

Sitzungsberichte

der königl. böhmischen

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

in Prag.

Jahrgang 1872.

Juli — Dezember.

506.437
.C448

PRAG, 1873.

Verlag der k. b. Gesellschaft der Wissenschaften.

40
C42
NA

Sitzungsberichte

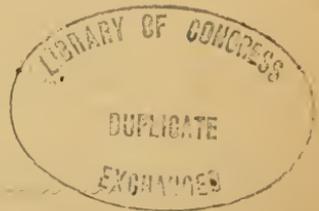
der königl. böhmischen

Gesellschaft der Wissenschaften

in Prag.

Jahrgang 1872.

Juli. — Dezember.



PRAG.

Verlag der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.

1873.

53839

104

21

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie
am 1. Juli 1872.

Anwesend die Herren Mitglieder: Tomek, Fr. Palacký, Rieger, Toman, Kalousek, Nebeský, Tieftrunk und Herr Pažout als Gast.

Herr Dr. Emler las den ersten Theil seiner für die Acten der Gesellschaft bestimmten Abhandlung: „*Über die Kanzlei K. Přemysl Otakar II.*“

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe
am 12. Juli 1872.

Anwesend die Herren Mitglieder: Krejčí, F. Schmidt von Bergenhold, E. Weyr, Studnička, Novák, Frič, Kořistka, Šafařík, von Waltenhofen, G. Schmidt, dann die Herren Helmhacker, Nekut, Domalip, Weselý, Šöbl als Gäste.

Herr Berg-Ingenieur Helmhacker hielt folgenden Vortrag: „*Über neue Petrefacten im Kulm an der schlesisch-polnischen Gränze.*“

Die bisher von Dr. Ferdinand Roemer an zwei Orten in Oberschlesien nachgewiesene Fauna von Meeresbewohnern in der produktiven Steinkohlenformation wurde unter den tiefsten Flötzen der Hulčiner westlichen Grubenabtheilung von mir aufgefunden.

Die Hulčiner Grube liegt hart an der österreichischen Grenze am rechten Oderflusssufer und haben die Flötze der guten Steinkohle,

welche in Schieferthonen und sandigen Schieferthonen in der westlichen Grubenabtheilung eingelagert ist, zumeist ein östliches Einfallen, obwohl bei der schwach wellenförmigen Lagerung das entgegengesetzte Einfallen derselben auch zu beobachten ist. Durch den genau von Ost nach West getriebenen Petřkovic'er Reichen Flötz Erbstollen, der auf eine Länge von etwa $1\frac{4}{10}$ Kilométer aufgefahren ist, wurde von Ost März, April, Mai, Juni 1872 in einem Schieferthon oder sandigen Schieferthon von grau-schwarzer oder schwarzgrauer Farbe, die sehr merkwürdige Fauna aufgefunden.

Roemer versetzt die Schichten, in welchen die Überreste von marinen Thieren, als in die tiefste Zone der produktiven Steinkohlenformation, welche in dem oberschlesischen Becken mit der Zone der Sigillarien nach Geinitz, wie sie in Sachsen, Böhmen und an vielen anderen Orten nachgewiesen ist, zusammenfällt. Da die Sigillarienzonen bisher nur auf Landpflanzenresten, die in derselben vorkommen, beruht, oder nach denselben erkannt wird, so ist es bei der Bestimmung des Horizontes, in welchem solche marine Thierreste in der Steinkohlenformation vorkommen, um so misslicher, dass auch nicht Pflanzenreste mit den Thierresten vorkommen, die über die Schichten, zu welchen diese Reste gehören, etwas mehr Licht verbreiten würden. Roemer führt aus Schlesien nur 3 Pflanzenreste an, welche die Frage, ob die Thierreste in den tiefsten Schichten der Sigillarienzonen vorkommen, unentschieden lassen, trotzdem dass dies von Roemer wahrscheinlich gemacht wird.

Die Localität bei Petřkovic, welche senkrecht auf die Tagesoberfläche projicirt, genau in der Mitte des Dreieckes, welches durch die drei Ortschaften Petřkovic, Ellgoth und Bobrovník bei Hulčín in Preussisch-Schlesien gebildet wird, liegen würde, wurde von mir ausgebeutet und gab neue Belege für das von Roemer beobachtete Vorkommen von marinen Thierresten in der oberschlesischen Steinkohlenformation.

Die Fauna ist auf den ersten Blick ganz derjenigen, wie sie Dr. Ferd. Roemer in seiner Geologie von Oberschlesien und in der Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft 1866 angiebt, ähnlich. Die meisten Thierformen stimmen mit denen, die schon an anderen Orten in Oberschlesien vorkommen und von denen ich diejenigen von der Königshütte mit den bei Petřkovic vorkommenden verglichen habe, überein.

Es sind dies die Arten aus den Gattungen *Productus*, *Orthis*,

Chonetes, Discina, Bellerophon, Posidonomya, Goniatites, Orthoceras, Nucula, Pecten, Encrinites, Palaeoniscus, Phillipsia etc.

Wenn nun schon aus der Posidonomya, die ein Leitfossil für den Culm oder die Zone der Lycopodiaceen ist, sowie nach dem Vorkommen des Goniatites auf die Zone des Kultus oder der Lycopodiaceen geschlossen werden könnte, so entscheiden dennoch die Pflanzenreste, welche mit den Thierresten zusammen vorkommen, über die Zone, in welche die Schichten zu versetzen sind.

Die Pflanzenreste wurden als zu Sagenaria cremata, Sagenaria Veltheimiana, Calamites transitionis, Sphenopteris elegans, Sphenopteris distans, Trigonocarpus Noeggerathi, Noeggerathia an. palmaeformis, Cyatheites asper etc. etc. gehörig erkannt.

Von diesen Pflanzen eignen sich Sphenopteris elegans, distans, Trigonocarpus Noeggerathi, Noeggerathia an. palmaeformis, zur Bestimmung des Horizontes nicht, da sie sowohl in dem Culm, als auch der Sigillarienzone, ja auch theilweise in der Zone der Filices vorkommen. Sagenaria cremata ist eine Pflanze, die nur der mittleren und oberen Steinkohlenformation eigen ist. Dafür aber lassen Calamites transitionis, Sagenaria Veltheimiana, Cyatheites asper und noch andere schon in den Troppauer Kulmdachschiefern von Ettingshausen gefundene Pflanzen in Verbindung mit den Posidonomyen und anderen Resten ohne allen Zweifel den Horizont dieser Meeresconchylien als zum Kulm gehörig erkennen. Wahrscheinlich wird sich das mit den besseren Aufschlüssen auch bei den andern zwei von Dr. Ferd. Roemer früher schon angegebenen Fundorten ebenso sicher beweisen lassen, wie es bei Petřkovic gelungen ist. Noch andere Pflanzenformen, darunter einige neue, sowie einige andere, darunter auch neue Thierformen, werden später zur Beleuchtung dieser höchst interessanten und als Horizont benutzbaren Localität beschrieben werden.

Herr Prof. Dr. Frič sprach: „Über einen neuen Saurier im Pläner des weissen Berges.“

Herr Prof. Dr. Šafařík gab eine vorläufige Notiz: „Über mikroskopisch-chemische Untersuchungen der silurischen Diabase aus der Umgegend von Prag.“

Herr Prof. Dr. von Waltenhofen hielt folgenden Vortrag:
 „Über die Erzeugung des elektrischen Kohlenlichtes mittelst Thermo-
 säulen.“

Die überraschenden Leistungen der Noë'schen Thermo säulen haben den Erfinder auf den Gedanken geführt, mit denselben auch die Erzeugung des elektrischen Kohlenlichtes zu versuchen, falls die Bedingungen, welchen dabei hinsichtlich der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes entsprochen werden müsste, nicht von vorn herein als unerreichbar sich herausstellen sollten.

Um darüber mit Sicherheit urtheilen zu können, habe ich dieses Problem zum Gegenstande einer näheren Untersuchung gemacht, deren Resultate ich im Folgenden mittheile:

Bekanntlich genügt eine Batterie von etwa 30 Bunsen'schen Elementen, um das elektrische Kohlenlicht in dem Masse zu erzeugen, wie es bei Anwendung einer Duboscq'schen Lampe für Verlesungsversuche zu geschehen pflegt. — Da nun, wie meine Messungen ergeben haben, durchschnittlich 20 Noë'sche Elemente die elektromotorische Kraft eines Bunsen'schen ersetzen, so würden — abgesehen vom Widerstande — etwa 600 Thermo-Elemente der besagten Art zum Betriebe einer Duboscq'schen elektrischen Lampe erforderlich sein. — Eine solche Thermo säule würde aber, mit Beibehaltung der bisher in Anwendung gebrachten Dimensionen der einzelnen Elemente, einen Widerstand von mehr als 30 Siemens'schen Einheiten haben, während jener einer Bunsen'schen Batterie von gleicher elektromotorischer Kraft — bei angemessener Grösse und guter Qualität der Elemente — höchstens auf ein Viertel dieses Betrages veranschlagt und — durch Anwendung grösserer Elemente — leicht noch viel kleiner gemacht werden kann. (Nach meinen Messungen beträgt nämlich der Widerstand eines Noë'schen Elementes in den von mir bis jetzt untersuchten Säulen 0.054, während ich bei guten Kohlenzinkketten Widerstände von 0.3 bis 0.06 gefunden habe.)

Es entstand nun die Frage, ob dieser Mehrbetrag des Widerstandes auf Seite der Thermo säule dieselbe zur Erzeugung des elektrischen Kohlenlichtes untauglich mache, — oder ob vielmehr — falls nämlich der Widerstand des Kohlenlichtes vielleicht an sich schon sehr bedeutend sein sollte — jene Differenz hier nicht so sehr in Betracht komme. Es handelte sich also zur Entscheidung dieser Frage — mit anderen Worten — um die Kenntniss des Widerstandes des Kohlenlichtes selbst, des Widerstandes nämlich, der

durch das Glühen der Kohlenspitzen und das Auftreten des Lichtbogens zwischen denselben in den Schliessungskreis eingeführt wird.

Da hierüber keine Messungen vorliegen, ja nicht einmal allgemeine Angaben darüber: ob man es beim Kohlenlichte mit einem verhältnissmässig grossen oder kleinen Widerstande zu thun habe, so war ich genöthigt selbst Versuche in dieser Richtung anzustellen, die ich denn auch schon im Mai des vorigen Jahres (1871) ausführte.

Zur Erzeugung des Kohlenlichtes dienten abwechselnd zwei (von Herrn Prof. Mach gütigst geliehene) Apparate (Regulatoren), einer von Duboscq und einer von Stöhrer. Die nachstehenden Resultate beziehen sich jedoch nur auf die mit dem erstgenannten Apparate gemachten Versuche. — Das Experimentiren hatte insofern einige Schwierigkeiten, als ich dabei nur über 20 Kohlenzinkelemente verfügte, deren Strom nicht ausreichend war, den Regulator gehörig in Gang zu erhalten. Das Kohlenlicht war daher intermittirend. Doch gelang es durch stete Nachhilfe am Regulator das Licht mehrmals so lange constant zu erhalten, dass die nöthigen Ablesungen an der Tangentenbussole gemacht werden konnten.

Schon der Umstand, dass die (natürlich ohne Unterbrechung des Schliessungskreises vorgenommene) Einschaltung von 5 bis 10 Widerstandseinheiten eine auffallende Abnahme oder wohl gar ein gänzlich Erlöschen des elektrischen Lichtes bewirkte und dass selbst die Einschaltung von nur 1 oder 2 Einheiten schon eine bemerkbare Störung hervorzubringen vermochte, liess sofort erkennen, dass man es hier mit keinem verhältnissmässig grossen Widerstande im Schliessungskreise zu thun habe.

In der That ergab die Rechnung aus der bekannten elektromotorischen Kraft (400) der Batterie und der beobachteten Stromstärke ($40 \text{ ty } 62.0_5$, nach chemischer Masse) einen Gesamtwiderstand von 5.2_1 Siemens-Einheiten im Schliessungskreise, von welchem, da die nach Ausschaltung des Regulators beobachtete Stromstärke ($40 \text{ ty } 77.0_2$) einem Widerstande von 2.2_7 entsprach, 2.9_4 Einheiten auf das Kohlenlicht (mit Einschluss des Regulators) entfallen. (Diese Messung wurde noch durch andere mit abgeänderten Schliessungswiderständen ausgeführte controlirt und gut übereinstimmend befunden.)

Eine Messung der (jedenfalls sehr geringen) Entfernung der Kohlenspitzen beim vollen Glanze des kleinen Lichtbogens konnte nicht vorgenommen werden, aber es ist wohl von vornherein einleuchtend, dass der Widerstand mit der Ausdehnung des Lichtbogens

wachsen muss, womit denn auch die bei den beschriebenen Versuchen beobachtete Thatsache übereinstimmt, dass der Widerstand sofort sehr beträchtlich abnahm, wenn man die Kohlenspitzen so dicht aneinander schob (in Berührung brachte), dass sie nur dunkel glühten. (Die Stromstärke stieg beim schwachen Glühen bis 40 *tg* 74° und ging beim Hellglühen mitunter bis auf 40 *tg* 50° herab. Die oben angesetzte Stromstärke 40 *tg* 62,5° ist die während des Hellglühens am häufigsten beobachtete.) Natürlich zeigte sich der Widerstand auch grösser, so lange die Kohlenspitzen noch dünn waren und nahm mit der Deformation derselben ab.

Die Untersuchung hat demnach gelehrt, dass der Widerstand des Kohlenlichtes kein verhältnissmässig grosser ist und (bei geringer Ausdehnung des Lichtbogens) sich nicht sehr weit vom Widerstande der angewendeten Bunsen'schen Batterie entfernt hat. Damit ist auch die oben angeregte Frage beantwortet, nämlich dahin, dass zur Erzeugung des elektrischen Kohlenlichtes nur Batterien von kleinem Widerstande geeignet sind. Hieraus folgt ferner, dass die früher besprochene Thermosäule von 600 Noë'schen Elementen gewöhnlicher Grösse zur Erzeugung des Kohlenlichtes nicht tauglich wäre, sondern zu diesem Zwecke Elemente von wenigstens viermal grösserem Querschnitte, d. i. von wenigstens viermal kleinerem Widerstande nöthig sind, was dann entweder durch entsprechende Vergrösserung der Elemente bei gleicher Zahl oder durch entsprechende pachytropische Combination einer mindestens vierfachen Anzahl bei unveränderter Grösse geschehen könnte. Noch viel kleiner müsste — wie aus dem Früheren hervorgeht — der Widerstand der Thermosäule gemacht werden, wenn sie bei gleicher elektromotorischer Kraft Bunsen'sche Elemente grösserer Gattung ersetzen soll.

Wird aber dieser Bedingung, nämlich der Widerstandsverminderung, Genüge geleistet, was bei der Kleinheit der Noë'schen Elemente wohl ausführbar ist, dann unterliegt auch die Erzeugung des elektrischen Kohlenlichtes keinem Zweifel mehr.

In der That hat Herr Noë diesen Weg bereits mit Erfolg betreten und ist es ihm — bei einem vorderhand noch in kleinem Massstabe ausgeführten Versuche — durch Verminderung des Widerstandes der Elemente auch bereits gelungen das elektrische Kohlenlicht zur Erscheinung zu bringen, ein bisher bei Thermosäulen wohl noch nicht gesehenes Resultat.

Da nun sowohl eine weitere Verminderung des Widerstandes

als auch die Herstellung von Thermosäulen mit entsprechend grosser Elementezahl keinen unübersteiglichen Schwierigkeiten unterliegt, so kann auch die Erzeugung des elektrischen Kohlenlichtes im Grossen mittelst solcher Säulen als gesichert betrachtet werden.

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie
am 15. Juli 1872.

Anwesend die Herren Mitglieder: Emler, Nebeský, Tomek, Tieftrunk; Herr Pažaut als Gast.

Dr. Emler setzte seinen Vortrag: „Über die Kanzlei König Otakars II. von Böhmen“ fort.

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe
am 18. Oktober 1872.

Anwesend die Herren Mitglieder: Krejčí, E. Weyr, Schöbl, und die Herren Helmhacker, Salaba, Feistmantel als Gäste.

Herr Berg-Ingenieur Helmhacker sprach: „Über die geologische Verbreitung der Gattung *Sphenophyllum*.“

Herr Prof. Krejčí hielt einen Vortrag: „Über die geologischen Verhältnisse der Umgebungen von Měcholup im Saazer Kreise.“

Herr Prof. Dr. E. Weyr hielt folgenden Vortrag, welcher von ihm in einzelnen Partien in den nachfolgenden Sitzungen fortgesetzt wurde, welche Fortsetzungen wir aber hier des besseren Verständnisses und der leichteren Übersicht wegen im Zusammenhange veröffentlichen.

Ueber rationale Curven.

1. Einleitung.

Ein sehr einfaches, dabei fruchtbares und vielleicht auch genug interessantes Mittel zum Studium der rationalen Curven besteht darin ihre Punkte durch Werthe eines eindeutigen Parameters zu bestimmen und dann Relationen zwischen Parameterwerthen aufzustellen, welche

in algebraischer Weise gewisse gegenseitige Lagen der entsprechenden Punkte charakterisiren.

Indem ich im Folgenden einige Beispiele für derartige Behandlungen rationaler Curven geben werde, werde ich mich nur mit vorzüglich bekannteren rationalen Curven beschäftigen.

Die rationale Curve erster Ordnung — die Gerade — übergehend, fangen wir zunächst mit den rationalen Curven zweiter Ordnung, d. i. mit den Kegelschnitten an.

2. Die Kegelschnitte.

Die Scheitelfgleichung der Kegelschnitte lautet:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

Es sei u_i die goniometrische Tangente des Winkels, welchen der vom Scheitel nach dem Curvenpunkte i gezogene Strahl mit der x -Axe bildet; dann kann man u_i als einen eindeutigen Parameter der Punkte (i) des Kegelschnittes betrachten, d. h. als eine Variable, die sich von Punkt zu Punkt stetig ändert, so zwar, dass jedem Punkte i der Curve nur ein einziger Werth von u_i entspricht, und umgekehrt, dass jedem Werthe von u_i nur ein einziger Curvenpunkt (i) zugehört. Die Coordinaten x, y drücken sich als rational-gebrochene Functionen des Parameters u aus; denn wir haben der Bedeutung von u gemäss

$$y = u x$$

somit

$$u^2 x^2 = 2px + qx^2$$

woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2p}{u^2 - q} \\ y &= \frac{2pu}{u^2 - q} \\ u &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

3. Gerade durch zwei Punkte, Tangente.

Die Gleichung einer Geraden, welche zwei Punkte 1, 2 des Kegelschnittes verbindet, lautet bekanntlich

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder gemäss den Gleichungen I:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & \frac{2p}{u_1^2 - q} & \frac{2pu_1}{u_1^2 - q} \\ 1 & \frac{2p}{u_2^2 - q} & \frac{2pu_2}{u_2^2 - q} \end{vmatrix} = 0$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ u_1^2 - q & 2p & 2pu_1 \\ u_2^2 - q & 2p & 2pu_2 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn man diese Determinante nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt, reduziert und mit $2p(u_1 - u_2)$ kürzt, so erhält man als Gleichung der Geraden $\bar{12}$:

$$y(u_1 + u_2) - x(u_1 u_2 + q) = 2p \quad (\text{II})$$

Die Richtungsconstante derselben ist:

$$q = \frac{u_1 u_2 + q}{u_1 + u_2} \quad (\text{III})$$

Hieraus folgt ein Ausdruck für die goniom. Tangente des Winkels α , welchen die geometrische Tangente der Curve im Punkte (u) mit der x -Axe bildet; man hat nur $u_2 = u_1 = u$ zu setzen und erhält

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u^2 + q}{2u} \quad (\text{IV})$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte (u) lautet dann nach II.:

$$2uy - x(u^2 + q) = 2p \quad (\text{V})$$

4. Curvenscheitel.

Aus der Formel für $\operatorname{tg} \alpha$ lassen sich die Parameterwerthe der vier Curvenscheitel ableiten; denn für jene der Nebenaxe ist $\alpha = 0$ also

$$u^2 + q = 0$$

oder

$$u_1 = +\sqrt{-q} \quad u_2 = -\sqrt{-q}$$

Für die Scheitel der Hauptaxe (x -Axe) ist $\alpha = 90^\circ$, somit $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ oder

$$u_3 = 0 \quad u_4 = \infty$$

5. Symmetrische Punkte.

Zwei Punkte der Curve sind symmetrisch zu einer der beiden Axen, wenn ihre Verbindungslinie zur anderen parallel ist, d. h. wenn die Richtungsconstante derselben 0 oder ∞ ist. Zwei solche Punkte

(u_1) (u_2) werden somit, gemäss der Gleichung III entweder der Bedingung

$$u_1 u_2 + q = 0 \quad (\text{VI})$$

genügen, wenn sie symmetrisch zur Nebenaxe sind, oder der Bedingung

$$u_1 + u_2 = 0 \quad (\text{VII})$$

wenn sie symmetrisch zur Hauptaxe liegen.

6. Diametrale Punkte.

Zwei Punkte u_1 u_2 sind diametral, wenn der eine mit einem Punkte u' symmetrisch zur Hauptaxe ist und der andere mit demselben Punkte symmetrisch zur Nebenaxe. Diess gibt die Gleichungen

$$u_1 + u' = 0$$

$$u_2 u' + q = 0$$

somit durch Elimination von u'

$$u_1 u_2 = q \quad (\text{VIII})$$

als Bedingung, dass u_1 und u_2 zwei diametrale Curvenpunkte sind.

Für den Winkel β , welchen der Diameter $\overline{u_1 u_2}$ mit der x -Axe einschliesst, findet man nach III

$$\text{tg} \beta = \frac{2q}{u_1 + u_2} = \frac{2qu_1}{q + u_1^2} = \frac{2qu_2}{q + u_2^2}$$

Aus der Bedingungsgleichung VIII folgt sofort, dass die Tangenten in diametralen Punkten parallel sind. Denn aus (IV) folgt

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{u_1^2 + q}{2u_1} = \frac{u_1 + \frac{q}{u_1}}{2}$$

oder nach (VIII)

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (\text{IX})$$

also ist offenbar $\text{tg} \alpha_1 = \text{tg} \alpha_2$ oder $\alpha_1 = \alpha_2$, d. h. die beiden Tangenten in u_1 , u_2 parallel.

7. Conjugirte Durchmesser.

Wenn zwei Durchmesser $\overline{u_1 u_2}$ und $\overline{u_1' u_2'}$ conjugirt sind, so muss der eine parallel sein zu den Tangenten in den Endpunkten des anderen; d. h. es muss nach (IX) und (III):

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{u_1' u_2' + q}{u_1' + u_2'}$$

sein, wobei die diametralen Punkte $u_1 u_2$ und $u_1' u_2'$ nach den Gleichungen (VII)

$$u_1 u_2 = q \quad u_1' u_2' = q$$

genügen müssen. Die letzte Gleichung lautet demgemäss auch:

$$(u_1 + u_2) (u_1' + u_2') = 4q \quad (X)$$

oder zufolge Gleichung IX:

$$tg\alpha \, tg\alpha' = q \quad (X')$$

8. Asymptoten.

Wenn zwei conjugirte Durchmesser zusammenfallen, so bilden sie eine Asymptote. Für die Asymptotenrichtungen haben wir daher nach (X') die Gleichung

$$tg^2\alpha = q$$

oder

$$tg\alpha = \pm \sqrt{q}$$

welche reell sind für $q > 0$ (Hyperbel) imaginär, für $q < 0$ (Ellipse) und zusammenfallend für $q = 0$ (Parabel) (art. 8). Die Asymptoten kann man auch als die Tangenten der unendlich fernen Punkte betrachten, woraus dann sofort ihre Gleichung gefolgert werden kann.

Der Punkt (u) wird ein unendlich ferner Punkt, wenn $x = \infty$, $y = \infty$, d. h. wenn nach I $u^2 - q = 0$ oder $u = \pm \sqrt{q}$ ist.

Die Parameter der beiden unendlich weiten Punkte sind somit

$$u_1 = +\sqrt{q} \quad u_2 = -\sqrt{q}$$

Die Tangente im Punkte $\pm \sqrt{q}$ hat nach (V) die Gleichung

$$\pm 2\sqrt{q} \cdot y - x(q + q) = 2p$$

oder aber:

$$\pm \sqrt{q} \cdot y - qx = p \quad (V)'$$

Diese Gleichung stellt uns somit die Tangenten in den unendlich fernen Punkten der Curve, d. h. die Asymptoten des Kegelschnittes dar. Der Durchschnitt der beiden Asymptoten ist der Mittelpunkt der Curve und hat, wie man sich aus V überzeugt, die Coordinaten

$$y = 0 \quad x = -\frac{p}{q}$$

9. Involutionen auf der Curve. Tangenten durch einen beliebigen Punkt.

Alle durch einen festen Punkt (x, y) in der Ebene unserer Curve gehenden Geraden (ein Strahlenbüschel) bestimmen auf der Curve Punktepaare ($u_1 u_2$), welche einer quadratischen Involution angehören. Die Parameter dieser Punkte $u_1 u_2$ erfüllen die Gleichung (II):

$$y(u_1 + u_2) - x(u_1 u_2 + q) = 2p$$

welche zugleich die Gleichung der durch das Strahlenbüschel (x, y) auf der Curve bestimmten Punktinvolution ist. Die Projektivität der Systeme (u_1) und (u_2) folgt aus der Linearität der letzten Gleichung

bezüglich u_1 und bezüglich u_2 ; und die Vertauschungsfähigkeit (Involution) folgt aus der Symmetrie dieser Gleichung.

Für die Doppelpunkte der Involution (die wir kurz als die Involution (x,y) bezeichnen werden) erhalten wir $u_1 = u_2 = u$ setzend die Gleichung:

$$2yu - x(u^2 + q) = 2p$$

oder:

$$u^2 - \frac{2y}{x}u + \frac{2p + qx}{x} = 0$$

aus welchen für die Parameter u_{12} u'_{12} der Doppelpunkte die Werthe folgen

$$\left. \begin{aligned} u_{12} &= \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{2p + qx}{x}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x} \\ u'_{12} &= \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x} \end{aligned} \right\} \text{(XI)}$$

Es sind dies offenbar auch die Parameter der Berührungspunkte der beiden durch den Punkt (xy) an die Curve gehenden Tangenten, deren Gleichungen dann, wenn wir deren laufende Coordinaten mit ξ und η bezeichnen, nach V lauten:

$$2\eta \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x} - \xi \left[\left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x} \right)^2 + q \right] = 2p$$

oder aber

$$\begin{aligned} \eta \left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x} \right) - \\ - \xi \left(\frac{y^2 - px \pm y\sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x^2} \right) = p \end{aligned} \text{(XII)}$$

Die beiden durch (xy) gehenden Tangenten sind reell, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem

$$y^2 \geq 2px + qx^2$$

ist; dies ist zugleich das Kriterium hierfür, ob der Punkt (xy) ausserhalb, auf, oder innerhalb unseres Kegelschnittes liegt.

Die Gleichung der Involution, welche der Punkt (xy) , d. h. die durch diesen Punkt gehenden Strahlen auf der Curve bestimmen, hat nach früherem die Gleichung:

$$y(u_1 + u_2) - x(u_1u_2 + q) = 2p$$

Diese Gleichung geht für $x = \infty$ aber in

$$u_1u_2 + q = 0$$

und in der That wird in diesem Falle die Involution aus zur y -Axe symmetrischen Punktepaaren bestehen, was auch aus der Gleichung der Involution nach VI hervorgeht.

Für $y = \infty$ werden die Punktepaare der Involution symmetrische Punkte bezüglich der x -Axe sein und in der That geht die Involutionsgleichung über in

$$u_1 + u_2 = 0$$

was mit VII vollkommen übereinstimmt.

Wenn der Punkt (xy) [das Centrum der Involution] ein unendlich weiter Punkt ist, dessen Richtung mit der x -Axe den Winkel μ bildet, so ist $x = \infty, y = \infty, \frac{y}{x} = tg \mu$, so dass die Involutionsgleichung übergeht in:

$$tg \mu (u_1 + u_2) - (u_1 u_2 + q) = 0$$

aus welcher wir leicht die Parameter jener zwei Punkte finden können, in welchen die beiden mit der x -Axe den Winkel u bildenden Tangenten unsere Curve berühren. Es sind diese Punkte die Doppelpunkte der Involution und somit haben wir für dieselben die Gleichung

$$2tg \mu \cdot u - (u^2 + q) = 0$$

woraus folgt

$$u = tg \mu \pm \sqrt{tg^2 \mu - q}$$

Dass diese beiden Punkte diametrale Punkte sind, folgt analytisch daraus, dass das Produkt ihrer Parameter $= q$ ist (VIII).

Wenn der Curvenmittelpunkt das Centrum der Involution ist, so sind die diametralen Punkte entsprechende Punkte der Involution.

Und in der That haben wir für diesen Fall $y = 0, x = -\frac{p}{q}$, somit die Involutionsgleichung:

$$\frac{p}{q} (u_1 u_2 + q) = 2p$$

oder

$$u_1 u_2 = q$$

was mit (VIII) übereinstimmt.

10. Pol und Polare.

Die Parameter der Berührungspunkte der beiden durch den Punkt (xy) gehenden Tangenten des Kegelschnittes folgen aus der Gleichung:

$$u^2 - \frac{2y}{x} u + \frac{2p + qx}{x} = 0$$

so dass, wenn wir sie mit u_{12} und u_{12}' bezeichnen, nach bekannten Sätzen über quadratische Gleichungen ist:

$$u_{12} u_{12}' = \frac{2p + qx}{x}$$

$$u_{12} + u_{12}' = \frac{2y}{x}$$

Hieraus schliessen wir, dass die Gleichung der Geraden ($\overline{u_{12}u_{12}'}$) lautet: (vergl. II).

$$\eta \frac{2y}{x} - \xi \left(\frac{2p + qx}{x} + q \right) = 2p$$

wobei die laufenden Coordinaten mit ξ und η bezeichnet sind.

Diese Gerade — die Polare von (xy) — hat also die Gleichung

$$2\eta y - \xi (2p + 2qx) = 2px$$

oder:

$$\eta y = p(\xi + x) + q\xi x \quad \text{(XIII)}$$

Wenn der Punkt (xy) auf dem Kegelschnitte liegt, so geht die Polare in dessen Tangente über.

11. Brennpunkte.

Die Brennpunkte sind die Schnittpunkte der durch die imaginären Kreispunkte gehenden zwei Tangentenpaare des Kegelschnittes.

Um die Gleichungen dieser Tangenten zu finden, setzen wir in

XII $x = \infty, y = \infty$ und $\frac{y}{x} = \pm i$; schreibt man die Gleichung II in

der Form:

$$\eta \left[\frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2p}{x} - q} \right] - \xi \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{p}{x} \pm \frac{y}{x} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2p}{x} - q} \right] = p$$

so erhält man als Gleichungen der beiden durch den imaginären Kreispunkt $+i$ gehenden Tangenten:

$$\eta [i \pm \sqrt{-(q+1)}] - \xi [1 \pm i \sqrt{-(q+1)}] = p$$

oder aber, wenn wir die beiden Zeichen trennen

$$i \eta (1 + \sqrt{q+1}) + \xi (1 + \sqrt{q+1}) = p$$

$$i \eta (1 - \sqrt{q+1}) + \xi (1 - \sqrt{q+1}) = p$$

oder aber

$$\left. \begin{aligned} i \eta + \xi &= \frac{p}{1 + \sqrt{q+1}} \\ i \eta + \xi &= \frac{p}{1 - \sqrt{q+1}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Gleichungen der durch den Kreispunkt} \\ \text{+ } i \text{ gehenden Tangenten.} \end{array}$$

Hieraus dann unmittelbar die Gleichungen der durch den Kreispunkt $-i$ gehenden Tangenten

$$\left. \begin{aligned} -i \eta + \xi &= \frac{p}{1 + \sqrt{q+1}} \\ -i \eta + \xi &= \frac{p}{1 - \sqrt{q+1}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Gleichungen der durch den Kreispunkt} \\ \text{- } i \text{ gehenden Tangenten.} \end{array}$$

Um nun die Coordinaten der Brennpunkte zu finden, muss man die Schnittpunkte der durch $+i$ gehenden Tangenten mit den durch $-i$ gehenden bestimmen.

Die Lösung der betreffenden Gleichungen nach ξ und η gibt einmal

$$\xi = \frac{p}{1 + \sqrt{q+1}}, \eta = 0$$

$$\xi = \frac{p}{1 - \sqrt{q+1}}, \eta = 0$$

und das anderemal:

$$\xi = -\frac{p}{q}, \eta = -i \frac{p}{q} \sqrt{q+1}$$

$$\xi = -\frac{p}{q}, \eta = +i \frac{p}{q} \sqrt{q+1}.$$

Das erste Werthsystem gehört den beiden reellen auf der x -Axe liegenden Brennpunkten an (eigentliche Brennpunkte), während das zweite System den beiden conjugirt imaginären, auf der Nebenaxe des Kegelschnittes befindlichen Brennpunkten entspricht.

12. Leitlinien.

Die Leitlinien sind die Polaren der Brennpunkte und ihre Gleichungen können somit unmittelbar nach XIII geschrieben werden: Wenn wir nur die den reellen Brennpunkten entsprechenden Leitlinien ins Auge fassen, so ergeben sich als deren Gleichungen unmittelbar:

$$x = \mp \frac{p}{\sqrt{q+1} (1 \pm \sqrt{q+1})}.$$

13. Ein neues System symmetrischer Punkt- und Liniencoordinaten.

Jede Gerade in der Ebene unseres Kegelschnittes können wir als die Verbindungslinie zweier reellen oder conjugirt imaginären Punkte des Kegelschnittes betrachten und können dann die Parameter u_1, u_2 dieser Punkte als die Coordinaten der Geraden $u_1 u_2$ bezeichnen.

In dieser Weise gelangen wir zu einem Systeme von Liniencoordinaten (konische Coordinaten), welches offenbar ein symmetrisches sein wird, denn die gerade Linie, deren Coordinaten $u_1 u_2$ sind, ist offenbar identisch mit jener, der die Coordinaten $u_2 u_1$ zugehören, da sich die Coordinaten dem Wesen nach durchaus nicht unterscheiden.

Wenn die beiden Coordinaten einer Geraden reell sind, so durch-

schneidet dieselbe den Kegelschnitt, welchen wir den **Fundamental-Kegelschnitt** nennen wollen, in zwei reellen Punkten.

Sind die Coordinaten conjugirt imaginär, so durchschneidet die Gerade den *F*-Kegelschnitt nicht, ist jedoch reell.

Denn nach Früherem ist die Gleichung der Geraden $\overline{u_1 u_2}$ in rechtwinkligen Coordinaten

$$y(u_1 + u_2) - x(u_1 u_2 + q) = 2p;$$

ist nun

$$u_1 = \alpha + i\beta$$

$$u_2 = \alpha - i\beta$$

so ist

$$u_1 + u_2 = 2\alpha \text{ und}$$

$$u_1 u_2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

somit die Gleichung der Geraden

$$2\alpha y - x(\alpha^2 + \beta^2 + q) = 2p$$

also ist die Gerade reell.

Wenn dagegen die Coordinaten beide (nicht conjugirt) imaginär sind oder nur eine reell ist, so ist die Gerade eine imaginäre und hat einen reellen Punkt. Denn ist z. B.

$$u_1 = \alpha + i\beta \quad u_2 = \alpha' + i\beta',$$

so ist die Gleichung der Geraden $\overline{u_1 u_2}$:

$y[(\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta')] - x[q + \alpha\alpha' - \beta\beta' + i(\alpha\beta' + \alpha'\beta)] = 2p$
und dieser Gleichung, welche einer imaginären Geraden entspricht, genügt offenbar der reelle Durchschnitt der beiden Geraden

$$y(\alpha + \alpha') - x(q + \alpha\alpha' - \beta\beta') = 2p$$

$$y(\beta + \beta') - x(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = 0$$

Wenn von den beiden Coordinaten $u_1 u_2$ eine reell und die andere imaginär ist, so ist der reelle Punkt der imaginären Geraden jener Punkt des *F*-Kegelschnittes, welchem die reelle Coordinate als Parameter entspricht.

Wenn die beiden Coordinaten einer Geraden rein imaginär sind, so ist deren reeller Punkt immer auf der *x*-Axe gelegen.

Aus den vorhergehenden Artikeln folgt sofort, dass die Coordinaten einer Tangente des *F*-Kegelschnittes der Bedingung

$$u_1 = u_2$$

genügen müssen.

Ebenso die Coordinaten eines Durchmessers der Bedingung:

$$u_1 u_2 = q \quad (\text{vergl. Gl. VIII.})$$

die Coordinaten einer zur Hauptaxe senkrechten Geraden der Bedingung:

$$u_1 u_2 = 0 \quad (\text{vergl. Gl. VII.})$$

und die Coordinaten einer zur Nebenaxe senkrechten Geraden der Bedingung:

$$u_1 u_2 + q = 0. \quad (\text{vergl. Gl. VI.})$$

Nach Artikel (4) folgt, dass die Coordinaten der Hauptaxe sind

$$u_1 = 0 \quad u_2 = \infty$$

und die Coordinaten der Nebenaxe:

$$u_1 = +\sqrt{-q} \quad u_2 = -\sqrt{-q}.$$

Ferner folgt aus Artikel (8), dass die Coordinaten der unendlich weiten Geraden sind:

$$u_1 = +\sqrt{q} \quad u_2 = -\sqrt{q}$$

14. *Neigung zweier Geraden.*

Wenn $\varrho\varrho'$ die Richtungsconstanten zweier Geraden $(u_1 u_2)$ $(u_1' u_2')$ sind, so hat man für deren Neigung r die Formel

$$\text{tgr} = \frac{\varrho - \varrho'}{1 + \varrho\varrho'}$$

Nun ist nach Gl. III

$$\varrho = \frac{u_1 u_2 + q}{u_1 + u_2} \quad \varrho' = \frac{u_1' u_2' + q}{u_1' + u_2'}$$

somit

$$\text{tgr} = \frac{\frac{u_1 u_2 + q}{u_1 + u_2} - \frac{u_1' u_2' + q}{u_1' + u_2'}}{1 + \frac{(u_1 u_2 + q)(u_1' u_2' + q)}{(u_1 + u_2)(u_1' + u_2')}}}$$

oder

$$\text{tgr} = \frac{(u_1 u_2 + q)(u_1' + u_2') - (u_1' u_2' + q)(u_1 + u_2)}{(u_1 + u_2)(u_1' + u_2') + (u_1 u_2 + q)(u_1' u_2' + q)}$$

Die Bedingung für das Parallelsein ist somit:

$$(u_1 u_2 + q)(u_1' + u_2') = (u_1' u_2' + q)(u_1 + u_2)$$

und für das Senkrechtstehen

$$(u_1 + u_2)(u_1' + u_2') + (u_1 u_2 + q)(u_1' u_2' + q) = 0.$$

15. *Gleichung des Punktes.*

Wenn die Gerade $(u_1 u_2)$ durch den Punkt (xy) hindurchgeht, so erfüllen die Coordinaten der Geraden die Gleichung (II):

$$y(u_1 + u_2) - x(u_1 u_2 + q) - 2p = 0,$$

welche man dann als die Gleichung des Punktes (xy) zu betrachten hat. Wir sehen somit, dass die allgemeine Punktgleichung in Kegelschnittscoordinaten die Form hat:

$$A u_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0 \quad (\text{XIV})$$

Die rechtwinkligen Coordinaten x, y des durch diese Gleichung repräsentirten Punktes erhalten wir durch Vergleichung der beiden

letzten Gleichungen, nachdem wir die zweite mit einem vor der Hand unbekanntem Coefficienten λ multipliziert haben. Dies gibt dann:

$$\lambda A = -x, \quad \lambda B = y, \quad \lambda C = -qx - 2p$$

und hieraus weiter:

$$\lambda = \frac{2p}{Aq - C}$$

und endlich:

$$x = -\frac{2pA}{Aq - C} \quad y = \frac{2pB}{Aq - C}$$

Für $A = 0$ hat man

$$x = 0 \quad y = -\frac{2pB}{C}$$

es ist somit

$$B(u_1 + u_2) + C = 0 \quad \text{oder} \\ u_1 + u_2 = -\frac{C}{B} = \text{const} = K$$

die Gleichung eines auf der y -Axe (Hauptscheiteltangente des F -Kegelschnittes) liegenden Punktes, dessen Ordinate den Werth:

$$y = -2p \frac{B}{C} = -2pK$$

besitzt.

Für $B = 0$ ist:

$$x = -\frac{2pA}{Aq - C} \quad y = 0$$

woraus wir schliessen, dass die Gleichung

$$Au_1u_2 + C = 0 \quad \text{oder} \quad u_1u_2 = -\frac{C}{A} = K$$

die Gleichung eines auf der x -Axe (der Hauptaxe des F -Kegelschnittes) liegenden Punktes ist, dessen Abscisse den Werth hat:

$$x = \frac{-2pA}{Aq - C} = -\frac{2p}{q + K}$$

Für $C = 0$ hat man

$$x = -\frac{2p}{q} \quad y = \frac{2p}{q} \cdot \frac{B}{A}$$

Hieraus schliessen wir, dass die Gleichung

$$Au_1u_2 + B(u_1 + u_2) = 0$$

einem Punkte angehört, welcher auf der zur y -Axe in der Entfernung

$-\frac{2p}{q}$ gezogenen Parallelen liegt. Dies ist die Tangente des Kegelschnittes im zweiten Hauptscheitel.

Für $A=0$, $B=0$ erhalten wir als Punktgleichung

$$C=0$$

und für die Coordinaten des betreffenden Punktes: $x=0$ $y=0$,
d. h. die Gleichung $C=0$ stellt den Scheitel des Fundamentalkegel-
schnittes dar welchen wir zum Coordinatenanfangspunkt gewählt hatten.

Für $B=0$ $C=0$ lautet die Punktgleichung

$$Au_1u_2=0$$

und entspricht jenem Punkte der x -Axe, für welchen $x = -\frac{2p}{q}$ ist,
d. i. der zweite Hauptscheitel des F -Kegelschnittes.

Für $A=0$ $C=0$ erhält man

$$B(u_1+u_2)=0,$$

welches die Gleichung des auf der y -Axe unendlich weiter Punktes
ist, denn man erhält $y = \infty$.

Aus den Gleichungen für x und y folgt, dass der Punkt ein
unendlich weiter sein wird, wenn $U=Aq$ ist, so dass die Gleichung
eines solchen Punktes lautet

$$A(u_1u_2+q)+B(u_1+u_2)=0$$

hiebei hat man zur Bestimmung der Richtung, in welcher der un-
endlich weite Punkt sich befindet, die Gleichung:

$$\frac{y}{x} = -\frac{B}{A}.$$

Für die imaginären Kreispunkte muss somit sein

$$-\frac{B}{A} = \pm i,$$

so dass deren Gleichung lautet:

$$u_1u_2+q = \pm i(u_1+u_2).$$

Für die Scheitel der Nebenaxe haben wir nach Früherem

$$y = \pm \frac{p}{\sqrt{-q}} \quad x = -\frac{p}{q};$$

soll also die Gleichung $Au_1u_2+B(u_1+u_2)+C=0$ einem der beiden
Nebenscheitel angehören, so muss sein:

$$\frac{p}{q} = \frac{2pA}{Aq-C} \quad \pm \frac{p}{\sqrt{-q}} = \frac{2pB}{Aq-C}$$

oder aber:

$$\frac{A}{C} = -\frac{1}{q} \quad \frac{B}{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{-q}},$$

so dass die Gleichung dieser Scheitel lautet:

$$-\frac{1}{q}(u_1u_2) \mp \frac{1}{\sqrt{-q}}(u_1+u_2) + 1 = 0$$

oder

$$u_1 u_2 \pm \sqrt{-q(u_1 + u_2)} - q = 0,$$

woraus folgt $u_1 = \pm \sqrt{-q}$ und $u_2 = \text{beliebig}$.

Die Gleichung des Curvenmittelpunktes lautet: $u_1 u_2 = q$, jene des auf der x -Axe ∞ weiten Punktes $u_1 u_2 + q = 0$ und jene des auf der y -Axe unendlich weiten Punktes $u_1 + u_2 = 0$.

16. Gerade durch zwei Punkte.

Will man die Coordinaten der Geraden bestimmen, welche durch zwei Punkte:

$$(1) \quad A_1 u_1 u_2 + B_1 (u_1 + u_2) C_1 = 0,$$

$$(2) \quad A_2 u_1 u_2 + B_2 (u_1 + u_2) + C_2 = 0$$

bestimmt ist, so bemerke man, dass dieselben den beiden Punktgleichungen genügen müssen. Aus diesen folgt:

$$u_1 u_2 = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

$$u_1 + u_2 = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

und hieraus schliessen wir, dass die Coordinaten der Geraden 1, 2 die Wurzeln der Gleichung:

$$u^2 - \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} u + \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = 0$$

oder aber:

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) u^2 + (A_1 C_2 - A_2 C_1) u + (B_1 C_2 - B_2 C_1) = 0$$

sind.

Die beiden Wurzeln werden gleich, d. h. die Punkte 1, 2 befinden sich auf einer Tangente des Kegelschnittes, wenn:

$$(A_2 C_1 - A_1 C_2)^2 = 4(A_1 B_2 - A_2 B_1)(B_1 C_2 - B_2 C_1).$$

Löst man die Punktgleichung nach u_1 auf, so ergibt sich

$$u_1 = -\frac{B u_2 + C}{A u_2 + B} = -\frac{B}{A} \frac{u_2 + \frac{C}{B}}{u_2 + \frac{B}{A}}$$

welcher Werth von u_2 ganz unabhängig sein wird, wenn $\frac{C}{B} = \frac{B}{A}$

oder $B^2 = AC$ ist; denn dann ist $u_1 = -\frac{B}{A}$ also eine constante Grösse. Hieraus folgt, dass die Gleichung

$$A u_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0$$

einem auf dem F -Kegelschnitte gelegenen Punkte angehört, wenn $B^2 = AC$ ist. Bezeichnet man $\sqrt{\frac{C}{A}}$ mit ϱ , dann ist die Gleichung des Punktes

$$u_1 u_2 + \varrho(u_1 + u_2) + \varrho^2 = 0.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten werden dann:

$$x = \frac{2p}{\varrho^2 - q} \qquad y = \frac{2p\varrho}{\varrho^2 - q},$$

woraus wir sehen, dass es nach I in der That ein Punkt des Fundamentalkegelschnittes ist und zwar jener, dessen Parameter ϱ ist. Dem Früheren gemäss können wir auch sagen, dass die Gleichung des Curvenpunktes, dessen Parameter ϱ ist, lautet

$$u_1 u_2 + \varrho(u_1 + u_2) + \varrho^2 = 0.$$

17. Fortsetzung.

Den Fundamentalkegelschnitt kann man in ähnlicher Weise zur Einführung symmetrischer Punktcoordinaten verwenden.

Jedem Punkte des Fundamentalkegelschnittes entspricht nämlich ein Parameterwerth, welchen man dann als den Parameter der dem Punkte zugehörigen Tangente betrachten kann. Jeder Parameterwerth (u) bestimmt dann sowohl einen Punkt (u) des Fundamentalkegelschnittes als auch eine Tangente (u), nämlich jene, welche den Punkt (u) zum Berührungspunkte hat. Als Coordinaten irgend einer Geraden in der Ebene des F -Kegelschnittes haben wir die Parameter $u_1 u_2$ der beiden Punkte gewählt, in denen die Gerade den F -Kegelschnitt trifft. In ähnlicher Weise können wir als symmetrische (konische) Coordinaten irgend eines Punktes (xy) in der Ebene des F -Kegelschnittes die Parameter $u_1 u_2$ der beiden durch den Punkt an den F -Kegelschnitt gehenden Tangenten betrachten.

Aus der Definition der Coordinaten folgt sofort, dass der Punkt ($u_1 u_2$) der Pol der Geraden ($u_1 u_2$) ist. Wenn also

$$F(u_1 u_2) = 0$$

in Punktcoordinaten die Gleichung einer Ortscurve ist, so ist dieselbe Gleichung, als in Liniencoordinaten lautend aufgefasst die Gleichung der Umhüllungscurve, welche die Polarfigur jener Ortscurve in Bezug auf den F -Kegelschnitt ist.

Nach Gleichung XI Art 9 sind die symmetrischen Coordinaten eines Punktes (x, y) gegeben durch die Gleichungen:

$$u_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x}$$

$$u_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x}$$

Diese Transformationsgleichungen lassen sich vereinfachen, wenn man sie für symmetrische Gleichungen verwendet; denn in solchen kann man alle Glieder durch die Summe und das Produkt der beiden Coordinaten ausdrücken und für diese hat man:

$$u_1 + u_2 = \frac{2y}{x}$$

$$u_1 u_2 = \frac{2p + qx}{x}$$

Ein Punkt des F -Kegelschnittes ist charakterisiert durch die Bedingung:

$$u_1 = u_2 = \frac{y}{x}$$

Was einige spezielle Punktlagen betrifft, so wären etwa folgende erwähnenswerth.

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind

$$u_1 = +\sqrt{q} \qquad u_2 = -\sqrt{q}$$

denn die beiden durch den Mittelpunkt gehenden Tangenten berühren den F -Kegelschnitt in den unendlich weiten Punkten, denen die Parameter $+\sqrt{q}$, $-\sqrt{q}$ zugehören.

Die Coordinaten der imaginären Kreispunkte erhalten wir, wenn wir $x = \infty$ $y = \infty$ und $\frac{y}{x} = \pm i$ setzt; dies gibt für den Kreispunkt $+i$ die Coordinaten:

$$u_1 = i(1 + \sqrt{q+1})$$

$$u_2 = i(1 - \sqrt{q+1})$$

und für den Kreispunkt $-i$:

$$u_1 = -i(1 + \sqrt{q+1})$$

$$u_2 = -i(1 - \sqrt{q+1})$$

Die Coordinaten der reellen Brennpunkte erhält man wenn

$$x = \frac{p}{1 \pm \sqrt{q+1}} \quad y = 0$$

gesetzt wird; dies gibt

$$u_1 = i(\sqrt{q+1} + 1)$$

$$u_2 = -i(\sqrt{q+1} + 1)$$

und

$$u_1 = i(\sqrt{q+1} - 1)$$

$$u_2 = -i(\sqrt{q+1} - 1)$$

Zur Transformation der rechtwinkligen Coordinanten (xy) in symmetrische $(u_1 u_2)$ benützen wir die Gleichungen für $u_1 u_2$ und $(u_1 + u_2)$, aus denen man erhält:

$$x = \frac{2p}{u_1 u_2 - q}$$

$$y = \frac{p(u_1 + u_2)}{u_1 u_2 - q}$$

Diese Gleichungen gehen sofort in die Gleichungen I über, wenn $u_2 = u_1 = u$ gesetzt wird.

18. Gleichung einer Geraden.

Aus dem früher gesagten folgt unmittelbar, dass die Gleichung einer Geraden lautet

$$Au_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0$$

und zwar ist es die Gleichung einer Geraden, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten lautet

$$A\left(\frac{2p + qx}{x}\right) + B \cdot \frac{2y}{x} + C = 0$$

oder

$$(Aq + C)x + 2By + 2Ap = 0,$$

so dass also ihre Richtungsconstante den Werth hat:

$$-\frac{Aq + C}{2B}$$

und die Axenabschnitte:

$$-\frac{2Ap}{Aq + E}, \quad -\frac{Ap}{B}$$

Für die Schnittpunkte der Geraden mit dem F -Kegelschnitte hat man $u_2 = u_1 = u$ oder also:

$$Au^2 + 2Bu + C = 0,$$

woraus folgt

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Die Gerade wird somit eine Tangente, wenn $B^2 = AC$, so dass die Gleichung einer solchen lautet

$$Au_1 u_2 + AC(u_1 + u_2) + C = 0,$$

woraus wir, wie im Art. 16, folgern würden, dass u_2 unabhängig von u_1 und constant ist (oder umgekehrt).

Die Gleichung der unendlich fernen Geraden lautet

$$u_1 u_2 - q = 0.$$

Die Gleichung

$$A u_1 u_2 + B (u_1 + u_2) + C = 0$$

wird einem Durchmesser angehören, wenn die Coordinaten des Mittelpunktes $(+\sqrt{q}, -\sqrt{q})$ ihr genügen, dies gibt die Bedingung

$$C = Aq$$

so dass die Gleichung eines Durchmessers lautet:

$$A(u_1 u_2 + q) + B(u_1 + u_2) = 0$$

was mit Art. 15 vollkommen übereinstimmt.

Die Richtungsconstante des Durchmessers hat den Werth:

$$-\frac{Aq}{B}$$

Es werden somit zwei Durchmesser

$$A(u_1 u_2 + q) + B(u_1 + u_2) = 0$$

$$A'(u_1 u_2 + q) + B_1(u_1 + u_2) = 0$$

nach Gl. X' conjugiert sein, wenn

$$\frac{AA'q^2}{BB'} = q$$

oder:

$$\frac{BB'}{AA'} = q$$

Der Durchmesser wird zur Asymptote, wenn

$$-\frac{Aq}{B} = \pm \sqrt{q}$$

oder

$$A\sqrt{q} = \pm B$$

so dass die Asymptotengleichungen lauten:

$$(u_1 u_2 + q) \pm \sqrt{q}(u_1 + u_2) = 0.$$

19. Gerade durch einen und durch zwei Punkte.

Die Gleichung einer Geraden, welche durch den gegebenen Punkt $(u_1' u_2')$ hindurchgeht, folgt aus den Gleichungen

$$A u_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0$$

$$A u_1' u_2' + B(u_1' + u_2') + C = 0$$

denn durch Subtraktion erhält man:

$$A(u_1 u_2 - u_1' u_2') + B[(u_1 + u_2) - (u_1' + u_2')] = 0.$$

Die durch zwei Punkte $(u_1' u_2')$ $(u_1'' u_2'')$ gehende Gerade wird eine Gleichung haben, welche man durch Elimination von A, B, C aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} Au_1u_2 + B(u_1 + u_2) + C &= 0 \\ Au_1'u_2' + B(u_1' + u_2') + C &= 0 \\ Au_1''u_2'' + B(u_1'' + u_2'') + C &= 0 \end{aligned}$$

erhält. Das Resultat lässt sich schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 + u_2 & u_1u_2 \\ 1 & u_1' + u_2' & u_1'u_2' \\ 1 & u_1'' + u_2'' & u_1''u_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Siehe Hesse: Anal. Geom. d. Raum. die Bedingung, dass drei Paare eine Involution bilden.

Dies ist auch die Bedingung, dass die drei Punkte (u_1u_2) $(u_1'u_2')$ $(u_1''u_2'')$ in einer Geraden liegen.

20. Schnittpunkt, Neigung zweier Geraden. Parallele und senkrechte Gerade.

Zwei Gerade:

$$\begin{aligned} A_1u_1u_2 + B_1(u_1 + u_2) + C_1 &= 0 \\ A_2u_1u_2 + B_2(u_1 + u_2) + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

schneiden sich in einem Punkte, dessen Coordinaten die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} u + \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = 0$$

sind (vergl. Art. 16).

Da die Richtungsconstanten der beiden Geraden die Werthe haben:

$$-\frac{A_1q + C_1}{2B_1}, \quad -\frac{A_2q + C_2}{2B_2}$$

so hat man für den Winkel ν der Geraden die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\frac{A_2q + C_2}{2B_2} - \frac{A_1q + C_1}{2B_1}}{1 + \frac{(A_1q + C_1)(A_2q + C_2)}{4B_1B_2}}$$

oder aber:

$$\operatorname{tg} \nu = q \frac{(C_2B_1 - C_1B_2) + q(A_2B_1 - A_1B_2)}{4B_1B_2 + (A_1q + C_1)(A_2q + C_2)}$$

Aus dieser Gleichung folgt als Bedingung für die Parallelität der Geraden:

$$(C_2B_1 - C_1B_2) + q(A_2B_1 - A_1B_2) = 0$$

und als Bedingung für die Perpendikularität:

$$4B_1B_2 + (A_1q + C_1)(A_2q + C_2) = 0$$

Setzt man in dieser Gleichung $B_2 = B_1$ $C_2 = C_1$ $A_2 = A_1$, so

erhält man für die Coefficienten der Gleichung einer Geraden, welche durch einen der imaginären Kreispunkte hindurchgeht, die Bedingung

$$4B^2 + (Aq + C)^2 = 0$$

21. Entfernung eines Punktes von einer Geraden.

Die Gleichung der Geraden

$$M = A(u_1 u_2) + B(u_1 + u_2) + C = 0$$

lautet in rechtwinkligen Coordinaten nach früheren:

$$(Aq + C)x + 2By + 2Ap = 0$$

und wird somit in der Normalform lauten

$$\frac{(Aq + C)x + 2By + 2Ap}{\pm \sqrt{4B^2 + (Aq + C)^2}}$$

wobei man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem A negativ oder positiv ist.

Die Entfernung irgend eines Punktes x_1, y_1 von der Geraden hat dann bekanntlich den Werth:

$$d = - \left[\frac{(Aq + C)x_1 + 2By_1 + 2Ap}{\pm \sqrt{4B^2 + (Aq + C)^2}} \right]$$

oder:

$$d = - \left[\frac{A \left(\frac{qx_1 + 2p}{x_1} \right) + B \frac{y_1}{x_1} + C}{\pm \sqrt{4B^2 + (Aq + C)^2}} \right] x_1$$

oder wenn man mit u_1', u_2' die symmetrischen Coordinaten des Punktes bezeichnet

$$d = - \left[\frac{Au_1' u_2' + B(u_1' + u_2') + C}{\pm \sqrt{4B^2 + (Aq + C)^2}} \right] \frac{2p}{u_1' u_2' - q}$$

Dies kann man kürzer schreiben, wenn man mit M' den Werth der linken Seite der geraden Gleichung bezeichnet, nachdem in denselben statt der laufenden Coordinaten u_1, u_2 die Coordinaten u_1', u_2' des betreffenden Punktes gesetzt worden sind. Man hat dann schliesslich:

$$d = \pm \frac{M'}{u_1' u_2' - q} \cdot \frac{2p}{\sqrt{4B^2 + (Aq + C)^2}}$$

wobei jenes Zeichen zu nehmen ist, welches mit dem Vorzeichen von A übereinstimmt.

Die Gerade ist eine Tangente, wenn $B^2 = AC$ ist und man erhält für die Entfernungen der beiden Brennpunkte von der Tangente nach der letzten Formel die Ausdrücke:

$$d = \frac{A(\sqrt{q+1} + 1)^2 + C}{(\sqrt{q+1} + 1)^2 - q} \cdot \frac{2p}{\sqrt{4AC + (Aq + C)^2}}$$

$$d' = \frac{A(\sqrt{q+1}-1)^2 + C}{(\sqrt{q+1}-1)^2 - q} \cdot \frac{2p}{\sqrt{4AC + (Aq + C)^2}}$$

und hieraus nach einfacher Umformung

$$d \cdot d' = -\frac{p^2}{q}$$

was die bekannte Eigenschaft ist, dass das Rechteck aus den Entfernungen der Tangente von den Brennpunkten constant, nämlich dem Quadrate über der halben Nebenaxe gleich ist.

Aus der Formel für d ergibt sich als Gleichung der Linie, welche durch den Durchschnittspunkt zweier Linien

$$M_1 = 0 \quad M_2 = 0$$

hindurchgeht und ihren Winkel nach dem Verhältnisse K theilt, die Gleichung:

$$\frac{\pm M_1}{\sqrt{4B_1^2 + (A_1q + C_1)^2}} = \frac{\pm KM_2}{\sqrt{4B_2^2 + (A_2q + C_2)^2}}$$

Somit die Gleichungen der beiden Winkelhalbierenden

$$\frac{M_1}{\sqrt{4B_1^2 + (A_1q + C_1)^2}} = \pm \frac{M_2}{\sqrt{4B_2^2 + (A_2q + C_2)^2}}$$

Oft könnte es vortheilhaft sein, die Entfernung eines Punktes von einer Geraden sowohl durch die Coördinaten des Punktes $u_1 u_2$ als auch durch jene der Geraden $u_1' u_2'$ auszudrücken.

Die Coördinaten $u_1' u_2'$ der Geraden

$$Au_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$Au^2 + 2Bu + C = 0$$

denn es sind die Parameter der beiden Punkte, in denen die Gerade den F -Kegelschnitt schneidet und für diese ist $u_2 = u_1 = u$.

Ebenso wären die Coördinaten des durch die Gleichung $Au_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C = 0$ bestimmten Punktes, die Wurzeln der Gleichung $Au^2 + 2Bu + C = 0$, so dass

$$\frac{B}{A} = -\frac{1}{q}(u_1' + u_2')$$

$$\frac{C}{A} = u_1' u_2'$$

Die Entfernung des Punktes $(u_1 u_2)$ von der Geraden hat nun den Werth:

$$d = \pm \frac{Au_1 u_2 + B(u_1 + u_2) + C}{u_1 u_2 - q} \cdot \frac{2p}{\sqrt{4B^2 + (Aq + C)^2}}$$

oder nachdem man mit A dividirt und für $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ obige Werthe gesetzt:

$$d = \frac{2p \left[u_1 u_2 - \frac{1}{2} (u_1 + u_2) (u_1' + u_2') + u_1' u_2' \right]}{(u_1 u_2 - q) \sqrt{4(u_1' + u_2')^2 + (q + u_1' u_2')^2}}$$

als Entfernung des Punktes $(u_1 u_2)$ von der Geraden $(u_1' u_2')$.

Die Gerade wird die Polare des Punktes, wenn $u_1 = u_1'$ $u_2 = u_2'$ wird; für die Entfernung des Poles $(u_1 u_2)$ von seiner Polaren haben wir somit die Gleichung:

$$d = \frac{-p (u_1 - u_2)^2}{(u_1 u_2 - q) \sqrt{4(u_1 + u_2)^2 + (u_1 u_2 + q)^2}}$$

Es ist zugleich die Entfernung der Geraden $(u_1 u_2)$ von ihrem Pole.

22. *Der Ort der Punkte, welche von ihren Polaren constanten Abstand besitzen.*

Die Gleichung des Ortes jener Punkte, welche von ihren resp. Polaren den gegebenen constanten Abstand c besitzen, ist nach obigem

$$c = \frac{-p (u_1 - u_2)^2}{u_1 u_2 - q \sqrt{4(u_1 + u_2)^2 + (u_1 u_2 + q)^2}}$$

Wenn man diese Gleichung zum Quadrate erhebt und dann auf rechtwinkelige Coordinaten zurückkehrt mittelst der bekannten Gleichungen

$$u_1 - u_2 = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px - qx^2}}{x}$$

$$u_1 + u_2 = \frac{2y}{x}$$

$$u_1 u_2 = \frac{2p + qx}{x}$$

so erhält man nach leichter Reduktion die Gleichung:

$$c^2 = \frac{(y^2 - 2px - qx^2)^2}{4y^2 + (p + qx)^2}$$

Es ist dies eine Curve vierter Ordnung, welche die unendlich weite Gerade zur Doppeltangente hat und zwar berührt sie diese Gerade in denselben 2 Punkten, in denen diese Gerade von dem F -Kegelschnitt geschnitten wird.

23. Wir wollen in dem Folgenden zeigen, wie sich die symme-

trischen Kegelschnittscoordinaten zur Lösung verschiedener Aufgaben verwenden lassen.

Wenn u, u_1, u_2 drei Punkte des Fundamentalkegelschnittes sind, so hat man nach der Formel des Artikels (14) für den Winkel $\widehat{u_1 u u_2}$ die Gleichung:

$$tg \nu = \frac{(uu_1 + q)(u + u_2) - (uu_2 + q)(u + u_1)}{(u + u_1)(u + u_2) + (uu_1 + q)(uu_2 + q)} = \frac{(u_1 - u_2)(u^2 - q)}{u_1 u_2 (1 + u^2) + (u_1 + u_2)(1 + q)u + (u^2 + q^2)}$$

welche man erhält, wenn man in der Formel des Art. 14 statt u_1, u_2, u_1', u_2' resp. u_1, u, u_1, u_2 schreibt.

Wenn der Winkel ν ein rechter ist, so muss:

$$u_1 u_2 (1 + u^2) + (u_1 + u_2)(1 + q)u + (u^2 + q^2) = 0$$

sein. Diese Gleichung ist für ein constantes u die Gleichung eines Punktes (in Liniencoordinaten $u_1 u_2$) und wir haben somit den bekannten Satz:

„Dreht sich ein in einem Kegelschnitt eingeschriebenes rechtwinkeliges Dreieck $u_1 u u_2$ um die feste Spitze u des rechten Winkels, so dreht sich dessen Hypothenuse $u_1 u_2$ um einen festen Punkt.“

Die Coordinaten dieses festen Punktes, u' wollen wir ihn nennen, sind nach Art. 21. die Wurzeln der Gleichung

$$u'^2 (1 + u^2) + 2u'(1 + q)u + (u^2 + q^2) = 0$$

d. i. also:

$$u' = \frac{-(1 + q)u \pm \sqrt{(1 + q)^2 u^2 - (1 + u^2)(u^2 + q^2)}}{(1 + u^2)} = \frac{-(1 + q)u \pm i(u^2 - q)}{(1 + u^2)}$$

Für das Produkt und die Summe der Coordinaten dieses Punktes u' haben wir die Ausdrücke

$$u'_1 + u'_2 = \frac{-2(1 + q)u}{1 + u^2}$$

$$u'_1 u'_2 = \frac{u^2 + q^2}{1 + u^2}$$

so dass also die rechtwinkeligen Coordinaten xy die Werthe haben

$$x = \frac{2p}{\frac{u^2 + q^2}{1 + u^2} - q} = \frac{2p(1 + u^2)}{(1 - q)(u^2 - q)}$$

$$y = \frac{-p \frac{2(1+q)u}{1+u^2}}{\frac{u^2+q^2}{1+u^2}-q} = -\frac{2p(1+q)}{(1-q)} \cdot \frac{u}{u^2-q}$$

Der Punkt u' befindet sich auf der Normale des Punktes u , wie unmittelbar aus seiner Entstehungsweise hervorgeht und wie man sich auch leicht durch Rechnung überzeugt, denn man findet für die Richtungsconstante der Geraden $\overline{uu'}$ den Werth $-\frac{2u}{u^2+q}$ während jene der Tangente von u nach III. $\frac{n^2+q}{2u}$ ist, zum Zeichen, dass $\overline{uu'}$ die Normale des F -Kegelschnittes im Punkte u ist.

Der Ort der Punkte u' ist, wie aus der Form von x und y hervorgeht, ein Kegelschnitt.

Um die Gleichung desselben zu erhalten, müssen wir aus den beiden Gleichungen für x und y den Parameter u eliminiren. Zunächst folgt aus der ersten der beiden Gleichungen:

$$\frac{2p}{1-q} - x = \frac{2p(1+q)}{(1-q)(u^2-q)}$$

so dass

$$u = \frac{y}{\frac{2p}{1-q} - x}$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck von y , so erhält man zunächst die Gleichung:

$$y^2 - q \left(\frac{2p}{1-q} - x \right)^2 + \frac{2p(1+q)}{(1-q)} \left(\frac{2p}{1-q} - x \right) = 0$$

oder nach einfacher Umformung:

$$y^2 = qx^2 + 2px - \frac{4p^2}{(1-q)^2}$$

woraus wir erkennen, dass dieser Kegelschnitt ähnlich und ähnlich gelegen ist zum F -Kegelschnitte. Für die Axen dieses Kegelschnittes ergeben sich die Werthe:

$$\frac{p(1+q)}{q(1-q)}, \quad \frac{p(1+q)}{(1-q)\sqrt{-q}}$$

NB. Die Axen des F -Kegelschnittes sind: $\frac{p}{q}, \frac{p}{\sqrt{-q}}$, so dass der Ähnlichkeits-Coefficient $\frac{1+q}{1-q}$ ist.

Aufgabe. Man entwickle die Gleichung des Kegelschnittes, welcher von der Geraden $\overline{u_1 u_2}$ eingehüllt wird, wenn der constante, dem F -Kegelschnitte eingeschriebene Winkel $u_1 \widehat{u_2}$ um den festen Scheitel u rotiert.

24. Die Sätze von Pascal und Brianchon.

Ist dem Fundamental-Kegelschnitte ein Sechseck 1 2 3 4 5 6 eingeschrieben, so liegen die drei Schnittpunkte I, II, III der drei Gegenseitenpaare $\overline{12} \overline{45}$; $\overline{23} \overline{56}$; $\overline{34}$, $\overline{61}$ in einer und derselben Geraden. Das ist der Satz von Pascal.

Wenn wir die Coordinaten der Ecken des Sechsecks kurz mit den Ziffern 1 2 3 4 5 6 bezeichnen, so ist die Gleichung des Punktes I, da er der Schnittpunkt der Geraden 12 und 45 ist

$$\text{I} \dots \begin{vmatrix} 1 & u_1 + u_2 & u_1 u_2 \\ 1 & 1 + 2 & 1.2 \\ 1 & 4 + 5 & 4.5 \end{vmatrix} = 0$$

ebenso die Gleichungen von II und III:

$$\text{II} \dots \begin{vmatrix} 1 & u_1 + u_2 & u_1 u_2 \\ 1 & 2 + 3 & 2.3 \\ 1 & 5 + 6 & 5.6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{III} \dots \begin{vmatrix} 1 & u_1 + u_2 & u_1 u_2 \\ 1 & 3 + 4 & 3.4 \\ 1 & 6 + 1 & 6.1 \end{vmatrix} = 0$$

oder aber wenn man entwickelt:

$$(1 + 2) \cdot 4.5 - (4 + 5) \cdot 1.2 - (u_1 + u_2) [4.5 - 1.2] + u_1 u_2 [(4 + 5) - (1 + 2)] = 0 \dots \text{I}$$

$$(2 + 3) \cdot 5.6 - (5 + 6) \cdot 2.3 - (u_1 + u_2) [5.6 - 2.3] + u_1 u_2 [(5 + 6) - (2 + 3)] = 0 \dots \text{II}$$

$$(3 + 4) \cdot 6.1 - (6 + 1) \cdot 3.4 - (u_1 + u_2) [6.1 - 3.4] + u_1 u_2 [(6 + 1) - (3 + 4)] = 0 \dots \text{III}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $(3 - 6)$, $(4 - 1)$, $(5 - 2)$ und addirt, so erhält man linkerhand identisch Null zur Summe zum Zeichen, dass die Punkte I, II, III in einer und derselben Geraden liegen.

Wenn man sich ein dem Kegelschnitte umschriebenes Sechseit denkt, dessen Seiten die Parameterwerthe 1 2 3 4 5 6 besitzen, so sind die Gleichungen I, II, III die Gleichungen der drei Geraden, welche die Gegeneckenpaare (12) (45); (23) (56); (34) (61) mit ein-

ander verbinden und es ist somit das Vorhergehende zugleich der Beweis des Satzes von Brianchon:

„Die drei Linien, welche die Gegenecken eines, einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsseits verbinden, gehen durch denselben Punkt.“

Die symmetrischen Coordinaten der Pascal-Linie [I II III] des Sechsecks 1 2 3 4 5 6 (oder des Brianchonpunktes des Sechsseites 1 2 3 4 5 6) sind nach Art. 16 die Wurzeln der Gleichung:

$$(\alpha - \alpha')u^2 + (\beta - \beta')u + (\gamma - \gamma') = 0$$

hiebei ist

$$\alpha = (4 + 5 - 1 - 2)(2.3 - 5.6)$$

$$\beta = (4 + 5 - 1 - 2)[(2 + 3)5.6 - (5 + 6)2.3]$$

$$\gamma = (12 - 45)[(2 + 3)5.6 - (5 + 6)2.3]$$

und $\alpha' \beta' \gamma'$ entsteht aus $\alpha \beta \gamma$ durch eine cyklische Permutation. Wenn durch eine eben solche $\alpha'' \beta'' \gamma''$ aus $\alpha' \beta' \gamma'$ entsteht, so findet man für u auch die quadratischen Gleichungen

$$(\alpha' - \alpha'')u^2 + (\beta' - \beta'')u + (\gamma' - \gamma'') = 0$$

$$(\alpha'' - \alpha)u^2 + (\beta'' - \beta)u + (\gamma'' - \gamma) = 0$$

welche von einander abgezogen geben:

$$(\alpha + \alpha')u^2 + (\beta + \beta')u + (\gamma + \gamma') = 0$$

und somit auch:

$$(\alpha' + \alpha'')u^2 + (\beta' + \beta'')u + (\gamma' + \gamma'') = 0$$

$$(\alpha'' + \alpha)u^2 + (\beta'' + \beta)u + (\gamma'' + \gamma) = 0$$

Durch Addition der letzten drei Gleichungen und Division durch 2 erhält man für u die Gleichung:

$$(\alpha + \alpha' + \alpha'')u^2 + (\beta + \beta' + \beta'')u + (\gamma - \gamma' + \gamma'') = 0$$

Nun findet man leicht:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = [124 + 235 + 346 + 451 + 562 + 613] \\ - [1^22 + 2^23 + 3^24 + 4^25 + 5^26 + 6^21]$$

$$\beta + \beta' + \beta'' = -2[2356 + 3461 + 4512] \\ + 14(1-4)(2-5) + 25(2-5)(3-6) + 36(3-6)(4-1) \\ + 14(3^2 + 6^2) + 25(4^2 + 1^2) + 36(5^2 + 2^2)$$

$$\gamma + \gamma' + \gamma'' = 123456 \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right] \\ - [1234(3-4) + 2345(4-5) + 3456(5-6) + 4561(6-1) + \\ 5612(1-2) + 6123(2-3)] \\ - [135(2^2 + 4^2 + 6^2) + 246(1^2 + 3^2 + 5^2)]$$

Wenn man je zwei Ecken des Sechsecks (oder je zwei Seiten des Sechsseites) zusammenfallen lässt, so ergibt sich ein, dem

F-Kegelschnitte ein- (um-) schriebenes Dreieck 1 2 3 und es werden sich die Seiten mit den Tangenten der Gegenecken in drei Punkten einer Geraden schneiden (o. die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten werden durch einen Punkt gehen), deren (dessen) Coordinaten die Wurzeln der Gleichung sind:

$$u^2 \Sigma\alpha + u \Sigma\beta + \Sigma\gamma = 0$$

wobei sich leicht ergibt (wenn man $2 = 1 \ 4 = 3 \ 6 = 5$ setzt und hierauf statt 1 3 5, 1 2 3 schreibt):

$$\Sigma\alpha = 3[1.2.3] - [1^3 + 2^3 + 3^3]$$

$$\Sigma\beta = -3[1.2.3] + [1 + 2 + 3][12 + 23 + 31 - 123]$$

$$\Sigma\gamma = 3[123(12 + 23 + 31 - 1^2 - 2^2 - 3^2)]$$

wobei nur die in den eckigen Klammern auftretenden Ziffern als Parameterwerthe aufzufassen sind.

25. *Durchschnitte des F-Kegelschnittes mit einem beliebigen Kreise.*

Um die Parameter der Durchschnittspunkte des *F*-Kegelschnittes mit irgend einem Kreise:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2\beta y + m^2 = 0$$

zu finden, führen wir in die Kreisgleichung die Werthe:

$$x = \frac{2p}{u^2 - q} \quad y = \frac{2pu}{u^2 - q}$$

ein, wodurch wir zur Bestimmung von *u* die Gleichung erhalten:

$$\frac{4p^2}{(u^2 - q)^2} + \frac{4p^2 u^2}{(u^2 - q)^2} - \frac{4ap}{u^2 - q} - \frac{4\beta pu}{u^2 - q} + m^2 = 0$$

oder nach leichter Reduktion:

$$u^4 - \frac{p\beta}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} u^3 + \left[\frac{p^2 - p\alpha - \frac{qm^2}{2}}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} \right] u^2 + \frac{pq\beta}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} u + \left[\frac{p^2 + pq\alpha + \left(\frac{m}{2}\right)^2 q^2}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} \right] = 0$$

Die vier Wurzeln $u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4$ dieser biquadratischen Gleichung sind die Parameter der Durchschnittspunkte des *F*-Kegelschnittes mit obigem Kreise.

Bezeichnet man die Summe dieser vier Parameter mit $\Sigma(u)$ und die Summe aller Ternen mit $\Sigma(uuu)$, so hat man bekanntlich:

$$\Sigma(u) = \frac{p\beta}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} \quad \Sigma(uuu) = -\frac{pq\beta}{\left(\frac{m}{2}\right)^2}$$

woraus folgt:

$$\Sigma(uuu) + q\Sigma(u) = 0 \dots (\alpha)$$

Diese Gleichung drückt somit (da in ihr keine Elemente der Kreisgleichung vorkommen) die allgemeine Bedingung dafür aus, dass die vier Punkte $u_1 u_2 u_3 u_4$ des F -Kegelschnittes auf einem und demselben Kreise liegen.

Schreibt man die Gleichung (α) in der Form:

$$(u_1 u_2 + q)(u_3 + u_4) + (u_3 u_4 + q)(u_1 + u_2) = 0$$

oder

$$\frac{u_1 u_2 + q}{u_1 + u_2} = -\frac{u_3 u_4 + q}{u_3 + u_4} \dots (\alpha')$$

und berücksichtigt man, dass (nach Gleichung III Art. 3) linker und rechter Hand die resp. positive und negative Richtungsconstante der Geraden $\overline{u_1 u_2}$, $\overline{u_3 u_4}$ stehen, so ergibt sich der bekannte Satz:

„Je zwei Gegenseiten des Viereckes $u_1 u_2 u_3 u_4$, dessen Scheitel die Schnitte eines Kegelschnittes mit irgend einem Kreise sind, bilden mit den Axen des Kegelschnittes gleiche Winkel.“

Es ist bekannt, wie einfach sich aus diesem Satze eine Construction des Krümmungskreises für Kegelschnitte ergibt.

Wenn man den Kegelschnitt mittelst eines beliebigen Kreises in den vier Punkten $u_1 u_2 u_3 u_4$ schneidet, ferner durch $u_1 u_2$ und ebenso durch $u_3 u_4$ neue Kreise legt, welche den Kegelschnitt, resp. in $u_3' u_4'$ und $u_1' u_2'$ schneiden mögen, so liegen die neuen vier Schnittpunkte $u_1' u_2' u_3' u_4'$ abermals auf einer und derselben Kreispherie.

Denn es ist nach (α') :

$$\begin{aligned} \frac{u_1 u_2 + q}{u_1 + u_2} &= -\frac{u_3 u_4 + q}{u_3 + u_4} \\ \frac{u_1 u_2 + q}{u_1 + u_2} &= -\frac{u_2' u_3' + q}{u_3' + u_4'} \\ \frac{u_3 u_4 + q}{u_3 + u_4} &= -\frac{u_1' u_2' + q}{u_1' + u_2'} \end{aligned}$$

woraus aber sofort folgt, dass auch:

$$\frac{u_1' u_2' + q}{u_1' + u_2'} = -\frac{u_3' u_4' + q}{u_3' + u_4'}$$

d. h., dass auch die vier Punkte $u_1' u_2' u_3' u_4'$ auf einem und demselben Kreise liegen.

26. Krümmungskreise der Kegelschnitte.

Wenn von den vier Schnittpunkten $u_1 u_2 u_3 u_4$ drei zusammenfallen, so wird der Kreis zum Krümmungskreise des F -Kegelschnittes im betreffenden Punkte.

Es sei also $u_2 = u_3 = u_4 = u$ der Parameter des Osculationspunktes und u_1 der Parameter des Schnittpunktes des Krümmungskreises mit dem F -Kegelschnitte, dann hat man nach α zwischen u und u_1 die Gleichung:

$$u^3 + 3u^2u_1 + 3qu + qu_1 = 0 \dots (\beta)$$

Aus derselben ergibt sich für den Schnittpunkt u_1 des Kegelschnittes und des Krümmungskreises des Punktes u die Formel:

$$u_1 = -\frac{(u^2 + 3q)u}{3u^2 + q}$$

Der Schnittpunkt u_1 fällt mit dem Osculationspunkte zusammen für:

$$u = 0 \quad u = \infty \quad u = +\sqrt{-q} \quad u = -\sqrt{-q}$$

und in der That sind dies die Parameter der vier Scheitel des Fundamental-Kegelschnittes.

27. Fortsetzung.

Aus der Gleichung (β) folgt auch der bekannte Satz, dass durch jeden Punkt u_1 des F -Kegelschnittes drei Krümmungskreise hindurchgehen, deren Osculationspunkte mit dem Punkte u_1 abermals auf einem Kreise liegen.

In der That liefert die Gleichung (β) für irgend ein u_1 drei Werthe von u ; es seien u_2, u_3, u_4 diese drei Werthe, dann ist bekanntermassen:

$$\begin{aligned} u_2 + u_3 + u_4 &= -3u_1 \\ u_2 u_3 + u_3 u_4 + u_4 u_2 &= 3q \\ u_2 u_3 u_4 &= -qu_1. \end{aligned}$$

Wenn man die erste dieser Gleichungen in der Form schreibt:

$$\Sigma u = -2u_1$$

ferner die zweite mit u_1 multiplicirt und zur dritten addirt, so erhält man

$$\Sigma uu = +2qu_1,$$

woraus sofort folgt:

$$\Sigma uu + q\Sigma u = 0$$

zum Zeichen, dass die vier Punkte $u_1 u_2 u_3 u_4$ wirklich auf einem und demselben Kreise liegen.

Wie aus der Gleichung (β) hervorgeht, bilden die Tripel der Punkte (u), welche den einzelnen Punkten u_1 entsprechen, eine cubische Involution.

Was ist die Enveloppe der Kreise, welche durch die einzelnen Tripel dieser Involution bestimmt sind?

28. Normalen durch einen Punkt.

Wenn die Gerade, welche den beliebigen Punkt x, y mit dem Curvenpunkte u verbindet, eine Normale im letzteren sein soll, so muss:

$$\frac{u^2 + q}{2u} \left[\frac{\frac{2pu}{u^2 - q} - y}{\frac{2p}{u^2 - q} - x} \right] + 1 = 0$$

oder nach einfacher Reduktion:

$$u^4 + \frac{2(x-p)}{y} u^3 - 2 \left[\frac{qx + p(q+2)}{y} \right] u - q^2 = 0 \dots (\gamma).$$

Man erhält somit für u vier Werthe zum Zeichen, dass durch jeden Punkt der Ebene eines Kegelschnittes vier Normalen desselben hindurchgehen.

Wenn wir die Summe der Wurzeln der Gleichung (γ) mit (u)₁, die Summe der Amben mit (u)₂ die der Ternen mit (u)₃ und schliesslich das Produkt aller mit (u)₄ = $u_1 u_2 u_3 u_4$ bezeichnen, so erhält man aus der Gleichung (γ) sofort:

$$\begin{aligned} (u)_1 &= \frac{2(p-x)}{y} \\ (u)_2 &= 0 \\ (u)_3 &= 2 \left[\frac{p(q+2) + qx}{y} \right] \\ u_1 u_2 u_3 u_4 &= -q^2. \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (u)_2 &= 0 \\ (u)_4 &= -q^2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} (u)_2 &= 0 \\ (u)_4 &= -q^2 \end{aligned}} \right\} \dots \delta,$$

welche die Coordinaten des Punktes, aus dem die Normalen gefällt wurden, nicht enthalten, drücken eine allgemeine Relation aus zwischen den vier Fusspunkten $u_1 u_2 u_3 u_4$ der vier von irgend einem Punkte aus auf den F -Kegelschnitt gefällten Normalen.

Wenn zwei von den vier Punkten gegeben sind, so kann man die beiden fehlenden mittelst (δ) eindeutig bestimmen.

Übrigens folgt aus obigen Gleichungen ohne Mühe:

$$x = p \frac{(u)_3 - (q+2)(u)_1}{(u)_3 + q(u)_1} = p \left[1 - \frac{2(q+1)(u)_1}{(u)_3 + q(u)_1} \right]$$

$$y = \frac{4p(q+1)}{(u)_3 + q(u)_1}$$

Auf Grund der vorhergehenden Gleichungen lassen sich nun verschiedene Fragen beantworten, so z. B.:

„Wann liegen die Fusspunkte der vier von einem Punkte aus gefällten Normalen in einem Kreise?“

Zu den vorhergehenden Gleichungen kommt für diesen Fall noch die folgende:

$$(u)_3 + q(u)_1 = 0$$

so dass:

$$x = \infty \quad y = \infty$$

wird. Wir sehen also, dass es im Endlichen keine solchen Punkte gibt. Dagegen hat jeder Punkt der unendlich fernen Geraden die Eigenschaft, dass die Fusspunkte der vier von ihm auf den Kegelschnitt gefällten Normalen in einem Kreise liegen. Von diesen vier Punkten sind zwei die unendlich fernen Punkte des Kegelschnittes (weil die unendlich ferne Gerade als Doppelnormale zu betrachten ist) und die beiden übrigen sind zwei diametrale Punkte des Kegelschnittes.

Der betreffende Kreis besteht somit aus der unendlich fernen Geraden und aus einem Durchmesser des Kegelschnittes:

„Wann sind die Fusspunkte der vier von einem Punkte auf einen Kegelschnitt gefällten Normalen vier harmonische Punkte?“

Vier Punkte, deren Parameter die Wurzeln der biquadratischen Gleichung:

$$Au^2 + 4Bu^3 + 6Cu^2 + 4Du + E = 0$$

sind, werden harmonisch sein, wenn

$$ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3 = 0$$

ist. Wir haben nun die biquadratische Gleichung (γ) zu verwenden, welche uns sofort liefert:

$$A = \gamma$$

$$B = \frac{x-p}{2}$$

$$C = 0$$

$$D = -\frac{qx + p(q+2)}{2}$$

$$E = -\gamma q^2$$

Die Bedingungsgleichung lautet somit (da $C = 0$ ist)

$$AD^2 + EB^2 = 0$$

oder:

$$y \left[\frac{qx + p(q+2)}{4} \right]^2 - y \frac{q^2(x-p)^2}{4} = 0$$

Es ist dies offenbar die Gleichung eines Ortes der dritten Ordnung. Diese Gleichung lässt sich jedoch nach einfacher Umformung schreiben:

$$p(q+1)y(qx+p) = 0$$

woraus wir erkennen, dass der Ort dritter Ordnung in drei gerade Linien zerfällt, nämlich *a*) die unendlich ferne Gerade, *b*) die Hauptaxe $y = 0$ und *c*) die Nebenaxe $qx + p = 0$ oder $x = -\frac{p}{q}$.

„Wann bilden die Fusspunkte der durch einen Punkt auf den Kegelschnitt gefälltten vier Normalen ein aequianharmonisches System?“

Die Bedingung, dass die vier, aus der allgemeinen biquadratischen Gleichung fließenden Punkte ein aequianharmonisches System bilden, lautet:

$$AE - 4BD + 3C^2 = 0$$

somit (da $C = 0$):

$$AE = 4BD$$

oder aber für unseren Fall:

$$y(-q^2y) = 4 \left(\frac{x-p}{2} \right) \left(-\frac{qx+p(q+2)}{2} x \right)$$

oder

$$q^2y^2 = (x-p)[qx+p(q+2)]$$

Der Ort solcher Punkte, aus denen Normalenquadrupel mit aequianharmonischen Fusspunkten gezogen werden können, ist also ein Kegelschnitt, von dem wir uns leicht überzeugen, dass er mit dem F -Kegelschnitt einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt und gemeinsame Axenrichtungen hat. Denn wenn wir eine Koordinatenverschiebung in der x -Axe um $-\frac{p}{q}$ vollführen, so ergibt sich die Gleichung:

$$q^2y^2 = \left(x - \frac{p}{q} - p\right) \left[q \left(x - \frac{p}{q}\right) + p(q+2) \right]$$

oder nach einfacher Reduktion:

$$\frac{x}{\left[\frac{p(1+q)}{q} \right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{p(1+q)}{q\sqrt{-q}} \right]^2} = 1,$$

wogegen die Gleichung des F -Kegelschnittes für dieselben Axen lautet:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{p}{q}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{-q}}\right)^2} = 1$$

Später werden wir erkennen, dass der in Frage stehende Kegelschnitt die Krümmungsmittelpunkte der Scheitel des F -Kegelschnittes zu Scheiteln hat. Wir können demnach sagen:

„Der Ort solcher Punkte, von denen sich auf einen festen Kegelschnitt Normalen mit aequianharmonischen Fusspunktquadrupeln fallen lassen, ist jener Kegelschnitt, dessen Hauptscheitel die Krümmungsmittelpunkte des festen Kegelschnittes in dessen Hauptscheiteln sind.“

29. Krümmungsmittelpunkt, Evolute.

Der Punkt (xy) wird ein Punkt der Evolute [der Krümmungsmittelpunkt eines Punktes u des F -Kegelschnittes], wenn zwei von den vier durch ihn gehenden Normalen zusammenfallen, d. h. wenn z. B.:

$$u_3 = u_4 = u$$

wird. Eine leichte Rechnung auf Grund der Gleichungen (δ) liefert dann

$$u_1 u_2 = -\frac{q^2}{u^2}$$

$$u_1 + u_2 = \frac{q^2 - u^4}{2u^3}$$

ferner:

$$(u)_1 = \frac{3u^4 + q^2}{2u^3} \quad (u)_3 = -\frac{u^4 + 3q^2}{2u}$$

$$u_3 + q(u)_1 = \left(\frac{q - u^2}{2u^3}\right)$$

und für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes des Punktes (u) erhält man:

$$x = -p \frac{(q + u^2)^3 + 2(3u^4 + q^2)}{(q - u^2)^3}$$

$$y = 8p(q + 1) \left[\frac{u}{(q - u^2)}\right]^3$$

welches zugleich die Gleichungen der Evolute sind.

Für den Krümmungsradius findet man (als Entfernung des Punktes u vom Punkte xy) den Werth:

$$\rho = \frac{\pm p \sqrt{[(u^2 + q)^2 + 4u^2]^3}}{(u^2 - q)^3}$$

Für $u=0$ oder $u=\infty$ erhält man den Krümmungsradius der beiden Hauptscheitel:

$$\rho = p$$

und für $u = \pm \sqrt{q}$ den Krümmungsradius der beiden Nebenscheitel:

$$\rho = \frac{p}{q\sqrt{-q}}$$

so dass die Entfernungen der betreffenden Krümmungsmittelpunkte vom Centrum des F -Kegelschnittes sind:

$$-\frac{p}{q} - p = -p \frac{(q+1)}{q}$$

$$-\frac{p}{\sqrt{-q}} - \frac{p}{q\sqrt{-q}} = -\frac{p(q+1)}{q\sqrt{-q}};$$

und dies sind offenbar dieselben Werthe, welche für die halben Hauptaxen des Kegelschnittes im letzten Artikel gefunden worden sind. Hiedurch ist somit der im besagten Artikel ausgesprochene Satz zur Gänze bewiesen.

29. Relation zwischen den Kreisdurchschnitten und den Normalfusspunkten.

Zwischen den vier Schnittpunkten des F -Kegelschnittes mit einem Kreise und den Fusspunkten der vier von einem Punkte auf den F -Kegelschnitt gefällten Normalen besteht eine einfache Relation, welche von Joachimsthal im 26. Bande pag. 175 des Crelle'schen Journales bewiesen wurde und welche sich leicht aus unseren Grundgleichungen ergibt.

Der Satz lässt sich folgendermassen aussprechen:

„Wenn $u_1 u_2 u_3 u_4$ die Fusspunkte der vier von irgend einem Punkte auf den F -Kegelschnitt gefällten Senkrechten sind, so liegen je drei dieser Punkte mit jenem Punkte, welcher dem vierten diametral gegenüberliegt, in einem und demselben Kreise.“

Es sei z. B. u_4' der dem Punkte u_4 diametral gegenüberliegende Punkt. So ist zunächst

$$u_4 = \frac{q}{u_4'}$$

und der ersten Annahme gemäss:

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 + u_4 (u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = -q^2$$

Setzt man in die letzten zwei Gleichungen $\frac{q}{u_4}$ statt u_4 , so ergibt sich zunächst

$$u_1 u_2 u_4' + u_2 u_3 u_4' + u_1 u_3 u_4' + q(u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

$$u_1 u_2 u_3 + q u_4' = 0$$

somit durch Addition:

$(u_1 u_2 u_4' + u_2 u_3 u_4' + u_1 u_3 u_4' + u_1 u_2 u_3) + q(u_1 + u_2 + u_3 + u_4') = 0$
welche Gleichung nach Früherem besagt, dass die Punkte $u_1 u_2 u_3 u_4'$ in einem und demselben Kreise liegen.

Dasselbe gilt dann von den übrigen drei Tripeln der Punkte $u_1 u_2 u_3 u_4$.

30. Schlussbemerkung.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen dürfte zur Genüge hervorgehen, wie fruchtbar die Benützung eines rationalen Parameters bei Behandlung der rationalen ebenen Curven ist.

Wir haben uns zwar nur mit Kegelschnitten beschäftigt und auch da nur einen sehr kleinen Theil jener Aufgaben behandelt, welche durch die auseinandergesetzten Methoden eine einfache und rasche Lösung erhalten, es soll jedoch bei einer nächsten Gelegenheit gezeigt werden, wie sich ähnliche Principien für höhere Curven, besonders die Focal à noeu, die Lemniscate und die Cardioide verwenden lassen.

Schliesslich bemerken wir, dass sich die Einführung des Parameters u bei Kegelschnitten sehr vortheilhaft bei der Behandlung jener Fragen nachweist, welche die mehrdeutigen Elementensysteme und die höheren Involutionsen auf Kegelschnitten und auch im Allgemeinen betreffen.

Pan Helmhacker přednášel: „o geologickém rozšíření rodu *Sphenophyllum*.“

Posud byly rostliny z rodu *Sphenophyllum* toliko v kamenouhelném útvaru a sice v pásmu Sigillarií a pásmu Filices neb kapradin známy, tak že se za to mít mohlo, že rod *Sphenophyllum* jest pro střední a vrchní pásmo kamenouhelného útvaru rozhodně významným. Jednostejné jest, v jakém rozměru se jednotlivé druhy toho rodu, ať již dle způsobu Koemansem a Kickxem, aneb způsobem Geinitzem naznačeným, rozvrhují.

Od Geinitze ze saského Kulmu, pod jmenem *Sphenophyllum furcatum* uvedený druh není žádné *Sphenophyllum* než toliko něco jiného, jak Koemans a Kickx ve svém článku: *Monographie de Sphenophyllum d'Europe* uznávají, což i sám Geinitz připouští a jež Ettingshausen co list z větven druhu *Calamites transitionis* býti seznal.

Tím by tedy, že rostlina Geinitzem jmenovaná, kteráž ani znaky rodu *Sphenophyllum* na sobě nenese, z Kulmu vyvržená byla, rod *Sphenophyllum* toliko obmezen zůstal na pásmo *Sigillarií* a na pásmo kapradin.

Však podařilo se mi nalézt v Moravské Třebové nový druh *Sphenophylla*, totiž *Sphenophyllum binatum* Aut. v pásmu *Sigillarií*, později však i v břidlicích nezvratně do pásma *Lycopodiaceí* nebo Kulmu náležejících s rostlinami a zvířaty rozhodně ku Kulmu přináležejícími. Místo to jest v Petřkovicích v pruském Slezsku (horním) mezi Petřkovicemi a Bobrovníkem.

Römer *Geologie von Oberschlesien* (Tab. 9., obr. 4.) uvádí však též velmi nezřetelný zbytek *Sphenophylla* nějakého od Filipovic nedaleko Krzeszovic v Krakovsku z vápence zrnitého (karniovického), kterýž do pásma *Walchií* nebo do permského útvaru náleží. Weiss však (*Flora der Steinkohlenform. des Rhein Saargebietes*) klade toto *Sphenophyllum* k druhu *emarginatum* var. *Brongniartianum* dle seřazení druhů Koemansem a Kickxem. Že však rostlina tato velenezřetelně zachovalá jest, tedy by se též za to míti mohlo, že to nějaký jiný rod rostlin jest, kdyby dle zpráv znalců rostlin, kteří lepší otisky než právě ve spisu Römerově okreslené u něho samého viděli a co *Sphenophyllum* poznali — to nebylo zaručené.

Tím by tedy rod *Sphenophyllum* se nalézal ve všech čtyřech pásmech rostlin kamenouhelných a sice v pásmu prvním neb Kulmu (*Lycopodiaceí*), v pásmu druhém neb *Sigillarií*, v pásmu třetím neb kapradinovém neb ve vlastním útvaru kamenouhelném, pak též v pásmu 4tém neb pásmu *Walchií* nebo permského útvaru.

Byť tedy nyní rod *Sphenophyllum* byl pozuán jak v kamenouhelném tak i permském útvaru, tož přece v pásmu druhém a třetím se nejhojněji nalézá, nebo teprve v nejnovější době se podařilo v Kulmu (toliko v horním Slezsku) a permském útvaru (toliko v Krakovsku) *Sphenophyllum* objeviti a pásma beztoho svojí květenou spřízněné ještě úžeji spojit.

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie
am 28. October 1872.

Anwesend die Mitglieder: Emler, Nebeský, Tomek, die Herren Cimbura und Pažout als Gäste.

Prof. Tomek las eine Abhandlung: „Über die päpstlichen Zehentregister der Prager Erzdiöcese aus dem 14. und 15. Jahrhunderte, als Vorrede zur beabsichtigten Herausgabe dieser Register.“

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe
am 15. November 1873.

Anwesend die Mitglieder: Krejčí, Studnička, Bořický, Kořistka, E. Weyr, Šafařík und die Herren: Pánek, Preiss, Zahradník, Weselý, Pelz als Gäste.

Herr Prof. Dr. Studnička gab folgende *Notiz zur Ableitung der Dreiecksfläche und des Tetraëdervolumens aus den Gleichungen der begrenzenden Elemente.*

Soll man aus den Gleichungen der Seiten, die ein Dreieck einschließen, den Flächeninhalt desselben ableiten, so hat man zuerst die Coordinaten der Eckpunkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) zu bestimmen und ihre Werthe dann in die bekannte Formel

$$2F = \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

einzusetzen. Ähnlich verhält es sich mit der ähnlichen Aufgabe, aus den Gleichungen der ein Tetraëder begrenzenden Ebenen dessen Volumen abzuleiten, wobei die analoge Formel

$$6V = \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1, 1 \\ x_2, y_2, z_2, 1 \\ x_3, y_3, z_3, 1 \\ x_4, y_4, z_4, 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

zur Verwendung gelangt.

Obwol nun dieser Weg der direkteste ist, so wird er im Allgemeinen nicht gewählt, wie die betreffenden Abhandlungen von Min-

ding¹⁾ und namentlich von Joachimsthal,²⁾ an den sich alle späteren, darunter auch Baltzer,³⁾ fast ohne Ausnahme beziehen, beweisen. Es geschieht dies wahrscheinlich deshalb, weil die Reductionen, die hiebei nothwendig sind, namentlich bei der zweiten oben erwähnten Aufgabe sehr weitläufig und unbequem werden.

Indessen lässt sich dies auf eine sehr einfache und kurze Weise bewerkstelligen, wenn man den aus der Determinantentheorie bekannten Satz, dass die beigeordnete Determinante n ten Grades gleich ist der $(n-1)$ ten Potenz der ursprünglichen Determinante,⁴⁾ in diesen speciellen Fällen verwendet, wie dies im Folgenden gezeigt werden soll.

I.

Hat man den Flächeninhalt eines Dreiecks anzugeben, dessen Seiten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

bestimmt sind, so berechnet man aus diesem System von Gleichungen die Coordinaten der Durchschnittspunkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , wobei sich ergibt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_1}{C_1}, & y_1 &= \frac{B_1}{C_1}, \\ x_2 &= \frac{A_2}{C_2}, & y_2 &= \frac{B_2}{C_2}, \\ x_3 &= \frac{A_3}{C_3}, & y_3 &= \frac{B_3}{C_3}, \end{aligned} \quad (4)$$

wenn mit A , B , C die zu a , b , c gehörigen Subdeterminanten des Systems (3) bezeichnet werden; führt man nun diese Werthe in die Formel (1) ein, so erhält man unmittelbar

$$2F = \frac{1}{C_1 C_2 C_3} \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix}.$$

Da nun die letzte Determinante Subdeterminanten des Haupt-

¹⁾ „Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie mittelst des barycentrischen Calculs“ Crellès J. V. pag. 397.

²⁾ Sur quelques applications des déterminants à la géométrie“ *ibid.* XL. p. 21.

³⁾ „Theorie und Anwendung der Determinanten“ II. Aufl. pag. 183.

⁴⁾ *ibid.* pag. 45. und Studnička „Einleitung in die Theorie der Determinanten“ pag. 39.

systems (3) als Elemente enthält, somit demselben beigeordnet und im Folge dessen der zweiten Potenz der Hauptdeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

gleich ist, so verwandelt sich unter Anwendung dieses Satzes die letzte Formel in

$$2F = \frac{\Delta^2}{C_1 C_2 C_3}, \quad (5)$$

welche die Auflösung unserer Aufgabe enthält.

Für den Fall, dass

$$c_2 = c_3 = 0$$

ist, erhalten wir zunächst

$$\Delta = c_1 C_1$$

und in Folge dessen aus der letzten Formel die einfachere

$$2F = \frac{c_1^2 C_1}{C_2 C_3}, \quad (6)$$

welche für den Fall anzuwenden ist, wo der Anfangspunkt des Coordinatensystems in einem Durchschnittspunkt von zwei Dreieckseiten liegt.

Um nun das Verhältniss der Seitenlängen zum Flächeninhalte anzugeben und vor Allem die Seitenlänge durch dieselben Elemente wie F auszudrücken, bemerke man, dass

$$2F = p_1 L_1,$$

wenn p_1 das von $(x_1 y_1)$ auf die gegenüberliegende Seite, deren Länge L_1 ist, gefällte Loth bedeutet; da ferner

$$p_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

oder wenn wir aus (4) die Werthe für x_1 und y_1 einsetzen,

$$p_1 = \frac{a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1}{C_1 \sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

so erhalten wir, wenn die Bezeichnung

$$\mu_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

eingeführt wird, für den doppelten Flächeninhalt noch den Ausdruck

$$2F = \frac{\Delta L_1}{C_1 \mu_1},$$

woraus sich unter Zuziehung der Formel (5) ergibt

$$L_1 = \frac{\Delta \mu_1}{C_2 C_3},$$

daher auch

$$L_2 = \frac{\Delta \mu_2}{C_3 C_1} \quad (7)$$

und

$$L_3 = \frac{\Delta \mu_3}{C_1 C_2},$$

wodurch die Seitenlängen in der gewünschten Weise ausgedrückt erscheinen.

Aus diesen Formeln ergibt sich nun

$$L_1 : L_2 : L_3 = C_1 \mu_1 : C_2 \mu_2 : C_3 \mu_3; \quad (8)$$

für den Fall, dass das Dreieck gleichseitig ist, also

$$L_1 = L_2 = L_3,$$

daher gilt die Bedingung

$$C_1 \mu_1 = C_2 \mu_2 = C_3 \mu_3 = k. \quad (9)$$

Ebenso findet man durch Vergleichung der Formeln (6) und (7) für diesen speciellen Fall

$$\frac{F}{L} = \frac{\Delta}{2k} \quad (10)$$

und daher auch endlich

$$p = \frac{\Delta}{k}, \quad (11)$$

was sich durch andere Betrachtungen, wenn auch weitläufiger, ebenfalls ableiten liesse.

II.

Soll man ähnlich aus den Gleichungen der vier Ebenen, die ein Tetraëder (im allgemeinen Sinne genommen) einschliessen, dessen Volumen ableiten, so bestimme man zunächst aus denselben, falls sie in der Form

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= 0, \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

gegeben sind, die Coordinaten der Durchschnittspunkte

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_1}{D_1}, \quad y_1 = \frac{B_1}{D_1}, \quad z_1 = \frac{C_1}{D_1}, \\ x_2 &= \frac{A_2}{D_2}, \quad y_2 = \frac{B_2}{D_2}, \quad z_2 = \frac{C_2}{D_2}, \\ x_3 &= \frac{A_3}{D_3}, \quad y_3 = \frac{B_3}{D_3}, \quad z_3 = \frac{C_3}{D_3}, \\ x_4 &= \frac{A_4}{D_4}, \quad y_4 = \frac{B_4}{D_4}, \quad z_4 = \frac{C_4}{D_4}, \end{aligned} \quad (13)$$

und führe sie in die vorhin angeführte Formel (2) ein; man erhält hiedurch zunächst

$$6V = \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix}$$

wobei die letzte Determinante, deren Elemente die Subdeterminanten des Systems (12) bilden, dessen beigeordnete Determinante vorstellt.

Bezeichnen wir daher die Determinante des Systems (12) mit Δ , schreiben also

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix},$$

so wird die beigeordnete Determinante der dritten Potenz dieser ursprünglichen gleich sein, weshalb die letzte Formel sich unmittelbar in

$$6V = \frac{\Delta^3}{D_1 D_2 D_3 D_4} \quad (14)$$

verwandelt, welche einfache Formel die Lösung unserer zweiten Aufgabe liefert.

Wählt man eine Ecke des Tetraeders, z. B. (x_1, y_1, z_1) zum Anfangspunkt der Coordinaten, so wird hiedurch

$$d_2 = d_3 = d_4 = 0,$$

im Folge dessen also

$$\Delta = d_1 D_1,$$

wodurch sich die letzte Formel in die einfachere

$$\Delta = \frac{d_1^3 D_1^2}{D_2 D_3 D_4} \quad (15)$$

verwandelt.

Soll man nun die Flächeninhalte der einzelnen Begrenzungsflächen ähnlich ausdrücken, so bemerke man, dass

$$3V = F_1 p_1,$$

wenn F_1 die Fläche, die der Ecke (x_1, y_1, z_1) gegenüberliegt, und p_1 das von diesem Punkte auf diese Fläche gefällte Loth bezeichnet; da nun bekanntlich

$$p_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

ist, so folgt, wenn wir aus dem System (13) die Werthe für x_1, y_1, z_1 einsetzen und die Bezeichnung

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}$$

einführen, dass vor Allem

$$p_1 = \frac{\Delta}{D_1 M_1},$$

daher unter Benützung der Formel (14)

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\Delta^2}{2} \frac{M_1}{D_2 D_3 D_4}, \\ F_2 &= \frac{\Delta^2}{2} \frac{M_2}{D_3 D_4 D_1}, \\ F_3 &= \frac{\Delta^2}{2} \frac{M_3}{D_4 D_1 D_2}, \\ F_4 &= \frac{\Delta^2}{2} \frac{M_4}{D_1 D_2 D_3}, \end{aligned} \tag{16}$$

woraus sich schliesslich ergibt, ähnlich wie früher,

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = D_1 M_1 : D_2 M_2 : D_3 M_3 : D_4 M_4.$$

Ist nun das Tetraëder ein regelmässiges, von gleichen Flächen begrenztes, ist also

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4,$$

so muss offenbar

$$D_1 M_1 = D_2 M_2 = D_3 M_3 = D_4 M_4 = K \tag{18}$$

sein, woraus sich dann durch Vergleichung der betreffenden Formeln noch das Verhältniss

$$\frac{V}{F} = \frac{\Delta}{3K} \tag{19}$$

und

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

und schliesslich für die gleichen Höhen die sehr einfache Formel

$$p = \frac{\Delta}{K}$$

ergibt.

Wie sich diese Betrachtungen noch weiter ausdehnen liessen, ist an sich klar und kann daher ganz unterlassen bleiben.

Anmerkung.

Die Ableitung der Formel (2) geschieht am einfachsten dadurch, dass man die Gleichung der Ebene in der Normalform

$$(x_1 - x) \cos \alpha + (y_1 - y) \cos \beta + (z_1 - z) \cos \gamma - \delta = 0$$

mit dem doppelten Flächeninhalte des durch die Coordinaten der Eckpunkte $x_1 y_1 z_1 x_2 \dots z_3$ bestimmten Dreieckes Δ multiplicirt und hierauf die bekannten Formeln

$$2 \Delta \cos \alpha = \begin{vmatrix} y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_2, & z_3 - z_2 \end{vmatrix},$$

$$2 \Delta \cos \beta = \begin{vmatrix} z_2 - z_1, & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_2, & x_3 - x_2 \end{vmatrix},$$

$$2 \Delta \cos \gamma = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \end{vmatrix}$$

angewendet; man erhält nach Vereinigung der zugehörigen Determinanten alsogleich

$$2\Delta\delta = 6V = \begin{vmatrix} x_1 - x, & y_1 - y, & z_1 - z \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_2, & y_3 - y_2, & z_3 - z_2 \end{vmatrix},$$

welche Formel mit (2) identisch ist.*)

Herr Prof. Dr. Šafařík hielt folgenden Vortrag: „*Beitrag zur Geschichte des Horizontalpendels.*“

Da ich wissenschaftliche Zeitschriften, welche nicht mein specielles Fach, die Chemie, behandeln, meist nur spät zu Gesichte bekomme, so lernte ich erst vor Kurzem durch das Philo-

*) Vergleiche Baltzer „Über den Ausdruck des Tetraëders durch die Coordinaten der Eckpunkte“ Leipzig. Ber. der kön. säch. Gesellsch. der Wiss. 1870. pag. 97.

sophical Magazine Herrn Zöllner's grosse Abhandlung „Ueber den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Himmelskörper“ kennen. Im §. 24 dieser — wie alles was von Herrn Zöllner kommt — geistreichen und tiefsinnigen Abhandlung finden sich ausführliche Angaben über ein neues Instrument, welches Herr Zöllner schon im November 1869 der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt hatte, in einer Abhandlung „Ueber eine neue Methode zur Messung von anziehenden und abstossenden Kräften,“ die mir unbekannt geblieben war. Herr Zöllner schlägt vor das neue Instrument Horizontalpendel zu nennen, erwähnt auch, dass bereits 1863 Perrot ein auf denselben Principien beruhendes Instrument zu denselben Zwecken vorgeschlagen und in den Comptes Rendus der pariser Akademie beschrieben habe.

Es ist von hohem Interesse, und wird gewiss auch H. Zöllner interessiren zu erfahren, dass sein Instrument bereits vor mehr als einem Menschenalter in Deutschland nicht nur beschrieben und abgebildet, sondern auch zu Versuchen verwendet worden ist, wie wohl über die Resultate nichts näheres mitgetheilt wird.

Sonderbarerweise geht die Sache auf einen Mann zurück, dessen Name in den exakten Wissenschaften keinen guten Klang hat, und von dem man sie gewiss am allerwenigsten erwarten mochte, auf Gruithuisen in München. Ich fühle mich umsomehr verpflichtet ihm diese späte Gerechtigkeit zu erweisen, als ich in einem vor sieben Jahren (in der böhmischen Museumszeitschrift Band 39) publicirten längeren Aufsätze über den jetzigen Zustand der Mondforschungen, den phantasiereichen münchener Naturforscher etwas scharf hergenommen, ihn sogar zum Selenoprotophantasten promovirt habe. Ich fühle nunmehr, bei etwas reiferen Jahren, selbst, dass diese Schärfe gegenüber einem längst im hohen Greisenalter dahingeschiedenen, der bei allen seinen Extravaganzen doch stets im guten Glauben vorging, vielleicht nicht an ihrem Platze war, und nehme hiemit von meinen Worten nicht das Wesen, wohl aber das allzu scharfe in der Form hiemit gerne zurück.

Schon das erste Heft von Gruithuisens Analekten für Erd- und Himmelskunde (München 1828, 80 p. 8°) wird eröffnet durch eine 45 Seiten lange wahrhaft originelle und merkwürdige Abhandlung des Herausgebers „Ueber den Vorschlag durch die Erde ein Loch zu graben; ob man nicht das Verhalten der Luft in grossen Tiefen auf andere Weise erforschen könnte; von der Durchgrabung eines Kanals quer durch ein Gebirge oder eine Meereenge; von der

catachthonischen Sternwarte, ihren mathematischen und optischen Instrumenten, so auch vom Elkysmometer.“ (Die gesperrten Worte sind dies auch im Originale.)

Zu einer Zeit, wo — allerdings am meisten durch die eigene Schuld von Gruithuisen und seines Gleichen — alle sogenannte physische Himmelsforschung in solchen Misskredit gerathen war, dass — in Folge einer natürlichen Reaktion — die Fachastronomen mit Schärfe darauf bestanden, bloss Örter und Zeiten, also bloss Bewegungen und ihre Veränderungen als Inhalt der Astronomie anzuerkennen, dass (um nur ein Beispiel zu nennen) sogar die Entdeckung des dunkeln Saturnringes durch Galle zu Berlin (in Mädler's Gegenwart!) und Vico zu Rom (1838) unterdrückt werden oder doch unbeachtet bleiben konnte (unglaublich aber wahr), zu einer solchen Zeit konnte Gruithuisens Abhandlung nur ungereimt erscheinen: heute, wo die Physik des Himmels so viel versprechend sich entwickelt, wird man vieles darin nur mit Staunen lesen. Ich kann hier nur andeuten, dass Gruithuisen vorschlägt, theils senkrechte Schächten von mehreren tausend Fuss Tiefe, theils horizontale Stollen in der Richtung einer Chorde (unter den Alpen! bis zu 15 Meilen Länge) durch die Erde durchzutreiben und — neben praktischen lokomotorischen Zwecken — zu physikalisch-astronomischen Untersuchungen zu verwenden. L. c. p. 21 heisst es „Aber bei diesem ist es übrigens auch geradehin unberechenbar, was der Astronom in einem solchen mit einem möglichst trockenen Schachte versehenen Canale für merkwürdige Beobachtungen anstellen könnte. Der gemeine Mann würde ein entsetzliches Gelächter aufschlagen, wenn man ihm sagte, dass man unter den Gebirgen in solchen Tiefen eine vortreffliche Sternwarte, worin Beobachtungen von ganz eigener Art zu machen wären, bauen könnte, die uns höchst erwünschte zu erwartende und eine Menge nützlicher jetzt noch unbekannter Daten liefern würde, die sowohl der praktischen als theoretischen Astronomie neue Hilfsmittel zu einer noch viel grösseren geometrischen Genauigkeit und einer grossen Menge neuer Resultate verschaffen müsste. Dieser unterweltlichen Sternwarte will ich den Namen *catachthonische Sternwarte*, oder *Catachthonium* geben.“ Nun, ich glaube, zu der Zeit als obige Worte gedruckt wurden, würden auch noch andere als bloss gemeine Leute ein entsetzliches Gelächter aufgeschlagen haben, wenn ihnen Gruithuisen's Abhandlung zu Gesichte gekommen wäre.

Die Hauptinstrumente des Catachthoniums wären nach Gruithuisen

zweierlei: Erstens grosse, genau abgedrehte Ringe an den Schachtöffnungen, um an ihnen, wie an Ringmikrometern aus einer Entfernung von 100 bis 2000 Fuss Sterndurchgänge (in Folge der präsumirten Sichtbarkeit der Sterne aus tiefen Schachten) auch bei Tage zu beobachten, und (p. 22) „unmittelbar lauter, von der Refraktion völlig reine, geocentrische Beobachtungen“ zu erhalten. Auf p. 28 heisst es hierüber: „Was schon diese wenigen Instrumente in Bezug auf die eigene Bewegung vieler Fixsterne, auf das Solstitium, auf Praecession, Nutation, Aberration, Mondlauf u. dgl. leisten und berichtigen könnten, davon lässt sich wohl doch um so vielmehr erwarten, als die Stellung der im höchsten Grade einfachen Instrumente die möglichst unveränderlichste sein muss, indem hier die Veränderlichkeit der Temperatur fast = 0 ist, so dass die nöthigen Uhren nicht einmal der compensirten Pendul bedürfen, und übrigens gar nichts da ist, was einer nur geringen Temperatur-Veränderung unterworfen sein könnte, weshalb eine solche Sternwarte durch irgend eine, noch so sehr Alles leistende oberirdische auf keine Weise ersetzbar ist.“ Hier haben wir Lamont's und Carrington's unterirdische Observatorien um ein Menschenalter anticipirt.

Das zweite Hauptinstrument des Catachthonium sollten feine Bleiloth sein, an Dräthen von 150 bis 1500 Fuss Länge aufgehängt, um daran (nach p. 32) die „Bahnbewegung der Erde“ „und vielleicht sogar noch die Verschiedenheit in der jährlichen Geschwindigkeit dieser Bewegung bemerklich“ zu machen. Auf p. 30 und 31 wird nämlich gezeigt, dass die Rotationsgeschwindigkeit eines Punktes im Erdäquator sich einmal während jeder Rotation zur Bahngeschwindigkeit der Erde addirt, einmal davon subtrahirt, und dass dadurch Variationen in der horizontalen Componente der Erdschwere eintreten, welche von der doppelten Differenz beider Geschwindigkeiten abhängen. Mit einem, nur 10 Fuss langen Bleiloth machte Gruithuisen Beobachtungen, welche (l. c. p. 33) bereits in seinem Werke „Lieblingsobjekte auf dem Felde der Naturforschung“, München 1817 (p. 69 sq. 26—77 und 128) angeführt sein sollen. Ich habe mir dieses Werkchen nicht zur Einsicht verschaffen können. In den Analekten l. c. p. 33—34 heisst es von diesen Beobachtungen: „Schon bei meinen ersten Versuchen ergab sich, dass dieses Instrument, welches ich Elkysmometer nannte, Wirkungen äussere, die nicht von zufälligen Ursachen, sondern von den Wir-

kungen der Schwere und Bewegung der Erde und von der zunehmenden Nähe anderer grosser Weltkörper abhängen, welche letztere schon durch die Seiches sich so real und deutlich ankündigte, wenn wir auch keine Ebbe und Fluth hätten. Am auffallendsten war die östliche Abweichung des Elkysmometerfadens von 8 bis 9 Uhr Morgens . . . Auch war es nicht zu verkennen, dass der Mond seine Attractionen auf das Elkysmometer ausübte, besonders am Morgen, wenn er eben zwischen der Sonne und Erde stand.“ Auch „Erdbeben, selbst aus anderen Welttheilen her“ zeigte ihm das Elkysmometer an (l. c. p. 34), und ebd. auf p. 37 wird der Vortheil langer Bleiloths vor kurzen ausführlich bewiesen, zum Schlusse sogar eine Tafel für Reduktion sehr kleiner Sinus auf Bogen behufs der Beobachtungen an sehr langen Elkysmometern gegeben.

Bei den l. c. beschriebenen rohen Vorrichtungen Gruithuisens ist nicht zu bezweifeln, dass seine Resultate auf zufälligen äusseren Störungen, z. th. wohl auch auf Illusion beruhten, wie denn überhaupt eine kurze Rechnung hinreicht, um zu zeigen, dass Bleiloths hier schwerlich jemals zu Resultaten führen werden. Nur der von Gruithuisen vorgeschlagene Name (helkysma = der Zug, helko = ich ziehe), der jedoch unrichtig gebildet ist und Helkometer heissen müsste, verdient Annahme.

Aber das merkwürdigste kommt erst.

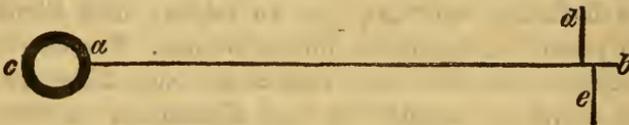
In Gruithuisen's Neuen Analekten für Erd- und Himmelskunde, Band I Heft 1, erschienen zu München 1832 (beendet laut p. 72 „am 27 July 1832“), findet sich p. 39 und 40 ein Aufsatz „Ritter Bessel's Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht, und von des Herausgebers Elkysmometer und Hengeller's Schwungage.“

Nach einem nur 19 Zeilen füllenden Bericht über Bessel's Pendelversuche mit Gold, Silber, Blei, Eisen, Zink, Messing, Marmor, Thon, Quarz, Wasser, Meteoreisen und Meteorstein, welche alle bis auf weniger als $\frac{1}{60000}$ dieselbe Länge des einfachen Sekundenpendels ergaben, heisst es nun wörtlich:*)

(„Es ist durch diese Versuche einer meiner sehnlichsten Wünsche erfüllt. Schon vor 20 Jahren (also 1812) hing ich an mehreren Klafter langen Metallfäden Körper von verschiedener Beschaffenheit auf, um zu versuchen, ob die entgegengesetzte Stellung des Mondes gegen sie

*) Die Abbildung ist ein getreues Facsimile des Originales.

keine Abweichung von der Verticallinie bewirke. Da aber der Ort zu solchen Versuchen nicht tadellos war, so hielt ich auch die Resultate der Beobachtungen der Bekanntmachung nicht werth. Ein so langes Pendul, je länger desto besser, nannte ich Elksymometer, wenn unten am Metallfaden eine mit einem Fernrohr beobachtbare Skale angebracht war. Ich glaubte daran den täglich zweimal vorkommenden Wechsel der Vor- und Rückwärtsbewegung der Erdoberfläche, in Relation mit der Erdbahnbewegung wahrgenommen zu haben, und so auch mit aller Gewissheit sehr entfernte Erdbeben etc. Ich wünsche, dass jemand Gelegenheit finden möge, in einem Schacht diese Beobachtungen mit gehöriger Genauigkeit zu machen. Reich en b a c h hat mir dafür eine sehr grosse Libelle vorgeschlagen [vgl. A. Wagner's Beobachtungen von Erdbeben in Süd-Europa an der Libelle des grossen Passageninstrumentes zu Pulkowa]; und ich glaube, dass die Schwungwage, welche einer meiner Schüler (Namens H e n g e l l e r) ausführte, im Grossen angewandt, vorläufig die besten Dienste machen dürfte:



Sie besteht aus einem horizontalen Hebel ab von Messing, woran einerseits eine messingene Kugel c als Last angebracht ist; d ist ein feiner Metallfaden, an welchem der Hebel oberhalb aufgehängt ist; statt des Gegengewichtes ist der andere Hebelarm durch den Metallfaden e an den Boden befestigt, und dieses Instrument wird desto empfindlicher, je näher der Faden d dem Faden e kommt. Die Kugel c kann nur horizontale Schwingungen machen, und wird sichtbar (zufolge H e n g e l l e r's Versuche) durch eine Kanonenkugel angezogen. Es würde sehr verdienstlich sein, Beobachtungen an diesem Instrumente anzustellen. G.“)

Das ist also v ö l l i g Z ö l l n e r's Horizontalpendel, schon mit Skalenablesung durch Fernrohr, wenn auch vielleicht nicht Spiegelablesung; und es ist nach obigen Anführungen wohl kein Zweifel, dass Herr Zöllner's kühner Gedanke, durch terrestrische Beobachtungen an einem und demselben Orte die Variationen der Erdschwere und der kosmischen Attraktionen nachzuweisen, bereits 1817, also um volle 52 Jahre früher, von Gruithuisen in München ausgesprochen und experimental geprüft wurde; ferner dass das von Herr Zöllner zu diesem Zwecke vorgeschlagene Horizontalpendel bereits spätestens

1832, also wenigstens volle 37 Jahre vor Zöllner, von einem Münchener Studenten und Schüler Gruithuisen's, Namens Hengeller, konstruirt und experimental geprüft wurde, wenn auch leider über die Beobachtungen nichts weiter mitgetheilt wird, als dass sie die Brauchbarkeit des Instrumentes zu dem beabsichtigten Zwecke ergaben. So ist denn also auch dieser bedeutende Gedanke, wie so viele ähnliche, nicht mit einem male und vollendet an das Licht getreten, sondern lange vorher in originellen Köpfen vereinzelt und in weniger vollkommener Gestalt aufgetaucht, aber, weil die Zeit für ihn nicht reif war, unbeachtet vorübergegangen. Ein scharfer Kopf muss Hengeller gewesen sein, und da er zwischen 1828 und 1832 in München, wo Gruithuisen Professor war, studirt hat, so wäre es wohl noch möglich über seine Persönlichkeit etwas näheres zu erfahren.

Schliesslich sprach Herr Prof. Dr. Šafařík noch „Über die Constitution des Turmalins.“

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 25. November 1872.

Anwesend die Mitglieder: Löwe, Kvíčala, Gabler, Čupr, Erben, Palacký, Leonhardi, Durdík, Tieftrunk, Emler, Doucha, Hattala, Tomek; als Gast H. Pažout.

Prof. Dr. Löwe eröffnete einen in der nächsten Sitzung fortzusetzenden Vortrag: „Über altindische Philosophie und ihre Verwandtschaft mit späteren Philosophemen des Occidentes.“

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 29. November 1872.

Anwesend die Herren Mitglieder: Krejčí, Šafařík, Korišťka, E. Weyr, Bořický und Herr Zahradník als Gast.

Herr Prof. Dr. Bořický hielt folgenden Vortrag: „Über die Altersverhältnisse und Verbreitung der Basaltvarietäten Böhmens.“

Die tektonischen Formen, in denen Basaltgesteine auftreten, sind bekanntlich Ströme, Decken, Stöcke und Gänge.

Im Gebiete böhmischer Basaltgesteine ist das strom- und deckenförmige Auftreten so vorwaltend, dass das ganze Basaltgebirge als Beispiel dieser tektonischen Form gelten kann. In seiner grössten Ausdehnung stellt es einen Complex von wechselnden Tuff-, Conglomerat- und Basaltlagen dar, deren Masse die ihr nun zur Grundlage dienenden sedimentären Gesteine zu wiederholtenmalen durchbrochen und in grösserer oder geringerer Mächtigkeit und Ausdehnung strom- und deckenförmig überlagert hat.

Jüngeren Ursprungs sind die stock- und gangförmigen Massen, welche theils als isolirte Kegel, theils als langgestreckte Berg- und Hügelrücken mit scharfen und zackigen Conturen erscheinend, die Strombasalte durchbrochen und mannigfache Störungen in den Lagerungsverhältnissen derselben, ihrer Tuffe und der in letzteren eingelagerten Braunkohleflötze bewirkt haben.

Und als jüngste Basaltgebilde sind unzweifelhaft jene mauerähnlichen Gänge anzusehen, welche die trachytähnlichen Phonolithe durchsetzen.

Diese an die tektonischen Formen geknüpften Altersverschiedenheiten der Basaltgesteine wurden bereits von Reuss und Jokely konstatirt.*)

In Betreff der Geotektonik böhmischer Basalte wäre noch folgendes zu erwähnen: Die Berg- und Hügelketten sind nach ihrer tektonischen Form doppelter Art. Entweder besteht der Basaltberg aus vertikalen oder gegen die Spitze des Berggipfels mehr weniger geneigten Säulen oder aus einem massiven, festen, zuweilen mit horizontalen Gangsäulen abwechselnden und von mächtigen Conglomeratlagen bedeckten Basalte. Im ersten Falle ruhen die vertikalen oder mässig geneigten Säulen auf Conglomeraten, Tuffen oder anderen sedimentären Gesteinen oder setzen auch in die Tiefe fort und der Basaltberg erscheint entweder als der Rest eines Stromes oder als das hervortretende Glied eines mächtigen Stockes, dessen Fortsetzung zuweilen in mehreren Bergkegeln oder einer Kegelreihe nachweisbar ist, während im letzteren oben angeführten Falle unter der aus Conglomeraten oder aus massigem Strombasalte bestehenden Kuppe ein nur wenige Fuss dicker, aus horizontalen oder mässig geneigten Säulen bestehender Gang mauerähnlich in die Tiefe fortsetzt.

Beispiele von Bergkegeln, die aus Strombasalten bestehend, keine stielartige Fortsetzung in die Tiefe haben, finden sich in

*) v. Reuss. Umgebung von Teplitz und Bilin. 1840. I. und II. (277). Jokely. Jahrb. d. geolog. Reichsanst. IX. 1858. 400.

Jokely's Abhandlungen mehrere angeführt vor. Es sind auch Fälle bekannt, das Basalthügel zur Schotterbereitung gänzlich abgetragen worden sind. (Z. B. bei Weisswasser).

Bergkegel, die aus vertikalen oder mässig gegen die Bergachse geneigten und in die Tiefe eingreifenden Säulen bestehend als Hervorragungen von Stöcken anzusehen sind, bilden die gewöhnliche tektonische Form für die in den Randzonen des linken Elbeufers und nahe dem rechten Elbeufer befindlichen Basaltvarietäten, namentlich für die Leucitoidbasalte, Nephelinitoide und Nephelinite nebst den wenigen (nephelinhaltigen, gemeinen) Feldspathbasalten, wobei zu bemerken ist, dass die Nephelinite, namentlich die feinkörnigen, die höchsten isolirten Bergkegel zusammensetzen, während in den vom Elbeflusse entfernteren Basaltbergen und Basaltkegeln des nordöstlichen Böhmens (namentlich an der südöstlichen Randzone) gewöhnlich die mauerähnlichen Gänge als Fortsetzung in die Tiefe erscheinen. Basaltkegel letzterer Art sind theils durch eine wellenähnliche, zackige Erhebung des Bodens mit Hervorragungen kleiner Hügel verbunden, theils vereinzelt; erstere bestehen meist aus festen Conglomeraten, letztere aus massigem Basalte, der mit den horizontalen, oft sehr dicken Säulen fest zusammenhängt, sich jedoch durch geringere Festigkeit unterscheidet; daher wird in den Steinbrüchen nur der festere Basalt der Gänge verwendet. In grossen Basaltkegeln, die durch Steinbrüche geöffnet, einen gehörigen Einblick in die tektonischen Verhältnisse des inneren Bergkegels gestatten (z. B. in der Hügelkette von Horka unweit Backofen, in dem hohen Liska-berge bei Weisswasser u. a. a. O.) bemerkt man sehr zahlreiche und mannigfache, dem Gekrösestein ähnliche, fast halbkreisförmige Windungen des Ganges, der in weiterer Entfernung vom Bergkegel fast geradlinig fortsetzt. Je ausgedehnter und zahlreicher diese Windungen sind, desto mächtiger und höher erscheint der kegelförmige Basaltberg; die äussere Form desselben, ob kegelförmig oder sargähnlich, scheint mit der Art der Gangwindungen übereinzustimmen, während die relative Höhe des Gipfels in der Bergkegelnkette der peripherialen Ausdehnung, der Anzahl der Windungen an der Basis des Berges und der Stärke der horizontalen Säulen zu entsprechen scheint.

Wenn der Gang ohne Windungen, somit ohne Bildung von Bergkegeln zu einem hohen, gedehnten Bergrücken emporgetreten war und die Reibungcongglomerate desselben durch Gewässer zerstört und fortgespült worden sind, so erhebt sich derselbe, einer künstli-

chen, aus wagerechten Säulen aufgebauten Mauer völlig gleichend. Ein interessantes Beispiel dieser Art bieten die zwei, über eine Stunde langen, parallelen, circa 2' breiten Basaltzüge der Teufelsmauer bei Böhm. Aicha.

Allein nicht bloß die Beobachtung der tektonischen Form, sondern auch die der Richtung der Basaltzüge ist für die Festsetzung der relativen Altersfolge derselben von Wichtigkeit. Während das stromförmige Auftreten nur den ältesten Basaltgebilden eigen ist, erscheinen in Stöcken und Gängen Basalte verschiedener Altersstufen; allein für diese gibt die Richtung das wesentliche Unterscheidungsmerkmal ab. Und hiemit stimmt auch die auf mikroskopischen und chemischen Verschiedenheiten gegründete Eintheilung der Basaltvarietäten überein.

Auf Grundlage der Untersuchung von circa 800 Dünnschliffen aus nahezu 300 Fundstätten böhmischer Basaltgesteine und weiterhin gestützt auf die Interpretation von 17 chem. Analysen, habe ich böhm. Basaltgesteine in sechs Hauptgruppen eingetheilt, von denen die meisten in mehrere Untergruppen zerfallen.*)

Folgende Tabelle gibt die Übersicht der Eintheilung an:

I. Magma-Basalte	II. Nephelin-Basalte	III. Leucit-Basalte
1) Dunkle, mit bräunlichem, trichitreichem Magma. Der Makrostruktur nach a) porphyrische u. b) krystallinisch-dichte. Der Mikrostruktur nach α) glasig-porphyrische, β) glasig-körnige, γ) von ungl. Mikrostr. 2) Lichte, mit graulich- o. gelblichweissem, mikrolithenreichem o. staubig-körnigem Magma. (Sämmtlich krystallinisch-dicht). Der Mikrostruktur nach a) glasig-körnige, b) [sehr augitreiche] mit sparsam eingeklemmten Magma.	1) Nephelinitoide: a) sehr feinkörnige (anamesitartig), b) krystallinisch dichte. 2) [Basaltische] Nephelinite a) körnige (Nephelindolerite), b) [sehr] feinkörnige, α) Neph.-anamesite, β) Noseanite, c) dichte Nephelinite.	1) Leucitoidbasalte a) [sehr] feinkörnige, b) krystallinisch dichte. 2) Peperinbasalte. 3) [Basaltische] Leucitophyre a) körnige, b) [sehr] feinkörnige, c) krystallinisch dichte.

*) Ich erlaube mir zu bemerken, dass die ganze, im Manuskripte bereits vollendete Arbeit „Böhmens Basaltgesteine“ im Archiv der naturwissenschaftlichen Landesdurchforschung erscheinen wird.

IV. Feldspathbasalte	V. Trachybasalte	VI. Tachylythbasalte
<p>1) Melaphyrbasalte</p> <p>a) mit bräunlichgrauem od. grünlich-grauem Magma,</p> <p>b) mit farblosem Magma,</p> <p>c) ohne deutlich erkennbares Glasmagma.</p> <p>2) Feldspathbasalte [im engeren Sinne]</p> <p>a) mit bräunlichem, trichitreichem Magma, [hieher gehören die Anorthitbasalte],</p> <p>b) mit graulichweissem, mehr weniger mikrolithenreichem o. staubig-körnigem Magma [Oligoklasbasalte].</p> <p>3) Andesit- und Phonolitbasalte</p> <p>a) körnige (doleritische)</p> <p>b) porphyrische [durch Hervortreten tafelförmiger Oligoglas-kryställchen],</p> <p>c) äussert feinkörnige u. krystallinisch dichte</p> <p>α) feldspathreiche,</p> <p>β) hauynreiche,</p> <p>γ) leucitreiche.</p>	<p>mit vorwaltendem</p> <p>1) Feldspath</p> <p>2) Nephelin</p> <p>3) Nosean</p>	

I. Allgemeines über die Magmabasalte.

Die Klasse der Magmabasalte umfasst alle jene massig und säulenförmig erstarrten, graulich schwarzen oder schwärzlichgrauen Basaltvarietäten, deren äusserst feinkörnige oder krystallinisch dichte Grundmasse nur aus Augit, Magnetit und einem amorphen Glasmagma besteht. Nur in wenigen derselben finden sich auch sehr seltene Feldspathleistchen oder Nephelinkryställchen, oder Andeutungen von Leucitdurchschnitten vor. Nach der Beschaffenheit des Glasmagma zerfallen die Magmabasalte naturgemäss in zwei Ordnungen: in 1) Magmabasalte mit bräunlichem Glasement oder dunkle Magmabasalte und 2) Magmabasalte mit einem trichitarmen und mikro-

lithenreicheren, graulichweissen oder schmutzig grünlichem Glascement oder lichte Magmabasalte.

1) Dunkle Magmabasalte oder M. mit bräunlichem trichitreichem Glascement. Basalte dieser Ordnung, deren Grundmasse schwärzlich-grau oder grünlichschwarz, durch Verwitterung dunkel, gelblichgrau wird, sind ihrer Makrostruktur nach entweder

- a) durch makroskopische Olivin-, Augit- oder Hypersthenkörner porphyrisch oder
- b) krystallinisch dicht.

Nach der Mikrostruktur der Grundmasse sind erstere

1, (a)

α) glasig porphyrisch

[Mireschowitz, Sauberg, Zinkenstein, Kohlberg b. Milleschau]

β) glasig körnig

[Kamýk b. Vschechlab, Dreiberg, Srbsko, Spojiler Gang],

γ) von ungleicher Mikrostruktur, stellenweise mit sehr sparsamem Nephelin und triklinem Feldspath

[Kahler-Stein bei Böhm. Leipa] und letztere

[1, b)]

α) glasig porphyrisch

[Skalka, Marschner Wald],

β) glasig körnig

[Schenkelberg bei Kosel, Boreslau, Rücken der Paskopole, Schöbl's Steinbruch bei Gabel].

Zu Folge der Intrepretation der chemischen Analysis des Basaltes von Skalka steht das bräunliche, trichitreiche Magma einem Gemenge von Nephelin und Anorthit (mit dem Vorwiegen des erstgenannten Bestandtheils) am nächsten.

Das spez. G. der Magmabas. = 2·896—2·983 (nach 5 Bestimmungen).

Die lichten Magmabasalte oder Magmabasalte mit einem graulichen, gelblichweissen oder schmutzig-grünlichen, mehr weniger trüben mikrolithenreichen und trichitarmen Glascement sind sämtlich krystallinisch dichte und äussert feinkörnige, (lichter) schwärzlich-graue Basaltvarietäten, die kleine Hügel oder Hügelzüge bildend, sich an die Basalte mit minder individualisirtem Leucit-Nephelin lokal anschliessen. Sie sind in der Regel frei von makroskopischen Olivin- und Angitkrystallen [oder sehr arm daran].

Ihrer Mikrostruktur nach sind sie entweder

- 1) glasig körnig [mit deutlichen, kleinen Partien des Glasmagma]

[Pšán, Liebshausen (mit sehr sparsamem Nephelin), Budy bei Backofen, Altperstein bei Dauba, Limberg bei Wartenberg] oder

2) [sehr augitreich] mit sparsam eingeklemmten Glasmagma versehen [Kuzov, Schenkelberg bei Kosel, Studnay].

Je mehr das Magma — das ebenfalls einem Gemenge von Nephelin und Anorthit am nächsten zu sein scheint — entwickelt ist, desto leichter zersetzbar sind diese Basalte; verhältnissmässig sind sie reicher an Wasser und Carbonaten.

II. Nephelinbasalte.

Die Nephelinitoide sind sehr feinkörnige oder krystallinisch-dichte, schwärzlichgraue oder lichter gefärbte Basaltvarietäten, die — in ihrer Mikrostruktur am ähnlichsten den Nephelin-, zum Theile auch den Leucitbasalten — statt des feldspathähnlichen Bestandtheils eine farblose (oder schwach graulich- oder gelblichweisse) Substanz enthalten, welche zum grössten Theile keine deutlichen, regelmässigen Umrisse zeigt, keine bestimmt gruppirten Einschlüsse enthält, jedoch zum grösseren oder geringeren Theile bläulich polarisirt.

Dieses Merkmal, sowie die stellenweise dennoch bemerkbaren, jedoch minder regelmässigen, rektangulären und hexagonalen Umrisse sprechen für die Deutung, dass der polarisirende Antheil dem Nephelin, der nicht polarisirende theils den Querschnitten des Nephelin, theils dem Leucit angehört.

Das spez. G. der Nephelinitoide = 3.065 — 3.096 (nach drei Bestimmungen).

Die Nephelinite sind gleichmässig körnige Krystallgemenge (häufig mit porphyrisch hervortretenden Olivinkörnern), bestehend aus Augit, Amphibol, Magnetit (Titaneisen) mit deutlich begrenztem und meist durch regelmässige Lagerung von Mikrolitheneinschlüssen charakterisirtem Nephelin, dem sich recht häufig auch Leucit, seltener Nosean beigesellt. In den krystallinisch dichten Abarten derselben ist der Olivin reich vorhanden; aber in den deutlich körnigen Varietäten nimmt dessen Menge um so mehr ab, je körniger das Basaltgestein ist. Fragmente von Biotit pflegen nur selten und sparsam vorzukommen.

In mehreren Nephelinbasalten tritt auch das bräunliche, trichitführende Magma in selbstständigen kleinen Partien, gleichmässig verbreitet, auf oder es findet sich in geringer Menge zwischen den Krystallen eingeklemmt vor; viel häufiger bildet aber das farblose oder graulich-

weisse Magma ein spärliches Cement des Krystallgemenges. Der Feldspath mangelt in der Regel gänzlich oder sein Auftreten beschränkt sich nur auf sparsame, trikline Leisten.

Das spez. G. der Nephelinite = 2·839—3·095 (nach 5 Probe-Best.)

Nach der Grössenausbildung der mineral. Bestandtheile der Grundmasse lassen sich die Nephelinbasalte eintheilen in:

- a) doleritische,
- b) anamesitische, die wiederum in
 - α) basaltische Noseanite und
 - β) Nephelinanamesite
 abgetheilt werden können, und
- c) krystallinisch dichte Nephelinbasalte.

III. Leucitbasalte.

Die Leucitoidbasalte bestehen aus einem mikroskopisch-körnigen oder porphyrischen Gemenge von Augit oder Amphibol und Magnetit mit einem meist farblosen, nicht polarisirenden Bestandtheil, zuweilen mit sparsamem, mehr weniger deutlichem Leucit und Nephelin.

Dass auch der nicht polarisirende Bestandtheil von unbestimmten Umrissen dem Leucit angehören mag, dafür sprechen: die stellenweise recht deutliche, rundliche Begrenzung durch andere Basaltbestandtheile, die mehr weniger regelmässig rundliche Anordnung von Augitkryställchen, Augitmikrolithen, die peripherialen Einschlüsse der farblosen, langen, tangentiell gelagerten Mikrolithennadeln und das häufige Auftreten von rosenkranzähnlich zusammenhängenden Partien; denn alle diese Erscheinungen trifft man nur in den Leucitbasalten neben deutlichen Leucitdurchschnitten an.

Nach der Grössenausbildung der deutlich krystallisirten Gemengetheile zerfallen die Leucitoidbasalte in a) [sehr] feinkörnige und b) krystallinisch dichte.

Das spez. G. = 2·977 — 3·061 (nach 2 Bestimmungen).

Die Leucitophyre bestehen sämmtlich aus einem gleichmässig körnigen Gemenge von Augit und Magnetit mit Leucit und Nephelin; sie sind verhältnissmässig arm an Olivin, enthalten aber stets mehr weniger Biotit und Rubellan; namentlich die Peperinbasalte sind es, in denen makro- und mikroskopische Biotittafeln und Säulchen in grösster Menge vorkommen. Auch der trikline Feldspath tritt zuweilen auf, der Menge nach jedoch sehr untergeordnet. Leucitophyre, deren Durchschnitte durch Staubkörnerkränzchen geziert sind, sind auch reich an Nephelin, dessen kurze Säulchen meist die Leucit-

durchschnitte umschliessen, während derselbe Bestandtheil in den vorwaltend durch Mikrolithenkränze charakterisirten Leucitbasalten weniger vorzukommen scheint; erstere enthalten auch zahlreiche rundliche oder rosenkranzähnlich zusammenhängende Partien, in denen sich nur die tangential gelagerten, langen, dünnen Mikrolithe vorfinden; da sich jedoch von den durch Staubkörnerkränze deutlich individualisirten Leucitdurchschnitten bei allmäliger Abnahme der Staubkörner bis in jene farblosen Partien stufenweise Uebergänge verfolgen lassen, wobei zuweilen nur die tangential gelagerten Mikrolithe als charakteristisches Merkmal verbleiben, so kann es keinem Zweifel unterliegen, dass auch diese rundlichen, farblosen Partien Leucitdurchschnitte sind.

Nach der Grössenausbildung können die Leucitbasalte eingetheilt werden in:

- a) basaltische Leucitophyre, oder körnige Leucitbasalte (mit makroskopischen Leucitkrystallen) und
- b) krystallinisch dichte Leucitbasalte.

Das spez. G. (nach drei Probebestimmungen) = 2.900—2.994.

IV. Feldspathbasalte.

1) *Melaphyrbasalte.*

Da bereits oben sichergestellt wurde, dass die Feldspathbasalte in den meisten Fällen Oligoklas führen, gibt es wesentlich keinen qualitativen Unterschied zwischen der Gruppe der oligoklasführenden Feldspathbasalte und der jener Melaphyrgesteine, die man als krystallinisches Gemenge von Oligoklas, Augit und Magnetit ansieht. Die nahen Beziehungen beider Gesteinsarten äussern sich selbst in dem dem Basalte und den Melaphyrgesteinen gemeinsamen Vorhandensein des Magma, Olivin und zuweilen auch des Nefelin.

Allein das Quantitätsverhältniss der mineralischen Bestandtheile bedingt die wesentlichen Unterschiede, die sowohl durch die mikroskopische als chemische Analysis hervortreten. Während der Oligoklas der Feldspathbasalte in den meisten Fällen weniger als die Hälfte der Gesteinsmasse ausmacht und dem augitischen Bestandtheile der Menge nach weit nachsteht, bildet derselbe den vorwaltenden, meist $\frac{2}{3}$ der Gesteinsmasse einnehmenden Bestandtheil der oligoklashältigen Melaphyrgesteine. Es gibt aber eine Gruppe von Basaltgesteinen, die in ihrer mikroskopischen und chemischen Beschaffenheit den Melaphyrgesteinen ähnelnd, nach dem Qualitätsverhältnisse der mineralischen Bestandtheile zwischen Basalt und Melaphyr

ihren Platz einnehmen oder sich mehr dem Melaphyr als dem Basalte nähern. Basaltgesteine dieser Art bezeichne ich als Melaphyrbasalte.

Die Melaphyrbasalte sind meist deutlich krystallinische oder äusserst feinkörnige (anamesitartige) schwärzlich oder dunkel grünlich-gelblich- oder bräunlich-graue Feldspathbasalte, in denen die triklinen, vorwiegend polysynthetisch aggregirten Feldspathkrystalle wenigstens Hälfte der Basaltmasse ausmachen, während Augit und Magnetit minder reichlich auftreten und der Olivin nur seltener in makroskopischen Krystallen zu bemerken ist. Möglicherweise wird vielleicht manches der hier behandelten Basaltgesteine nach genauen Untersuchungen der Melaphyrgesteine diesen beigezählt werden müssen.

In chemischer Beziehung mag der Kieselsäuregehalt der Melaphyrbasalte zwischen 44—50% variiren, während der der Melaphyrgesteine 50 % übersteigt.

Je nachdem zwischen den Krystallen ein bräunliches oder farbloses Glasmagma auftritt oder nur so sparsam vorkommt, dass es beim ersten Anblick zu fehlen scheint, können die Melaphyrbasalte eingetheilt werden in jene:

- | | | |
|-------------------------------|---|---------------|
| a) mit bräunlichem | } | Glasmagma und |
| b) „ farblosem | | |
| c) scheinbar ohne Glascement. | | |

2) *Gemeine Feldspathbasalte.*

Die Feldspathbasalte im engeren Sinne sind meist krystallinisch dichte, schwärzlichgraue oder graulichschwarze magnetit- (und titan-eisen-) reiche Basaltvarietäten, in denen der Feldspath weniger als die Hälfte der Basaltmasse einnimmt, daher gegenüber dem augitischen Bestandtheil und dem Glasmagma weniger in den Vordergrund tritt. Nach der Beschaffenheit des mehr weniger entwickelten, jedoch stets deutlich bemerkbaren Glasmagma kann diese Gruppe eingetheilt werden in

- a) Feldspathbasalte mit bräunlichem, trichitreichem und
- b) „ „ graulichweissem, mehr weniger körnigem Glasmagma.

Ad a) Die Interpretation der chem. Analyse des nephelinführenden Feldspathbasaltes von Kolosoruk gestattet nur die Annahme des Vorhandenseins von Anorthit und lässt die Vermuthung zu, dass die meist losen farblosen Leisten, die — in den nephelinreicheren Varietäten vorkommend — im polarisirten Lichte trikline Streifung zeigen, derselben Feldspathspezies angehören, während die zu mehre-

ren, parallelen Individuen aggregirten Leisten wahrscheinlich mit Oligoklas übereinstimmen. Hoffentlich werden Aetzversuche an Dünn-
schliffen näheren Aufschluss geben und die weitere Eintheilung in Anorthit und Oligoklasbasalte ermöglichen.

Ad b) Die Feldspathbasalte mit graulichweissem, mehr weniger körnig entglastem Magma bilden den Uebergang zu den Andesitbasalten. Sie stellen ein (mikroskopisch) ungleichmässig körniges, verworren gelagertes Krystallgemenge dar, worin neben dem vorwaltenden augitischen Bestandtheil und den minder zahlreichen Feldspathleisten auch undeutliche Nephelin- und Leucitkryställchen sporadisch vorkommen, doch ist das Magma zum grösseren Theile homogen amorph. Sie sind sämmtlich olivinhältig, mehrere olivinreich und der Magnetit pflegt gleichmässig und nicht sehr zahlreich verbreitet zu sein.

Die chemische Analyse der makroskopischen Feldspathkörner aus dem Basalte von Karthaus bei Jičín weist nach, dass der Feldspath mit Oligoklas übereinstimmt.

3) *Andesit- und Phonolithbasalte.*

Die Andesit- und Phonolithbasalte sind theils — durch Hervortreten von kurzen triklinen Andesit- oder Oligoklastafeln, zum Theil auch durch Amphibolnadeln — porphyrische, theils äusserst feinkörnige bis kryst. dichte, sehr feste und lichter gefärbte Basaltvarietäten, die ihrem äusseren Habitus nach den dunklen Phonolithvarietäten ähneln, sich jedoch durch den Mangel an wahrnehmbaren Sanidintafeln unterscheiden. Ihre Grundmasse gleicht einem Magma, dass durch Ausbildung eines meist gleichartigen, feinkörnigen oder mikrolithenähnlichen Gemenges von triklinem, zum Theil monoklinem Feldspath mit Leucit, Nephelin, Hauyn, Augit, Amphibol, Magnetit mehr weniger entglast worden ist. In dem Krystallgemenge herrscht der feldspathähnliche Bestandtheil stets vor oder es tritt das farblose Magmaresiduum deutlicher auf.

Da sich die Natur ihrer Feldspathleistchen in den meisten Fällen als triklin erweist, die Behandlung makroskopischer Feldspathkörnchen mit Säuren auf Oligoklas oder Andesin hinweist und der Anblick der meisten mikroskopischen Objekte dieser Basaltgruppe einen an Andesit erinnernden Eindruck macht, deshalb wurde für die ganze Gruppe die Bezeichnung „Andesitbasalte“ gewählt. Für jene Varietäten, in denen der triklone Feldspath minder zahlreich auftritt, sich dagegen Sanidin bemerkbar macht, wäre die Bezeichnung „Phonolithbasalte“ zu substituieren.

Das spez. G. = 2·817 als arithm. Mittel von 8 Bestimmungen, deren Minima und Maxima = 2·759—2·915. Der Kieselerdegehalt beträgt 45—51 %.

V. Trachybasalte.

Als Trachybasalte bezeichne ich die jüngsten, in den trachytischen Phonolithen gangförmig auftretenden Basaltgesteine, die meist durch rauhe Oberfläche charakterisirt sind. Sie sind theils durch Hervortreten von plattenförmigen Augitkrystallen oder von Feldspathleistchen oder Nephelinsäulchen porphyrisch, theils krystallinisch dicht und meist von lichterer Farbe.

Ihre Grundmasse besteht aus einer scheinbar homogenen, grauen Substanz, die aus der Umwandlung des Nosean hervorgeht und in der theils deutlicher Nosean, theils trikliner Feldspath, theils Nephelin vorwiegt, während Amphibolnadeln, Biotitfragmente und Magnetitkörner minder zahlreich vorkommen. Wegen ihrer leichteren Zersetzbarkeit sind sie meist mit Carbonaten imprägnirt.

Spez. G. = 2·682—2·718 (nach 2 Bestimmungen).

VI. Tachylytbasalte.

Die Tachylytbasalte, mit den Trachybasalten von gleichem Alter oder noch jünger als diese, treten ebenfalls in den trachytischen Phonolithen auf und bilden oft kaum einige Zolle dünne Adern, die sich in mannigfachen Richtungen durchkreuzen und verzweigen. Ihre Substanz stellt ein halbtentglastes Magma mit einzelnen Feldspath- und Augitfragmenten dar, in dem erst bei etwa 600facher Vergrößerung ein Mikrolithengewirr hervortritt. Da zuweilen auch die Aderwände dieser Basaltvarietät mit (einige Linien) dünnen Krusten von Tachylyt überzogen sind, deshalb wurde für dieselbe die Bezeichnung „Tachylytbasalt“ gewählt.

Im Gebiete böhmischer Basaltgesteine lassen sich im Allgemeinen drei Richtungen der Eruptionszüge unterscheiden: SW—NO, SO—NW und N—S und diesen drei Richtungen entsprechen drei grosse Altersperioden der Eruptionsthätigkeit Böhmens Basaltgesteine. Die I. Periode umfasst die Leucit-Nephelin-Magma- und z. Th. die gemeinen Feldspathbasalte; die II. Periode umfasst die Andesit- und Phonolith- und die III. Periode die Trachy- und Tachylytbasalte.

I. Altersperiode.

Die Hauptrichtung böhmischer Basaltmassen ist bekanntlich SW—NO, ziemlich übereinstimmend mit der des Erzgebirges, und

dieser Hauptrichtung folgen die zusammenhängenden Complexe und mächtigen Centralstaecke der Basaltgesteine des böhmischen Mittelgebirges, die ohne Zweifel die ältesten Basaltgebilde Böhmens sind.

Am wenigsten gestört durch Eruption jüngerer Basalte erschienen die weit ausgebreiteten Ströme der ältesten Centralstaecke, blos durch zahlreiche Phonolithkegel gehoben, zwischen dem Běla und Elbeflusse und dicht am rechten Elbeufer zwischen Leitmeritz und Aussig. Und die tiefste Kluftspalte des erst genannten Gebietes — das Beet des Bělaflusses, sowie der Elbetheil zwischen Aussig und Waltýře — verläuft der Hauptrichtung SW-NO ziemlich parallel.

Die mittelste und höchste, dem Erzgebirge völlig parallele Partie dieses Gebietes, vom Schreckenstein über Záhov, Kletschen, Mileschau, Kostenblatt, Klotzberg, Hořenc wird von Leucitbasalten eingenommen, an welche sich in weitem Umkreise die durch eigene Bildungsart — als erhärteter Lavaschlamm — charakterisirten, ebenfalls zu Leucitbasalten gehörigen Peperinbasalte eng anschliessen. Letztere, bei Schima, Dubic, Kostenblatt und Lukov ziemlich mächtig auftretend, finden ihre grösste Verbreitung in der Umgebung des Mileschauer Berges und des Klotzberges. Wirft man nun einen Blick auf dieses von den höchsten und sehr zahlreichen Phonolithkegeln (Mileschauer oder Donnersberg, Kletschner, Piskaner B., Klotzberg, gr. Franz bei Kostenblatt, Horaberg, Kamený Kluk u. a.) durchsetzte Gebiet, so tritt unwillkürlich die Ansicht auf, dass die meist stromförmig auftretenden Leucit- und Peperinbasalte eben der durch zahlreiche und im ganzen Mittelgebirge höchste Phonolithkegel erfolgten Hebung des erwähnten Gebietes ihre grosse Verbreitung daselbst verdanken.

Bemerkenswerth ist die ziemlich geradlinige Richtung der Leucitbasalte, die sich aus dem böhm. Mittelgebirge vom Schreckensteine bis Hořenc und aus dem böhm. Mittelgebirge von Hořenc (bei Kosel) über Dollanken (bei Podersam) bis in die Waltscher Gegend des Dupaner Gebirges verfolgen lässt und die sowohl in der Mittelpartie des Aussig-Tetschner Gebirges am linken Elbeufer (bei Lieben-Spansdorf) als auch im Erzgebirge (bei böhm. Oberwiesenthal, bei Schönwald, Hauenstein, Wotsch, Seeberg Kaaden) und weiterhin im Duppauer Gebirge (Duppau-Dürmaul, Turtsch, Maschau) ihre Parallelen findet.

Als Begrenzung der Leucit- und Peperinbasalte des Běla und Elbeflussgebietes verlaufen in ziemlich paralleler Richtung die Leucitoid- und Nephelinbasalte, die sowohl im Innern des erwähnten Gebietes als auch in der Randzone sehr zahlreich auftreten; nur am nordwestlichen und südöstlichen Rande treten auch gemeine Feld-

spathbasalte mehrfach auf, wie es scheint, dieselbe Hauptrichtung befolgend.

Vom Wostrýberge bei Rothaujezd erstrecken sich die Leucitoidbasalte nach SWS — den Mühlberg bei Libshausen, Liskaberg, Charvat, Oblík, umfassend, — bis in die Nähe von Laun und treten im westl. und nordwestlichen Theile, am Chlumberg bei Měcholup, am Zinkensteine bei Libsčitz und am Dobrowitzer Hügel (am Fusse des Schlossberges bei Teplic) auf; mit diesen wechseln die Nephelinitoide von Wranek (bei Meronitz) von Rannay (Laun) und von Lipenay (Teplitz), die Noseanite vom Dlouhý und Milýberge und die Nephelinite aus dem Steingassel bei Rothaujezd, von Běloschic, Skržín u. v. Wachholderberg bei Teplitz ab. Letztere auch aus dem Innern des erwähnten Gebietes von zwei Punkten, v. Kirchberg und Kalamaika bei Bukovic bekannt, sind auch nahe dem rechten Elbeufer zwischen Pokratic, Hlinay, Kunratic und Rabenstein recht verbreitet, während im südöstlichen Theile des linken Elbeufers, bei Dlaschkovic, Veršetín, Řežný Újezd, am Loboš und in der Hügelkette Hasenberg-Blaník die Nephelinitoide vorherrschen.

Die südlichsten Basaltberge des linken Elbeufers, der St. Georgen- und der Schlanberg bestehen aus deutlich feinkörnigen Noseaniten und der nahe Winařicer Berg, dessen Basaltgestein dem von Bejkov bei Jenschovitz und von Chlomek bei Dobravitz völlig gleicht, aus feinkörnigem Nephelinitoid.

Im Süden stehen die Feldspathbasalte von Košov, Jeřetin und Radobyl vereinzelt, während sie im westlichen und nördlichen Theile (Kolosruk, Panznerhügel und Boratsch bei Bilín, Vrkoč bei Aussig und oberhalb Aussig am Elbestein) bei ihrer mikroskopischen Uebereinstimmung als weit von einander entfernte Glieder eines unterirdischen Gangstockes erscheinen.

Die bisher erwähnten Basaltvarietäten treten, wo sie grössere Complexe bilden, deutlich strom- und stockförmig auf — und diess ist in der Mittelpartie des Běla-Elbeflussgebietes der Fall —; in den Randzonen erscheinen sie meist in Form von Berg- und Hügelketten und am äussersten Rande in Form von isolirten, von einander ziemlich weit entfernten Kegeln.

Auch Bergkegel, Bergketten und Gänge dieser Art, welche dieselbe Hauptrichtung SW-NO befolgen, bestehen zum grössten Theile aus Nepheliniten, Nephelinitoiden und aus Leucitoidbasalten.

In ähnlicher Art verhält es sich in dem von jüngeren Basalten und Trachyphonolithen vielfach durchsetzten Aussig-Tetschner Ge-

birge des linken Elbeufers, wo am südwestl. Rande, bei Postic, Pokau, Nephelinitoide, am Südostrande (am Ziegenberge) Nephelinite und im Innern deseben (bei Schickelmühle — Blankenstein und nahe bei Lieben) Leucitoidbasalte vorkommen. — Im Duppauer Gebirge treten Leucitoidbasalte bei Turtsch, Duppau, Dürmaul, bei Maschau, Buchau (Giesshübel), an der hohen Triebe, bei Schönwald und bei Burberg (Kaaden) als Begleiter theils von Leucitbasalten theils von jüngeren Basalten (Andesitbasalten) auf, in diesem Falle als Ueberreste älterer Ströme, von den jüngeren Basalten gehoben.

An den vom Elbeflusse weiter entfernten Punkten des rechten Elbeufers und im nordöstl. Theile Böhmens erscheinen die Leucitoidbasalte, die (meist leucitreichen) Nephelinitoide und die Nephelinitbasalte theils in grösseren Complexen als mächtige Ströme und Decken, vorzugsweise aber in sehr zahlreichen Berg- und Hügelketten der (der Hauptrichtung SW—NO parallelen) Randzonen als ziemlich gerade und mannigfach gewundene Gänge.

Nahe dem Elbeflusse tritt der Leucitoidbasalt des Schäferberges in der Nähe des Schreckensteiner Leucitbasaltes auf; am nordöstl. Fusse des Kreuzberges erscheinen Leucitbasalte als Ueberreste einstiger Ströme, von jüngeren Basalten in der Richtung von SOS noch NWN gehoben. Ebenso gehören auch die Leucitoidbasalte vom Hutberge bei Petersdorf, vom Binayer Berge bei Hirschberg, vom Fusse der Kukunella bei Franzenthal, vom Kamnitzer Berge bei Reichstadt, vom Ladeberge bei Seifersdorf, vom Fusse des grossen Hirschsteines bei Schwabitz, vom Fusse des Ronberges bei Grabern, vom Humprechtsberge bei Sobotka, vom Habichtsberge bei Kroh, vom Gross-Horkaer Steinbruche bei Hühnerwasser, vom Kácov bei Sichrov und von Sudka bei Kleinskal zu den ältesten festen Basaltgebilden.

Der relat. Alterstufe dieser Leucitoidbasalte nahe stehend, erscheinen die Nephelinitoide v. nordwestl. Abhänge des Radobyl, v. hohen Schafberge, von der grossen Berney, von den Kühnlsbergen, vom Grabberge und dem Sattelberge bei Beschgaben, vom Hutberge bei Bensen, von Svarov, vom Fusse des Lindenberges bei Houska (dessen Gipfel aus Andesitbasalt besteht), vom Vratnýberge, u. vom Galgenberge bei Mscheno, dann die Nephelinite vom Spitzberge bei Böhm. Leipa, von Wellnitz, vom Ronberge bei Daun, von den Strimitzer Bergen, der den Melaphyr überlagernde Strombasalt von Kozákov, der mächtige Strombasalt des Mužskýberges, die Nephelinite vom Spitzberge bei Wartenberg, der südöstlichste Basaltberg (Nephelinit) vom Koschumberge bei Luže und die offen zu Tage tretenden Gang-

züge (Nephelinite) der Teufelsmauer bei böhm. Aicha. Vereinzelt treten die gemeinen Feldspathbasalte des Elbeufers und des nordöstl. Böhmens auf.

Zu den Feldspathbasalten mit braunem (trichitreichem) Glase gehören die basaltischen Gesteine vom Kahler-Steine bei Böhm. Leipa, vom Schauhübel nahe dem aus Phenolith bestehenden Rollberge bei Niemes, vom Radechov bei Weisswasser, vom Horkaberge bei Münchengrätz, von der Spálovská skála. Und zu den Feldspathbasalten mit graulichweissem Magma der Basalt von Zirkovitz, v. Silberstein bei Seifersdorf, vom Mückenhahn, vom Lettenbüschel bei Markersdorf, von Schluckenau, v. Dědek bei Kosmanos und vom Karthaus bei Jičín.

Die gemeinen Feldspathbasalte erscheinen meist in Form kegelförmiger, vereinzelter Berge, die zuweilen das Aussehen eines Kraters haben (z. B. der Koschover Berg); sie treten aber auch stromförmig auf (Vrkoč bei Aussig). Da sie — nach der Richtung: Kolosruk, Panznerhügel, Borač, Vrkoč, Elbestein (b. Schönpriesen) zu urtheilen — die Hauptrichtung der Basaltmassen Böhmens zu befolgen scheinen und in ihrer mikroskopischen und chemischen Beschaffenheit, namentlich im Verhältnisse des feldspathähnlichen zu dem augit- und magnetitähnlichen Bestandtheil den vorgenannten Basaltvarietäten, vornehmlich den Nepheliniten am nächsten stehen, so kann man auch der Vermuthung Raum geben, dass sie dem Alter nach in die älteste Basaltperiode fallen, sich an die vorgenannten Basalte vermuthlich als jüngste Glieder anschliessend.

Die sehr sparsamen Melaphyrbasalte treten in vereinzelter Bergkegeln auf, die meisten (Tolzberg bei Gabel, Hirschkamm und Weinberg bei Wartenberg, Ivina bei Sichrow) sehr nahe der Melaphyrregion.

Die dunklen Magmabasalte treten — meist in Form von säulenförmigen od. massigen Strombasalten — vorwaltend im Běla-Elbe-flussgebiet auf, die Peperin- und Leucitbasalte umschliessend. Ihre Fundstätten gruppieren sich naturgemäss zu zwei ziemlich geradlinigen, der Hauptrichtung der Basaltmassen parallelen Randzügen der Leucitbasalte:

Der nördliche Zug umfasst den Sauberg bei Swindschitz, Kaninchenberg bei Mireschowitz, Köhlenberg bei Milleschau, Rücken der Paskopole und Boreslau (Pilkauer Berg) und

der südliche Zug umfasst die Lokalitäten: Zinkenstein und Schenkelbergel bei Kozel, Kamýk bei Všeclab und Skalka.

Da der nördliche Zug der dunklen Magmabasalte von dem

nördlichen parallelen Zuge der Feldspathbasalte mit braunem Glasmagma nicht weit entfernt ist und die mikroskopische und chemische Beschaffenheit des Magma beider Basaltvarietäten ziemlich übereinstimmt, da auch mikroskopische Objekte von anderen Orten (v. Kahlensteine bei Böhmischem Leipa) Gemenge beider Varietäten darbieten, so ist die Annahme berechtigt, dass sich die dunklen Magmabasalte einerseits an die Leucit- und Peperinbasalte, andererseits an die gemeinen Feldspathbasalte mit braunem Glasmagma anschliessen.

Die lichten Magmabasalte treten vorwaltend in der äussersten Peripherialzone der Basaltmassen Böhmens auf, verlaufen parallel dem Hauptzuge von NO—SW und bilden entweder kleine Hügel, die aus vertikalen Säulen bestehen (z. B. Pschanhügel bei Laun) oder mauerähnliche Gänge (Budy bei Backofen) oder erscheinen am Fusse hoher Berge, durch jüngere Basalt- und Phonolithgesteine emporgehoben (südlicher Fuss des aus Phonolith bestehenden Geltersberges, östlicher Fuss des aus Andesitbasalt bestehenden Friedländer Schlossberges), gehören daher ohne Zweifel in die älteste Altersperiode; ihr gangförmiges Auftreten spricht jedoch dafür, dass sie mit gleichfalls gangförmig auftretenden Nephelinbasalten auf ziemlich gleicher Altersstufe stehen. Im Allgemeinen beschränkt sich ihr Vorkommen auf wenige bekannte Lokalitäten (Kreuzberg bei Liebshausen, Kuzov bei Trüblitz, Altperstein bei Douba, Limberg bei Wartenberg, Reichenau).

II. Altersperiode.

In die zweite Altersperiode fallen die Andesitbasalte. Ueberall in mächtigen, ausgedehnten und hohen Stöcken auftretend, befolgen sie die Richtung von NW—SO (also fast parallel dem Riesengebirge). Durch ihre Eruption sind vermuthlich die in gleicher Richtung verlaufenden Spaltklüfte, Thäler, Bach- und Flussbeete der Basaltregion entstanden; denn wo diese vorwalten, da herrschen auch die Andesitbasalte vor. Dies ist namentlich im nördlichen Theile des rechten Elbeufers der Fall. Die tiefste Spaltkluft des vorherrschend von Andesitbasalten eingenommenen Gebietes ist das Beet des Bolzenflusses, das — von Andesitbasalten umsäumt — fast von Hühnerwasser (südöstlich von Böhm. Leipa) bis nach Tetschen die gleiche Richtung von SO—NW ziemlich regelmässig einhält.

Aus dem Gebiete des Bolzenflusses kennt man Andesitbasalte vom Petzberge bei Hirschberg (leucitreicher Andesitbasalt), vom

Kautner Berge bei Böhm. Leipa, vom Hutberge bei Petersdorf, von Klein-Bocken, vom Fuchsberge, vom Hannbasch, von Franzensthal, vom Scharfensteine, von Kleinwöhlen, vom Hutberge und von den Birkigten Anhöhen.

Die nördlichen Parallelen wären durch die Punkte: Oberkamnitz, Poppenberg bei Loosdorf, und weiterhin Eichberg bei Gabel, Zwickau, Röhrsdorf und Pickelstein bei Kreibitz angedeutet. Die nordöstlichsten Vorkommen sind der Friedländer Schlossberg (nördl. Abhang) und der Hageberg bei Friedland.

Die dem Bolzenflusse nächste südliche Parallele umfasst die Lokalitäten: Wernstadt, Rittersdorf, Sperlingstein. Parallel dem Kleinpriesen-Thale verläuft die Schlucht am Leichenberge, in der sich kleinkörnige und äusserst feinkörnige Andesitbasalte vorfinden; erstere, übereinstimmend mit dem körnigen Andesitbasalte des jenseitigen Elbeufers zwischen Poemerle und Rongstock, zeigen unverkennbar die Richtung ihres Verlaufes von SO—NW. Im südlichsten Theile des böhmischen Mittelgebirges am rechten Elbeufer umfasst der Andesitbasalt den nördlichen Abhang des Kreuzberges, den Goldberg und den Basalthügel von Oberesel bei Ploschkowitz.

Weiterhin tritt südöstlich die Parallele: Palmberg bei Dauba (hauynreicher Andesitbasalt), Lindenberg und Veilchenberg bei Houska, Viná bei Mscheno auf, und vereinzelt erscheinen die Andesitbasalte von Vesperitz, vom Sabenberge bei Vidím, von der Machovská skála bei Rybnic, und den Skokanské skály bei Eisenbrod (der südöstlichste Andesitbasalt).

Verhältnissmässig sparsam sind die Andesitbasalte am linken Elbeufer des böhm. Mittelgebirges.

Im Aussig-Tetschner Gebiete bildet der Blankensteiner Berg Rücken zwischen Lieben, Spandorf und Böhm. Bockau so ziemlich die Fortsetzung des in der Leichenberger Schlucht und zwischen Poemerle und Rongstock auftretenden Andesitbasaltstockes, dem sich nördlich und südlich über Böhm. Bockau (Schickelmühle), Seesitz und Gänseberg bei Garditz Parallelen anschliessen. Fast geradlinig und die Richtung der Andesitbasalte scharf andeutend, verläuft der an kleinkörnigen, porphyrischen und krystallinisch dichten Andesit- und Phonolithbasaltvarietäten reiche Strížovitzer Berg mit der geradlinigen Fortsetzung der Kulmer Andesitbasalte, durch welche das Karbitz-Türmitzer Becken von dem Garditz-Aussiger geschieden wird. Ausser dem von Vrba*) beschriebenen und abgebildeten Andesitbasalte

*) Lotos. Augustheft. 1870.

von Schönfeld bei Türnitz, der das Becken am Süden begränzt, treten auch Andesitbasalte östlich von Türnitz auf. Im Béla- und Elbeflussgebiete kommen Andesitbasalte ausser denen von Salezl und Dubic an der Elbe nur in den Peripherialzonen vor; so die haunreichen Andesitbasalte von Košťál, Veršetín, Schichhof, der nephelinreiche von Scheelkovitz und der augitreiche von Liboschitz-Bilín.

Nach dem zahlreichen Auftreten von Andesit- und Phonolithbasalten im Duppauer Gebirge und dem fast gänzlichen Mangel an Phonolithen oder anderen jüngeren Eruptivgesteinen scheinen die mächtigsten Eruptionen desselben vornehmlich in die zweite Periode zu fallen.

Das ganze Gebirge ist von Basaltzügen durchsetzt, die vorzugsweise zwei fast unter einem rechten Winkel sich kreuzende Richtungen befolgen, und besteht mit den an der Peripherie desselben zerstreuten Basaltvorkommnissen — nach der jetzigen Kenntniss von circa 20 Lokalitäten — nur aus Leucit-, Leucitoid- und Andesitbasalten. Die Leucit- und Leucitoidbasalte liegen in der Hauptrichtung der Basaltmassen Böhmens und werden vom Andesitbasalte in der Richtung von SO—NW durchsetzt. Letztere, als die jüngsten Eruptivgesteine des Duppauer Gebietes, nehmen die höchsten Punkte desselben ein. Auch die tiefsten Kluftspalten des Duppauer Gebirges verlaufen den genannten zwei Richtungen parallel. Uebereinstimmend mit dem Vorwalten der Andesitbasalte im südlichen Theile des Duppauer Gebirges verlaufen hier die meisten Thäler parallel SO—NW, im nördlichen Theile, oberhalb Duppau, Turtsch, Maschau, im Gebiete der Leucit- und Leucitoidbasalte, SW—NO. Bemerkenswerth ist die plötzliche Ablenkung der südöstlich-nordwestlichen Richtung, die der Linzer Bach im südlichen Theile des Duppauer Gebirges befolgt, in SW—NO in der Region der Leucitbasalte nördlich von Duppau, wo derselbe Aubach genannt wird.

Aus Andesitbasalt besteht die höchste Kuppe und der westliche Abhang des Liesenergebirges (erstere aus leucitreichem Andesitbasalt), das nördliche Gehänge des Čebischberges, der Marktbusch bei Maschau, die hohe Lauer bei Turtsch, das Muttergestein der Hyalithe bei Waltsch und die Basaltberge von Engelhaus bei Karlsbad.

III. Altersperiode.

Die dritte Periode umfasst jene Basaltvarietäten, welche die Hauptrichtung NS befolgen. Es sind dies die Trachy- und Tachylytbasalte. Erstere durchsetzen die trachytischen Phonolithe und andere Basaltgesteine (selbst die Andesitbasalte) in Form mauerähnlicher,

oft zahlreicher, fast paralleler Gänge, meist von 1--3' Breite; letztere stellen netzartige Durchkreuzungen von nur wenige Zoll dünnen Gangadern dar, die, zuweilen an den Wänden mit Tachylytkrusten bedeckt, entweder jünger sind als die Trachytbasalte oder mit diesen ein gleiches Alter haben. Jedenfalls sind sowohl die Trachybasalte als auch die Tachylytbasalte die jüngsten Basaltgebilde Böhmens.

Die Trachybasalte treten vorwiegend in dem nördlicheren Theile des böhmischen Mittelgebirges zwischen Aussig und Tetschen auf, vorzugsweise in dem Gebiete zwischen Wesseln und Prosseln am linken und zwischen Grosspriesen und Neschwitz am rechten Elbeufer. Sie sind die gewöhnlichen Begleiter der trachytischen Phonolithe, die das erwähnte Gebiet in äusserst zahlreichen Gängen durchschwärmen.

Vom linken Elbeufer wurden die Trachybasalte zwischen Poemerle und Wesseln (im Trachyt-Phonolith) von Nestrstiz, Poemerle und Ronstock, von Topkovitz, aus dem Prosselner Thale, der Trachybasalt von Spansdorf und Blankenstein untersucht; vom rechten Elbeufer gelangten zur Untersuchung: der Trachybasalt (sog. Dolerit) von Tichlowitz, der Trachybasalt aus der Schlucht am Leichenberge, mehrere aus dem Kleinpriesener Thale und der Trachybasalt von der Bassstreicher Mühle bei Grosspriesen.

Ausser den hier erwähnten Lokalitäten sind in dem Aussig-Tetschner Gebiete noch mehre Gänge von Trachybasalten, die in theils trachyt. Phonolithen, theils in anderen Basalten aderbildend auftreten, bekannt.

Da in den Trachybasalten bald der Nephelin, bald der Feldspath vorwiegt und nur selten beide Bestandtheile in ziemlich gleichem Masse entwickelt sind, wie z. B. in dem Trachybasalte von Tichlowitz, so können auch Varietäten vorkommen, in denen der eine Bestandtheil, Nephelin oder Feldspath fast gänzlich fehlt. So können dann die Trachybasalte auch entweder als fast reine Nephelin- oder Feldspathbasalte auftreten. Und dieser Umstand bestimmt mich auch für den körnigen Nephelinit vom Schreckenstein, der daselbst in 4, fast parallelen, circa 20 Schritte von einander entfernten Gängen, NS auftretend, Leucit- und Andesitbasalte durchsetzt, das Alter der Trachybasalte festzusetzen.

Ausserhalb des Aussig-Tetschner Gebietes treten Trachybasalte am Rosensteine bei Grabern (Auscha), bei Oberliebzig (Böhm. Leipa) und bei Presmuth auf und das Basaltgestein des Kunětitzer Berges steht ihnen am nächsten.

Herr Prof. Dr. Weyr setzte seinen Vortrag: „Über rationale Curven“ fort. (Siehe die Sitzung vom 18. October.)

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie
am 9. December 1872.

Anwesend die Herren Mitglieder: Tomek, Gabler, Čupr, Studnička, Löwe, Štulc, Emler, als Gast Herr Jedlička.

Prof. Dr. Löwe setzte den in der nächstfrüheren Classensitzung begonnenen Vortrag fort: „Über altindische Philosophie und ihre Verwandtschaft mit späteren Philosophemen des Occidents.“

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe
am 13. December 1872.

Anwesend die Mitglieder: Kořistka, Studnička, Zenger, G. Schmidt, Weyr, von Waltenhofen, dann die Herren Lippich, Klimeš, Weselý, Pelz, Domalip, Zahradník als Gäste.

Herr Prof. Zenger hielt folgenden Vortrag: „Über die Wirkungen von Leitern, welche symmetrisch angeordnet sind“, welcher Vortrag nachstehend in böhmischer Sprache folgt:

Dopis ku komisi akademie pařížské stran zařízení hromosvodů. Již dávno známo jest, že statická elektřina vždy jen na povrchu vodičů se nashromažďuje. Z toho následuje, že se mohou vodiči i nevodíči uchrániti před účinky elektřiny, pokryjou-li se vodičem, na němž se pak elektřina nashromáždí, je-li v okamžiku výboje elektrického s tělesem vnitřním ve spojení.

Kdyby totiž byla obě tělesa izolována, nastal by návod; však ale i tento návod v případě, že jedno těleso má podobu koule, jest nulou, poněvadž elektrické částice koule zevnější jsou souměrně rozloženy kolem povrchu koule vnitřní; pročež nemožno znamenati napnutí elektrické při známém pokusu, vzdalujeme-li pokrývající dvě polokoule od vnitřní. Veškerá elektřina nachází se pak na těchto zevnitřních polokoulích. Jest vidno, že podmínky by ani sdělením ani návodem elektrické napnutí nepovstalo na vnitřním tělese, ať si je vodičem čili nic, jsou: Za prvé, že v okamžiku nabíjení elektřinou obě tělesa se v doteku nacházejí neb vodičem spojeny jsou, za druhé

by vodič zevnější souměrně byl položen kolem tělesa vnitřního, by jej chránil před účinkem elektrickým.

Že tomu tak, dá se dokázati následujícím strojem, který mám tu čest předložiti akademii, a jenžto byl sestrojen p. Ruhmkörffem.

Uprostřed desky kruhové, mosazné, podložkou skleněnou izolované, nachází se velmi citlivý elektroskop s dvěma lístky pozlátkovými. Pokrývka elektroskopu jest úplně ze skla. Elektroskop nahoře končí jako obyčejně kouličkou mosaznou, ku které se dají upevniti dráty mosazné, rozličně zakřivené. Tyto dráty tvoří části symetrických křivek, kruhu, elipsy neb paraboly a jsou souměrně k elektroskopu rozloženy; tak že jeden každý drát nám představuje jediný element povrchu tělesa rotačního a symetrického, koule, elipsoidu, paraboloidu atd. Osa rotační leží ve směru pozlátkových lístků.

Nabíjí-li se souměrný tento drát, který se dotýká spolu koule elektroskopu, elektřinou, nejeví se i nejmenší účinek na elektroskopu. Lístky zůstanou i tenkrát nepohnuty, padají-li silné výboje stroje elektrického na kouli elektroskopu aneb na drát. Příčina tohoto výjevu zakládá se na tom, že veškerá elektřina nejenom na povrchu se nashromažďuje, nýbrž také souměrně části drátu na protivných stranách stejné mají náboje a jejich účinky takto vesměs se ničí. Toto nashromáždění se elektřiny na povrchu a tento účinek souměrnosti vodiče očividně dokáže se následujícími pokusy:

Vezmeme kruhovitý drát, uvedeme jej v dotek s koulí elektroskopu a necháme pak přeskakovat jiskry elektrické na tuto kouli aneb i na drát symetrický. — Neobjeví se pražádný účinek ani tenkrát, jestli silně elektrisovanou tyčku skleněnou neb kaučukovou, z níž jiskry srší, uvedeme mezi drát a skleněnou pokrývku elektroskopu. Odejme-li se nyní drát, aniž by se tyčka elektrisovaná z položení svého proti elektroskopu uvedla, jest účinek velmi silný. Totéž se stane, nedotýká-li se vodič kruhovitý koule elektroskopu, nakloníme-li ho na př. pod úhlem větším než 60° proti prvotnému položení, kdežto se koule dotýkal. Účinek jest velmi silný, málo slabší, než kdyby drát ten se odstranil. Spojíme-li nyní tento nakloněný drát kruhovitý pomocí vodiče s koulí elektroskopu, jest účinek elektřiny znamenati, ačkoli jest seslaben; neb obdržíme pak rozdíl účinků při této zrušené souměrnosti v položení drátu proti lístkům na elektroskopu, který rozdíl nyní není více nulou.

Tyto pokusy mohou se taktéž opakovati s dvěma koncentrickými kruhovitými neb parabolickými dráty, jichž plochy tvoří pravý aneb též libovolný úhel.

Máme vždy souměrné a protivné účinky, jejichž výslednice jest nulou. Tyto pokusy stanou se ještě důkladnějšími a očividnějšími, vezmeme-li místo jednoho dva elektroskopy. Dolejší jest izolován a končí nahoře deskou kruhovitou a mosaznou, na níž pak se souměrné dráty upevní tak, že lístky hořejšího elektroskopu zase se nacházejí ve spojení s drátem a ve směru osy rotační onoho tělesa, jehožto element povrchový nám drát tento představuje. Tento elektroskop má úplně skleněnou pokrývku a jest od dolejšího izolátorem odělen. Opakujeme-li pokusy dříve uvedené, nepohnou se lístky hořejšího elektroskopu, kdežto lístky dolejšího se ihned utrhnou.

Tyto nápadné pokusy mohou být užitečný ohledem sestrojování hromosvodů, je-li totiž úhlavní vedení hromosvodu souměrně rozloženo v podobě kruhovitého, parabolického aneb také eliptického drátu, přecházejí na př. přes čtyry rohy střechy křížem, tak že spolu přikrývají komíny a ve spojení jsou s dobrým vodičem v bodu, kde se křížují, k střeše vedeny. Bude účinek elektřiny atmosférické jistě lépe zamezen než nynějším způsobem zařizování úhlavního vedení hromosvodu. Také přerušeni vedení tohoto souměrného nestane se nebezpečné, jako při zařizování nynějším, kdežto sváděcí tyčka pak přivádí blesk na dům a z místa přetrženého výboj s jistotou očekávati se dá.

Přeřízne-li se drát na stroji dříve uvedeném, jest účinek ještě nulou, poněvadž takřka jen malá část elementů vyňata jest ze souměrného vodiče, čímž se stejnost v napnutí a vyrovnání se protivných účinků jen velmi málo ruší.

Ohneme-li pak tento přeříznutý drát, tak že i souměrnost se ruší, nastane ihned účinek tím větší, čím více symetrie přerušena byla.

Dodatky.

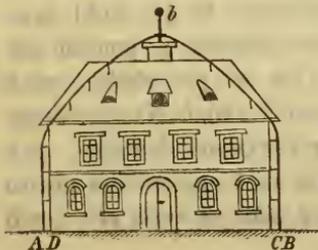
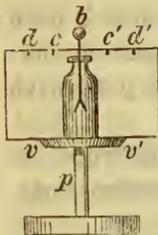
Následkem pokusů dříve naznačených a v sezení akademie pařížské dne 9. září předvedených požádal pan president akademie Faye pana Ruhmkorffa, by svými znamenitými prostředky experimentálními dále prováděl tyto pokusy. Následkem vybídnutí toho sestrojil p. Ruhmkorff dráty souměrné v takové velikosti, že je mohl jako přílbici postavit na hlavu jednoho ze svých dělníků a použití tak hlavu lidskou místo elektroskopu citlivého, by se přesvědčil, zdali skutečně aneb zdánlivě účinek elektřiny do vnitř zmizí. Na tyto dráty pak nechal přeskakovat nejmohutnější jiskry obyčejné elektriky, pak návodčí elektriky Holtzové, aniž by byl dělník měl nejmenšího pocitu při těchto tak značných výbojích. Zcela jinak však se měla věc, jestli

pouštěl místo jisker těchto strojů elektrických jiskry z návodících strojů dynamoelektrických. Byl by málem zabil dělníka. — Vysvětlení tohoto tak značného rozdílu podává však výše uvedená theorie.

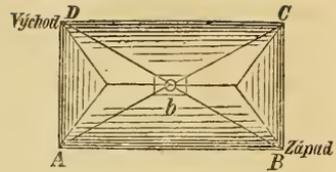
Uvážíme-li totiž, že nejenom elektřina na povrchu se nashromáždí, nýbrž také jen jeden druh elektřiny stejnodobě na drátu se nachází, používáme-li statickou elektřinu. Docela jinak se věc má, vezme-li se induktorium Ruhmkorffovo. Njenom že drát střídavě kladnou a zápornou elektřinou se nabíjí, ale i napnutí obou elektřin jest rozličné; neb jiné jest napnutí, uzavře-li se proud návodící, než při přetrhování proudu. Poněvadž ale tyto nestejně výboje velmi rychle jeden za druhým následují, jest stejné napnutí na povrchu drátu souměrného nemožné a při pokusu Ruhmkorffově byla tedy postřžena hlava dělníkova nejméně rozdílem elektrického napnutí obou protivných výbojů, obzvláště pak, jestliže nebyl v úplném doteku s vodičem symetrickým, anebo mohl snad účinek vlasů co soustavy špiček takový stranní výboj rovněž způsobiti.

Následkem těchto pokusů Ruhmkorffových chtěl jsem se přesvědčit, jaký jest účinek výbojů Ruhmkorffova induktoria největšího, 100.000 metrů drátu obsahujícího, na elektroskop, dělá-li se pokus, jakýž dříve uveden byl. Co vodiče symetrické používal jsem kruhovitě, parabolické a v podobě pravouhelníka ohnuté dráty (viz obrazec), aniž by výbojem i v posledním případě známka účinků na citlivém elektroskopu se objevila, když stál elektroskop u prostřed a dotýkal se drátu v bodu *b*; stál-li elektroskop výstředně v *c* a *d*, byl účinek sice slabý, ale patrný při každém výboji. Může tedy také býti, že pan Ruhmkorff nepostavil dělníka dosti symetricky k vodičům, čímž rozdíl napnutí povstati může.

Nejsou tedy tyto pokusy Ruhmkorffovy v rozhodném odporu s theorií nepůsobnosti elektrické, pocházející z nashromáždění elektřiny na povrchu vodičů souměrných. Chýlím se k náhledu tomu, že by bylo výhodnější, pro hromosvody používat souměrného úhlavního vedení v podobě parabolické, tedy dvojnásobného a křížem položeného vedení, jak z nákresu vidět, tak že jeho části se křížují nad komínem a na místo tyčky sváděcí špičaté, sestrojiti kouli v bodě *b*, totiž v nejvyšším bodě vedení úhlavního.



Bylo by záhodno, takovými domy pokus učiniti, které v stejném položení se nacházejí, a jeden obyčejným způsobem, druhý pak tímto způsobem uvedeným hromosvodem opatřiti. Našlo se totiž při pokusu, že, používáme-li místo oblaků nábytných elektřinou, desku kruhovitou Ruhmkorffového stroje, jiskry na špičatého sváděče podají ze vzdálenosti 40—45 cm., kdežto ku kouli musíme přiblížiti tuto desku při stejném náboji až na 8—10 cm., aby přeskočila jiskra na vedení úhlavní hromosvodu.



Herr Prof. Dr. E. Weyr beschloss seinen Vortrag: „Über rationale Curven“. (Siehe die Sitzung vom 18. Oktober.)



Verzeichniss der vom 1. Juli bis Ende Dezember 1872 zum Tausche und als Geschenk eingelangten Druckschriften.

- Agram*, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti: Rad kniga XVIII., XIX.; Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium vol. III.; Bogišić, Pisani zakoni na slovenskom jugu I.
- Augsburg*, Historischer Verein für Schwaben u. Neuburg: Jahresbericht 35.
- Belgrad*, Srbsko učeno društvo: Glasnik 28—33 kniga. Glasnik za noviju srbsku istoriju 2.
- Berlin*, Königl. preussische Akademie der Wissenschaften: Monatsberichte 1872, März—Juli; — Abhandlungen 1871.
- Berlin*, Deutsche geologische Gesellschaft: Zeitschrift d. d. g. G. Band 23, Heft 4, Bd. 24, Heft 1—2.
- Bordeaux*, Société des sciences physiques et naturelles: Mémoires t. VIII, 2. cahier.
- Bremen*, Naturwissenschaftlicher Verein: Abhandlungen III. Band, 2. Heft.
- Breslau*, Schlesische Gesellschaft f. vaterländ. Cultur etc.: Jahresbericht 49. Abhandlungen (phil. histor. Abth.) 1871; Abhandlungen (Abth. f. Naturw. und Medizin) 1871—72.
- Brünn*, K. k. mähr.-schles. Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde: Mittheilungen 1871.
- Brünn*, Naturforschender Verein: Verhandlungen 9. Bd.
- Brüssel*, Société entomologique Belge: Annales, t. 1—14.
- Carlsruhe*, Naturwissenschaftlicher Verein: Verhandlungen 5. Heft.
- Christiania*, Königl. Norwegische Universität: Universitätsprogramm 1871; Blytt, Christiania omegus phanerogamer og bregner; Friis, Salbmagirje.
- Christiania*, Gesellsch. d. Wissenschaften: Forhandlinger 1869, 1870.

- Christiania*, Physiographiske forening: Nyt-Magazin Bd. 17. 18.
- Chur*, Naturforschende Gesellschaft Graubündtens: Jahresbericht 16.
- Danzig*, Naturforschende Gesellschaft: Schriften 3. Bd. 1. Hft.
- Dresden*, Verein für Erdkunde: Jahresbericht VIII—IX.
- Florenz*, R. comitato geologico d'Italia: Bolletino 1872: No. 3—8.
- San-Francisco*, California Academy of natural sciences: Proceedings vol. IV. p. 2—4; Memoirs vol. I. p. 1.
- Frankfurt a. M.*, Physikalischer Verein: Jahresbericht 1870—71.
- St. Gallen*, Naturwissenschaftlicher Verein: Bericht 1870—71.
- Genf*, Société d'histoire et d'archeologie: Mémoires t. 18.
- Genf*, Société de physique et d'histoire naturelle: Mémoires t. XXI. 2.
- Görlitz*, Oberlausitz, Gesellschaft der Wissenschaften: Neues lausitz. Magazin 49 Bd., 1. Heft.
- Graz*, Naturwissenschaftlicher Verein f. Steiermark: Mittheil. 1872.
- Hannover*, Naturhistorische Gesellschaft: Jahresbericht 21.
- Hermannstadt*, Verein für siebenbürgische Landeskunde: Archiv 10. Bd. 1 Heft; Jahresbericht 1870—71; Trausch, Schriftsteller-Lexikon 2. Band; Programm des evang. Obergymnasiums A. B. in Bistritz 1870—71; Programm des Gymnasiums A. C. zu Hermannstadt 1870—71; Programm des evang. Gymnasiums in Schässburg 1870—71.
- Kiel*, Königl. Universität: Schriften 18. Band.
- Kopenhagen*, Königl. dänische Gesellschaft für nord. Alterthumskunde: Aarboger 1872: 1; Mémoires 1870, 1871.
- Lemberg*, Zakład narodowy imienia Ossolińskich: Czasopis 1829: 1—4 zeszyt, 1831: 2—3, 1832: 1—2, 1833: 3—4, 1834: 1—3, 1841: 1; Biblioteka, 1842: t. I—IV, 1843 t. V—VIII; 1844: t. IX—XII; 1847: zeszyt 1—12, 1848: 1—4; — Stadnicki, O wsiach wolo-skich; Codex diplomaticus Tynecensis I; Ossoliński, O rozmaitem następstwie na tron za dynastji Piastów; Urbański, Nauka gospodarstwa wiejskiego; Ossoliński, Tyta Liwiusza dzieje rzymskie t. 1. 2. 3.; Chwalibóg, Żywot wzorowy Józefa Chwoliboga; Zbiór pamiętników historycznych o dawniej Polsce, t. VI; Przewodnik wystawy starożytniczej Lwowskiej w r. 1861; Kopia rękopismów własnoręcznych Jana III y xięcia Stanisława Lubomirskiego.
- Lund*, Universität: Acta (hist. phil. Abth.) 1869; (math. naturw. Abth.) 1870; (Theol.) 1870; Accessions-Katalog 1870—1871.
- Luxembourg*, L' Institut royal grand-ducal: Publications t. XII.
- Mailand*, R. Istituto Lombardo di scienze e lettere: Reudiconti 2. serie vol. III. fasc. 16—20, IV: 1—20, V: 1—7; Memorie

- (classe di lett.) XII: 2; Memorie (cl. di scienze math.) XII: 2—4; Cremona, Mehrere mathematische Abhandlungen.
- Moskau*, Société imp. des Naturalistes: Bulletin 1871 nro. 1.
- München*, Königl. bayer. Akad. d. Wissenschaften: Sitzungsberichte (philos., philol. und hist. Cl.) 1872: 1; (mathem. phys. Cl.) 1872: 1, Abhandlungen (math. phys. Cl.) 11. Bd. 1. Abth.; Abhandlungen (philos. philol. Cl.) 12. Bd. 2.—3. Abth.; Friedrich, Über die Geschichtsschreibung unter dem Kurfürsten Maximilian I.; Erlenmayer, Die Aufgabe des chemischen Unterrichts.
- München*, Königl. Sternwarte: Annalen XII. Supplement.
- Offenbach*, Verein für Naturkunde: Berichte 11. 12.
- Paris*, Société géologique de France: Bulletin tome XXVIII feuilles 9—24.
- St. Petersburg*, Academie imp. des sciences: Bulletin t. XVII: 1—3; Mémoires t. XVII: 11—12, XVIII: 1—7.
- St. Petersburg*, Observatoire physique central: Repertorium für Meteorologie II, 2.
- Prag*, Gesellschaft des böhm. Museums: Časopis Musea r. 1865 sv. 4, 1866—1871, 1872 sv. 1—2., Sborník vědecký I—IV, Živa I—X, Palacký, Dějiny národu českého V, 1—2; Nestorův letopis ruský; Výbor z literatury české II, 4; Tomka Dějepis Prahy II. díl a. Dodatky k I. dílu; Nebeský: Žáby, Bratři; Hanuš, Dodavky k Jungmannově historii literatury české I.; Malý, Severoamerické soustátí; Tieftrunk, Odpor stavu českých proti Ferdinandovi I.; Shakespeare XXI—XXXVI; Malý, Shakespeare a jeho díla.
- Prag*, Jednota českých matematiků (Verein böhmischer Mathematiker) Zpráva 1. 2. 3.; Časopis č. 1—4.
- Schwerin*, Verein für meklenburgische Geschichte und Alterthums-kunde: Urkundenbuch. 7. Bd.
- Stockholm*, Königl. schwedische Akademie der Wissenschaften: Handlingar VII: 2, VIII, IX; Ofversigt Bd. 26. 27; Meteorologiska iakttagelse i sverige Bd. 9. 10. 11; Lefnadsteckingar I. Band 2. Häfte; Carlson; Minnesteckning öfver Erik Gustav Geijer.
- Upsala*, Regia societas scientiarum: Nova acta vol. VIII fasc. 1; Bulletin météorologique mensuel de l' observatoire de l' université d' Upsal vol. I: 1—12; II: 7—12; III: 1—12.
- Venedig*, Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti: Atti tomo XVI: 10; Serie quarta tom. I: 1—4.
- Washington*, Smithsonian Institution: Annual report 1860; Preliminary report of the United States geological survey of Montana.

- Wnigerode*, Harz-Verein für Geschichte und Alterthumskunde: Zeitschrift V. Jahrg. 1—2. Heft.
- Wien*, Kais. Akademie der Wissenschaften: Sitzungsberichte (phil. hist. Cl.) Bd. 68. 2—4 Heft, Bd. 69, 1—3 Heft; (mathem. naturw. Cl. I Abth.) 64: 1—5, (math. naturw. Cl. II. Abth.) 64: 1—5; Archiv 47 Bd. 2. Heft; Fontes (II. Abth.) 35 Bd.; Denkschriften (mathem. naturw. Cl) 31 Bd.
- Wien*, K. k. geologische Reichsanstalt: Jahrbuch XXII.: 2—3; Verhandlungen 1872: 10—14.
- Wien*, Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Blätter 5. Jahrgg.; Topographie von Niederösterreich 2—3. Heft.
- Wien*, Anthropologische Gesellschaft: Mittheilungen II. Bd. 6—8. Hft.

Frind, Die Kirchengeschichte Böhmens 3. Bd.

Weyr, Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných.

Cremona, Rappresentazione piana di alcune superficie algebrische dodate di curve cuspidali. Bologna 1872.

Palacký F., Archiv Český díl VI. svazek 26—27.

— Urkundliche Beiträge zur Geschichte des Hussitenkrieges I. Band 1. Heft.

Rybička Pravidla přísloví a povědní.

Brandl, Libri citationum et sententiarum, tom. I.

Barrande, Crustacés divers et poissons.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Prag.

Výroční zpráva c. k. vyššího realného gymnasia v Táboře. 1872.



Inhalt.

(Die mit * bezeichneten Vorträge sind ausführlich mitgetheilt.)

	Seite
Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 1. Juli 1872.	
Dr. Emler, Ueber die Kanzlei K. Přemysl Otakars II.	3
Sitzung der mathem.-naturwissenschaftlichen Classe am 12. Juli 1872.	
* Berg-Ingenieur Helmhacker, Ueber neue Petrefacten im Kulm an der schlesisch-polnischen Gränze.	3
Prof. Dr. Frič, Ueber einen neuen Saurier im Pläner des weissen Berges	5
Prof. Dr. Šafařík, Ueber mikroskopisch-chemische Untersuchungen der silurischen Diabase aus der Umgegend von Prag	5
* Prof. Dr. von Waltenhofen, Ueber die Erzeugung des elektrischen Kohlenlichtes mittelst Thermosäulen	6
Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 15. Juli 1872.	
Dr. Emler, Ueber die Kanzlei König Otakars II. von Böhmen . .	9
Sitzung der mathem.-naturwissenschaftlichen Classe am 18. Oktober 1872.	
Berg-Ingenieur Helmhacker, Ueber die geologische Verbreitung der Gattung Sphenophyllum	9
Prof. Krejčí, Ueber die geologischen Verhältnisse der Umgebungen von Měcholup im Saazer Kreise	9
* Prof. Dr. E. Weyr, Ueber rationale Curven	9
* Helmhacker, o geologickém rozšíření rodu Sphenophyllum . . .	43
Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 28. Oct. 1872.	
Prof. Tomek, Ueber die päpstlichen Zehentregister der Prager Erz- diöcese aus dem 14. und 15. Jahrhunderte, als Vorrede zur beab- sichtigten Herausgabe dieser Register	45
Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 15. November 1872.	
* Prof. Dr. Studnička, Notiz zur Ableitung der Dreiecksfläche und des Tetraëdervolumens aus den Gleichungen der begrenzenden Elemente	45
* Prof. Dr. Šafařík, Beitrag zur Geschichte des Horizontalpendels .	51
Prof. Dr. Šafařík, Ueber die Constitution des Turmalins	57

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 25. Novem. 1872.
 Prof. Dr. Löwe, Ueber altindische Philosophie und ihre Verwandtschaft
 mit späteren Philosophemen des Occidentes 57

Sitzung der mathem.-naturwissenschaftlichen Classe am 29. November 1872.
 * Prof. Dr. Bořický, Ueber die Altersverhältnisse und Verbreitung
 der Basaltvarietäten Böhmens 57
 * Prof. Dr. E. Weyr setzte seinen Vortrag Ueber rationale Curven fort
 (Siehe die Sitzung vom 18. October 1872) 77

Sitzung der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie am 9. December 1872.
 Prof. Dr. Löwe, Ueber altindische Philosophie und ihre Verwandtschaft
 mit späteren Philosophemen des Occidents (Forts.) 77

Sitzung der mathem.-naturwissenschaftlichen Classe am 13. December 1872.
 * Prof. Zenger, Ueber die Wirkungen von Leitern, welche symmetrisch
 angeordnet sind [in böhm. Sprache] 77
 * Prof. Dr. E. Weyr beschloss seinen Vortrag Ueber rationale Curven
 [Siehe die Sitzung vom 18. October 1872] 81



Verzeichniss der vom 1. Juli bis Ende Dezember 1872 zum Tausche und als
 Geschenk eingelangten Druckschriften 83



Folgende Publicationen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften können durch die Verlagsbuchhandlung „Fr. Tempský“ in Prag bezogen werden:

Palacký Fr. Würdigung der alten böhm. Geschichtsschreiber. 1830 . . .	1 Thlr.
- Staří letopisové čeští od r. 1373 do 1528.—1829. (XVIII und 518 S.)	20 Sgr.
Cauchy A. L. Mémoire sur la dispersion de la lumière. 4. 1836 . . .	3 Thlr.
Vorträge, gehalten bei der ersten Jubelfeier der Gesellsch. im Sept. 1836	5 Sgr.
Hanuš J. Verzeichniss sämmtl. Werke und Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. 1854	6 Sgr.
Bartoš (Bartholomæus von St. Aegydius), Chronik von Prag (1524—31) im latein. Text bearbeitet von Höfler. 1859	20 Sgr.
Kulik J. Jahresformen der christl. Zeitrechn. (1000jähr. Kalender.) 4. 1861	10 Sgr.
Böhm J. Ballistische Versuche und Studien. 4. 1861. (195. — 3 Taf.)	1 Thlr.
Tomek, Základy starého mistopisu Prahy. 1, 2, 3, 4, 5	5 Thlr.
Emler J. Reliquiæ tabularum terræ citationum vetustissimæ. 1867 . . .	2 fl. ö.W.
Hanuš, Quellenkunde und Bibliographie der böhm. Literaturgeschichte . . .	1.60 „
Aug. Sedláček, Rozvržení sbírek a berní r. 1615	1.—
Weitenweber R. Repertorium sämmtlicher Schriften der königl. böhm. Gesellschaft der Wissensch. vom J. 1769 bis 1868	20 Sgr.

