani té nejmenší pochybnosti. Kdo tedy byl spisowatelem a kdo překladatelem jeho?

Od r. 1829 nabyli sme aspoň o Pulkawowě osobě několik zwěstí určitých a spolehliwých. We starých knihách zápisních konsistoře Pražské z let 1373—1379, majících signaturu *U. XV* a *U. XVI*, nalezli sme, i přítel můj prof. Tomek i já, několikero dokladůw o muži tom. Ke dni 7. Jan. 1373 jmenuje se tam skutečně „Przibico rector scolarum ecclesiæ S. Aegidii." Ke dni 30. Jun. 1373 podáwá se zpráwa o zamýšleném té doby nowém stawení školy u S. Jiljí, a píše se: M. Borsso mandavit . . . D. Præposito ecclesiæ S. Aegidii majoris civitatis Pragensis, quod de obedientia in Wiesczan assignet pecunias omnes anni præsentis pro scolis faciendis dictæ ecclesiæ. Ibidem etiam canonicis ibidem præsentibus et citatis consentientibus mandavit, quod consentiant de hujusmodi assignatione. Ubi M. Johannes Pecznik tamquam vicedecanus consensit. Ibidem plebanus dictæ ecclesiæ promisit dare III sexag. gr. Mandavit etiam, quod D. Duchko LXXX gr., Pulkaua magister scolæ L. gr., Johannes Anima campanarius L gr. pro dictis scolis ædificandis assignent. In casu, ubi magister scolæ alienaretur vel dimitteret scolas infra unum annum a data præsentium, extunc successor scolarum prædictarum debebit eidem Pulkauæ dare L gr. jam dictos. Ubi etiam D. Petrus canonicus consensit." Ke dni 29. Aug. 1376 mezi swědky uwedenými jmenuje se opět „Przibico dictus Pulkaua, rector scolarum S. Aegidii in Praga." Ke dni 6. Jul. 1377 zmínka se činí o rozepři, kterauž měl „Przibislaus magister scolæ cum plebano S. Aegidii" a stanowí se „terminus ad idem ob spem concordiæ hodie ad VII dies." To wše čte se w dotčených aktách *U. XV* a *U. XVI* w archivu kapituly Pražské. Dále w archivu Pražského arcibiskupstwí, a sice we knihách Confirmationum ad ecclesias in diocesi Pragensi z let 1373—1390, nalezl sem pod lit. *D. 8.* zápis, kdežto „discretus vir *Przibislaus* rector scolarum ad S. Aegidium in Praga" dne 19. Jul. 1378 ustanowuje se „plebanus ecclesiæ in Chudienicz." Tamtéž ale pod lit. *D, 30* ke dni 24. Sept. 1380 nachází se zpráwa, že ad ecclesiam in Chudienicz „post mortem bonæ memoriæ Przibikonis“, ustanowen zase farář jiný. Tudíž jisté jest, že Pulkawa umřel r. 1380 co farář Chudenický. Z toho ale zawírati ještě se nedá, že by stal se byl knězem a šel hned farářowat do Chudenic; ba možné jest, že ani nenabyl nikdy swěcení kněžského, a požíwaje w Praze důchodůw z fary swé, za příkladem množstwí farářůw jiných swého wěku zastáwal powinnosti swé pastýřské w Chudenicích jen skrze najatého třídníka čili wikáře. Důkaz na to podáwá nejprw při zápisu dne 19. Jul. 1378 daný jemu titul „discretus vir“, ne „honorabilis“, a pak další zápis w dotčených aktách konsistorialních U. XVI, kdežto ke dni 18. Sept. 1378 wyprawuje se: „D. Przibislaus plebanus in Chudienicz protestatus est, quod paratus esset recipere sacrum subdiaconatus ordinem: sed quia ordines non celebrantur, ideo dixit, quod non stat per eum, sed potius per diocesanum loci.“

Tak tedy osobnost Přibislawa čili Přibíka Pulkawy z Radenína i postawení a působení jeho w létech posledních (1373—1380) již dostatečně zjištěna jsau. Byltě skutečně školním mistrem čili rektorem kollegiatní školy Swatojilské w létech 1373—1378, a předpokládáno o něm, že by ze služby té buďto propuštěn býti aneb i sám ji opustiti mohl; nebyl tedy ani kanowníkem tamější kapituly, ani knězem wůbec, ale laikem a swětským učeným, jakowýchž za jeho wěku ještě pořídku se počítalo. Wždy pak wyznamenáwal se mezi wrstewci swými tím, že, náležeje k učenému stawu, wynikal spůsobilostí swau ku prácem učeným; protož není se diwiti, že obrátil na sebe pozor i císaře Karla IV.

Že císař ten měl účastenstwí we skládaní kroniky Pulkawowy, jewí se, bez ohledu i na zpráwy nahoře již dotčené, ze skutkůw následujících: 1. Wědomo jest, že Karel IV sám sepsal také legendu o S. Wáclawě. Biskup Marignola, spisowaw také k císařowě žádosti kroniku českou při zmínce o smrti S. Wáclawa (Dobner. Monum. II, 153) doložil byl ta slowa: „cujus vitam gloriosus imperator Karolus IV abbreviavit, quæ si placeret, hic esset inserenda.“ A wšak císař ne Marignolowi, nýbrž Pulkawowi dal wložiti legendu swou do jeho díla, a tak čteme ji (s Incipit: „Crescente itaque religione Christiana“ etc.) netoliko w Dobnerowě wydání (III, 90,) ale i u Menkena i Ludwiga. 2) Wložení hojných listin důležitějších obsahu státopráwního z archivu zemského neb králowského, jejž Pulkawa sám citowal pod jmenem „Arcana regalia“ (ap. Dobn. II, 288,) do kroniky té nemohlo se státi beze zwláštního císařowa wědomí a swolení, ba i poručení; prawda o tom každému znateli sama sebou jest na jewě. 3) Nemenší swědectwí wydáwá w té wěci také wetkání kroniky země Braniborské do kroniky české, an císař, jakož r. 1373 wpojil byl tu zemi do koruny České, tak i dějiny její chtěl míti w české wpojeny. Dle toho nic newadí, uznáwati zwěsti nahoře položené o Karlowě účastenstwí we skládaní Pulkawowy kroniky za prawé w podstatě swé, a považowati tedy jej za spoluspisowatele. Odpor ten, že Pulkawu zpráwa latinská klade za spisowatele latinského textu, rukopisowé pak čeští za pouhého překladatele, dá se urownati tím, že on byl i jedním i druhým, jakož já již 1829 dokázati snažil sem se.

Přistupme již k uwažowání díla samého. Před 40 léty znali sme jen dwojí recensí Pulkawowy kroniky: prwní, kterou wydali we známých sbírkách swých Menke r. 1730 a Ludewig r. 1737 z jednoho a téhož rukopisu od r. 1467, kterýž já r. 1833 poznal sem w Rehdigerské bibliotéce na Elisabethanum we Wratislawi, a kterýž wedle Pulkawy obsahuje také kroniky Františka kanowníka Pražského dle druhé recense a Wawřincowu z Březowé; druhau, kterou wydal Dobner r. 1774 we třetím dílu swých Monumenta hist. Boem. na str. 63—290, z rkp. bibliotheky university Pražské (I, D. 10,) jenž wedle Pulkawy také obsahuje i Marignolowo dílo i Wawřince z Březowé, a pochází asi z polowice XV století. Rozdíl obau recensí jewil se zwláště w tom, že Pulkawa při prwním spisowání neměl před sebou pramenůw jiných, nežli dílo Kosmasowo, staré legendy o českých Swatých, oba prodlužitele kroniky Kosmasowy, Dalemila, dotčené listiny archivu králowského a některé zwláštní nám odjinud neznámé zpráwy z druhé polowice XIII a prwní XIV století; při druhé recensí ale čerpal již také z Vincencia i Gerlaka (čili Jarlocha), takže léta 1142—1198 nabyly u něho swětla hojnějšího, a užil také kroniky Braniborské, jakož již podotknul sem. O českém překladu, wydaném r. 1786 od Fr. Faustina Procházky w obnowené řeči, saudil sem, že wzdělán byl dle druhé recense; a wšak, poněwadž některé wěci kladou se w něm zpráwněji nežli w textu latinském, měl sem za to, že překlad ten mohl by poněkud i co nowá, a to již třetí, recense považowán býti.

Wšak i w tom ohledu rozšířily se známosti naše od r. 1829. Ačkoli já na cestách konaných po bibliothekách i archivech domácích a zahraničných musel sem pokaždé obraceti pozor swůj ku potřebám jiným a ještě pilnějším i doléhawějším, nemohl sem předce newšímati sobě i rukopisůw starých kronik našich, kdy a kdekoli se mi které naskytly. Takto poznal sem r. 1849 we Mnichowě we král. bibliothece nejen pod signaturou Codex lat. 476 A. rukopis latinského textu

Pulkawowa, ale pod známkou Codex german. 1112, w rkp. XV století, také staroněmecký překlad kroniky této, o kterém potud nic se newědělo. Předchází w rkp. dotčeném na listech 1—12 we fol. „Das buch genant Provinciale", potom l. 14—52 „Heinrichs von Müglen Vngerische Kronik"; pak na l. 53—169 stojí pod nápisem „Hie hebt sich an die Cronicka des Kunigrichs czu Behemen, vnd sagt wie sy zum Ersten wurden genennet." Počíná pak slowy: „Do die Kinder der menschen In dem acker Senar noch dem Syntflutt nicht bedachten noch In irem mut betrachtenn das geschehen gelubde zw Noe Irem Vater" etc. Nebylo mi lze srownáwati celý obsah překladu toho s texty latinskými prwní neb druhé recense: ale zaznamenaw sobě poslední jeho kapitoly od listu 161, a zwláště konec na listu 169, kdež o swatbě krále Jana we Špíru r. 1310 s Eliškou Českau mnohem hojnější jest řeč, nežli we známých textech latinském i českém, a kdež nápadná shoda se jewí s kronikau minority Mikuláše Čecha (na stránce jeho 349, w. Dudik, Ceronis Handschriften str. 424) pozoruji, že německý tento text uspůsoben jest swobodněji, aspoň na konci díla, nežli býwá obyčej u překladatelůw, a že tudíž mohl by také za zwláštní recensí díla Pulkawowa považowán býti. Později také we Wolfenbüttelské bibliothece uhodil sem na tentýž německý text, ale kusý, an sahá jen do r. 946, a na počátku XVI století dosti nezpráwně psaný, an počátek w něm se čte: „So die kinder der menschen in dem acker Seiner (sic) noch der sintflut nicht bedrachen noch in Irm mut bedrachten das gescheen gelübde zu Nor (sic) irem Vater" etc.

Nechci dnes zabírati se do rozjímaní a srownáwaní textůw ani latinských ani českých a německých kroniky Pulkawowy w rukopisech starých, jichžto počet hojnější jest, nežli podnes nese domnění obecné: práce ta bude bohdá podniknuta brzy na jiném místě s lepším prospěchem. Chci jen wůbec pronesti zdání swé, zakládající se na prohlédání wšelikých rukopisůw ještě wůbec málo známých, že Pulkawa, pokud žiw byl, nepřestáwal oprawowati, doplňowati a dokonaliti dílo swé wšemožně, tu přidáwaje co kde nowého zwěděl, tu opět wynecháwaje co za nezpráwné uznal, a naprawuje omyly we jmenech i datách wšelikých. Protož za to mám, že již nesluší mluwiti ani o dwojí, ani o trojí neb čtweré recensí díla jeho, ale že auplné srownání obsahu wšech dotčených rukopisůw wynese časem swým wětší rozmanitost textůw a recensí na jewo, nežli my nyní jen tušiti můžeme.

Toto mé zdání o častém a znenáhlém rozmnožowání i oprawowání kroniky Pulkawowy od spisowatele samého došlo w posledních těchto dnech značného potwrzení nenadálým objewením se důležitého rukopisu w Paříži, jejž napotom „rkp. Pulawským“ nazýwati chci.

Dne 3. února t. r. obdržel sem od p. Wojtěcha Kętrzyńského, doktora filosofie, bytem nyní w Poznani, psaní dané z Paříže, w němž mi oznámil, že w bibliothece knížete Wladislawa Czartoryského w Paříži pod známkou *0,1414* nachází se skwostný pergamenowý rukopis Pulkawowy kroniky české, psaný latině w druhé polowici XIV století na listech 139 nebo-li stránkách 278 we folio jednou a tauž rukau, a obsahující na stránkách 3—250 dotčenau kroniku, str. 251—276 pak známý „Ordo ad coronandum regem Boemorum.“ Rukopis ten, ozdobený na str. 3 krásnými drobnomalbami, w textu pak barewnými kapitol initialkami, že náležel byl někdy slawnému biskupu Krakowskému, kardinalowi Zbyhněwu Olešnickému, kterýž wepsaw doň některé marginalie z dějin Polských, před smrtí swou r. 1455 odkázal jej byl biskupskému kostelu Krakowskému.

Zajímawau zpráwu tuto hned téhož dne oznámil sem byl w řádném posezení král. České společnosti nauk; a poněwadž spoluoud této společnosti, přítel a zeť můj Dr. Rieger, strojil se té doby na cestu do Paříže, požádal sem ho, aby přičinil se osobně, zda-li by možné bylo dostati literární poklad ten na některý čas do Prahy, kdežby obsah jeho mohl proskaumán býti podrobněji a užit k oprawení textu, jakož známo jest, welice porušeného kroniky Pulkawowy. Kníže Czartoryský propůjčil se k žádosti této liberalností wzorně laskawau: a tak majíce již wzácný ten kodex w rukau swých, můžeme s potěšením probírati se w něm a ceniti jak formu, tak i obsah jeho sami.

Rukopis tento, na jehožto stránce 3 dole otištěná stampiglie swědčí, že jest „Z Biblioteki Puławskiey XX. Czartoryskich“, jest skutečně wzácný, skwostný a zwláštního pozoru hodný. Blány pergamenowé, formatu středního folio, jsau welmi auhledné a neméně čisté nežli silné; písmo na nich minuskule we knihách auprawných toho wěku obyčejná, s širokými okrajími prázdnými, leč kde korrektor sauwěký poklésky písaře wíce řemeslného nežli důmyslného na nich wytýkal. Psán pak jest rukopis ještě za žiwobytí jak Pulkawy tak i císaře Karla IV, a sice před r. 1374: důkaz toho jest na snadě a bije do očí, ana wšecka tak řečená Brandeburgica w něm ne do textu položena, ale na okrajích rukou zwláštního a wšak sauwěkého písaře připsána jsau. Dwě miniatury na hořejší stránce počátečné (3,) jedna w liteře *C*, představující krále pod korunou na trůnu sedícího a držícího berlu w ruce, druhá na okraji malý medaillon a w něm erb králowstwí Českého, upomínají nádherou a jemností swau na podobné plody Zbyška z Trotiny. To wše opráwňuje k důmyslu, že kniha tato psána byla, ne bez wědomí spisowatelowa, pro wzácnou nějakou a wysoce postawenau osobu. Ba z korrektur některých a zwláště na stránkách 245, 246 a 247 postawených, možné jest domýšleti se, že na nich buďto spisowatel sám, aneb jeho náwodem někdo jiný, ukládal po straně oprawy textu, které w rukopisech pozdějších již w textu samém jewí se. O wšech těchto důležitých maličkostech bude se moci podrobněji a důkladněji jednati, až chystán bude ze wšech exemplárůw text zpráwný k nowému wydání kroniky té. Ostatně weškeren obsah rukopisu shoduje se nejwíce s textem od Dobnera podaným, ale končí prwní knihau na str. 250 w tato slowa: „Hic finis est primi libri hujus cronice, quoniam presagium Prziemisl primi ducis Boemie sicut supra dicitur est impletum" (u Dobnera na str. 266) ač Brandeburgicum Dobnerowo str. 265—6 ještě na okraji téže stránky 250 připsáno jest. Zpráwa „Explicit cronica Boemorum etc." ode mne nahoře již postawená chybí w rkp. Pulawském naprosto.

Máť pak rukopis tento ještě i jiné zwláštnosti, kterých konečně dotknauti se musím. Jsauť to krátké přípisky z dějin Polských, rukau prwní polowice XV století, tedy dle wší prawděpodobnosti samého biskupa kardinála Zbyhněwa Olešnického, nejwíce co marginalie, a wšak někdy také do textu samého wložené. Jsauť wesměs obsahu buďto kritického, aneb doplňují a wyswětlují události české z pramenůw polských. Posledního způsobu jsau zejmena přípisky:

K roku 1043	na str. 63,	u Dobnera 118:	Fames magna in Bohemia, ex qua tertia pars hominum periit.
„ 1072	„ 71,	„ 124:	Beatus Stanislaus in episcopum Cracoviensem assumitur.
„ 1079	„ 73,	„ 125:	Beatus Stanislaus Cracoviensium antistes a Boleslao Polonorum rege ad aram in eccl. S. Michaelis de Rupella occiditur. Cujus corpus in septuaginta duas pecies conscissum virtute divina reintegratur octavo Idus Maii.

K roku 1085	na str. 74,	u Dobnera 126:	Ke slovům Juditha, filia Wratislai ducis Boemorum, přidáwá se: quæ genuit animosum Boleslaum Bohemorum victorem.
„ 1109	„ 103,	„ 148:	po slowích „natus ex regina Swataua“ přidáwá se: qui in Polonia apud Boleslaum ducem Polonorum fratrem suum exulabat.
„ 1111	„ 107,	„ 151:	Swatawa: „genere Polona Kazimiri regis filia“, regina Boemiæ etc.
„ 1120	„ 111,	„ 154:	po „fugitivus abscessit“ dodáno: „Poloniam, illic enim erat omnium exulum et fugitivorum receptaculum.“
„ 1178	„ 165,	„ 195:	„cum conjuge Sobieslai“ připsáno: „filia Mijeskonis majoris Poloniæ et Pomeranorum ducis.“
„ 1205	„ 178,	„ 205:	„duci Poloniæ“, přidej: „Henrico a Tartaris occiso filio ducis Henrici cum barba et sanctæ Hedvigis ejus consortis.“
„ 1246	„ 195,	„ 219:	„dux Mesko Poloniæ moritur“, připsáno: „Oppoliensis.“
„ 1253	„ 201,	„ 224:	přípis na straně: „Cracoviensis episcopus Prandota largitur Przemislao regi Boemiæ S. Stanislai martyris reliquias, eodem anno octava Septembris per Innocentium IV Asissio canonizati.“

K roku 1272 na str. 215, u Dobnera 235: oprawa: „Canonizata est beata Hedvigis ducissa Poloniæ mill. ducent. sexagesimo sexto, XVIII Kal. Decembris, Viterbii per Clementem papam quartum."

„ 1283 „ 223, „ 243: „cujus (Zavissii) uxor prædicta (Kunegundis) est mortua" přidáwá se datum: An. dom. Mill. ducent. octuagesimo quinto, nona Septembris die."

Mezi poznamenáními a oprawami kritickými jsau některá welmi zajímawá. Když k r. 1141 (na str. 121, u Dobn. 162) Pulkawa učinil zmínku o císaři Karlowi IV, kritik dobře poznamenal: „Ex hoc habetur, quod scriptor hujus cronicæ novus fuit." Neméně slušná byla oprawa k r. 1260 (str. 206—228): „Non fuit eo tempore Adrianus papa, sed Alexander quartus." O korrektuře k r. 1096 (str. 90—138,) kde na místě „Brieg — situm in flumine Odra", klade se „Bardo ad ripas Nisse situm," nemohu hned sauditi, pokud opráwněna jest. Ale bedliwý kritik ten oswědčuje se také co wraucí patriota Polský naproti Čechům, když k r. 1061 (str. 68—122) slowa „Jaromir — ad ducem Poloniæ fugitivus abscessit" oprawuje na „ad r e g e m Poloniæ Boleslaum"; když k r. 1093 (str. 89—138) zpráwu o dani, kterau Wladislaw Polský Českému Břetislawowi II se zawázal, nazýwá „pulcrum mendacium", a konečně když k r. 1292 slowa, že král Český Wáclaw při dobytí Siraze „dictum Loketkonem cum nonnullis aliis principibus captivavit" (na str. 236—252) cele wyškrábal čili wyradirowal z textu.

Ku konci nebude snad newhod, připojím-li zde aspoň ta místa z německého Pulkawy Mnichowského, která r. 1849 wypsal sem sobě, aby shoda jeho s kronikau minority Mikuláše Čecha, založenau také na díle Pulkawowě, prozatím aspoň lépe sledowána býti mohla.

Fol. 53—169 Inc. rubr. „Hie hebt sich an die Cronicka des kunigrichs czu Behemen, vnd sagt wie sy zum Ersten wurden genennet."

„Do die kinder der menschen In dem acker senar noch dem / Syntflutt nicht bedachten noch In irm mut betrachtenn / das geschehen gelubde zw noe Irem vater das do sprach / mit nichten werd ich vliesenn furpass mit den wassern der sint / flutt alles fleysch vnd wirt setzen meinen pogen In die wolcken / des hymels vnd wirt ein tzeychen des gelubdes tzwischen mir / vnd dem ertrich Abr mer misstrawten / sy got von forchte abr / pawtn sy von der tzukunftigen syndflutt wegen ein Stat vnn ey / nen duren, in die aller grosten hohe Der almechtig gott was / Ir vnweyssheyt straffende vnd betzayget dy grossheyt seyner gotlichen almechtigkeit vnd an der selben stat teylet er Ir tzun/gen Ir tzwovndsybenczig sprachen vnd von dem yst genant der / selbig thurn Babel / das do lautet / noch der ausslegung schendung / der czungen, doselbst nam auch eynen vrsprunck dye sprach / Slowanica das do mit verstortem wort yst geheyssenn Slawoi/cum, von dem das volck der selben sprach heyssen Slawoni, wann in yr czungen Slawo vnd Slawi heyssen wort vnd worter vnd also von dem wort vnd wortern der genanten Sp/rach heyssen sy Slowani darvmb dy vorgenanten Slawo/ni wichen von dem velde senar vnd gingen durch Caldeo / vnd komen In das Lant do nu wonen dy kriechen darnach / gingen sy fur etlichen ärm des meres darein ging eyn gro/sser mer Bey bysanciam welcher Bysancia nu heysset Constantio/pel vnd gingen In die ertrich als mit namen / Bulgariam / Russiam seruiam dalmatiam Caruaciam Bosnam Carinthyam / Ystriam vnd Carniolam welch sy noch Auf dyssenn hewtigen tag / Besyczen / czu dem leczten was was (sic) In caruatia ein mensch mit / namen Czhech der durch eins Begangen todschlagez we/gen eins freyen / verlies das selbe teyl Caruatiam mit seinen / Brudern vnd seiner geselleschaft ging er zu suchen ein newes / vaterlant in dem er sicher mocht Beleyben / von stat zu stat fur / ging vnd ging an dy Tunaw darnach kom er In das vater/-lant das nu In latein heysset Bohemia vnd In tew/ch Behemen / daromb Bohemia wird genant von Boch das yst got / nach der Ausslegung der czungen Slawonica Also mit der Ausslegunge / der czungen / sein sy geheyssen Bohemi / von dem namen got/tes furwar Bohemia Inn der czungen Slawonica wird geheyssen czechi nach dem namen des Ersten Einwoners der czech / vand das vorgesprochen ertrich mit seinen prudrn (etc.).

fol. 161[a]. „Babst Celestinus starb nach dem kom Bonifacig der achtet."

„ *161*[b]. „Wenczeslaus ward gekront mit sein frawen In der kirchen zu Brag zu Behemen einen kunig."

„ *162*[b]. „Wenczeslaus ward auch gekront czu eym kunig In Polen."

„ *163*[a]. „Gregorius Byschoue czu Prag starb darnach kom Andreas (sic) Johannes (sic) kung zu Vnngrn starb es wart erwelt der Jung Wenczeslaus sun Wenczeslay."

*fol. 163*ᵇ. „Die Unngrn erwelten einen Andern kung genant Carolus ein sun karoli des kungs sicilie."

„ *164*ᵇ. „Kunck Wenczeslaus starb nach Im volgt sein sun Wenczeslaus der eynig Erbe In dem Reich behemen."

„ *164*ᵇ. „Wenczeslaus XVIII Jar ward ertodt zu Olmutz."

„ *165*ᵇ. „Rudolfus starb vnd Heinricus von kernten wat erwelt zu kung".

„ *167*ᵃ. „Es stund gar vbel In Behemen do Heinricus von kernten das Reich Inne hyelt wann er lies gar vill lewt totten."

„ *168*ᵃ. „Heinricus der Romisch kunig het hochzeyt mit seinem erst geporn sun sun Johanni vnd mit Elyzabeth czu Speyr gar kostenlich."

— Explicit fol. *169*ᵇ: — „Etlichen mit tanczen vnd dye andrn mit stechen vnd dy/ gancz stat zu Speyr frewet sych mit fruchtparn frew/ den vnd dy styme der frewenden frewden widr clang/ abr auf dem houedo verwunderten sych alle dy die/ da Bey stunden der starcken langen stangen vnd Sper/ dye dy Behemen furten vnd dy Anndern von einem ann/drn volck gehelmt odr gewappent die forchten sich czu/ Reyten widr sy vnd keyn Invon erczayget sich dem/ zu nehen der Behemen vnd ob er villeycht ausskom vbr/ dy czyle do ward er vnsichr vnd widrkeret das pfert/ aus dem wege das er ycht entgegen ging den kumen/ den kom abr eyn entgegen So ward er von dem pferd gestossen vnd das spere/ zu prach In kleine stucke die ding/ sein geschehen zu der glorien vnd ern der newen prewt/ vnd czu abent mit vorgen der Benedeyung dr Brewtigam/ vnd dy Brawt Et sich est finis si non vis credere tunc accipe cinis.

Darauf hielt Herr Karl J. Erben in böhmischer Sprache einen Vortrag *über die schwierigsten zum Theile korrumpirten Stellen des Originaltextes von dem bekannten altrussischen Gesange über den Heerzug Igors*, worin er dieselben zu erklären und theils auf Grundlage der vom Prof. Tichonravov veröffentlichten Varianten einer für die russ. Kaiserin Katharina II. aus dem gegenwärtig vermissten Originale selbst verfassten Abschrift, so wie durch seine eigenen Kombinationen zu berichtigen versuchte. Die so gestaltete Rezension des ursprünglichen Textes und deren Begründung sammt einer vom Vortragenden herrührenden böhmischen Uebersetzung des Gedichtes mit den dazu gehörigen Erläuterungen wird in dem nächst künftigen Aktenbande der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlicht werden.

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 10. März 1869.

Anwesend, die Herren Rochleder, Kořistka, v. Waltenhofen, Durège, Gust. Schmidt; als Gäste die Herren Jos. Weselý, A. Waszmuth und E. Weyr.

Herr Pr. r. Waltenhofen hielt einen Vortrag: „*Ueber die Grenzen der Magnetisirbarkeit des Eisens und des Stahles*“.

Zu den interessantesten Aufgaben, mit welchen sich die Experimentalphysik in den letzten Decennien beschäftigt hat, gehört wohl die Erforschung jener Gesetze des Elektromagnetismus, welche die Abhängigkeit des erregten Magnetismus von der magnetisirenden Stromstärke darstellen.

Bekanntlich verdanken wir Lenz und Jacobi die ersten messenden Versuche in dieser Richtung und auch das erste hierauf bezügliche empirische Gesetz, einfach dahin lautend: dass der Elektromagnetismus der Stromstärke proportional sei. — Es hat sich jedoch bald herausgestellt, dass dieses Gesetz nur eine beschränkte Geltung haben könne, indem zunächst Soule die Beobachtung gemacht hat, dass der erregte Magnetismus über eine gewisse Grenze hinaus kleiner ausfällt, als es nach dem Lenz-Jacobischen Gesetze der Fall sein müsste. — Die nähere Untersuchung dieser Erscheinung, welche man als „eintretende Sättigung“ bezeichnete, ist bekanntlich von Müller zu einem gewissen Abschlusse gebracht worden, indem derselbe durch zahlreiche Versuche den Beweis lieferte, dass es für jeden Eisenstab einen Grenzwerth gibt, welchen sein Magnetismus selbst dann nicht überschreiten könnte, wenn eine in's unendliche fortgesetzte Steigerung der magnetisirenden Stromstärke möglich wäre und dass die dabei beobachteten Gesetzmässigkeiten annähernd durch die empirische Formel

$$x = Ad^{\frac{3}{2}}\, tg \frac{y}{Bd^2}$$

ausgedrückt werden, wenn man die magnetisirende Kraft, den erregten Magnetismus und den Stabdurchmesser beziehungsweise mit x, y und d bezeichnet, während A und B Constante bedeuten, welche von der Stablänge in noch nicht genau ermittelter Weise, wovon später die Rede sein soll, abhängen.

Ich übergehe die Einwendungen, welche gegen dieses Gesetz namentlich von Buff und Lamminer auf experimentellem Wege geltend gemacht worden sind, so wie die den scheinbaren Widerspruch aufklärenden Widerlegungen durch Müller und W. Weber, von welchen der Erstere durch wiederholte Versuche, der Letztere sowohl auf theoretischem als auch auf experimentalem Wege das Gesetz der Sättigung ausser Zweifel gestellt haben. Ich übergehe auch die bei geringeren Sättigungsgraden nichts destoweniger vorhandenen Abweichungen von der Müllerischen Formel, mit dem Vorbehalte namentlich in dieser Frage vielleicht ein anderes Mal einige Ergebnisse meiner hierauf bezüglichen Untersuchungen mitzutheilen.

Ich kehre zur Müller'schen Formel zurück und schreibe dieselbe in der etwas veränderten Gestalt

$$y = \beta\gamma \ arctg \ \frac{x}{\alpha\gamma^{\frac{3}{4}}}$$

indem ich anstatt des Stabdurchmessers das Gewicht γ eingeführt und die Gleichung nach y aufgelöst habe. Dabei wollen wir ein für Allemal voraussetzen, der durch $\frac{y}{\beta\gamma}$ vorgestellte Bogen sei stets in Graden ausgedrückt, was bei den Rechnungen naheliegende Bequemlichkeiten gewährt.

Für eine unendlich grosse magnetisirende Kraft liefert uns diese Gleichung:

$$lim. \ y = 90. \ b\gamma$$

als den oben erwähnten Grenzwerth des erregbaren Magnetismus, und eben diese Folgerung ist es, an die ich nun unmittelbar den eigentlichen Gegenstand meines heutigen Vortrages anknüpfen will.

Die Frage nach der magnetischen Sättigung ist nämlich noch keineswegs erledigt, wenn wir wissen, dass es für jeden Stab vom Gewichte γ ein magnetisches Maximum vom Betrage $y = 90. \ \beta\gamma$ gibt; — es bleibt eben noch die weitere Frage: ob und in welcher Weise dieses Maximum von der Gestalt des Stabes und von der Eisensorte abhängt, oder ob eine solche Abhängigkeit nicht besteht, in welchem Falle dann offenbar das magnetische Maximum der Gewichtseinheit

$$lim \frac{y}{\gamma} = m = 90\beta$$

(somit auch die Grösse β) eine absolute, d. h. für alle Elektromagnete merklich gleiche Constante sein müsste.

Eine sichere Entscheidung dieser Frage ist natürlich auf Grundlage einer sehr grossen Anzahl von Versuchsresultaten möglich, — und so kam es denn auch, dass ich in meinen im Jahre 1865 veröffentlichten „elektromagnetischen Untersuchungen“ in eine Diskussion derselben nicht eingegangen bin, denn es existirten damals nur drei Bestimmungen für das magnetische Maximum der Gewichtseinheit, eine von W. Weber aus seinen und zwei von mir aus Müller's und meinen eigenen Versuchen berechnete. Auch hatte ich damals lediglich die Absicht zu untersuchen: in welcher Ausdehnung die Müller'sche Formel mit unveränderter Beibehaltung je eines und desselben Werthes von α und β für Stäbe von sehr verschiedenen Durchmessern anwendbar ist, was, wie leicht einzusehen ist, die Nothwendigkeit mit sich bringt, in die Rechnung einen Werth von β einzuführen, der von dem aus den Versuchen mit den dünnsten Stäben hervorgehenden mehr oder weniger abweicht, während doch gerade der letztere beibehalten werden müsste, wenn es sich um eine möglichst genaue numerische Bestimmung des magnetischen Maximums der Gewichtseinheit handeln würde, wesshalb meine damals berechneten Werthe der Grösse β auch gar nicht geeignet gewesen wären, über die Frage nach dem Einfluss der Gestalt und der Eisensorte der Elektromagnete Aufschluss zu geben.

Um meine Arbeiten in dieser Richtung zu vervollständigen, habe ich mir die Aufgabe gestellt, das gesammte bis jetzt vorliegende Materiale von Beobachtungen über den Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Stromstärke zu revidiren und das magnetische Maximum der Gewichtseinheit aus den dazu geeigneten Versuchsreihen zu berechnen. Diese Versuchsreihen beziehen sich auf 23 Eisenstäbe und 9 Magnetisirungsspiralen und sind von 5 verschiedenen Beobachtern ausgeführt worden. Ungeachtet dieser Verschiedenheit der Umstände habe ich doch aus allen Beobachtungen für das magnetische Maximum der Gewichtseinheit so wenig von einander abweichende Werthe erhalten, *dass ich keinen Zweifel darüber hegen kann diese Grösse, welche im Mittel sehr nahe gleich*

2100

absoluten Einheiten per Milligramm gefunden habe, mit gleichem Rechte wie z. B. die Constanten der Elasticität, Festigkeit u. s. w. als eine für die molekulare Beschaffenheit des Eisens charakteristische Constante betrachten zu können.

Ich will die verehrte Versammlung nicht mit einer Aufzählung der einzelnen Zahlenresultate, die ich einer ausführlicheren Abhandlung vorbehalte, behelligen, sondern nur auf einige Folgerungen an das gefundene Resultat knüpfen.

Es geht daraus hervor, dass die theoretisch mögliche temporäre Magnetisirbarkeit des weichen Eisens über fünfmal so gross ist, als thatsächlich erreichte permanente Magnetisirung der besten Stahlmagnete, denn diese beträgt nach W. Weber etwa 400 absolute Einheiten per Milligramm. Es scheint mir bemerkenswerth, dass eben dieser Sättigungsgrad auch derjenige ist, bis zu welchem das von mir im Jahre 1863 aufgefundene Gesetz der temporären Magnetisirung des Stahles durch den elektrischen Strom seine Geltung hat, während ich gefunden habe, dass das früher erwähnte Lenz-Jacobische proportionalitätsgesetz in der Regel bis zu einer Sättigung von durchschnittlich 800 absoluten Einheiten per Milligramm zutrifft.

Auch hinsichtlich der Tragkraft eiserner Elektromagnete werden sich aus obigen Resultaten wichtige Folgerungen ableiten lassen, sobald der Zusammenhang zwischen Tragkraft und magnetischem Moment gründlicher erforscht sein wird. — — Arbeiten in dieser Richtung sind bis jetzt leider noch kaum angebahnt, doch mag es mir gestattet sein, wenigstens an einem Beispiel ein Problem dieser Art zu erläutern, wenn auch eine gerade Lösung desselben gegenwärtig noch nicht möglich ist.

Die vor der Entdeckung der magnetischen Sättigung gangbare Annahme der unbeschränkten Giltigkeit des Lenz-Jacobi'schen Proportionalitätsgesetzes, in Verbindung mit dem Satze, dass überdies die Tragkraft im quadratischen Verhältnisse mit der Stromstärke wächst, hat bekanntlich die abenteuerlichsten Erwartungen und Vorstellungen von der Tragkraft hervorgerufen, die mit einem Elektromagnet von unbedeutender Grösse erzielt werden könnte, wenn man nur entsprechend grosse magnetisirende Ströme in Anwendung brächte. Dem entgegen wollen wir in Betracht ziehen, was sich nach den heute mitgetheilten Resultaten über die Grenze der Tragkraft eines einpfündigen eisernen Elektromagneten sagen lässt.— Einem einpfündigen Stahlmagnet bester Sorte entspricht nach Haecker eine Tragkraft von 13 Pfunden. Wenn das magnetische Moment durch das Vorlegen des Ankers nicht geändert würde, so könnte man für einen solchen Stahlmagnet nach der früher erwähnten Weber'schen Angabe 400 absolute Einheiten per Milligramm annehmen. Berücksichtigt man nun, dass die Magnetisirbarkeit des Eisens nach dem oben Gesagten ungefähr das fünffache beträgt und dass (in Ermanglung eines genaueren Gesetzes) die Tragkraft der Quadrate des Momentes proportional angenommen werden muss, so würde einem einpfündigen eisernen Elektromagnet ein theoretisches Tragkraftsmaximum von $13 \times 25 = 325$ Pfunden entsprechen. Da aber jener Stahlmagnet bei vorgelegtem Anker gewiss einen höheren als den angenommenen Sättigungsgrad besitzt, so bezeichnet die so eben berechnete Tragkraft eine Grenze, die man bei einem einpfündigen Elektromagnet selbst mit einer in's Unendliche fortgesetzten Steigerung der Stromstärke nicht erreichen könnte.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass das Ergebniss meiner Rechnungen zugleich die Folgerung in sich schliesst, dass die von Müller angedeutete aber als ungenau und überhaupt noch zu wenig constatirt bezeichnete Proportionalität des Coefficienten B seiner Formel mit der Stablänge allgemeine Geltung haben müsse.

Darauf trug Herr Dr. Grünwald vor die erste Abtheilung seines Aufsatzes: *Eine neue von ihm aufgefundene Methode, die Differentialgleichungen des astronomischen Problems der* n *Körper und ähnliche noch viel allgemeinere Gleichungen zu integriren.*

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 7. Mai 1869.

Anwesend die Herren: Rochleder, Durège, Gust. Schmidt; als Gäste die Herren: Grünwald, Weyr, Blažek und Küpper.

Herr Dr. Grünwald setzte seinen in der vorangehenden Sitzung begonnenen Vortrag fort.

Darauf hielt Herr Prof. Dr. Durège einen Vortrag „*Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehen.*

Bekanntlich kann eine Curve dritter Ordnung dadurch erzeugt werden, dass man ein Kegelschnittbüschel mit einem Strahlbüschel in projectivische Beziehung setzt und die Durchschnitte jedes Strahles mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte aufsucht. Die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort dieser Durchschnitte bildet, geht dann durch die vier Basispuncte des Kegelschnittbüschels und den Mittelpunct des Strahlbüschels hindurch. So leicht sich diese Construction theoretisch aussprechen lässt, so mühevoll gestaltet sich aber ihre wirkliche Ausführung, so dass sie zu dem Zwecke, vorkommenden Falls eine Curve dritter Ordnung zu zeichnen, kaum anwendbar erscheint.

Wendet man sich zu speciellen Curven dritter Ordnung, so bieten sich zunächst diejenigen dar, welche einen Doppel- oder Rückkehrpunct besitzen; allein bei diesen treten in Beziehung auf einige der wichtigsten Eigenschaften, insbesondere solche, welche die Polaren und die Wendepuncte betreffen, so wesentliche Modificationen ein, dass diese specielleren Curven zu dem Zwecke, der Vorstellung bei Betrachtung allgemeiner Curven 3. O. zu Hilfe zu kommen, nicht geeignet sind. Viel besser eignet sich für diesen Zweck diejenige specielle Art von Curven 3. O., welche durch die imaginären Kreispuncte hindurch gehen. Denn diese scheinen in Beziehung auf die oben genannten Eigenschaften nichts Wesentliches vor den allgemeinen Curven 3. O. voraus zu haben, gerade wie auch der Kreis in Beziehung auf seine Polareigenschaften sich nicht wesentlich von den Kegelschnitten im Allgemeinen unterscheidet. Diese Curven 3. O. lassen sich aber auf eine ungemein leichte Weise construiren.

Zunächst ist klar, dass man jedesmal eine Curve dieser Art erhält, wenn man zwei Basispuncte des erzeugenden Kegelschnittbüschels in die imaginären Kreispuncte hinein fallen lässt. Dadurch geht das Kegelschnittbüschel in ein System von Chordalkreisen über. Dies würde zwar schon einige Erleichterung gewähren, indessen immer noch keine beträchtliche, wenn es nicht möglich wäre, zu jedem Kreise den projectivisch entsprechenden Strahl auf eine leichte Weise zu construiren. Dies gelingt aber mit Hilfe zweier Sätze, welche Herr Eckardt in der Abhandlung: „Ueber die Curven dritter Ordnung, welche durch die zwei imaginären unendlich entfernten Kreispuncte gehen" *) aufgestellt und bewiesen hat.

Der erste Satz lautet so: Zieht man aus den Puncten a_1, a_2, in welchen eine der reellen Asymptote parallele Gerade die Curve schneidet, zwei Gerade, welche die Curve auf's Neue resp. in b_1, b_2, und c_1, c_2 treffen, so liegen die letzteren vier Puncte jedesmal auf einem Kreise. Wir haben von diesem Satze einen speciellen Fall in Anwendung zu bringen. Lässt man nämlich die Gerade a_1 a_2 die reelle Asymptote selbst sein, so wird der eine Punct, etwa a_2, der Durchschnitt A der reellen Asymptote mit der Curve, der andere, a_1, aber rückt ins Unendliche. Daher wird jetzt die Gerade b_1 b_2 der reellen Asymptote parallel, und man hat den Satz: Schneidet die Curve eine der reellen Asymptote parallele Gerade in b_1, b_2, und eine durch den Asymptotendurchschnitt A gehende Gerade in c_1, c_2, so liegen diese vier Puncte in einem Kreise. Hält man nun die Puncte b_1, b_2 fest und legt durch dieselben beliebige Kreise, so geht die Verbindungslinie der beiden anderen Durchschnitte c_1, c_2 irgend eines dieser Kreise mit der Curve jedesmal durch A. Hieraus folgt:

*) *Schlömilch's* Zeitschrift für Mathematik. Bd. 10. pag. 321.

Wenn man zur Erzeugung der Curve ein System von Chordalkreisen so wählt, dass die Chordale der reellen Asymptote parallel ist, so ist der Mittelpunct des zugehörigen Strahlbüschels der Asymptotendurchschnitt A.

Zur leichten Bestimmung desjenigen Strahles, der einem bestimmten Kreise entspricht, dient nun ferner Folgendes. Da die imaginären Asymptoten der Curve einander conjugirt sind, so ist ihr Durchschnitt reell. Diesen Punct hat Herr Eckardt das Centrum C der Curve genannt und von ihm folgenden Satz bewiesen: Die Puncte c_1, c_2, in welchen eine durch den Asymptotendurchschnitt A gehende Gerade die Curve schneidet, liegen stets in einem Kreise, dessen Mittelpunct C ist, so dass die die Sehne $c_1\, c_2$ senkrecht halbirende Gerade durch C geht. Verbindet man nun hiemit den vorigen Satz, wonach die Puncte c_1, c_2 auch immer mit den Puncten b_1, b_2, in welchen eine der reellen Asymptote parallele Gerade die Curve schneidet, in einem Kreise liegen, so geht die die Sehne $c_1\, c_2$ senkrecht halbirende Gerade auch durch den Mittelpunct M dieses letzteren Kreises; und daher steht der von A ausgehende Strahl, welcher den Kreis (M) in den Curvenpuncten c_1, c_2 schneidet, senkrecht auf CM.

Hiernach ist nun die Construction einer Curve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispuncte geht, folgende: Man nimmt zwei Puncte b_1, b_2 beliebig an und setzt fest, dass die reelle Asymptote der Geraden b_1, b_2 parallel sei. Sodann nimmt man auch den Asymptotendurchschnitt A und das Centrum C beliebig an. Legt man dann durch $b_1\, b_2$ einen beliebigen Kreis, verbindet den Mittelpunct M desselben mit C und zieht aus A eine Gerade senkrecht auf CM, so sind die Durchschnitte c_1, c_2 dieser Senkrechten mit dem Kreise (M) zwei Curvenpuncte. Indem man durch b_1, b_2 beliebig viele Kreise legt und für jeden die Construction wiederholt, kann man sich so viele Curvenpuncte verschaffen als man will. Die Wahl des Punktes A ist nur dadurch beschränkt, dass er nicht auf der Chordale $b_1\, b_2$ liegen darf, weil er dann nicht der Asymptotendurchschnitt sein könnte. Der Punkt C kann ebenfalls im übrigen willkürlich gewählt werden, nur darf er, wie sich weiter unten ergeben wird, nicht auf der Centrallinie der Chordalkreise (auf der die Strecke $b_1\, b_2$ senkrecht halbirenden Geraden) liegen. Uebrigens leuchtet ein, dass es gleichgiltig ist, ob das System der Chordalkreise sich in zwei reellen Puncten schneidet, oder nicht, indem auch in dem letzten

Falle die reelle Asymptote der Chordale parallel wird; nur ist dann die Ausführung der Construction ein wenig umständlicher.

Es bleibt noch die Frage zu erörten, ob auch durch die gemachten Annahmen eine Curve 3. O. eindeutig bestimmt sei. Sehen wir daher zu, wie viele Puncte der Curve dabei als gegeben zu betrachten sind. Da durch b_1 b_2 zugleich die Richtung der reellen Asymptote bestimmt ist, so involvirt der Punct A drei Puncte, nämlich A selbst und die beiden in dem unendlich fernen Berührungspuncte zusammenliegenden Puncte. Da ferner in C die beiden imaginären Asymptoten sich schneiden, so sind mit C zugleich zwei Punktenpaare gegeben, die in die beiden imaginären Kreispunkte hinein fallen. Der Punct C involvirt also vier gegebene Curvenpuncte, und man hat somit die zur Bestimmung einer Curve 3. O. erforderlichen neun Puncte. Es fragt sich aber, ob diese neun Puncte nicht so liegen, dass sie die Durchschnitte von zwei Curven 3. O. bilden, und dass daher unendlich viele Curven 3. O. durch sie hindurch gelegt werden können. Nun besteht aber der Satz: Wenn neun Puncte die Durchschnitte von zwei Curven 3. O. bilden, und drei derselben in gerader Linie liegen, so liegen die übrigen sechs auf einem Kegelschnitt; und umgekehrt: liegen von neun Puncten einer Curve 3. O. drei in einer Geraden und die sechs übrigen auf einem Kegelschnitt, so gehen unendlich viele Curven 3. O. durch die neun Puncte hindurch. Nun liegen von unseren neun Puncten in der That drei in gerader Linie, nämlich A und die beiden im Berührungspuncte der reellen Asymptote zusammenliegenden Puncte; daher müssten, wenn die Curve nicht eindeutig bestimmt wäre, die Puncte b_1, b_2 und die vier durch C bestimmten Puncte auf einem Kegelschnitte liegen. Unter den letzteren befinden sich aber die beiden imaginären Kreispuncte, also müsste der Kegelschnitt ein Kreis sein, und da ferner in jedem imaginären Kreispuncte zwei Puncte zusammenfallen, so müssten die imaginären Asymptoten der Curve zugleich Asymptoten des Kreises, d. h. C müsste der Mittelpunct des Kreises sein Aber die Mittelpuncte aller Kreise, die durch b_1, b_2 hindurch gehen, liegen auf der Geraden, welche die Strecke b_1 b_2 senkrecht halbirt. Daher tritt die Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn C auf dieser Centrallinie liegt. Wenn man also, wie oben verlangt wurde, Sorge trägt, dass dieser Fall nicht eintritt, so kann man sicher sein, dass die Curve eindeutig bestimmt ist.

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 10. Mai 1869.

Anwesend die Mitglieder Tomek, Tieftrunk, Emler, Zap; als Gäste die Herren Špatný und Pažout.

Herr Prof. Tomek las einen Abschnitt aus seinem noch nicht beendigten zweiten Bande der Geschichte Prags über die Eintheilung der Gewerbe im 14. und Anfangs des 15. Jahrhundertes.

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 21. Mai 1869.

Anwesend die Herren Rochleder, Studnička, Durège, Gust. Schmidt, als Gäste die Herren Ant. Grünwald, Weyr und Blažek.

Herr Emil Weyr hielt einen Vortrag „*Ueber die Curve der grössten und kleinsten electromagnetischen Wirkung.*"

Denkt man sich in der Ebene einer Curve C einen Punkt O, in welchem die magnetische Masseneinheit concentrirt ist, und lässt man durch die Curve C zwischen zweien ihrer Punkte M_1 und M_2 einen elektrischen Strom von der Intensität Eins fliessen, so wird dieser Strom auf den Punkt eine Kraft ausüben, deren Richtung normal zu der Ebene des Stromes ist.

Wenn ds das Bogenelement der Curve für einen Punkt M derselben ist, ferner ω der Winkel, welchen ds mit dem Radiusvector OM bildet und wird dieser letztere selbst mit r bezeichnet, so drückt sich das von ds herrührende Kraftelement durch:

$$\frac{\sin \omega\, ds}{r^2}$$

dar. Nimmt man den afficirten Punkt O zum Pole eines Polarcoordinatensystems, dessen Axe sonst willkürlich ist, so ist bekanntlich:

$$\sin \omega\, ds = r\, d\varphi,$$

und daher:

$$\frac{\sin \omega\, ds}{r^2} = \frac{d\varphi}{r}.$$

Es ist also $\frac{d\varphi}{r}$ der Ausdruck für die von einem Stromelemente auf O ausgeübte Kraft.

Die Gesammtwirkung des Stromes auf den Punkt O stellt sich durch das Integral:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{r}$$

dar, wobei φ_1 und φ_2 die beiden den Stromenden entsprechenden Werthe von φ sind.

Wir stellen uns nun folgende Aufgabe: Unter allen Curven von gegebener Länge L, welche zwischen die beiden festen Punkte M_1 und M_2 eingeschaltet werden können, jene zu finden, für welche der durchfliessende Strom auf den Punkt O die grösste oder kleinste Wirkung ausübt." Es soll also:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} . \, d\varphi = L$$

sein, während das Integral

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{r}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Bekanntlich wird dieser Fall ebenso zu behandeln sein, wie wenn man das Integral $k\,W + L$, wo k eine zu bestimende Constante ist, zu einem Maximum oder Minimum zu machen hätte.

Es ist:

$$k\,W + L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{k}{r} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,\right] d\varphi$$

und wenn man der Kürze wegen:

$$\frac{k}{r} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = V$$

setzt, so ist:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} V\, d\varphi$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

Bezeichnet man $\dfrac{dV}{dr}$ mit N, und $\dfrac{dV}{d\dfrac{dr}{d\varphi}}$ mit P_1, so ist die Differentialgleichung der gesuchten Curve nach den Principien der Variationsrechnung:

$$N - \frac{dP_1}{d\varphi} = 0.$$

Nun ist:

$$N = -\frac{k}{r^2} + \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}$$

$$P_1 = \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}$$

und folglich:

$$\frac{dP_1}{d\varphi} = \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{r\frac{dr}{d\varphi} + \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{dr^2}{d\varphi^2}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$

oder:

$$\frac{dP_1}{d\varphi} = \frac{r^2 \frac{d^2r}{d\varphi^2} - r\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$$

somit die Differentialgleichung der Curve:

$$-\frac{k}{r^2} + \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}} - \frac{r^2 \frac{d^2r}{d\varphi^2} - r\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}} = 0$$

oder:

$$-\frac{k}{r^3} = \frac{r\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}$$

Eine einfache Reduktion liefert die Form:

$$-\frac{k}{r^3} = \frac{r\frac{d^2r}{d\varphi^2} - 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$$

wird mit ϱ der Krümmungsradius der Curve bezeichnet, so drückt die letzte Gleichung aus, dass:

$$-\frac{k}{r^3} = -\frac{1}{\varrho}$$

oder:

$$k\varrho = r^3$$

ist. Somit:

„Die Curve der grössten oder kleinsten electro-magnetischen Wirkung hat die Eigenschaft, dass ihr Krümmungshalbmesser dem Cubus des Radiusvector proportional ist."

Was die Integration der Gleichung:

$$N - \frac{dP_1}{d\varphi} = 0$$

anbetrifft, so hat sie keine Schwierigkeiten. Es ist nämlich:

$$N = \frac{dP_1}{d\varphi}$$

was in:

$$dV = Ndr + P_1 . d. \frac{dr}{d\varphi}$$

substituirt, folgende Gleichung liefert:

$$dV = \frac{dP_1}{d\varphi} . dr + P_1 \ d. \frac{dr}{d\varphi}$$

oder:

$$dV = \left(\frac{dP_1}{d\varphi} . \frac{dr}{d\varphi} + P_1 \frac{d^2r}{d\varphi^2}\right) d\varphi .$$

Hieraus folgt:

$$V = c + \int \left(\frac{dP_1}{d\varphi} . \frac{dr}{d\varphi} + P_1 \frac{d^2r}{d\varphi^2}\right) d\varphi .$$

Die partielle Integration liefert:

$$\int \frac{dP_1}{d\varphi} . \frac{dr}{d\varphi} \ d\varphi = P_1 \frac{dr}{d\varphi} - \int P_1 \frac{d^2r}{d\varphi^2} \ d\varphi$$

somit ist:

$$V = c + P_1 \frac{dr}{d\varphi}$$

wobei c die erste Integrationsconstante darstellt. Setzt man für V und P_1 die betreffenden Werthe, so lässt sich die letzte Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\frac{k}{r} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = c + \frac{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}$$

Hieraus folgt mit Leichtigkeit:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{\frac{r^4}{cr-k} - 1}$$

und somit:

$$\varphi = c' + \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^4}{cr-k} - 1}}$$

Die weitere Integration führt auf elliptische Integrale.

Zur Bestimmung der drei Constanten k, c, c' haben wir drei Bedingungen. Erstlich die Länge der Curve und ferner die beiden Endpunkte.

Darauf hielt Herr Dr. Ant. Grünwald einen Vortrag „*Ueber eine bemerkenswerthe Gattung simultaner linearer Differenzialgleichungen mit variablen Coefficienten.*“

Es gibt eine Gattung linearer simultaner Differenzialgleichungen, welche dadurch bemerkenswerth ist, dass sich auf ihre Integration eine neue Methode, die Differenzialgleichungen des Problemes dreier und mehrerer Körper zu integriren, gründen lässt, wie ich in der nächsten Sitzung zeigen werde. Diese Gleichungen sind es, auf welche sich die beiden Theoreme beziehen, welche im Folgenden mitgetheilt werden.

I. Theorem.

Ist die Bewegung eines Punktes, dessen rechtwinklige Coordinaten zur Zeit t: (x, y, z) sind, durch die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dU}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dU}{dy} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dU}{dz} \end{aligned}\right\} \quad I.$$

und die Werthe $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; $\frac{dx}{dt} = \alpha'$, $\frac{dy}{dt} = \beta'$, $\frac{dz}{dt} = \gamma'$, welche die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten zur Zeit $t = \tau$ annehmen, gegeben, wobei U eine beliebige aber bekannte Funktion von x, y, z und t vorstellt; kennt man ferner die Integrale dieser Gleichungen und denkt sich mittelst derselben die Coordinaten (x, y, z) und Geschwindigkeitscomponenten: (x', y', z') durch die Zeit t und die sechs Constanten $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ dargestellt: so ist auch die Bewegung eines zweiten Punktes (ξ, η, ζ), welche durch die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2 U}{dx^2} \times \xi + \frac{d^2 U}{dxdy} \times \eta + \frac{d^2 U}{dxdz} \times \zeta \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{d^2 U}{dydx} \times \xi + \frac{d^2 U}{dy^2} \times \eta + \frac{d^2 U}{dydz} \times \zeta \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{d^2 U}{dzdx} \times \xi + \frac{d^2 U}{dzdy} \times \eta + \frac{d^2 U}{dz^2} \times \zeta
\end{aligned}\right\} II.$$

und die Werthe $\xi = \xi_0;\ \eta = \eta_0,\ \zeta = \zeta_0;\ \frac{d\xi}{dt} = \xi_0', \frac{d\eta}{dt} = \eta_0',\ \frac{d\zeta}{dt} = \zeta_0'$,

welche die Grössen $\xi, \eta, \zeta; \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ zur Zeit $t = \tau$ annehmen, fixirt wird, vollständig bestimmt.

Die Integralgleichungen dieser Bewegung lassen sich nämlich mit Hilfe der bekannten Integralgleichungen der ersteren Bewegung sofort angeben, und zwar lauten dieselben wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= u_1 \frac{dx}{d\alpha} + u_2 . \frac{dx}{d\beta} + u_3 . \frac{dx}{d\gamma} + u_4 . \frac{dx}{d\alpha'} + u_5 . \frac{dx}{d\beta'} + u_6 . \frac{dx}{d\gamma'} \\
\eta &= u_1 \frac{dy}{d\alpha} + u_2 . \frac{dy}{d\beta} + u_3 . \frac{dy}{d\gamma} + u_4 . \frac{dy}{d\alpha'} + u_5 . \frac{dy}{d\beta'} + u_6 . \frac{dy}{d\gamma'} \\
\zeta &= u_1 \frac{dz}{d\alpha} + u_2 . \frac{dz}{d\beta} + u_3 . \frac{dz}{d\gamma} + u_4 . \frac{dz}{d\alpha'} + u_5 . \frac{dz}{d\beta'} + u_6 . \frac{dz}{d\gamma'} \\
\frac{d\xi}{dt} &= u_1 \frac{dx'}{d\alpha} + u_2 . \frac{dx'}{d\beta} + u_3 . \frac{dx'}{d\gamma} + u_4 . \frac{dx'}{d\alpha'} + u_5 . \frac{dx'}{d\beta'} + u_6 . \frac{dx'}{d\gamma'} \\
\frac{d\eta}{dt} &= u_1 \frac{dy'}{d\alpha} + u_2 . \frac{dy'}{d\beta} + u_3 . \frac{dy'}{d\gamma} + u_4 . \frac{dy'}{d\alpha'} + u_5 . \frac{dy'}{d\beta'} + u_6 . \frac{dy'}{d\gamma'} \\
\frac{d\zeta}{dt} &= u_1 \frac{dz'}{d\alpha} + u_2 . \frac{dz'}{d\beta} + u_3 . \frac{dz'}{d\gamma} + u_4 . \frac{dz'}{d\alpha'} + u_5 . \frac{dz'}{d\beta'} + u_6 . \frac{dz'}{d\gamma'}
\end{aligned}\right\} II.\,a)$$

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \xi_0, & u_2 &= \eta_0, & u_3 &= \zeta_0 \\
u_4 &= \xi'_0, & u_5 &= \eta'_0, & u_6 &= \zeta'_0
\end{aligned}\right\} \quad ''$$

Beweis.

Stellt c einen der 6 Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'\ \beta'\ \gamma'$ vor und differentiirt man die Gleichung I) nach c, so geht aus den resultirenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dx}{dc}\right) &= \frac{d^2 U}{dx^2}\left(\frac{dx}{dc}\right) + \frac{d^2 U}{dxdy}\left(\frac{dy}{dc}\right) + \frac{d^2 U}{dxdz}\left(\frac{dz}{dc}\right) \\
\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dy}{dc}\right) &= \frac{d^2 U}{dydx}\left(\frac{dx}{dc}\right) + \frac{d^2 U}{dy^2}\left(\frac{dy}{dc}\right) + \frac{d^2 U}{dydz}\left(\frac{dz}{dc}\right) \\
\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dz}{dc}\right) &= \frac{d^2 U}{dzdx}\left(\frac{dx}{dc}\right) + \frac{d^2 U}{dzdy}\left(\frac{dy}{dc}\right) + \frac{d^2 U}{dz^2}\left(\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}\right\} \ldots \alpha)$$

Sogleich hervor, dass die Gleichungen:

$$\xi = \frac{dx}{dc}, \; \eta = \frac{dy}{dc}, \; \zeta = \frac{dz}{dc}$$

für $c = \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sechs verschiedene partikuläre Lösungen der Gleichungen II) sind. Die allgemeine Lösung ist daher durch das Gleichungssystem IIa) gegeben, in welchem sich die willkührlichen Constanten $u_1, u_2, n_3, u_4, u_5, u_6$ durch Einsetzung des Spezialwerthes der Zeit: $t = \tau$, sowie im obigen Theorem angegeben wurde, herausstellen.

II. Theorem.

Ist die Bewegung des Punktes (x, y, z) in derselben Weise wie in dem I. Theoreme gegeben, so ist auch die Bewegung eines zweiten Punktes (ξ, η, ζ), welche nicht mehr durch die Gleichungen II) sondern durch die allgemeineren Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= X + \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\xi + \frac{d^2U}{dxdy}\cdot\eta + \frac{d^2U}{dxdz}\cdot\zeta \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y + \frac{d^2U}{dydx}\cdot\xi + \frac{d^2U}{dy^2}\cdot\eta + \frac{d^2U}{dydz}\cdot\zeta \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z + \frac{d^2U}{dzdx}\cdot\xi + \frac{d^2U}{dzdy}\cdot\eta + \frac{d^2U}{dz^2}\cdot\zeta
\end{aligned}\right\} III.$$

und die Werthe: $\xi = \xi_0, \; \eta = \eta_0, \; \zeta = \zeta_0; \; \frac{d\xi}{dt} = \xi_0', \; \frac{d\eta}{dt} = \eta_0', \frac{d\zeta}{dt} = \zeta_0'$, welche die Coordinaten ξ, η, ζ und Geschwindigkeits-Komponenten $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ zur Zeit $t = \tau$ annehmen, fixirt wird, vollständig bestimmt, wenn die Grössen X, Y, Z als Funktionen der Zeit t gegeben sind.

Die Integralgleichungen dieser Bewegung lassen sich nämlich mit Hilfe der bekannten Integralgleichungen der ersteren Bewegung einfach in folgender Weise darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= u_1.\frac{dx}{d\alpha} + u_2.\frac{dx}{d\beta} + u_3.\frac{dx}{d\gamma} + u_4.\frac{dx}{d\alpha'} + u_5.\frac{dx}{d\beta'} + u_6.\frac{dx}{d\gamma'} \\
\eta &= u_1.\frac{dy}{d\alpha} + u_2.\frac{dy}{d\beta} + u_3.\frac{dy}{d\gamma} + u_4.\frac{dy}{d\alpha'} + u_5.\frac{dy}{d\beta'} + u_6.\frac{dy}{d\gamma'} \\
\zeta &= u_1.\frac{dz}{d\alpha} + u_2.\frac{dz}{d\beta} + u_3.\frac{dz}{d\gamma} + u_4.\frac{dz}{d\alpha'} + u_5.\frac{dz}{d\beta'} + u_6.\frac{dz}{d\gamma'} \\
\frac{d\xi}{dt} &= u_1.\frac{dx'}{d\alpha} + u_2.\frac{dx'}{d\beta} + u_3.\frac{dx'}{d\gamma} + u_4.\frac{dx'}{d\alpha'} + u_5.\frac{dx'}{d\beta'} + u_6.\frac{dx'}{d\gamma'} \\
\frac{d\eta}{dt} &= u_1.\frac{dy'}{d\alpha} + u_2.\frac{dy'}{d\beta} + u_3.\frac{dy'}{d\gamma} + u_4.\frac{dy'}{d\alpha'} + u_5.\frac{dy'}{d\beta'} + u_6.\frac{dy'}{d\gamma'} \\
\frac{d\zeta}{dt} &= u_1.\frac{dz'}{d\alpha} + u_2.\frac{dz'}{d\beta} + u_3.\frac{dz'}{d\gamma} + u_4.\frac{dz'}{d\alpha'} + u_5.\frac{dz'}{d\beta'} + u_6.\frac{dz'}{d\gamma'}
\end{aligned}\right\} III.\ a)$$

wenn man unter $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ nicht mehr wie im ersten Theoreme Constanten sondern die Zeitfunktionen:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \xi_0 + \int_{t=\tau}^{t=t} \left[X.\frac{d\alpha}{dx'} + Y.\frac{d\alpha}{dy'} + Z.\frac{d\alpha}{dz'}\right] dt \\
u_2 &= \eta_0 + \int_{t=\tau}^{t=t} \left[X.\frac{d\beta}{dx'} + Y.\frac{d\beta}{dy'} + Z.\frac{d\beta}{dz'}\right] dt \\
u_3 &= \zeta_0 + \int_{t=\tau}^{t=t} \left[X.\frac{d\gamma}{dx'} + Y.\frac{d\gamma}{dy'} + Z.\frac{d\gamma}{dz'}\right] dt \\
u_4 &= \xi'_0 + \int_{t=\tau}^{t=t} \left[X.\frac{d\alpha'}{dx'} + Y.\frac{d\alpha'}{dy'} + Z.\frac{d\alpha'}{dz'}\right] dt \\
u_5 &= \eta'_0 + \int_{t=\tau}^{t=t} \left[X.\frac{d\beta'}{dx'} + Y.\frac{d\beta'}{dy'} + Z.\frac{d\beta'}{dz'}\right] dt \\
u_6 &= \zeta'_0 + \int_{t=\tau}^{t=t} \left[X.\frac{d\gamma'}{dx'} + Y.\frac{d\gamma'}{dy'} + Z.\frac{d\gamma'}{dz'}\right] dt
\end{aligned}\right\}$$

versteht.

Beweis.

Man nehme die Integralgleichungen in der nämlichem Form an wie im obigen Theoreme [siehe IIa)] mit dem Unterschiede, dass die Grössen u nunmehr nicht Constante, sondern noch zu ermittelnde Funktionen der Zeit t sind; substituire sie in die vorgelegten Differentialgleichungen III) und setze unter einem, da zur Bestimmung der 6 unbekannten Funktionen $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ausser den drei gegebenen Gleichungen III noch drei weitere erforderlich sind, über welche man frei verfügen kann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{d\alpha}.\frac{du_1}{dt} + \frac{dx}{d\beta}.\frac{du_2}{dt} + \frac{dx}{d\gamma}.\frac{du_3}{dt} + \frac{dx}{d\alpha'}.\frac{du_4}{dt} + \frac{dx}{d\beta'}.\frac{du_5}{dt} + \frac{dx}{d\gamma'}.\frac{du_6}{dt} &= 0 \\
\frac{dy}{d\alpha}.\frac{du_1}{dt} + \frac{dy}{d\beta}.\frac{du_2}{dt} + \frac{dy}{d\gamma}.\frac{du_3}{dt} + \frac{dy}{d\alpha'}.\frac{du_4}{dt} + \frac{dy}{d\beta'}.\frac{du_5}{dt} + \frac{dy}{d\gamma'}.\frac{du_6}{dt} &= 0 \\
\frac{dz}{d\alpha}.\frac{du_1}{dt} + \frac{dz}{d\beta}.\frac{du_2}{dt} + \frac{dz}{d\gamma}.\frac{du_3}{dt} + \frac{dz}{d\alpha'}.\frac{du_4}{dt} + \frac{dz}{d\beta'}.\frac{du_5}{dt} + \frac{dz}{d\gamma'}.\frac{du_6}{dt} &= 0
\end{aligned}\right\} 1)$$

Hiedurch gehen die vorgelegten Differentialgleichungen [unter Berücksichtigung der Relationen α)] in die drei einfachen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx'}{d\alpha}\cdot\frac{du_1}{dt}+\frac{dx'}{d\beta}\cdot\frac{du_2}{dt}+\frac{dx'}{d\gamma}\cdot\frac{du_3}{dt}+\frac{dx'}{d\alpha'}\cdot\frac{du_4}{dt}+\frac{dx'}{d\beta'}\cdot\frac{du_5}{dt}+\frac{dx'}{d\gamma'}\cdot\frac{du_6}{dt}&=X\\
\frac{dy'}{d\alpha}\cdot\frac{du_1}{dt}+\frac{dy'}{d\beta}\cdot\frac{du_2}{dt}+\frac{dy'}{d\gamma}\cdot\frac{du_3}{dt}+\frac{dy'}{d\alpha'}\cdot\frac{du_4}{dt}+\frac{dy'}{d\beta'}\cdot\frac{du_5}{dt}+\frac{dy'}{d\gamma'}\cdot\frac{du_6}{dt}&=Y\\
\frac{dz'}{d\alpha}\cdot\frac{du_1}{dt}+\frac{dz'}{d\beta}\cdot\frac{du_2}{dt}+\frac{dz'}{d\gamma'}\cdot\frac{du_3}{dt}+\frac{dz'}{d\alpha'}\cdot\frac{du_4}{dt}+\frac{dz'}{d\beta'}\cdot\frac{du_5}{dt}+\frac{dz'}{d\gamma'}\cdot\frac{du_6}{dt}&=Z
\end{aligned}\right\}2)$$

über, welche mit den drei obigen: 1) zur Bestimmung der sechs Funktionen u dienen.

Setzt man einstweilen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt}=u_1',\quad \frac{du_2}{dt}=u_2',\quad \frac{du_3}{dt}=u_3',\\
\frac{du_4}{dt}=u_4',\quad \frac{du_5}{dt}=u_5',\quad \frac{du_6}{dt}=u_6'
\end{aligned}\right\}3)$$

so erhält man durch Auflösung der sechs Gleichungen 1), 2) die u' in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
u_1'&=L_1.\ X+M_1.\ Y+N_1.\ Z\\
u_2'&=L_2.\ X+M_2.\ Y+N_2.\ Z\\
u_3'&=L_3.\ X+M_3.\ Y+N_3.\ Z\\
u_4'&=L_4.\ X+M_4.\ Y+N_4.\ Z\\
u_5'&=L_5.\ X+M_5.\ Y+N_5.\ Z\\
u_6'&=L_6.\ X+M_6.\ Y+N_6.\ Z
\end{aligned}\right\}4)$$

worin die L, M, N von X, Y, Z unabhängig sind und nur von den partiellen Differentialquotienten der x, y, z nach den Parametern α, β, γ, α', β', γ', abhängen.

Die Werthe der L, M, N ergeben sich sehr einfach wie folgt.

Man denke sich jeden der 6 Parameter α, β, γ, α', β', γ' mit Hilfe der ursprünglichen Integralgleichungen von I), welche die x, y, z, x', y', z' als Funktionen der Parameter und der Zwischenzeit $t-\tau$ darstellen, in Funktion der x, y, z, x', y', z', und der Zwischenzeit $t-\tau$ ausgedrückt; und variire ohne τ, t, x, y, z, zu ändern blos die Geschwindigkeitskomponenten: $x',$ $y',$ z' um beliebige von einander unabhängige unendlich kleine Grössen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Es wird so:

$$\left.\begin{aligned}
\delta\alpha&=\frac{d\alpha}{dx'}.\ \delta x'+\frac{d\alpha}{dy'}.\ \delta y'+\frac{d\alpha}{dz'}.\ \delta z'\\
\delta\beta&=\frac{d\beta}{dx'}.\ \delta x'+\frac{d\beta}{dy'}.\ \delta y'+\frac{d\beta}{dz'}.\ \delta z'\\
\delta\gamma&=\frac{d\gamma}{dx'}.\ \delta x'+\frac{d\gamma}{dy'}.\ \delta y'+\frac{d\gamma}{dz'}.\ \delta z'\\
\delta\alpha'&=\frac{d\alpha'}{dx'}.\ \delta x'+\frac{d\alpha'}{dy'}.\ \delta y'+\frac{d\alpha'}{dz'}.\ \delta z'\\
\delta\beta'&=\frac{d\beta'}{dx'}.\ \delta x'+\frac{d\beta'}{dy'}.\ \delta y'+\frac{d\beta'}{dz'}.\ \delta z'\\
\delta\gamma'&=\frac{d\gamma'}{dx'}.\ \delta x'+\frac{d\gamma'}{dy'}.\ \delta y'+\frac{d\gamma'}{dz'}.\ \delta z'
\end{aligned}\right\}5)$$

Variirt man nun auf dieselbe Weise die ursprünglichen Integralgleichngen von I), indem man die Grössen:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha,'\ \beta,'\ \gamma,'x,\ y,\ z,\ x,'\ y,'\ z'$$

beziehungsweise um die obigen Variationen

$\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$; $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$; $\delta x = o$, $\delta y = o$ $\delta z = 0$; $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ ändert: so erhält man zunächst:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dx}{d\alpha}.\,\delta\alpha + \frac{dx}{d\beta}.\,\delta\beta + \frac{dx}{d\gamma}.\,\delta\gamma + \frac{dx}{d\alpha'}.\,\delta\alpha' + \frac{dx}{d\beta'}.\,\delta\beta' + \frac{dx}{d\gamma'}\,\delta\gamma' = \delta x = o \\
\frac{dy}{d\alpha}.\,\delta\alpha + \frac{dy}{d\beta}.\,\delta\beta + \frac{dy}{d\gamma}.\,\delta\gamma + \frac{dy}{d\alpha'}.\,\delta\alpha' + \frac{dy}{d\beta'}.\,\delta\beta' + \frac{dy}{d\gamma'}\,\delta\gamma' = \delta y = o \\
\frac{dz}{d\alpha}.\,\delta\alpha + \frac{dz}{d\beta}.\,\delta\beta + \frac{dz}{d\gamma}.\,\delta\gamma + \frac{dz}{d\alpha'}.\,\delta\alpha' + \frac{dz}{d\beta'}.\,\delta\beta' + \frac{dz}{d\gamma'}\,\delta\gamma' = \delta z = o \\
\frac{dx'}{d\alpha}.\,\delta\alpha + \frac{dx'}{d\beta}.\,\delta\beta + \frac{dx'}{d\gamma}.\,\delta\gamma + \frac{dx'}{d\alpha'}.\,\delta\alpha' + \frac{dx'}{d\beta'}.\,\delta\beta' + \frac{dx'}{d\gamma'}\,\delta\gamma' = \delta x' \\
\frac{dy'}{d\alpha}.\,\delta\alpha + \frac{dy'}{d\beta}.\,\delta\beta + \frac{dy'}{d\gamma}.\,\delta\gamma + \frac{dy'}{d\alpha'}.\,\delta\alpha' + \frac{dy'}{d\beta'}.\,\delta\beta' + \frac{dy'}{d\gamma'}\,\delta\gamma' = \delta y' \\
\frac{dz'}{d\alpha}.\,\delta\alpha + \frac{dz'}{d\beta}.\,\delta\beta + \frac{dz'}{d\gamma}.\,\delta\gamma + \frac{dz'}{d\alpha'}.\,\delta\alpha' + \frac{dz'}{d\beta'}.\,\delta\beta' + \frac{dz'}{d\gamma'}\,\delta\gamma' = \delta z'
\end{array}\right\} 6)$$

Vergleicht man diese Relationen mit den 6 Gleichungen 1) und 2), so übersieht man leicht, dass sie nach $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$, aufgelöst, die nachstehenden mit den Gleichungen 4) konformen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
\delta\alpha = L_1.\,\delta x' + M_1.\,\delta y' + N_1.\,\delta z' \\
\delta\beta = L_2.\,\delta x' + M_2.\,\delta y' + N_2.\,\delta z' \\
\delta\gamma = L_3.\,\delta x' + M_3.\,\delta y' + N_3.\,\delta z' \\
\delta\alpha' = L_4.\,\delta x' + M_4.\,\delta y' + N_4.\,\delta z' \\
\delta\beta' = L_5.\,\delta x' + M_5.\,\delta y' + N_5.\,\delta z' \\
\delta\gamma' = L_6.\,\delta x' + M_6.\,\delta y' + N_6.\,\delta z'
\end{array}\right\} 7)$$

liefern müssen. Da nun diese neben den homologen Gleichungen 5) für beliebige von einander unabhängige unendlich kleine $\delta x'$ $\delta y'$, $\delta z'$, gleichzeitig gelten müssen, so ergeben sich augenblicklich für die L, M, N die gesuchten Werthe:

$$\left.\begin{array}{l}
L_1 = \frac{d\alpha}{dx'};\ M_1 = \frac{d\alpha}{dy'};\ N_1 = \frac{d\alpha}{dz'} \\
L_2 = \frac{d\beta}{dx'};\ M_2 = \frac{d\beta}{dy'};\ N_2 = \frac{d\beta}{dz'} \\
L_3 = \frac{d\gamma}{dx'};\ M_3 = \frac{d\gamma}{dy'};\ N_3 = \frac{d\gamma}{dz'} \\
L_4 = \frac{d\alpha'}{dx'};\ M_4 = \frac{d\alpha'}{dy'};\ N_4 = \frac{d\alpha'}{dz'} \\
L_5 = \frac{d\beta'}{dx'};\ M_5 = \frac{d\beta'}{dy'};\ N_5 = \frac{d\beta'}{dz'} \\
L_6 = \frac{d\gamma'}{dx'};\ M_6 = \frac{d\gamma'}{dy'};\ N_6 = \frac{d\gamma'}{dz'}
\end{array}\right\} 8)$$

Unser Theorem folgt aus dem so eben Gesagten fast von selbst. Man braucht eben nur die gefundenen Werthe der L, M, N in die Gleichungen 4), die sich hieraus ergebenden Werthe der u' in 3) zu substituiren und letztere Relationen nach t zwischen $t = \tau$ und $t = t$ zu integriren.

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 24. Mai 1869.

Anwesend die Herren Mitglieder Hattala, Tomek, Wocel, Zoubek, Emler, Zikmund, Zap, Beneš, Komárek; als Gast Herr Pažout.

Herr Komárek las aus seinen Studien über Horaz eine von ihm nach den Quellen selbständig ausgearbeitete Biografie dieses Classikers.

Hierauf hielt Herr Prof. Tomek den nachfolgenden Vortrag über die in dem böhmischen Texte der Historia Trojana Quidonis vorkommenden Benennungen von Gewerben:

Znatelům staré literatury české jest powědomo zajímawé místo w Historii Trojanské w knihách pátých kapitule třetí (wiz Wýbor z literatury české II 90), kdež wyčítají se řemesla rozmanitá po ulicích města Troje rozdělená. Jest jich wšech 143. W latinském textu Quidona de Columna sepsaném roku 1287, který českému překladu učiněnému r. 1411 sloužil za základ, nachází se počet řemesel mnohem menší, wšeho wšudy totiž jen 40. Zníť místo, jehož se týče, v textu latinském takto:

Per plateas enim ipsas mechanicarum artium locatæ fuerant propriæ stationes, in quibus earum operarii, per certa loca distincti, quotidianis operibus et venalibus artificiis insudabant. Hic enim architecti manebant, hic pictores, hic statuarii, hic marmorarii, hic lecticarii manebant, hic canicularii, hic quadrigarii, hic ligarii, hic mularii, hic deauratores albini, qui statuas et imagines in auro pingebant. Hic argentarii, hic decrearii, hic calices conficiebant ex vitro, hic ærarii, hic fusores, qui campanas ex metallo fundunt. Hic dignarii, qui sigilla formabant, hic sertores, qui camisias suebant et braccas. Hic fusarii, qui ferro incude fusos extenuant muliebres, hic perticarii, hic libratores, hic figuli, hic aurifices, hic plumbarii, hic specularii, hic pelliparii, hic fullones, hic carpentarii, hic tingnarii, qui vehicula scilicet rotis volubilibus sociabant. Hic dealbatores armorum, hic balthearii seu penthalargæ, qui opus deaurati æris in frenis apponunt. Hic classicularii, hic fabricenses, hic gineciarii, qui textores appellantur, hic geometri, qui jugera rusticorum terrarum numero dividebant, hic pistores, hic tabernarii, hic cetarii, hic arillatores, quos mercatores vulgariter appellamus, hic argiropatæ, id est distractores argenti, hic et alii plures, qui venales artes mechanicas exercebant.

W českém překladu čteme na místě toho, jak následuje:

„A po těch ulicech udělána biechu bydla a stawadla wšelikterakým řemeslníkóm: ondeť bydléchu kamenníci, onde zedníci, onde obrazníci, onde maléři, onde mramorníci, onde truhláři, onde stolaři, onde ložináři, onde wozníci, onde koláři, onde tesaři, onde lopatníci, onde neckáři, onde okřináři, onde twořidlníci, onde zámečníci, onde wochláři, onde hřebenáři, onde zlatníci, onde konwáři, onde flašnéři, onde zlatotepci, onde zlatoměnci, onde zwonaři, onde kotláři, onde renlíkáři, onde šípaři, onde swiecnáři, onde platnéři, onde přielbičníci, onde pancieřníci neb brnieři, onde ostrožníci, onde kowáři, onde šínaři, onde sekerníci, onde mečieři, onde nožieři, onde šídlaři, onde jehláři, onde hrotníci, onde pukláři, onde kotewníci, onde swiečníci, onde kolebečníci, onde češieři, onde mísaři, onde metláři, onde widláři, onde struhaři, onde prknáři, onde plotnáři, onde kúdelníci, onde prowazníci, onde newodáři, onde síťaři, onde řešetáři, onde bubenníci, onde tenetáři, onde sítaři, onde budnáři, onde pluhaři, onde ratištníci, onde lawičníci, onde bečwáři, onde lžícaři, onde korytníci, onde húžwaři, onde súkenníci, onde hedwábníci, onde zlatohlawníci, onde plátenníci, onde barewníci, onde walcháři, onde krajčieři, onde kabátníci, onde hacníci, onde koželuzi, onde šewci, onde kožišníci, onde řemenníci, onde prtáci, onde tobolečníci, onde měšečníci, onde polštářníci, onde tlumočníci, onde pasieři, onde uzdáři, onde púzdrníci, onde střmenáři, onde pochwáři onde pokladníci, onde sedláři, onde mědnáři, onde kuchenníci, onde pekaři, onde winaři, onde mlynáři, onde koblúčníci, onde čepičníci, onde tkaničníci, onde nitníci, onde dratewníci, onde hrnčieři, onde lútečníci, onde pernikáři, onde šachowníci, onde kostkáři, onde krčemníci, onde wrhcemníci (wrhcábníci), onde stawníci, onde přesličníci, onde wřetenáři, onde wěnečníci, onde pokrywači, onde trubači, onde píštělníci, onde pištci, onde husléři, onde hudci, onde strunaři, onde warhanáři, onde warhanníci, onde herci, onde kaykléři, onde apatekáři, onde lékaři, onde kořenáři, onde ranlékové, onde holiči, onde lazebníci, onde břitwáři, onde kosatníci, onde srpníci, onde ženci, onde lodnáři, onde kléwaři, onde sádlníci, onde kolomastníci, onde smolaři, onde kletnáři, onde kotečníci, onde posadníci.“

Srovnáme-li tento český text s latinským, shledáme, že skladatel jeho z počátku měl úmysl, překládati z jedné řeči do druhé. Položil totiž za architecti kamenníky a zedníky, pictores, statuarii obrazníky, maléře, marmorarii mramorníky, potom wšinuv truhláře a stolaře, přeložil lecticarii ložináři, canicularii, quadrigarii wozníci, koláři, opět po wstrčení tesařů ligarii lopatníci. Dále wšak toho přestal, uhodiw, jak snadno se přeswědčiti, na těžkosti při názwích řemesel mnohých w Čechách neobyčejných; mnohé docela pominul, jiné uwedl w jiném pořádku; za to přidal ze swé wlastní známosti, tak že jeho popis řemesel wypadl wíce než třikrát tak hojný jak prwotního skladatele latinského.

Český překladatel historie Trojanské širším tímto popisem řemesel owšem neobohatil známosti naší o řemeslích we staré Troji prowozowaných, ale důležitého příspěwku poskytl nám ke známosti řemesel, která se prowozowala co zwláštní žiwnosti w naší wlasti a jmenowitě w Praze za jeho wěku, totiž ku konci 14. a na začátku 15. století.

Zanášeje se s rozdělením řemesel a jiných žiwností městských w Praze w témž wěku při spisowání dějin Pražských, zhotowil jsem i já sobě před nedáwnem popis řemeslníků tehdejších wšelikého druhu, weskrz jen ze zřídel sauwěkých, z něhož jsem se přeswědčil, že byla řemesla w Praze skutečně rozdělena welmi do podrobna, tak jak se jewí w historii Trojanské, jistě ku podiwení každého saudného čtenáře.

K dolíčení toho postawím zde názwy řemesel uwedené tuto z českého textu historie Trojanské, které jsem i já nalezl w sauwěkých pramenech Pražských, s přidáním k tomu tehdejších názwů latinských a německých, pokudž se naskytují. Připomínají se totiž:

1. kamenníci (lapicidæ, steinmetze),
2. zedníci (muratores, maurer),
3. malíři (pictores, maler),
4. truhláři,
5. stolaři (mensatores, mensifices, tischer),
6. místo ložinářů postelníci,
7. koláři čili náprawníci (rotifices, currifices, wagner),
8. tesaři (carpentarii),
9. lopatníci,
10. neckáři čili nádobníci,
11. zámečníci (seratores, serifices, slosser),
12. hřebenáři (pectinifices, pectinatores, kemmer),
13. zlatníci (aurifabri, goldner, goldsmide),

14. konwáři (canulatores, kannelgiesser),
15. flašnéři (flassnerii),
16. zlatotepci (auripercussores, goldslaher),
17. místo zlatoměnců, rozumíme-li dobře, zlatoleji (aurifusores),
18. zwonaři,
19. kotláři (caldariatores, kesseler, kesselmacher, rotsmide),
20. šípaři (fabri telorum),
21. platnéři (thorifices, platner),
22. místo přílbičníků helméři (galeatores, helmer),
23. brníři (loricatores),
24. ostrožníci (calcariatores, calcarifices, sporer),
25. kowáři (fabri, smide),
26. mečíři (gladiatores, swertfeger),
27. nožíři (cultellatores, cultellifices, messerer, klingensmide),
28. jehláři čili jehelníci (acufices, nadler),
29. pukláři čili štítaři neb i pawezníci (clypearii, puchler),
30. swíčníci (candelatores),
31. kolebečníci (cunabulatores, wigenmacher),
32. češieři (picariatores, pechrer),
33. misaři (scutellatores, schüssler),
34. struhaři, nyní saustružníci (tornatores, drechsler),
35. prknáři též pod názwem struhařů (sarratores, bretsäger),
36. kaudelníci (stupam vendentes),
37. prowazníci (funifices),
38. síťaři (qui parant retia),
39. řešetáři (cribrofices),
40. lawičníci pod latinským názwem stalla parantes,
41. bečwáři (doliatores, pinter),
42. lžícaři čili lžičníci,
43. súkenníci (pannifices, tucher, tuchmacher),
44. hedwábníci, jinak krumpéři (fibulatores, sidenarii, seidenneter),
45. plátenníci (linicidæ),
46. barewníci čili barwíři (coloratores, ferber),
47. walcháři (fullones, walker),
48. krajčíři (sartores, sneider),
49. kabátníci (joppatores, joppulatores, jopner),
50. hacníci pod latinským názwem caligatores (hosler, hosenmacher),
51. koželuzi (lederer), s širším wýznamem smradaři (cerdones, gerber),
52. šewci (sutores, schuster),

53. kožišníci (pellifices, körsner),
54. řemenníci čili řemenáři (corrigiatores, rimer),
55. prtáci (sutatores, renovatores sotularium),
56. tobolečníci (peratores, taschner),
57. měšečníci (bursifices, peutler),
58. polštářníci (pulvinatores),
59. pasíři (cingulatores, gurtler),
60. uzdáři (frenifices, lorifices, czaumstricker),
61. púzdrníci,
62. sedláři (sellatores),
63. mědnáři (ærispercussores, cuprifabri, messinkslaher, messinkcziher, kuppersmide),
64. kuchenníci čili kuchaři (coqui),
65. pekaři (pistores, peker),
66. winaři (vinitores) to jest délníci na winnicích,
67. mlynáři (molendinatores, mülner),
68. klobúčníci čili koblúčníci (pileatores, huter),
69. čepičníci (mitratores, mitrifices),
70. tkaničníci čili šnoraři (prætextarii, schnorer, pantler),
71. nitníci (czwirner),
72. hrnčíři (figuli, ollifices, topfer),
73. pernikáři čili pernáři (pernarii, lebothecarii, lebkuchler, zeltner)
74. kostkáři (taxillatores),
75. krčmáři (tabernatores),
76. wěnečníci (crinalistæ, krenczelmacher,
77. pokrywači (tectores, zigeldecker),
78. trubači (tubicinæ),
79. pištci (fistulatores),
80. hudci,
81. strunaři (cordifices, cordipari),
82. warhanníci (organistae),
83. kaykléři (joculatores),
84. apotekáři (apothecarii),
85. lékaři (medici, physici),
86. ranlékowé (chirologi),
87. holiči (barbitonsores, barbirasores, barbirer),
88. lazebníci (balneatores, lixæ, pader),
89. břitwáři (rasicultellifices),
90. srpníci (falcifices, sichelhauer),
91. ženci (messores, falcatores),
92. smolaři (picatores, picifices).

Z ostatních řemesel českého textu historie Trojanské jsau některá, jichž w Praze nebo w Čechách nebylo, jichžto názwy skladatel toliko přeložil z latiny do češtiny. Za takowé mám jeho obrazníky (statuarii), mramorníky (marmorarii), wozníky (quadrigarii), kteřížto tuším pleonasticky položeni jsau wedlé kolářů, a zlatohlawníky (gineciarii). Odpočítáme-li tyto čtyry, zbude předce ještě následujících 47 názwů řemesel neb zaměstnání domácích, kterých známost čerpáme jediné z českého tohoto textu historie Trojanské, ježto w jiných pamětech 14. století a ze začátku 15. století (zejména do roku 1419) se nenacházejí, totiž:

93. okřináři,	116. střmenáři,
94. twořidlníci,	117. pochwáři,
95. wochláři,	118. pokladníci,
96. renlíkáři,	119. dratewníci,
97. swiecnáři,	120. lútečníci,
98. šínaři,	121. šachowníci,
99. sekerníci,	122. wrchcábníci,
100. šídlaři,	123. stawníci,
101. hrotníci,	124. přesličníci,
102. kotewníci,	125. wřetenáři,
103. metláři,	126. trubaři,
104. widláři,	127. píštělníci,
105. plotnáři,	128. húsléři,
106. newodáři,	129. warhanáři,
107. bubenníci,	130. herci,
108. tenetáři,	131. kořenáři,
109. sietaři,	132. kosatníci,
110. budnáři,	133. lodnáři,
111. pluhaři,	134. kléwaři,
112. ratištníci,	135. sádlníci,
113. korytníci,	136. kolomastníci,
114. húžwáři,	137. kletnáři,
115. tlumočníci,	138. kotečníci,

139. posadníci.

Jsau to skoro weskrz řemesla zanášející se zhotowowáním jednotliwých druhů zboží, které nyní nečiní jednoho řemesla samotny o sobě, nýbrž obyčejně spolu s jinými; ale práwě proto jest wyčtení jich u starého spisowatele zajímawé, že swědčí, jak welké bylo rozdělení práce do podrobna mezi rozličná řemesla. Pilnost, kterau spisowatel obrátil, ač jen jako mimochodem, na sestawení popisu řemesel swého času we wlasti naší, wzbuzuje při tom skutečně podiwení. Nicméně jest tento popis wždy ještě neúplný. Schází w něm ještě mnoho jiných takowýchto podrobných řemesel, na která tehdejší průmysl byl rozdělen, ano i mnohá řemesla hlawnější jsau mlčením pominuta, která se w jiných sauwěkých pamětech připomínají. Uwedeme jen takowé názwy, které se wztahují k žiwnostem průmyslowým, krom několika zaměstnání ostatně hospodářských, wšak w Praze prowozowaných, kterých by byl překladatel historie Trojanské měl též jmenowati, když jmenowal winaře (totiž dělníky na winnicích) ano i žence. Naproti tomu pomineme wšechněch žiwností náležejících do oboru obchodu, též wšech zaměstnání pouze služebných neb nádennických, kterých by se také dal uwésti znamenitý počet. Připomínají se totiž mimo swrchu položené také:

140. mazanečníci,
141. kobližníci (krappenbacher),
142. krupníci (pultifices, kraupner),
143. krupičníci,
144. zahradníci (ortulani, gartner),
145. zelníci (caulistæ, krauter),
146. cibulníci,
147. řezníci (carnifices, fleischhacker),
148. huntýři,
149. drobníci,
150. rybáři (piscatores, fischer),
151. sumečníci,
152. sládci čili sladowníci (braseatores, melzer),
153. piwowárníci (braxatores cerevisiæ),
154. šrotéři (vasatores, schroter),
155. koštéři wína (gustatores vini, weinkoster),
156. medníci (metsider),
157. šenkowé (pincernæ),
158. šataři,
159. wetešníci, (renovatores, fullones, mentler).
160. kytléři,
161. hotowitelé dřewěných střewíců (calopedifices),
162. biretníci (biretarii),
163. šlojířníci (peplatores),
164. rukawičníci (chirothecarii, hantschuster),
165. wačkáři,
166. stuhaři (ligas parantes, hosennestler),
167. přeskáři (feruncatores, rinkler),

168. peřinečníci (culcitratores),
169. ornátníci (ornatistæ),
170. wlnaři, wlnáci (lanifices),
171. krampléři,
172. raiféři (rayferz pannorum),
173. postřihači (pannitonsores, pannirasores, scherer),
174. tkadlci (textores, linifices, leinwater),
175. přádlí (telistæ?),
176. barchanníci (barchanistæ, barchaner),
177. popružníci,
178. jircháři čili bělokožci (albicerdones),
179. štumfaři,
180. třísloníci,
181. stoličníci (qui sedes laborant, stuler),
182. trubáci (kteří dělaly trauby k wedení wody a t. p.),
183. řebříkáři (qui scalas parant),
184. košíři (sportifices),
185. uhlíři (carbonistæ, koler),
186. hlináci (argillatores),
187. lojowníci (sebatores, unslichter),
188. mydláři (saponistæ, smigmatores, seifer),
189. woštníci (ceræfusores, wachsgisser),
190. olejníci (oleatores),
191. štětkáři (setifices, setatores, purstenpinter),
192. rohožníci,
193. koltráři (goltermacher),
194. oháněčníci (flabellatores),
195. jehelničkáři (nadelfasser),
196. páterníci (paternatores, qui præparant paternoster),
197. wážníci (wagmacher),
198. knihaři (ligatores librorum),
199. pergamenníci (pergamenistæ, membranatores),
200. kalamářníci (calamariatores),
201. inkaustníci (tintner),
202. stříbrníci (argentifusores, silberprener),
203. cínaři (stannifusores, czingisser),
204. zwonečníci (nolas laborantes, schellenmacher),
205. hodináři (horologistæ),
206. pilaři (limatores, sarratores),
207. nebozézníci,

208. čepelníci (lamellatores, plechsmide),
209. drátníci (dratcziher),
210. hřebičníci (claviculatores, nagler),
211. nožikáři (forpifices, scherschmide),
212. brusiči (qui cutellos acuunt, sleifer),
213. puléři (pollitores lapidum, polirer),
214. sklenáři (vitriatores, glaser),
215. zrcadlníci (speculifices, spigler),
216. šmelcníci (smelczmacher),
217. hotowitelé železných rukawic (qui præparant chirothecas ferreas),
218. lukaři (arcufices, pogner),
219. střelci (balistatores),
220. pračníci,
221. taulaři (pharetratores),
222. puškáři (pixidarii, bombardistæ, buchsenmeister),
223. tunchéři (tüncher) t. j. obmítači zdí,
224. škřidláři (architectores, syferdecker),
225. dlažiči (beleger),
226. rybníkáři,
227. studnáři (qui fontes parant),
228. wápenníci (cementarii),
229. cihláři (lateristæ, czigler),
230. skalníci (fractores lapidum, latomi),
231. illuminatoři (illuminatores),
232. malíři do kamene (pictores lapidis),
233. řezáci čili rytci (sculptores),
234. lautníci (lautnistæ),
235. mistři taneční (tanczmagistri, tanczmeister).

Poněwadž nám český překlad historie Trojanské, jak ukázáno, poskytuje znamenitého příspěwku k známosti průmyslu w naší wlasti w jisté době, jest otázka důležitá, z kterého času pochází popis řemesel w něm obsažený. Překlad latinského textu Quidona z Columny do českého jazyka byl učiněn roku 1411. z rozkazu pana Petra Zmrzlíka ze Swojšina, nejwyššího mincmistra králowstwí českého. Rukopis wšak z toho roku, chowaný nyní w českém museu, jest pauhý zlomek w němž ona část díla, do které popis řemesel připadá, není obsažena. Newíme tedy s plnou jistotau, zdali již prwní překladatel roku 1411. zhotowil ten popis. Není wšak také příčiny hrubě o tom pochybowati. Neb již w nejstarších dwau známých rukopisích auplnějších nachází se celý ten popis, totiž we Strahowském psaném w létech 1436 až

1437, a w Lobkowickém dokonaném roku 1422, a to w obau již s některými chybami přepisowačů a jinými varianty, které ukazují, že oba dwa byly udělány dle rukopisu staršího, we kterém popis řemesel také již musil býti obsažen. Tak stojí we Strahowském chybně kožináři místo ložináři, ohlaři místo wochlaři, twořidlníci dwakrát na rozličných místech, krajčenci místo krajčieři, cepníci místo čepičníci, zlatoměnci, bubenníci, bečwáři, trubači jsou wynecháni; píščebníci místo píščelníci, naproti tomu w Lobkowickém chybně trubaři místo truhláři, konwáři místo kowáři, newodnáři místo newodáři, twořidlníci tak jako w rukopise Strahowském dwakrát na rozličných místech. Pochybná čtení jsau w Strah. rkp. pokladníci, w Lobk. pokladnáři, w Strah. lawičníci, w Lobk. lahwičníci, a zajímawá rozdílná čtení w Strah. bečwáři, w Lobk. bednáři, w Strah. wrchcábnící, w Lobk. wrchcemníci.

Pozdější rukopisy mají ještě mnohem wíce chyb; ano již přepisowač, od něhož pochází k. p. rukopis musejní z roku 1468, přepisowání sobě skrátil pominutím asi třetiny počtu wšech řemesel, tak totiž že po slowích: onde pokladníci, onde sedláři, místo wšech řemesel dále následujících prawí: a tak o wšelikém řemesle, jenž muož jmenowáno býti.

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 7. Juni 1869.

Anwesend die Herren Mitglieder: Hattala, Tomek, Wocel, Wrťátko, Komárek, Čupr, Zoubek; Herr Pažout als Gast.

Herr Komárek hielt einen Vortrag, welcher die Ergänzung des Gedichtes „Jaromír a Oldřich" in der Königinhofer Handschrift mit Berücksichtigung der unvollständigen Zeilen auf den ersten Pergamentstreifen bei dieser Handschrift zum Gegenstande hatte.

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 21. Juni 1869.

Anwesend die Mitglieder: Erben, Tomek, Wrťátko; Herr Kolář als Gast.

Herr Kolář erklärte die in Dobřichowitz aufgefundenen glagolitischen Fragmente aus dem 14. und 15. Jahrhunderte.

Sitzung der Classe für die mathem. und Naturwissenschaften am 23. Juni 1869.

Anwesend die Herren: Rochleder, Gust. Schmidt, Gintl; als Gäste die Herren Grünwald und Weyr.

Herr Dr. W. Gintl überreicht ein ihm vom Verfasser zugesandtes Exemplar des Programmes der Atommechanik von Gustav Hinrichs, Prof. d. Physik u. Chemie an der Staats-Universitaet zu Jova City (Verein. Staaten Nord. Amer.), in welchem der Verfasser, ausgehend von der Annahme eines einheitlichen Grundstoffes, des Pantogens, das in verschiedenen Aggregationszuständen und Quantitaetsverhältnissen seiner Atome, der Panatome, unter den Formen der, bis jetzt für selbständige Existenzen gehaltenen Grundstoffe des Chemikers, auftreten könne, die chemischen Vorgänge als einfache Bewegungs-Erscheinungen, und also die chem. Verbindungen als rein mechanische Folgen solcher Momente aufzufassen versucht, und diese seine Theorie an einzelnen Beispielen durchführt. Gleichzeitig überreichte Dr. Gintl eine Abhandlung desselben Verfassers „on the Spectra und Composition of the Elements" und sprach zugleich den Wunsch des Hrn. Prof. Gust. Hinrichs aus, mit der königl. b. Gesellschaft der Wissenschaften in einen Austausch der Schriften treten zu dürfen, bezieglich welches er sich gegen die Druckschriften der k. b. Gesellschaft die Schriften der Staat-Universitaet zu Jova einzusenden erbietet.

Verzeichniss der seit 1. Januar bis letzten Juni 1869 eingelangten Druckschriften.

Annales de l' observatoire roy. de Bruxelles. 1869.

Familiæ clericorum scholarum piarum Bohemiæ, Moraviæ et Silesiæ pro anno 1869.

Erster Jahresbericht des akadem. Lesevereins an der k. k. Universität in Graz. 1868.

Monatsberichte der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Novemb. bis Dec. 1868.; Jan.—März 1869.

Vierter und fünfter Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. 1868.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome VI. 2. cah. 1868.

Mémoires de la Société imp. des sciences naturelles de Cherbourg. T. 1868.

K. V. Zap, Česko-moravská kronika. Sešit 38., 39. (Geschenk des Herrn Verf.).

Bulletin de la Société imp. des naturalistes de Moscou. 1868. Nr. 1., 2.

Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt. 1868. Nr. 14. 1869. Nr. 1.

Jahrbuch der k. k. geolog. Reichsanstalt. 1868. XVIII. Bd. 1869. Nr. 1.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissensch. zu Berlin aus dem J. 1867.

Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft. XX. Bd. 3. XXI. Bd. 1. Berlin.

Zeitschrift des historischen Vereins für Niedersachsen. Jahrg. 1867. Hannover. 1868.

Dreissigste Nachricht über den histor. Verein für Niedersachsen. Hannover 1868.

J. Barrande, Repparition du genre Arethusina Barr. — Faune silurienne des environs de Hof en Bavière. (Geschenk des H. Verf.)

Nachrichten von der Gesellsch. der Wissensch. und der Universität zu Göttingen. 1868.

Jenaische Zeitschrift für Medicin und Naturwissenschaft, herausg. von der medic.-naturwissenschaftl. Gesellsch. zu Jena. Leipzig 1868. IV. Bd. 1—4.

Mémoires de l'Académie imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tome XII. Nr. 1, 2. Tome IV. Nr. 8.

Bulletin de l'Acad. imp. des sciences de St. Pétersb. T. XIII. f. 1—20.

Archiv für Hessische Geschichte und Alterthumskunde. XII. 1. Darmstadt.

Verzeichniss der Druckwerke und Handschriften in der Bibliothek des histor. Vereins zu Darmstadt. 1868.

Aarboger for Nordisk oldkyndighed og historie. 1868. 2. Hft.

Handbuch der Logik, bearb. von Dr. Wilh. Kaulich. Prag 1869. (Gesch. des H. Verf).

Archives du Musée Teyler. Vol. I. Harlem. 1868. Vol. II. 1, 2. 1869.

Centralblatt für die gesammte Landeskultur, herausgeg. von der k. k. patriot. ökonom. Gesellsch. 1869. Prag.

Hospodářské noviny. Vyd. c. k vlast. hosp. společn. 1869.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellsch. in Wien. Bd. XVIII. Hft. 1—4.

Dr. Aug. Neilreich, Die Vegetationsverhältnisse von Croatien. Wien. 1868.

Cam. Heller, Die Zoophyten und Enchinodermen des Adriatischen Meeres. Wien 1868.

Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. 1868 (Schluss), 1869. 1—2.

Resultate der an der Sternwarte bei München vom 1857 bis 1866 angestellten meteorolog. Beobachtungen.

Beobachtungen des meteorologischen Observatoriums auf dem Hohenpreissenberge von 1851—1864.

Отчет императ. Археологической Коммисси за 1865—1866 годъ. С Атласом.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederland'sche Letterkunde te Leiden. 1865.

Levensberichten der afgestorvene Medeleden van de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. 1868.

Jahrbücher und Jahresbericht des Vereins für meklenburgische Geschichte und Alterthumskunde. 33. Jahrg. Schwerin 1868.

Kniha Tovačovská, aneb Pana Ctibora z Cimburka a z Tovačova pamět obyčejů, řádů a řízení práva zemsk. v Mar. Mor. vyd. V. Brandl. V Brně 1868. (Gesch. des H. Herausgebers.)

Cap. Césare Settimanni, D'une nouvelle méthode pour déterminer la parallaxe du soleil. Florence 1869. (Gesch. des H. Verf.)

Zeitschrift des Harz-Vereins für Geschichte und Alterthumskunde. 1869. 1. Hft. Wernigerode.

Documenta mag. Joannis Hus, vitam, doctrinam, causam in Constantiensi concilio actam illustrantia, edid. Franc. Palacký. Pragæ 1869. (Gesch. des H. Herausg.)

Dr. Fr. Palacký, Ueber die Beziehungen und das Verhältniss der Waldenser zu den ehemaligen Secten in Böhmen. Pr. 1869.

Dr. Fr. Palacký, O stycích a poměru sekty Waldenské k někdejším sektám v Čechách. (Beide gesch. von dem Herrn Verf.)

Louis Leger, Les Slaves du Sud et leur civilisation. Paris 1869. (Gesch. von dem H. Verf.)

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 45. Hft. 2.

Zeitschrift der Deutschen geolog. Gesellschaft. XX. Bd. 4. Hft. Berlin 1868.

Neunter Bericht des Offenbacher Vereins für Naturkunde.

Von der Royal Society of London:

Philosophical Transactions for the year. 1868. part I., II.

Thesaurus siluricus. The Flora and Fauna of the silurian period. By John J. Bigsby. Lond. 1868.

Catalog of scientific papers (1800—1863) Publ. by the Roy. Society of London. Vol. II.

Proceedings of the roy. Society. Nr. 101—108.

The roy. Society. 30th November 1868.

L. W. Dillwyn, Materials for a Fauna und Flora of Swansea. Swansea 1848.

Mittheilungen der k. k. Mähr. Schles. Gesellsch. zur Beförderung des Ackerbaus, der Natur- und Landeskunde in Brünn. 1868.

Schöbl, Retia mirabilis quorumdam Sauriorum. Pragæ 1869. (Gesch. vom Dekanat des medizin. Doktoren-Collegiums.)

Mémoires del' Académie roy. de sciences des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. XXXVII. Bruxelles 1869.

Bulletins de l'Acad. roy. des sciences & de Belgique. T. XXV. bis T. XXVI.

A. Quetelet, Observations des phénomènes périodiques pendant les années 1865 et 1866.

A. Quetelet, Progrèes des travaux statistiques. Bruxelles 1869.

Annuaire de l'Académie roy. des sciences & de Belgique. 1869.

Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. VIII. Bd. 2. Hft.

Schuler u. v. Libloy, Siebenbürgische Rechtsgeschichte. III. Bd. Hermannstadt. 1868.

Programm des evang. Gymnasiums zu Bistritz. 1867—68.

Programm des evang. Gymnasiums in Schässburg.

Abhandlungen, herausgeg. vom naturwissenschaftl. Verein zu Bremen. II. Bd. 1. (1869).

Sveriges geologiska Undersökning pa offentlig bekostnad, udförd under ledning af A. Erdmann. Stockholm. 1868. Heft 26—30. mit 5 Karten des Atlases.

Bulletin de la Société géologique de France. (1852, 1863).

Annales de la Société Linneenne de Lyon. Années 1867, — 1860, 1861.

Hornstein und Murmann, Magnetische und meteorologische Beobachtungen auf der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1868.

Von der südslav. Akademie zu Agram:

Rad jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. kn. VI. kn. VII.

Stari pisci hrvatski, kn. I. Pjesme Marka Marulića.

Flora croatica, auctoribus Dr. J. Schlosser de Klekovski et L. nob. de Farkas-Vukitinović.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. I. U Zagrebu. 1868.

Bulletin de la Société géologique de France. T. XXV.

Kaulich, Zur Reform der Gymnasien und Realschulen. (Gesch. des H. Verf.)

V. Křížek, Dějiny všeobecné a Rakouské v přehledu synchronistickém. Tábor 1869. (Gesch. des H. Verf.)

Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt am M. für 1867–1868.

Verhandlungen des naturhistor. Vereins der preuss. Rheinlande und Westphalens. Dritte Folge, V. Jahrg. 1. und 2. Hft.

Verhandlungen des Vereins für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben. Neue Reihe. 1. Hft. Ulm 1869.

Dreizehnter Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen. 1869.

Atti del reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

T. XIII. ser. 3, Dispensa prima.

dto. dto. Dispensa nona.

dto. dto. Dispensa decima.

Von der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien:

Sitzungsberichte der philos.-historischen Classe. 59. Band 1, 2, 3—4. Hft.

Sitzungsberichte der mathem. naturwiss. Classe I. Abth. Nr. 4, 5. II. Abth. 4, 5, 6.

Archiv für Kunde österr. Geschichtsquellen. 40. Bd. 1. Hft.

Fontes rerum austriacarum. 28. Band. II. Abth.

Abhandlungen der kais. Loepoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. XXXIV. Bd. Dresden 1868.

Von der kön. Universität zu Christiania:

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 1867.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Christ. 1868.

Mémoires pour servir á la connaissance des Crinoides vivants, par M. Sars. Christ. 1868.

Traité élémentaire des fonctions elliptiques, par O. J. Brosch. Christ. 1867.

Registre til Christiania Videskabsselskabs Forhandlinger. 1858 bis 1867.

Det kong. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1867.

Index scholarum in univers. reg. Fridericiana.

Gust. Hinrichs, Atommechanik, oder die Chemie eine Mechanik der Panatome. Jowa-City 1867.

G. Hinrichs, On the spectra and composition of the elements. (Gesch. d. H. Verf.)

Mittheilungen des naturwissensch. Vereins in Carlsruhe. 3. Hft. 1869.

Mittheilungen der Geschichts- und Alterthumsforschenden Gesellschaft des Osterlandes. 7. Bdes 2. Hft. Altenburg 1869.

Zeitschrift des Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg. III. Folge. 14 Hft.

Inhalt.

(Die mit * bezeichneten Vorträge sind ausführlich angezeigt.)

Verlag der k. böhm. Ges. der Wiss. in Prag. — Druck von Dr. Ed. Grégr. 1869.

Folgende Publicationen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften können durch die Verlagsbuchhandlung „Fr. Tempský" in Prag bezogen werden:

Palacký Fr. Würdigung der alten böhm. Geschichtsschreiber. 1830 . .	1 Thlr.
„ Staří letopisové čeští od r. 1373 do 1528.—1829. (XVIII und 518 S.)	20 Sgr.
Cochy A. L. Mémoire sur la dispersion de la lumière. 4. 1836	3 Thlr.
Vorträge, gehalten bei der ersten Jubelfeier der Gesellsch. im Sept. 1836	5 Sgr.
Hanuš J. Verzeichniss sämmtl. Werke und Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. 1854	6 Sgr.
Bartoš (Bartholomæus von St. Aegydius), Chronik von Prag (1524—31) im latein. Text bearbeitet von Höfler. 1859	20 Sgr.
Kulik J. Jahresformen der christl. Zeitrechn. (1000jähr. Kalender.) 4. 1861	10 Sgr.
Böhm J. Ballistische Versuche und Studien. 4. 1861. (195. — 3. Taf.) .	1 Thlr.
Tomek, Základy starého místopisu Prahy. 1, 2. 3, 4.	4 Thlr.
J. Emler, Reliquiae tabularum terrae citationum vetustissimae. 1867 . .	2 fl. ö. W.
Hanuš, Quellenkunde und Bibliographie der böhm. Literaturgeschichte .	1.60 „
Aug. Sedláček, Rozvržení sbírek a berní r. 1615	1.—

Verlag der k. böhm. Ges. der Wiss. in Prag. — Druck von Dr. Ed. Grégr. 1869.