VĚSTNÍK
KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK

TŘÍDA
MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.

ROČNÍK 1923.

V PRAZE 1924.
NÁKLADEM KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK.
V KOMISI U FRANTIŠKA ŘIVNÁČE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME

CLASSE DES SCIENCES.

ANNÉE 1923.



PRAGUE 1924.
PUBLIÉ PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME.
LIBRAIRIE F. ŘIVNÁČ.

Přednášky konané roku 1923 ve schůzích třídy matematicko-přírodovědecké.

Dne 14. prosince. **V. Janda**: O regeneraci pohlavních ústrojí u Rhynchelmis.

OBSAH.

Jan Vilhelm: První příspěvek k poznání variability parožnatek ze Slovenska I.

Jaromír Klika: Histologické poznámky k některým hálkám II.
J. Šafránek: Magnetické vlastnosti některých slitin niklu a mědi nad bodem Curieovým III.
Jaromír Wenig: O některých orgánech proximální části zažívacího traktu nižších obratlovců IV
K. Rychlík: Zur Theorie der Teilbarkeit . V
W. S. Iljin: Über verschiedene Salzbeständigkeit der Pflanzen VI.
V. Hlavatý: Les congruences dans les espaces non-euclidéens VII.
Karel Domin: Grundzüge der pflanzengeographischen Verbreitung und Gliederung der Lebermoose VIII.
K. Rychlík: Zur Theorie der Teilbarkeit in algebraischen Zahlkörpern . IX.
Viktor Janda: Regenerace pohlavních orgánů u Rhynchelmis limosella Hoffm. X.
Frant. A. Novák: Monografická studie o *Dianthus plumarius* (L.) XI.
П. Н. Чирвинский: Количественный состав двух изверженных горных пород. XII.

E. Votoček a Vítězslav Ettel: Studie o halogenhydrazinech aromatických XIII.
B. Němec: Zúrodnění u Gagea bohemica XIV
Wladimír Václav Heinrich: Classes de nouvelles solutions (de bifurcation) à période séculaire du problème général des trois corps XV

Conférences faites en 1923 dans les séances de la classe des Sciences.

Le 14. décembre. **V. Janda:** Sur la régénération des organes génitaux de Rhynchelmis.

TABLE DES MATIÈRES.

Jan Vilhelm. Première contribution à la connaissance de la variabilité des Charophytes en Slovaquie I.
Jaromír Klika. Quelques remarques sur l'histologie des zoocécidies . . II.
J. Šafránek. Propriétés magnétiques de quelques alliages nickel-cuivre au-dessus de point de Curie . III.
Jaromír Wenig. Sur quelques organes situés dans la partie proximale du tube digestif des Annamnia IV
K. Rychlík. Sur la théorie de la divisibilité . V.
W. S. Iljin. Sur diverses résistances des plantes envers les sels VI.
V. Hlavatý. Les congruences dans les espaces non-euclidéens VII.
Karel Domin. Outlines of the Phytogeographical Distribution of the Hepaticae . VIII
K. Rychlík. Sur la théorie de la divisibilité dans les corps algébriques numériques . IX.
Victor Janda. Regeneration of the Reproductive Organs of Rhynchelmis limosella Hoffm. . . X.
Frant. A. Novák. A monographical Study of Dianthus plumarius (L) XI.
P. N. Čirvinskij. Composition quantitative de deux roches éruptives . . XII.
E. Votoček et V Ettel. Étude sur les hydrozines aromatiques halogénées. (Part II; La dibromo — 2 4 — phényl hydrazine et ses dérivés sucrés.) XIII.
B. Němec. Fecundation in Gagea bohemica . XIV
Wladimír Václav Heinrich. Classes de nouvelles solution (de bifurcation) à période séculaire du problême général des trois corps XV.

I.

První příspěvek k poznání variability parožnatek ze Slovenska.

Napsal Dr. **Jan Vilhelm.**

Předloženo 30. ledna 1923.

Parožnatky rostoucí na Slovensku zaznamenány jsou ze starších zpráv, roztroušených po různých časopisech, a z dokladů herbářních, Leonhardim, jenž r. 1863 vydal: «Die bisher bekannten österr. Armleuchtergewächse«. Ale mnohé z těchto udaných stanovisek byly již v době Leonhardově pochybné a přecházely z této první práce přehledné do různých spisů jednajících o charách středoevropských. R. 1893 byly spracovány chary z celého území tehdejších Uher monograficky Nándorem Filarszkym (»Die Characeen mit besonderer Rücksicht auf die in Ungarn beobachteten Arten«). Filarszky zaznamenává starší udání (hlavně Leonhardiho), svoje nálezy nebo jiných botaniků. Z uvedených 27 druhů v této práci náleží k floře slovenské toliko 8 druhů. Jsou to z okolí bratislavského (dle starších většinou nálezů): *Nitella syncarpa, Chara contraria, foetida, rudis, aspera, fragilis;* ze župy spišské: *Ch. crinita* (známa ze starší doby i r. 1889 Migulou znova dle čerstvého materiálu studována), *contraria, foetida**), *gymnophylla;* ze župy liptovské: *Ch. gymnophylla.* Také počet různých forem dosud ze Slovenska rozlišených vzhledem k rozsáhlému území, oplývajícímu četnými vodami, jest celkem nepatrný. Již Pax v »Grundzüge der Pflanzenverbreitung in den Karpaten« (1908) zvlášť vytýká, že v literatuře uvedeno jest málo druhů a stanovisek z Karpat

*) Filarszky v článku »Beiträge zur Algenvegetation des Pieninen-Gebirges auf ungarischer Seite« (Hedwigia, 1900) uvádí také formy tohoto druhu z Pienin.

i z jejich podhoří, ač by tu mohl se očekávati hojnější výskyt těchto kryptogamů. Proto v posledních čtyřech letech při výzkumu kryptogamologickém Slovenska všude pátral jsem po parožnatkách a snažil jsem se nalezené druhy prostudovati zvláště podrobně vzhledem k jejich variabilitě.

V roce 1919 podnikl jsem první cestu výzkumnou na Slovensko do Vys. Tater a Belanských Alp. V těchto velehorách nenalezl jsem ani jedinou stopu po parožnatkách. V roce 1920 súčastnil jsem se první výzkumné botanické výpravy na Slovensko, podniknuté z rozkazu a podporou ministerstva školství a nár. osvěty pod vedením univ. prof. dr. K. Domina. Prozkoumány byly podrobně lokality Západního Slovenska od Čace hlavně Považí na jih až k Dunaji a východně za Nitru a Turčanský sv. Martin. Na této cestě podařilo se mi zjistiti 10 různých forem parožnatek. V roce 1921 na třetí své cestě podnikal jsem exkurse z Růžomberoku do Nízkých Tater, na Tatry i Choč za méně příznivých klimatických poměrů v tomto parném létě, kdy jejich lokality byly většinou vyschlé a vysušené. Přes tyto nepříznivé poměry nalezl jsem celkem 4 formy a jednu ze dvou různých lokalit. V roce 1922 na své čtvrté cestě po Slovensku botanisoval jsem v Rudohoří šťavnickém, ale tu jsem nezjistil ve vodách žádnou parožnatku. Byv již loňského roku na podzim upozorněn na píšťanská vřídla kol. doc. dr. E. Baudyšem nalezl jsem koncem srpna 1922 u lázní »Irma« v zásobní nádržce v Píšťanech nový druh *Chary* v teplé a minerální vodě rostoucí, o němž uveřejněno zvláštní pojednání.*)

Lokality parožnatek jsou tu velice sporé a často jen náhodně poštěstí se nalézti tyto zajímavé rostliny vodní. Proto při soustavném výzkumu počet nalezených parožnatek jest poměrně ještě k jiným rostlinám skrovný.

K výzkumu mému přispěli zvláště nálezy některých forem: p. univ. prof. dr. K. Domin, p. univ. doc. dr. Fr. A. Novák a p. senior a ev. far. v. v. dr. J. L. Holuby v Pezinku, jimž tuto vzdávám své vřelé díky!

*) Dr. Jan Vilhelm: Nová Chata v thermalní a radioaktivní vodě v lázních Píšťanech na Slovensku. Rozpr. Čes. Akad. II tř. Ročn. XXXII. č. 19.

Z uvedených forem parožnatek rostoucích na Slovensku možno poznati v dalším přehledu, že variabilita jejich jest velice značná. Z valné části shodují se tyto formy parožnatek s formami českými. Hlavním jejich nalezištěm jsou prameny a bařinky loužovité v krajinách vápnem bohatých Srovnáme-li jednotlivé lokality jejich, tu poznáváme, že odpovídají změněné znaky forem úplně charakteru stanoviska, zvláště pokud se týče oekologických jeho poměrů. Stanoviska parožnatek nelze však úplně stotožňovati, neboť na dvou stanoviskách úplně skoro shodných, kombinuje-li se nový nebo třebas poněkud i jeden změněný vnější činitel, nalezáme již formy poněkud odchýlné.

Chara foetida a *Ch. contraria* mají velice značné zeměpisné rozšíření pro svoji velikou schopnost přizpůsobovací k různým podmínkám edaphickým. Proto vyskytují se nejen ve vodách stojatých, ale i v tekoucích hlavně na podkladě vapenitém. I minerální vody chovají zvláštní jejich formy, jež jsou vzhledem k chemickému složení vždy odchylné.

Při rozsáhlém rozšíření zmíněné druhy jsou velice plastické, snadno se přizpůsobují k změněným podmínkám životním při svoji jinak ztrnulosti v hlavních znacích organisačních, zachovaných již z minulých period geologických.

Chara contraria má v západním Slovensku značnější rozšíření na různých lokalitách a proto tu vytvořuje zvláštní, již habituelně se lišící formy. Formy tohoto druhu celkem dosud málo jsou známy, v Čechách pak poměrně zřídka se vyskytují. Na Slovensku jsou to právě četné prameny mineralních vod, v nichž tato parožnatka se objevuje mnohdy ve velkém množství.

Z českých forem tohoto druhu byla nalezena *f. brachyphylla* Vilh. (l. c. Monogr. stud. o čes. par. str. 99) v tůni u Osady v údolí Revuci blíže Růžomberoku (Vilh., 1921) a v Blatnickém údolí u Turčanského sv. Mikuláše (IX. 1920, prof. Domin a dr. Novák). Obě lokality jsou na úpatí Velké Tatry oddělené horskými hřebeny od sebe. Tato forma jest prostřední velikosti (10—15 cm), vyznačující se krátkými listy ve všech přislenech ($^1/_2$—1 cm dl.) a články lodyžními 1—2 cm dl. Zcela zvláštní jest habitus této tenké formy. V okornatění lodyžním jsou žebra skoro stejně vysoká, na

žebrech pak vyniklejších jsou drobné, bradavkovité ostny málo zřetelné. Palistový věnec bývá však pod lupou viditelný. V Čechách tato forma jest význačná pro střední Polabí (Všetaty).

Forma turfosa Vilh. téhož druhu byla sbírána u Turčanského sv. Martina (IX. 1920) prof. Dominem a dr. Novákem. Jest to forma, která v Čechách vyskytuje se na severočeských rašelinách mezi Doksy a Jestřebím a zde na Slovensku se nachází i na podobných lokalitách. Nízká a zcela tenká forma tato roste v řídkých trsech a tím jeví zvláštní celkový habitus. Lodyhy její dosahují 10—15 cm výšky, lodyžní články 1—2 cm, listy pak jsou $^1/_2$—1 cm dl. V okornatění lodyžním zdají se hlavní a vedlejší žebra skoro stejně vysoká, ale na vyniklejších jsou jen málo zřetelné drobné bradavkovité ostny. Rovněž i u této formy jest palistový věnec pod lupou zřetelný i neokornatěná část listu jen nepatrně delší než okornatěná.

Mimo tyto 2 formy známé již z Čech nalezl jsem ještě další formy dosud mi neznámé:

1. *Chara contraria* A. Br. **f. pseudofoetida n. f.**

Diagnosis:

Habitu Charam foetidam aemulans, cane viridis, siccitate fragilis. Forma mediocris, valde incrustata. Corticatio caulis minus conspicua, series cellularum aequales esse videntur, series primariae prominentes, papillis sparsis, verruciformibus. Corona stipularis inconspicua. Planta ca 1 dm alta, internodiis $^1/_2$—4 cm longis. Folia supra 1 cm long. Articuli folii 3 (rarius 2) corticati, articulus ultimus ecorticatus corticata parte paulo longior. Foliola longiora.

Distributi geographica:

Habitat in locis paluadsis et fontibus apud Pružina prope Považská Bystrica et Beluše (VIII. 1920, Vilh.), in fonte apud aquas Lučky prope Lipt. Teplá (VIII. 1921, Vilh.).

Tato forma poznává se na první pohled, že náleží k *Ch. contraria* a ne k *Ch. foetida*, ač jinak napodobuje

zevní habitus *Ch. foetida.* Migula popsal podobnou formu *subfoetida* (l. c. Characeen v Rabenh. Krypt. Fl. 1897, p. 444), od kteréžto naše nová forma se značně liší. Jen po delším prohlížení lze stanoviti poměr žeber na okornatění lodyžním. Hlavní žebra zdají se téměř ve stejné výši s vedlejšími, ale přece hlavní žebra s nepatrnými zakrnělými, bradavkovitými ostny jsou málo vyšší. Palistový věnec jest rovněž lupou skoro nezřetelný. Celá rostlina bývá asi 1 dm vys.; hoření lodyžní články bývají značně kratší než dolení, poměrně asi $^1/_2$—4 cm dl. Listy jsou až přes 1 cm dl., složené ze 3 nejčastěji okornatěných článků (zřídka 2), s konečným článkem listovým neokornatěným, jen málo delším než okornatěná část listu. Lístky 1—2kráte delší než okornatěný článek listový. Tato forma středního vzrůstu bývá hojně inkrustovaná a následkem toho šedozelená, za sucha lámavá. Novou tuto formu dlužno řaditi: do oddělení *subinermes* v řadu forem *macroteles, longibracteatae.*

2. *Chara contraria* A. Br. **f. pulvinata n. f.**

Diagnosis,

Caespites humiles, densi, 5—8 cm alti. Caulis intermodiis brevioribus lucide virescens, fortiter incrustatus, normaliter corticatus, aculeis conspicuis et verruciformibus. Corona stipularis exigua. Cum forma caespitosa Mig. notis plurimis convenit, differt a *forma caespitosa* foliis longibracteatis.

Distributio geographica:

Habitat in fontibus prope aquas Lučky ad oppidum Liptavská Teplá (VIII. 1921, Vilh.).

Tato zvláštní nízká forma jest nápadná svým habitem, poněkud však podobá se formě *caespitosa* (l. c. Migula: Charac., 1897, p. 456), kterou Migula popsal z velkého jezera tatarského u Elku (Lyck) v Poznaňsku (leg. Sanio). Výskyt její v minerálním prameni u Luček úplně vedle *f. pseudofoetida* ukazuje, že dvě rozdílné formy tu společně rostou za týchž vnějších činitelů v témže prameni. Na okornatění lodyžním lze snadno stanoviti příslušnost této formy k druhu *Ch. contraria,* zvláště vzhledem k zřetelně vyvinutým bradavkovitým ostnům. Zvláštní habitus této formy podmíněn

jest zcela krátkými články lodyžními, takže následují hustě za sebou přesleny listové. Hojně inkrustované rostliny mají zbarvení světle zelené. *Forma pulvinata* náleží do oddělení *subinermes* v řadu *forem macroteles.*

3. *Chara contraria* A. Br. **f. capitulifera n. f.**

Diagnosis:

Forma humilis. capitulis oblongis, mite incrustata, cane viridis, habitu *Tolypellas* aemulans. Caulis 5—8 cm altus, tenuis, internodiis brevibus. Articuli foliorum corticati 2—3, articulo ultimo, ecorticato. Ecorticata pars folii semper corticata longiora. Folia verticillorum inferiorum 3—4 cm longa, ecorticata. Foliola cystocarpio longiora.

Distributio geographica:

Habitat in paludosis locis supra Kalvariam apud urbem Rožůmberok (VIII. 1921, Vilh.).

Zajímavá forma z pramenité bařiny svahové, částečně vysýchající v suchém létě, vyznačuje se zvláštním habitem, nápodobujícím nahloučenými přesleny v podobě podlouhlých hlavek *Tolypelly.* Podobnou formu *Ch. foetida f. capitulifera* Vilh. zjistil jsem z Čech z tůně za cukrovarem blíže Oužic u Kralup. Jsou to zcela parallelní formy dvou druhů, jež vyznačují se zvláštním vzrůstem, podmíněným patrně podobnými vnějšími faktory, ač stanovisko slovenské jest zcela zvláštní, odlišné od stanoviska českého, — svahová bařina na hřbetu Fatry.

Variabilita *Chara contraria* na Slovensku jest dosti značná i počet stanovisek tu poměrně větší než na jiném území. Stanoviska slovenská jsou svými podmínkami životními velice zrůzněná, jak z předešlých dokladů patrno.

Chara foetida jako nejobecnější druh vyskytuje se na Slovensku také v četnych formách, z nichž některé jsou úplně totožné s českými a dají se s nimi úplně srovnávati. Hlavním nalezištěm tohoto druhu jsou prameny a bařinky loužovité v krajinách vápnem bohatých. Měnlivé znaky oekologické jsou i patrné u forem dle jejich výzkytu a odpovídají vždy poměrům oekologických stanovisek. Zvláště tento druh jest při svém rozsáhlém rozšíření velice plastický, snadno

se přizpůsobující k novým nebo změněným podmínkám životním, ač v hlavních znacích organisačních zůstává strnulý a od jiných druhů přesně odlišený.

Z forem v Čechách již zjištěných vyskytují se na Slovensku tyto:

Forma turfosa Vilh. (l. c. Monogr stud. o čes. parož., str. 112.), nedaleko Trenčanské Teplice pod Kamenými Vraty v loužovité bařině u pramene (VII. 1920, dr. Fr. A. Novák, Vilh.) rostoucí, shoduje se v hlavních znacích úplně s českými rostlinami z Polabí. Jest to tenkolistá, nízká forma, s lodyhami jen 6—8 cm vys., silně inkrustovaná, s hořejšími přesleny stměstnanými a po usušení silně lámavá.

Forma bohemica Vilh. (l. c. Monogr. st. o čes. par., str. 118) roste v bařinných pramenech u Beluše v udolí blíže do Krajového v Považí (VIII. 1920, Vilh.). Rovněž i tato forma ze Slovenska jest silnějšího vzrůstu a směstnanější, podobně jako rostliny ze severních Čech. Jest 8—15 cm vys., silně inkrustovaná, s okornatěním lodyžním pravidelným a na něm se zřetelnými bradavkovitými ostny v ryhách.

Forma tenuis Vilh. (l. c. Mon. st. o čes. par., str. 120) byla nalezena v červenci 1922 p. drem Fr. Novákem v tuni pod Biebersbergem v Malých Karpatech. Poměrně nízká a tenká forma, podobná českým rostlinám od Bělé pod Bezdězem.

Forma longibracteata Mig. byla sbírána J. L. Holubym v močálech u dvora Natalie nedaleko Pezinku (IX. 1916). Velká, dlouze lístkatá forma s delšími články, dosti rozšířená ve středních Čechách, jeví se i ze Slovenska v řídších trsech a pravidelně rozvětvená. Okornatění lodyžní jest zřetelné a v ryhách sedí bradavkovité ostny. Zvláště nápadným jest delší, přečnívající a neokornatěný článek listu, jenž jest delší než 4 (3) okornatěné články.

Forma pseudocondensata Vilh. (l. c. Monogr. st. str. 121) vyskytuje se v bažinných, loužovitých pramenech mezi Vrch Teplou a Sulovem nedaleko Predmieru v Považí (VIII. 1920, Vilh). Rovněž tato forma známá z několika nalezišť ze středních Čech má na Slovensku střední vzrůst (6—10 cm dl.) a jest prostředně inkrustovaná. Habitus její jest zvláštní pro nahloučené konečné přesleny listové. Žebra

na okornatění lodyžním jsou skoro stejné vysoko vyvinutá, bez znatelných ostnů nebo bradavek. Po dlouhém pátrání na mladších článcích daly se zjistiti poměry okornatění, charakteristické pro *Ch. foetida.* Palistový věnec jest dobře zřetelný. Lístky bývají i tu delší než okornatěný článek listový.

Forma brachyphylla Mig. sbírána byla v mělkých pramenech bařinných v údolí u Beluše nedaleko do Krajového v Považí na dvou nedaleko sebe ležících místech (VIII. 1920, Vilh.). Tato zvláštní habitem význačná již forma jest poněkud odlišná od popisu Migulova (l. c. Rabenhorst. Krypt. Fl., 1897, p. 578), právě tak jako se odlišují rostliny sbírané v Čechách (l. c. Monogr. st., str. 124). Rostliny slovenské jsou silně inkrustované, asi 10 cm. vys., s lodyhami jen $^1/_2$—$^3/_4$ mm tlustými, s hořejšími lodyžními články kratšími. Listy jsou u této formy vesměs velice krátké ve všech přeslenech a dosahují jen 6—8 mm délky. Ostny na okornatění jsou silnou inkrustací neviditelné, ale palistový věnec jest dosti zřetelný a dobře vyvinutý.

Mimo těchto 5 forem *Chara foetida* známých již z Čech pozoroval jsem i jednu novou formu zcela zvláštní:

Chara foetida A Br. **f. atrosperma n. f.**

Diagnosis:

Forma singularis ex formis melanopyrenis, valde differt habitu ab aliis formis Ch. foetidae, mediocris, ad 15 cm alta, infirme incrustata, cane viridis. Caulis tenuis, ca $^1/_2$ mm crassus, accomodate ramosus, intermodiis varie longis, superioribus brevioribus 0,4—1 cm longis, intermediis et inferioribus 2—7 cm longis. Cortex caulis subaequaliter striatus, aculeis sparsis verruciformibus inconspicuis. Corona stipularis minima, inconspicua, ex aculeolis parvis et verruciformibus composita. Folia verticilli 8 (rarius 9—10), in verticillis superioribus fere 1 cm longa, in infimis ca 2 cm, omnia aequaliter composita, articulis corticatis et fertilibus 3, articulo ultimo excorticato antecedentibus longiore, plerumque 3 — cellulari. Foliola cystocarpio, paulo longiora, lateralia intermediis longiora.

Cystocarpium oblonge ovatum, coronula humili ca 0,9 mm longum et ca 0,6 mm latum, nucleo parvo et atro, ca 0,5 mm longo et ca 0,3 mm lato.

Distributio geographica:

Habitat in paludosis fontibus prope Beluša in convalle prope do Krajového (leg. VII. 1920 Vilh).

Tato nová forma parožnatek vyskytující se nově ve floře československé náleží do *IV. řady formae melanopyrenae* Mig. (Monogr. stud., str. 132), vyznačujících se jádrem tmavě červenohnědým nebo černým. Jest prostředního vzrůstu a dosahuje normálně asi 15 cm výšky, šedozelená, slabě inkrustovaná, zvláštního habitu, lišicí se od jiných forem *Ch. foetida* nápadně. Lodyhy jsou štíhlé, v středních článcích asi $^1/_2$ mm tlusté, přiměřeně rozvětvené, s nestejně dlouhými články lodyžními, z nichž hoření zcela krátké, 0,4—1 cm dl., střední a dolení 2—7 cmm dl. Okornatění lodyžní nezřetelné, hlavní a vedlejší žebra skoro stejně vysoko vynikající. Rozlišení hlavních a vedlejších žeber velmi jest obtížné, zvláště na doleních článcích jsou bradavkovitě zakrnělé ostny téměř k nerozeznání. Často zdá se, že jsou vyniklá hlavní, na jiných místech však vedlejší žebra. Jen na málo článcích lodyžních bylo možno zjistiti v ryhách ostny nepatrné, bradavkovité a tím určiti přesně příslušnost této formy k *Ch. foetida* a nikoli ke *Ch. contraria*. Rovněž palistový věnec jest zcela nezřetelný, i pod lupou palisty se jeví nejvýš jako malé kulovité bradavky. V přeslenech bývá nejčastěji po 8 (zřídka více) listech, v nejhořejších bývají listy skoro 1 cm dl., v doleních až 2 cm, jinak skoro stejně složené. Dolení 3 články listové bývají pravidelně okornatěny a jejich lístkové uzliny mívají rozmnožovací ústroje zvláště na doleních přeslenech. Konečný článek listový neokornatěný bývá často mnohem delší než okornatěná část listu. Lístky bývají nestejně dlouhé, postranní dva mnohem delší než prostřední, vždy skoro delší než okornatěný článek listový. Na vnější straně lístkové uzliny lístky bývají zcela zakrnělé. Cystokarpy vejčité podlouhlé s nízkou korunkou, asi 0,9 mm dl. a asi 0,6 mm šir., s jádrem malým, úplně černým, v intensivním prostupujícím světle tmavošedě černým, 0,5 mm dl. a 0,3 mm široké.

Právé rozměry cystokarpu a jádra nasvědčují také správnou příslušnost této formy k *Ch. foetida*, u kteréhožto druhu velikost zralého jádra bývá menší než u *Ch. contraria*.

Tato zvláštní forma byla mi již nápadnou svým vnějším habitem a proto při prvním shlédnutí srovnával jsem ji s formou *microsperma* Vilh. (l. c. Monogr. stud., str. 132). Po vyloupnutí jádra ihned ukázalo se blízké příbuzenství obou forem. Formu microsperma nalezl jsem na t. zv. slaných loukách „Serpina" u Bečova v Čechách, kde všude v okolí jsou prameny s minerálními vodami, právě jako na Slovensku. Tato nová forma roste jistě v prameni s minerální vodou na blízku lázní Belušských. Zdá se mi, že právě roztok solí hořkých působí také na zčernání jádra i podmiňuje zvláštní habitus těchto forem. Obě formy náležejí do řady *formae melanopyrenae*, jež dosud byly jen vzácně pozorovány. Migula popsal toliko dvě formy, z nichž jednu sbíral v Německu Giesenhagen a druhou popsal ze Švédska.

Mimo to nalezl jsem ještě na Slovensku *Chara fragilis* Desv. v normální formě v sterilním stavu v rameni řeky Váhu u Velkého ostrova blíže Šoporny jižně od Trnavy (VIII. 1920).

Résumé.

Première contribution à la connaissance de la variabilité des Charophytes en Slovaquie.

Dr. Jan Vilhelm (Prague).

Les Charophytes slovaques et leur variabilité étaient peu connues jusqu'à présent. Au cours de mes voyages botaniques que je fais en Slovaquie chaque été depuis 1919 j'ai trouvé quelques formes de Charophytes qui sont très intéressantes au point de vue oecologuique. Quelques formes nouvelles m'ont été fournies par mes amis M. le prof. dr. Karel Domin, doc. dr. Fr. A. Novák et M. le pasteur dr. J. L. Holuby (Pezinok) que je remercie sincèrement.

Chara contraria et *foetida* sont très répandues à cause de leur capacité de s'accommoder aux diverses conditions

édaphiques. Les eaux minérales qui abondent en Slovaquie renferment des formes spéciales des Charophytes conditionnées par la composition chimique de l'eau. Les formes ci-dessus mentionnées sont très plastiques et c'est pourquoi leur variabilité est considérable.

Chara contraria, généralement rare en Bohême, se trouve quelquefois en grandes quantités dans la Slovaquie occidentale et surtout dans les sources minérales. Parmi les formes de *Chara contraria* se trouvant en Slovaquie il faut nommer: *f. brachyphylla* Vilh. (Růžomberok, valle de Blanica), *f. turfosa* Vilh. (Turč. Sv. Martin), *f. pseudofoetida* n. f. (l. c. diagnosis et distributio geographica), *f. pulvinata* n. f. (l. c. diagn. et distrib. geogr.).

Chara foetida, espèce la plus commune, se trouve en Slovaquie dans les formes nombreuses. Voici les formes que j'ai trouvées en Slovaquie: *f. turfosa* Vilh. (Trenčanské Teplice), *f. bohemica* Vilh. (Beluše), *f. tenuis* Vilh. (Biebersberg), *f. longibracteata* Vilh. (Pezinok), *f. pseudocondensata* Vilh. (Sulov), *f. brachyphylla* Mig. (Beluše), *f. atrosperma* n. f. (l. c. diagnosis et distributio geographica). La solution des sels amers noircit le nucléus de cette dernière forme et occasionne un habitus spécial de la plante. *Formae melanopyrenae* étaient peu observées jusqu'à présent. Cette dernière forme ressemble à *f. microsperma* Vilhm.*) originaire des prés salés à Bečov au nord de la Bohême.

Parmi d'autres espèces on a trouvé encore en Slovaquie une *Chara fragilis* de forme normale dans un bras du Váh près de Šoporna et une nouvelle espèce de *Chara* dans un réservoir d'eau thermale à Píšťany. J'en parlerai dans un article spécial.**)

---

*) l. c. J. Vilhelm: Monografická studie o českých parožnatkách. Mémoires de la Société royale des sciences de Bohême. II. Cl., 1914.

**) Dr. Jan Vilhelm: Noveau charad'eau thermale et radioactive des bains de Píšťany en Slovaquie. Bull. internat. de l'Académie de Scienc de Bohême. 1923.

II.

Histologické poznámky k některým hálkám.

Příspěvek k poznání hálek.*)

Napsal doc. Dr. **Jaromír Klika.**

(Se 14 obrázky a 3 mikrofotografiemi v textu).

Předloženo dne 7. března 1923.

Mezi theoriemi, které vysvětlují vznik hálek, shledáváme se v první řadě se starou theorií Malpighiho, které se přidržovali nebo kterou obměňovali i mnozí pozdější přírodopisci (Lacase—Duthier, Hofmeister, Darwin, Peyritsch), že totiž podnět k vytvoření hálky dává jed, jejž matka cizopasníka vpouští do rány při bodnutí rostliny. Tuto theorii mnozí pozměnili a doplnili. — Adler (1877) a Beijerrinck (1888) připouštějí, že u některých hálek vajíčko vylučuje „hálkový" jed. Kerner zvlášť zdůrazňuje, jak vyloučený jed působí změnu plasmatu buněčného a jak účinkuje na vzrůstové enzymy. Též Küster (1913) se zastává vylučování specifických hálkotvorných látek; prosoplasmatické hálky považuje za význačné chemomorfosy, u jiných hálek dle něho — soudě podle pochodů při hojení ran — spolupůsobí vlivy fysikální nebo organoidní. — Ovšem již před ním Herbst (1895) a později Klebs upozornili, že různí vnější činitelé mohou vyvolati tytéž změny a přeměny jednotlivých rostlinných částí, proto nelze vždycky ztotožňovati experimentálně vzbuzené poruchy pletiv se stejnými morfologickými změnami v hálkách. V platnosti stále zůstává Pfefferův poukaz na teologické uspořádání pletiv v hálce ku prospěchu symbionta. Klebs (1906) a Diels (1913) zdůrazňují, že poruchy ve výživě rostliny, vyvolané cizopasníkem, působí nebo alespoň

*) Za laskavá upozornění při této práci děkuji prof. dr. K. Kavinovi; za zhotovení mikrofotografií p. univ. prepar. J. Rejskovi.

účastní se na vzniku hálky. Winkler (1912) se vrací k theoriím morfogenních substancí.

Magnus (1914) vysvětluje hálky jako následky poranění rostlinného pletiva. Poranění současně s vyloučenými specifickými látkami spolupůsobí na vytvoření hálky. Hálka se může vyvinouti ovšem jen tenkráte, není-li vývoj napadeného orgánu ukončen. Čím mladší orgán, čím méně je dosud differencován, tím hlubší změny mohou v pletivu nastati.

Možno přijmouti i domněnku Goeblovu a Johansenovu (1897), kteří nahromadění živných látek a vznik pathologického pletiva v hálce vykládají jako následky poruchy ve výživě napadené části rostliny, vyvolané antienzymy, které rostlina tvoří, aby zmírnila nebo vůbec zabránila vylučování enzymů cizopasníkem. Ssaje-li cizopasník stále, vylučují buňky stále antienzymy a tím zesilují se i poruchy ve výživě.

V poslední době uvádí se vznik hálek ve spojení s theorií o hormonech (Goebel, Loeb).

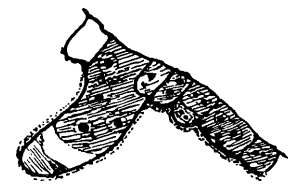
Srovnáme-li jednotlivé theorie o vzniku hálek, musíme doznati, že žádná z nich neuspokojuje zcela, žádnou není možno vyložiti úplně a jednotně vznik všech hálek. Vysoká specialisace některých hálek, různé skupiny živočichů, kteří je vyvolávají na různých, často velmi vzdálených skupinách rostlin, nutí nás, abychom vedle činitelů fysikálních a chemických brali v úvahu i činitele organogenní. Již u jedné skupiny cizopasníků (na př. roztočů) můžeme rozlišiti rozmanité typy hálek, přihlížejíce ke způsobu výživy cizopasníků. (Němec 1916, 1917). Vykazují-li pak různé typy nápadně shodná zařízení, jedná se tu pouze o analogické formy rostlinných pletiv, sloužících k témuž účelu; příkladem toho jsou „živná" pletiva v hálkách rozmanitého tvaru a původu.

Hálky, způsobené roztočem *Eriophyes Nalepai Fockeu* známé též dříve pod jménem Erineum axillare, nalézáme hojně na listech Alnus glutinosa Gärtn. Můj materiál pochází z Radotína. Hálky jsou 2—3 mm velké vychlípeniny s počátku žlutavé, později načervenalé, vždy význačně umístěné v úhlu, kde pobočný nerv odděluje se od hlavního nervu listového. Vespod na hálkách v mladším vývojovém stadiu pozorujeme bělavá plstnatá místa, typická pro roztočové hálky typu „Erineum". Místo, původně napadené roztoči, jest celkem

malého plošného rozsahu, ale čilým dělením napadených buněk (okolní pletiva listová neúčastní se při tom na vzniku hálky), kde buňky vnitřní stěny, přímo napadené, rostou do plochy méně než buňky vnější stěny, zvětší se a vyklene nad plochu listu a vytvoří tak typickou polokulovitou až váčkovitou vychlípeninu, takže část erinea dostane se dovnitř dutiny. Již Frank (1881), později Küster (1911) zdůraznili, že tato hálka je přechodným typem mezi plošnými plsťovinami a typicky vakovitými hálkami.

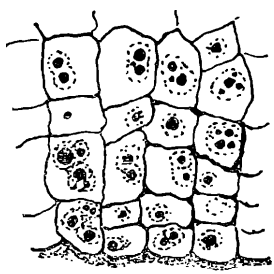
Srovnáme-li anatomickou stavbu normálního listu olše lepkové s průřezem hálky, seznáme, že se tu v podstatě jedná o kataplasmatickou hyperplasii. Kdežto na průřezu normálního listu nalézáme pod vrchní pokožkou dvouvrstevné pallissádové pletivo, pak 4—5 vrstev houbového parenchymu s mezibuněčnými prostorami, ukazuje stěna hálky stavbu mnohem jednodušší: jest složena z 6—8 vrstev nediferencovaného tenkostěnného pletiva bez intercellulárních dutin, na zevnějšek, na svrchní straně listu jest pokryta vnější typickou pokožkou. Působením infekce a čilým dělením byla tu úplně potlačena normální differenciace listového pletiva v pallissádový a houbový parenchym. — Pokožka na svrchní straně hálky je složena z typických pokožkových buněk s mírně ztlustlými stěnami, jež se jen málo liší velikostí od normálních pokožkových buněk na listě. Průduchy vždy pokožce hálky chybějí.

Svrchní vrstva buněk uvnitř hálky, „spodní pokožka", utvořena je tenkoblannými buňkami s hojným plasmatickým obsahem a nápadně velkými jádry (zejména u srovnání s mnohem menšími jádry buněk vnitřního pletiva) [obr. 1.]; často nalézáme v nich diploidní, tetradiploidní i polydiploidní jádra. Téhož rázu jsou i buňky 2—3řadé hypodermální vrstvy, z níž dělením vznikají buňky vnitřní pokožky. Další vrstvy buněk, jak bylo již řečeno, vykazují celkově normální poměry, jsou chudší plasmatickým obsahem a mívají jádra normální velikosti, ba často i menší (než v buňkách normálního listu). Při vnějších stěnách buněk vnitřní pokožky je silná nástěnná



Obr. 1.

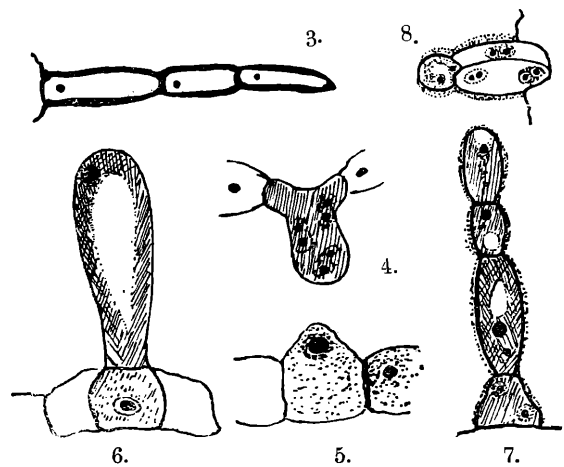
plasmatická vrstva. Co se týče polohy jader, jsou v pokožkových a hypodermálních buňkách pravidelně posunuta k zevní stěně, kdežto jádra ostatních buněk mají polohu nepravidelnou, jsou ve středu, nebo posunuta k některé stěně, nemají určité orientace. Dělení buněk v této vrstvě, kterou s vrstvami hypodermálních buněk považujeme, podobně jako prof. Němec ve svých pracech o hálkách roztočů (1916, 1917), za homologickou kallusu, děje se antiklinálně, v subepidermální vrstvě dělí se buňky i tangenciálně, čímž vzniká nerovný povrch a záhyby uvnitř hálky. Jako v ostatních hálkách roztočů, jest i zde toto kallusové pletivo (obr. 2.) pletivem živným, z něhož roztoči ssají potravu, jak se zmíníme ještě dále.


Obr. 2.

Typické pro naši hálku je vytváření chlupů na vnitřní pokožce. Můžeme tu rozeznati dva druhy: v ústí a kolem ústí hálky nacházíme normální, vícebuněčné chlupy, s buněčnými stěnami ztluštělými, na konci přišpičatělé (obr. 3.). Jejich buňky jsou vždy jednojaderné, s malými jádry a mají plasmatický obsah bez vakuol. Zabraňují nepovolaným hostům vejíti dovnitř. Na vnitřní straně hálky nacházíme dobře vyvinuté t. zv. živné chlupy. Jsou vždy vychlípeninami pokožkových buněk, často jednobuněčné (obr. 4.—6.), ale i vícebuněčné (obr. 7.), s tenkými stěnami, bohatým plasmatickým obsahem, s vakuolami, s jádry zvětšenými; často bývá i tu akkumulace jaderné hmoty (obr. 8.). Zvláštní ráz mají některé živné chlupy, nesené jednou nebo dvěma řadami buněk, vybíhající daleko do dutiny hálky, kde konečná buňka odpovídá vlastnímu živnému chlupu (obr. 9.). Buňky, s kterými souvisí, se více nebo méně čile dělí, mají vždy bohatý obsah plasmy, jeví i stopy ssání jako pravé živné buňky. V konečné buňce i v postranní bývá po jednom jádře. Zdá se, že tyto řady buněk vznikly z pokožkových živných jednobuněčných chlupů; nahromadění jaderné hmoty při zvýšeném přílivu živných látek dalo popud k dělení.

Zmínili jsme se, že vrstvu kallusového pletiva dlužno považovati za vrstvu živnou, z buněk vnitřní pokožky čerpají roztoči svoji výživu. Nacházíme v buňkách zřetelné stopy

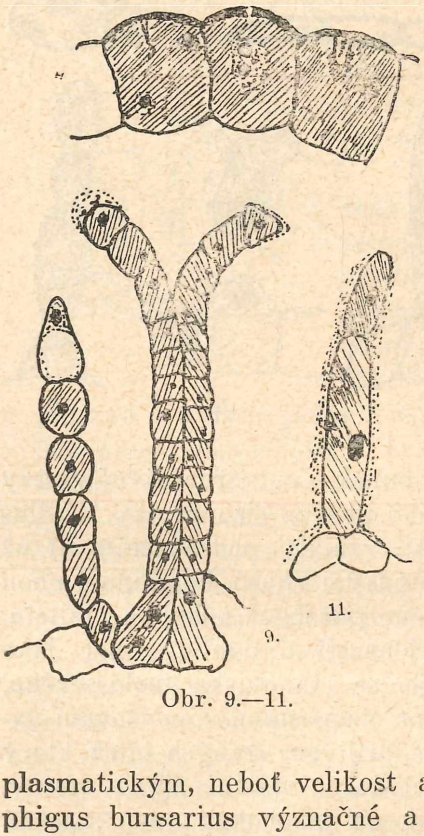
jejich ssání stejného rázu celkově, jak je popisuje Němec v pokožkových buňkách hálky roztoče Eriophyes Padi (1917). Jsou to malé, kruhovité otvůrky v bláně buněčné; pokračování jejich jsou vakovité prohlubeniny v cytoplasmě, prodlužující se někdy v kanálek (obr. 10.). Buňky takto napadené jeví — ve starším stadiu hálky — chudší obsah plasmatický, četné vakuoly, ale nikdy neodumírají. Stopy po ssání podobného rázu nalézáme i na živných chlupech, bývají často na vrcholu, směřují k vakuole a cytoplasma kolem ssacích kanálků jeví nápadné zbarvení (obr. 11.). Podobně jako prof. Němec nepozoroval jsem nižádné traumatropické reakce jader.



Podnětem k čilému dělení buněk a vytvoření živné vrstvy jest nesporně zranění dotyčného pletiva cizopasníky. Kallus dlužno považovati za produkt, vzniklý podrážděním ať už chemickým, ať prostě mechanickým, nebo kombinací obou těchto popudů. Jest výsledkem působení několika činitelů, někteří z nich však dnes přicházejí v úvahu pouze jako hypotetičtí. Vzniklá hálka je, se stanoviska teologického, prospěšná a výhodná pro život cizopasníka. Zvětšování jaderné hmoty souvisí s hojným přílivem živných látek, který podmiňuje i čilé dělení a vytváření vlastní živné vrstvy. Je zřejmo, že podráždění, ať už jakéhokoli rázu, zasahá do výměny látkové a jest původcem zvýšeného proudu živných látek do živné vrstvy. Co se týče další diferenciace, vytváření živných chlupů můžeme připočísti zvýšenému osmotickému tlaku v pokožkových buňkách, neboť činnost průduchů v hálce je omezena a nad to je i plasmatický obsah buněk zvětšen. Můžeme je tudíž s Küsterem (1911) považovati za intumescence, vyvolané osmomorphosou.

U této hálky setkáváme se s kombinací dvou výživných způsobů. Cizopasník živí se jednak látkami, nahromaděnými v buňkách vnitřní pokožky, jednak čerpá i ze speciálně vzniklých živných trichomů. Prvním způsobem blíží se hálce druhu Eriophyes Thomasi (Němec 1916), druhým pak hálce roztoče Eriophyes Padi (Němec 1917).

Nápadná hálka na Populus nigra L. je vytvářena mšicí Pemphigus bursarius L.; sbíral jsem ji v Radotíně. Jsou to vakovité útvary, prodloužené, na horní nebo spodní straně řapíku. Bývají až 15 mm dlouhé, poněkud zakřivené, často začervenalé a mají vždy na špičce otvůrek. V ústřední dutině hálky nalézáme velké množství mšic, ssajících živné látky z vnitřní stěny.

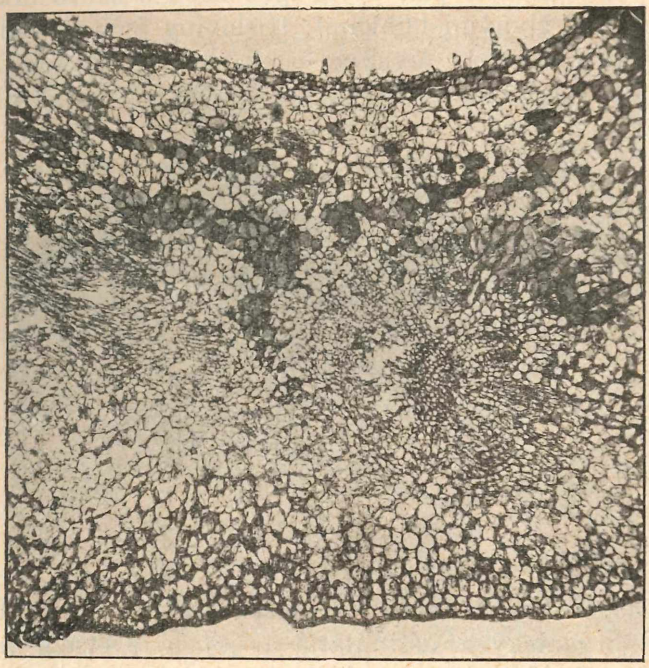


Obr. 9.—11.

Jsou to hálky typu histoidního (Küster 1911, p. 131). Povstaly kombinovaným vzrůstem buněk do plochy i do tloušťky, jak ukazují průřezy mladými stadii této hálky (Küster 1916, fig. 90.). Popudem bylo ovšem zranění určitých míst mšicemi; abnormální urychlené dělení buněk podmiňuje tu kvalitativní hypertrofii. Počítáme je k hálkám prosoplasmatickým, neboť velikost a tvar jejich jsou pro Pemphigus bursarius význačné a konstantním znakem. Srovnáváme-li pod mikroskopem příčné průřezy normálního řapíku a stěny hálky, shledáváme, že stavby hálky zúčastnily se značnou měrou cévní svazky, jejichž elementy nalézáme tu proti normálním poměrům mocně vyvinuté, nejen rozměry, ale i počtem, zejména v lýkové části (obr. 12.).

Na povrchu hálky tvoří se význačná vrstva korková,

vyskytující se na hálkách poměrně nehojně. Místy vyvinuty jsou i typické lenticelly. Vrstvy buněk bezprostředně pod pokožkou vykazují hojný plasmatický obsah, dělí se — vzhledem k povrchu hálky — tangenciálně, ve vrstvách hlubších (třetí až čtvrté) i antiklinálně. Vznikají tak úzké buňky bo-

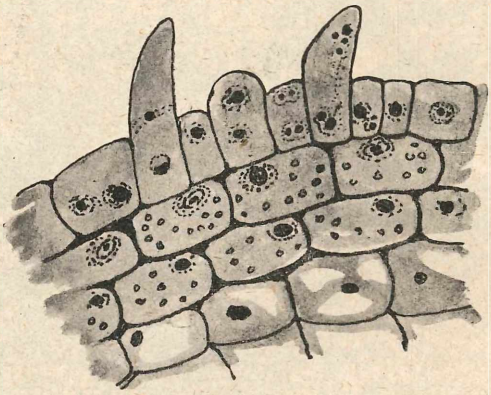


Obr. 12.

haté plasmou, s dobře vyvinutým jádrem a obsahují, jako všechny parenchymatické buňky pletiva, obklopujícího cévní svazky, hojně škrobu.

V svazcích cévních nalézáme celkově všechny součásti jako v normálních. V části lýkové jsou jednotlivé elementy proti normálním poměrům neobyčejně zvětšeny. Kromě sítkovic je nápadný, jak počtem, tak i velikostí, leptomový parenchym o buňkách s bohatým obsahem a normálními jádry. Tyto parenchymatické buňky jsou jednak vtroušeny po skupinách mezi ostatní elementy, jednak tvoří na spodní straně, tudíž na straně bližší k vnitřní živné vrstvě, souvislý

pruh ze 2—3 vrstev, provázející síťkovice. Přechod k obyčejným parenchymatickým buňkám tvoří buňky kambiformní. Hojné u hálky (méně hojné v pletivu normálního řapíku) jsou tříselné idioblasty v buňkách lýkového parenchymu, sousedících se síťkovicemi. Je zajímavo, že je nalézáme hlavně ve vrstvách pod zevní pokožkou a skoro nikdy ve vrstvách nad živnými buňkami; třísloviny jsou tu vedlejším produktem při tvorbě živných látek, hlavně cukru. Samozřejmě tu nalézáme ve všech skoro buňkách hojně uložený

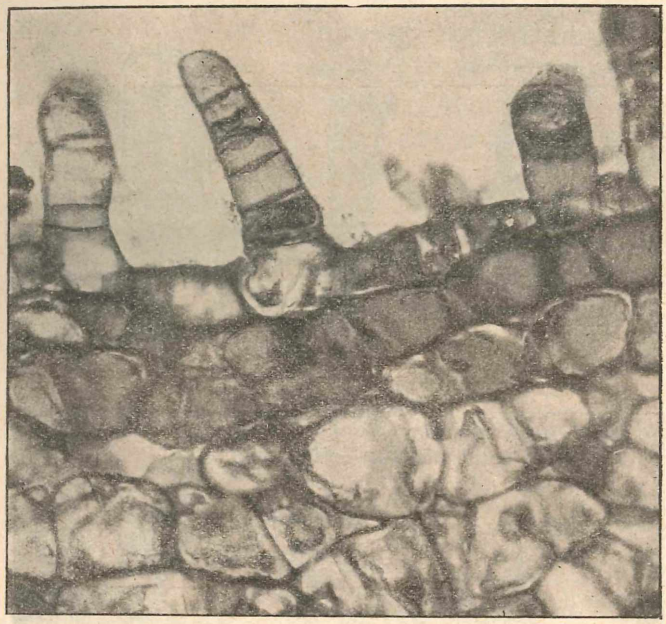


Obr. 13.

škrob, neboť buňky leptomového parenchymu vodí hlavně roztoky organických assimilátů a jejich zvětšení souvisí s funkcí: přiváděti dostatečné množství živin vrstvám vnitřní pokožky, která nám i tu představuje živnou vrstvu, jak svědčí četné stopy po ssání i zbytky uvízlých ssacích orgánů.

Výživná vnitřní vrstva tvořena je jednoduchou pokožkou z jedné vrstvy buněk epiderm. a dvou- až třívrstevné hypodermis. (obr. 13.) Buňky epidermální mají hojnost plasmy, která vykazuje často síťkovitou strukturu s četnými vakuolami, a zvětšená jádra. Dělí se často, ale nikdy nepozoroval jsem onoho bujného vzrůstu pletiva v kallus jako u předešlé hálky (alespoň ve stadiu, které jsem prohlížel). Buňky jsou vždy protáhlé, parenchymatické (stěny mají vždy tlustší než buňky v kallusu). Parenchymatické buňky hypodermální nejeví žádného dělení, mají bohatý obsah plasmy a jednoduchá jádra, v plasmě mnoho škrobových zrnek. Jsou odděleny od

zmíněných již buněk lýkového parenchymu, jimž se obsahem i poměry jaderními podobají, několika řadami jiných parenchymatických buněk, chudých na plasmu. V řídkých případech sousedí hypodermis s lýkovým parenchymem přímo. Je zřejmo, že tato hypodermální část výživné vrstvy přijímá živné látky od buněk lýkového parenchymu a dodává je podle potřeby



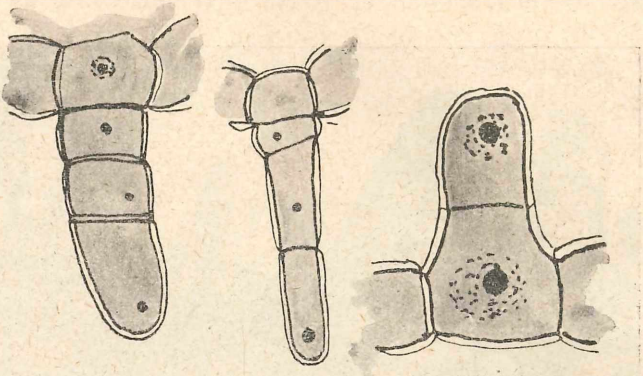
Obr. 18.

svrchní vrstvě buněk, které jich nejvíce potřebují k hrazení výživy cizopasníků (obr. 18.). Jak bylo již řečeno, nenalezl jsem ve vývojovém stadiu mnou prohlíženém pletiva rázu kallusu jako u předešlé hálky.

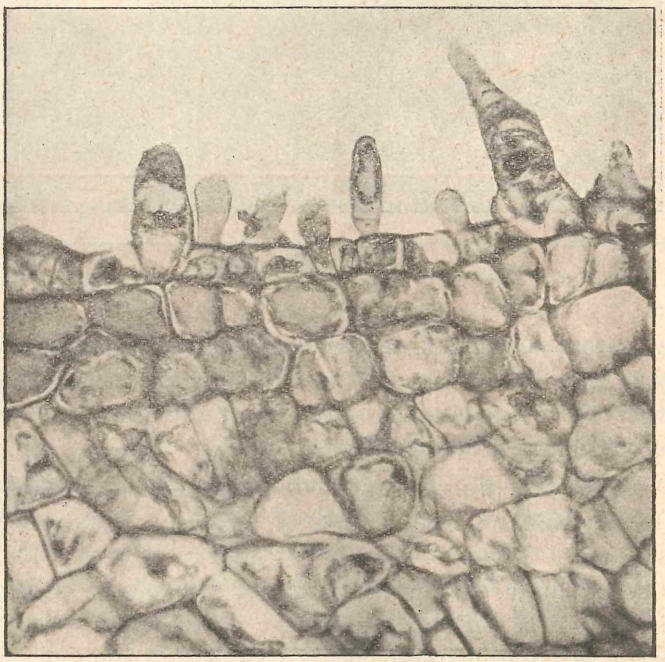
Pokožkové chlupy jsou jednobuněčné, vznikají vyklenutím a protažením buněk vnitřní pokožky. Mají obyčejně mnoho plasmy i značné množství jaderné hmoty. Mezi nimi jsou pak normální vícebuněčné chlupy s poměrně tlustými stěnami buněk a normálními jádry. Jak ukazují přechody, vznikají z jednobuněčných chlupů; při této přeměně se jejich

zmnožená jaderná hmota redukuje (obr. 14.—16.). I zde zdají se býti chlupy útvary osmomorfickými.

Chlupy (obr. 17.), ať jedno- či vícebuněčně, nemají pro výživu mšic významu, jen zřídka nalezl jsem na nich nepatrné stopy ssání. Vlastní výživnou vrstvou, do níž mšice



16. 15. 14.



Obr. 17.

zapouštějí své sosáky a kde je také často zanechávají, jest pokožka. Stopy ssání jsou podobné jako u roztočů, ale celkem jednodušších typů. Napadené buňky, význačné zmnožením jaderné hmoty a četnými vakuolami, neodumírají, což můžeme vysvětliti tím, že ztráty živných látek rychle a snadno se hradí zvýšenou činností lýkové části cévního svazku. Někdy i hypodermální buňky bývají mšicemi vyčerpávány, jak svědčí stopy a chudý plasmatický obsah napadených buněk. Srovnáme-li s hálkami roztočů, kde také pouze vnitřní pokožka je živnou plochou (na př. Eriophyes Thomasi), shledáváme se u hálky Pemphigus bursarius s poměry jednodušími: Není tu odumřelých vyssátých buněk na povrchu, zranění nevyvolává tu tak význačného tvoření kallusového pletiva, buňky vnitřní pokožky nejsou nápadně zvětšeny a nemají tlustého nastěnného povlaku (jako u předešlé hálky); také trichomy zde nemají toho významu pro výživu mšic, jako podobné útvary u hálek roztočových.

Z botanického ústavu
vysoké školy zemědělského a lesnického inženýrství
při vys. učení technickém v Praze.

LITERATURA.

ADLER: Beiträge 2. Naturgeschichte d. Cynipiden — Deutsche Entomolog. Zeitschr. Bd. 21—1877.

BEIJERINCK: Ü. d. Cecidium v. Nematus capreae auf Salix amygdalina — Bot. Ztg. 46—1888.

DIELS: D. Formenbildungsprocesz b. d. Blütencecidie v. Lonicera — Flora N. F. 5.—1913.

FRANK: D. Pflanzenkrankheiten — 1881.

HERBST: Ü. d. Bedeutung d. Reizphysiologie f. d. kausale Auffassung v. Vorgängen in d. tier. Ontogenese II. Biol. Zentralbl. 15.—1895.

KAVINA: Botanika zemědělská díl I.: Botanika všeobecná č. 1.—3.

KERNER: Pflanzenleben — Bd. 2. 2. Aufl.

KLEBS: Willkürliche Entwicklungsänderungen b. Pflanzen — Jena 1903. Ü. künstliche Metamorphosen 1906.

KÜSTER: D. Gallen d. Pflanzen 1911.
Gallen — Handwb. d. Naturwiss. Bd. 4.—1913.
Pathologische Pflanzenanatomie 1916.

Magnus: D. Entstehung d. Pflanzengallen verursacht durch Hymenopteren — Jena 1914.
Nalepa: D. Eriophyiden — 1904.
Němec: D. Problem d. Befruchtungsvorgänge u. andere zytologische Fragen. — Berlin 1910.
O hálce roztoče Eriophyes Thomasi 1916.
O hálce roztoče Eriophyes Padi 1917.
Další zprávy o hálkách roztočů 1917.
O hálkách roztočů 1921.
Pfeffer: Pflanzenphysiologie 2. Aufl. Bd. 2.
Ross: D. Gallenbildungen (Cecidien) d. Pflanzen. Stuttgart. 1904.
Schlechtendal: Eriophyidocecidien, die durch Gallmilben verursachten Pflanzengallen 1916.

Résumé:

Quelques remarques sur l'histologie des quelques zoocécidies.

Les zoocécidies causées sur les feuilles de l'Alnus glutinosa Gärtner par un acare Eriophyes Nalepai Fock. ont la forme d'une ampoule et sont toujours placées entre le nerf principal et le nerf latéral. Quant à la structure anatomique ce n'est qu'une hyperplasie cataplasmatique. Comparée à la structure de la feuille, la paroi de la cécidie a une structure plus simple se composant de 6—8 couches d'un tissu uniforme. L'extérieur est pourvu d'un épiderme typique semblable à celui des feuilles. L'intérieur renferme à son centre une couche de cellules parenchymatiques, à riche contenu plasmatique, aux noyaux particulièrement développés; les deux ou trois couches voisines sont de même structure. Dans toutes ces couches les cellules se divisent rapidement formant un tissu semblable à un bourrelet. Deux sortes de poils se développent sur l'épiderme intérieur. Ce sont des poils normaux à plusieurs cellules ayant des parois épaissies protégeant l'entrée de la cécidie. Outre ces derniers, il existe des poils nutritifs provenant des cellules de l'épiderme intérieur qui se composent d'une ou de plusieurs cellules à contenu plasmatique abondant et dont les noyaux sont plus grands et plus nombreux. Sur ces poils nutritifs et sur les parois des cellules de l'épiderme intérieur nous voyons les traces typiques de la succion des acares. C'est une combinaison

de deux façons nourricières, la première est semblable à celle de la cécidie d'Eriophyes Thomasi (Němec 1916), la seconde de celle d'Eriophyes Padi (Němec 1917).

Les cécidies causées par le Pemphigus bursarius S. sur Populus nigra L. sont d'un autre genre. Nous les rangerons dans la catégorie des cécidies histoïdes, car elles se développent en largeur et en épaisseur. Ces cécidies sont formées, en partie, par le développement anormal des vaisseaux-vasculaires, c'est-à-dire par les cellules parenchymatiques du liber qui se trouvent là en plus grand nombre, très grossies avec un contenu plasmatique abondant. Les deux ou trois couches de cellules de l'épiderme intérieur, voisines du liber, sont semblables à celles de la cécidie décrite plus haut. La couche de l'intérieur est une couche nutritive comme le prouvent les nombreuses traces de succion. Les cellules placées en dessous contiennent beaucoup d'amidon. Ce sont justement les cellules du liber qui procurent une abondante nourriture à ces couches et à l'épiderme intérieur et le superflu (ou la réserve) de la nourriture se dépose en forme d'amidon dans les cellules des couches. Les poils (nutritifs) sont moins importants, au début ils sont unicellulaires et ensuite les cellules se multiplient. Les traces de succion sur les poils sont très rares, c'est l'intérieur de l'épiderme qui forme la vraie couche, nutritive, mais les cellules inférieurs portent parfois aussi des traces de succion et souvent leur contenu plasmatique est appauvri.

Prague, 1922.

Institut Botanique de l'École polytechnique (Faculté agronomique) à Prague.

III.

Magnetické vlastnosti některých slitin niklu a mědi nad bodem Curieovým.

Napsal Dr. **J. Šafránek.**

Předloženo dne 11. dubna 1923.

V kinetické theorii paramagnetismu odvodil Langevin[1]) relaci mezi polem, temperaturou a magnetisací. Formule jím vypočtěná jest:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = coth\, a - \frac{1}{a}; \tag{1}$$

$$a = \frac{\sigma_{m_0} H}{RT} \tag{2}$$

Tu značí:

σ_m magnetický moment jednotky hmotné za temperatury T a v magn. poli H,

σ_{m_0} konstantu rovnou magnetickému momentu jednotky hmotné v případě, kdyby srovnání molekulárných magnetů bylo dokonalé (tedy za absolutní nuly, kdy thermické perturbace nepůsobí rušivě na orientující účinek magn. pole).

H magnetické pole,

T absolutní temperaturu,

R universální plynovou konstantu.

Tato relace znamená statickou rovnováhu, která se utvoří mezi účinkem magnetického pole, jež má snahu srovnati magnety molekulární a mezi rušivým účinkem způsobeným pohyby tepelnými.

Rozvojem rovnice (1) v řadu, v níž se omezíme jen na první člen, obdržíme:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \frac{a}{3} = \frac{\sigma_{m_0} H}{3RT}. \tag{3}$$

[1]) Langevin, Ann. Chim. Phys. (8) 5, 70, 1905.

Protože $\frac{\sigma_m}{H}$ je definováno jako koefficient molekulární magnetisace, χ_m susceptibilita, tedy:

$$\frac{\sigma_m}{H} = \chi_m = \frac{\sigma^2 m_0}{3RT} \tag{4}$$

Koefficient magnetisace je tudíž obráceně úměrný absolutní temperatuře. To je zákon Curieův. Konstanta úměrnosti nazývá se konstantou Curieovou a její hodnota je patrně

$$C_m = \chi_m . T = \frac{\sigma^2 m_0}{3R} \tag{5}$$

Zákon Curieův byl verifikován u velkém počtu případů. Tuto pro plyny odvozenou theorii rozšířil P. Weiss[2]) na látky ferromagnetické, čímž docíleno kontinuity theoretické mezi látkami para a ferromagnetickými.

Jím odvozený všeobecný zákon Weiss-Curieův pak zní:

$$\chi (T - \Theta) = C, \tag{6}$$

kdež C znamená opět Curieovou konstantu a Θ značí tak zvanou teplotu zániku (bod Curieův). Této rovnice užíváme, pracujíce nad teplotou zániku.

Další vztah

$$\Theta = C . N . D \tag{7}$$

dovoluje nám počítati konstantu N molekulárního pole, známe-li Θ, C a hustotu D.

V této práci provedeno jest měření konstant Θ a C pro některé slitiny mědi a niklu. Starší práce[3]) týkající se magnetických vlastností slitin mědi a niklu vykazují totiž jisté nesrovnalosti pro slitiny s velkým obsahem niklu a proto jevilo se nutným tato měření znovu provésti pomůckami, které se zatím zdokonalily. Studovány byly slitiny 90%, 85% a 80% *Ni*. Použito bylo týchž preparátů, se kterými pracoval Alder a vedle toho nově byla připravena slitina 80%ní, poněvadž do preparátu Alderova vloudily se pravděpodobně cizí přimíseniny, jež způsobily velikou nepravidelnost vý-

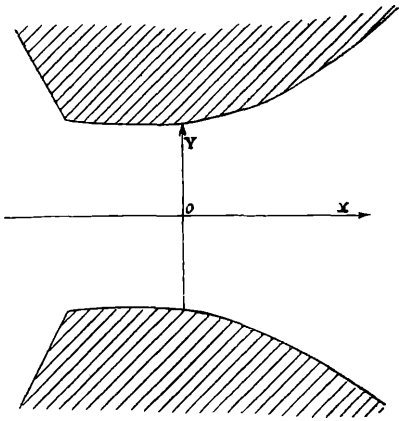
[2]) P. Weiss, Journal de Physique t. VI., 661, 1907.

[3]) Max Alder, Die magnetischen Eigenschaften der Nickel-Kupfer-Legierungen. Zürich, 1916.

sledků. K výrobě nové slitiny použito bylo Ribaudovy indukční peci vysokofrekventní (ve vakuu), kdežto Alderovy slitiny taveny byly v uhlové peci odporové.

Methoda.

K měření použito bylo Curieovy[4]) methody nehomogenního pole. Zkoumaná látka — ve tvaru ellipsoidu — se uvede do nehomogenního pole, a měříme sílu, která na ni působí.



Obr. 1.

Je-li m hmota zkoumané látky a H intensita magn. pole v místě O, kde je látka uložena (obr. 1.), pak síla, která na látku působí, jest ve směru osy x dána výrazem:

$$F = m.\ \chi.\ H.\frac{\partial H}{\partial x} \qquad (8)$$

Malé pošinutí tělesa ve směru os Y a Z lze úplně zanedbati proti pošinutí ve směru osy x. Výraz (8) má sice platnost jen pro těleso nekonečně malé, ale vhodnou volbou pólových nástavců (tvar na obr. 1. naznačený) docílíme velmi plochého maxima magnetického pole, takže v bodě O zůstává součin $H\frac{\partial H}{\partial x}$ ve směru všech tří os téměř stejný, takže lze výraz aplikovati i na látky ve formě kuliček nebo ellipsoidů v průměru několika *mm*. Protože však přesné přeměření ne-

[4]) Curie, Ann. Phys. Chim. 1895 p. 289.

homogeního pole je neproveditelno, používáme této methody jenom jako relativní. Jako základ béřeme látku, jejíž koefficient magnetisace χ byl určen nějakou jinou methodou, a srovnáním attrakčního účinku na tuto látku zkoumanou, podaří se nám eliminovati výraz $H\frac{\partial H}{\partial x}$, takže můžeme pak určovati susceptibilitu χ.

Měření resp. srovnávání attrakční síly děje se kompensační methodou elektromagnetickou. Přitažlivá síla magnetického pole na zkoumanou látku kompensuje se vzájemným přitahováním cívky pevné a pohyblivé (tato je namontována na závěsu nesoucím preparát), které jsou protékány elektrickým proudem. Přitažlivá síla je pak úměrna součinu proudů I i protékajících cívkami, takže

$$m\ \chi H\frac{\partial H}{\partial x} = A.I.i. \tag{9}$$

Poněvadž pak $H\frac{\partial H}{\partial x}$ jest konstantní, tedy

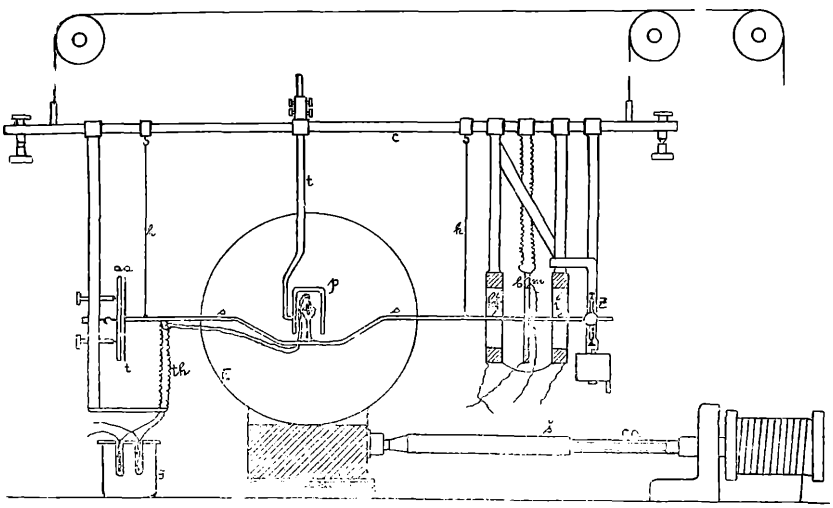
$$\chi = A.\ \frac{I.i}{m} \tag{10}$$

kde A značí konstantu, kterou určíme tím, že v přístroji stanovíme attrakční sílu pro látku o známém χ (etalonáž přístroje).

Popis přístroje.

Elektromagnet E (Obr. 2.) typu Weissova má pólové nástavce toho tvaru jak obr. 1. ukazuje. Je opatřen vodním chlazením. Jeho cívky protékány jsou při měření proudem 10—15 amper. Je uložen na kuličkovém ložisku, takže šroubem $š$ lze vzbuditi lehce jeho pohyb ve směru osy x. Tohoto posunování se užívá, chceme-li umístiti látku do místa, kde pole má svoje maximum. Pomocí kladek a ocelových šňůr lze tento pohyb ovládati z místa pozorovatelova. Látka ve formě ellipsoidu uložena byla v křemenovém kalíšku na supportu rovněž z tyčinek křemenových. Celý support je zavěšen bifilárně na kokonových vláknech k, k, jež jsou připevněna na mosazném lešení C. Na tomtéž lešení jsou namontovány pevně dvě cívky b f, spojené v serii. Jimi protéká proud intensity I (maximalně asi 3 Amp.). Na křemenovém supportu je připevněna cívka b m, do níž se přivádí proud ně-

kolika setin amperu jemnými spirálkami, jež nijak nevadí volnému pohybu celého systému. Pohyb supportu se převádí pomocí nitkových převodů na zrcátko *z*, jež se otáčí kol osy vertikální, a jehož stáčení pozorujeme podle posunu světelného indexu na škále vzdálené 2 m. Posunutí indexu na škále o 1 *m/m* odpovídá posunutí supportu ve směru osy *x* o 1/1000 *mm*. Celé mosazné lešení *C* dá se pomocí drá-



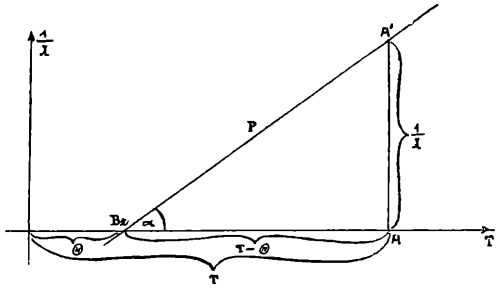
Obr. 2.

těných lan a kladek zdvihnouti do výše a udržeti v rovnováze protizávažím, takže na systému vysunutém z magnetu lze pohodlně prováděti různé opravy. Měření teploty děje se thermočlánkem stříbro-konstantan. V místě, kde drátky odbočují od supportu do nádoby s ledem, jsou navinuty ve spirály kolmo zavěšené (*th*), tak, aby pokud možno nebránily volnému pohybu celého systému. V nádobě *g* jest led a v něm zasunuty jsou zkoumavky obsahující styková místa konců thermočlánku a měděného vedení k potenciometru. Thermoelektrická síla článku se měří potenciometrem. Chceme-li prováděti měření při různých temperaturách, tedy zasuneme shora pec *p* nesenou tyčí *t*. Odporová elektrická pec opatřena jest uvnitř pláštěm stříbrným: na venek má dvojité stěny jež jsou protékány proudem vodním, takže temperatura peci

zevně zůstává nezměněna. Při topení měříme svorkové napětí odporového drátu v peci.

Použitím křemenového kalíšku k uložení zkoumaných látek, zredukoval se vliv magnetického pole na support na minimum, kdežto při dřívějších pracech Alderových, při kterých byly látky ukládány do platinových schránek obnášely korrekce až 20% měřených hodnot.

Celý přístroj umístěn jest v krabici lepenkové, takže je dokonale chráněn proti rušivým účinkům proudů vzducho-



Obr. 3.

vých. Jediným okénkem skleněným je ozařováno zrcátko. Přístroj jest úplně ovládán s místa pozorovatelova.

Konstrukci provedli dle údajů prof. Weisse profesoři Foëx a Piccard. Přístroj představuje značný pokrok proti dříve užívaným přístrojům, jimiž také provedeno bylo studium slitin niklu a mědi.

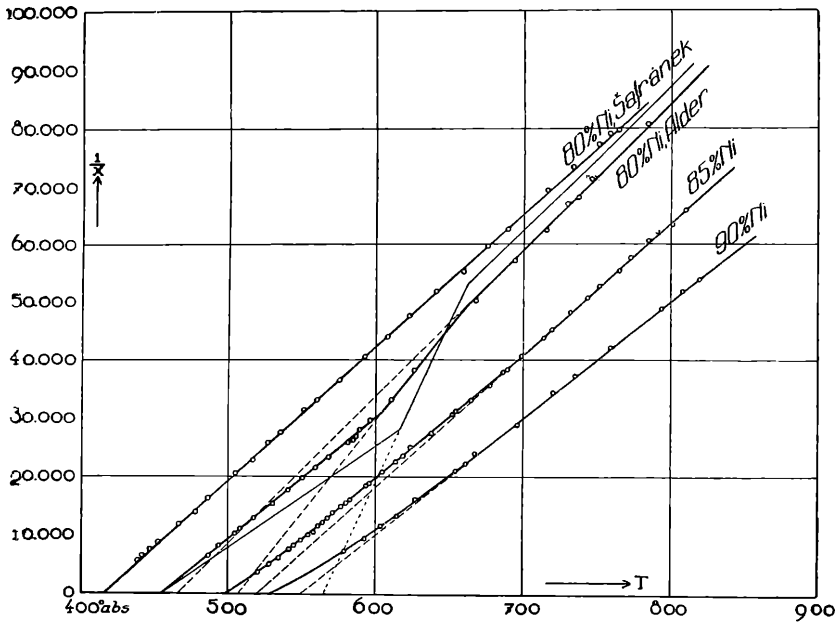
Měření předběžná.

Přípravná měření, která bylo nutno provésti před vlastní prací záležela v kalibraci potenciometru, jehož bylo užíváno k měření teploty a k měření proudu i v cívce pohyblivé bm, v určení elektromotor. síly normálního článku, jehož bylo při potenciometru užíváno, v kalibraci thermočlánku, jež provedena byla srovnáním s normálním thermočlánkem ověřeným z Reichsanstaltu a konečně v etalonáži přístroje pomocí látky o známé susceptibilitě. Použito bylo k tomu účelu kuličky paladiové o hmotě $m = 0{\cdot}98743$ gr, jejíž susceptibilita jest

$\chi = 5{\cdot}296 \quad 10^{-6}$ při 17·1° C (viz Kopp[5]), a na základě 10ti měření stanovena byla konstanta A, resp. log $A = 0{\cdot}55190 - 7$. (pro magnetisující proud 10 amp.).

Měření vlastní.

Postup měření je ten: Zkoumanou látku vložíme do kalíšku na supportu a do bezprostřední její blízkosti umístíme spájené místo thermočlánku, dbajíce toho, aby nenastal dotek,



Obr. 4.

neboť pak snadno by mohlo nastati při vyšších teplotách svaření thermočlánku se zkoumanou látkou, a tedy tato by se tím znečistila. Zahřejeme pomocí odporové pece látku až nad teplotu zániku, neboť pod ní jsou attrakční síly tak veliké, že tímto vysoce citlivým přístrojem jsou měření neproveditelna. Vzbudíme pole magnetické zapnutím proudu do magnetu a udržujeme intensitu stále konstantní. V naší práci bylo to vždy 10 amper. Nemusíme pak znáti inten-

[5] W. Kopp, Der thermische Verlauf des Paramagnetismus bei Magnetit, Platin und Palladium. St. Gallen 1919. Str. 63.

situ magnetického pole co do hodnoty absolutní, pracujeme-li stále za stejných podmínek.

Vzbuzením pole nastane výchylka supportu a tedy posun indexu na škále proti zrcátku. Pak zapneme proud do cívky pevné i pohyblivé. Ponechávajíce proud i v pohyblivé

Slitina 85% Ni + 15% Cu
Dne 18. 12. 1922

Číslo		Mikrovolt		Dynamometr J		Dynamometr i	Proud topný	Poznámka
	+	17.980	+	92·6		1,2282	9·00	
			—	94·1	**93·33**			
	—		—	92·6				
23		**17.985**	+	94·0	**93·28**	**1,2276**		
	+		+	92·9				
			—	91·0	**93·23**			
	—		—	92·4				
		17.990	+	93·6		1,2270		$16^h\,00$
	+	18.330	+	88·9		1,2276	9·04	
			—	89·4	**88·78**			
	—		—	87·8				
24		**18 315**	+	89·0	**88 71**	**1,2272**		
	+		+	88·2				
			—	89·4	**88·63**			
	—		—	87·8				
		18.300	+	89·0		1,2268		$16^h\,30$
	+	19.110	+	79·2		1,2268	9·16	
			—	80·8	**79·78**			
	—		—	78·9				
25		**19.115**	+	80·2	**79·74**	**1,2265**		
	+		+	79·2				
			—	80·4	**79·70**			
	—		—	79·0				
		19.120	+	80·2		1,2262		$16^h\,45$

cívce stále stejný, regulujeme proud I v cívce pevné až index se vrátí do polohy rovnovážné. Potom přikročíme k záznamu dat: o lečteme potenciometrem proud v cívce pohyblivé a temperaturu, poopravíme intensitu magnetisujícího proudu přesně na 10 amp., poopravíme hodnotu proudu I, aby kompensace byla přesná, pak odečteme I na precisním ampermetru. Potom komutujeme rychle a současně proud v obou cívkách a odečteme. Pak komutujeme proud v magnetu, odečteme a znovu komutujeme proud v obou cívkách a odečteme. Po opětném

zjištění proudu i a temperatury je skončeno jedno měření a proud magnetů komutujeme zase do původního směru. Dbáme toho, aby komutace magnetů dála se zcela pravidelně:

$$+ - + - + -$$

atd. abychom se ubránili vlivům hysterese. Také komutace v cívkách dynamometru jeví se nutnou, abychom eliminovali bezprostřední vliv magnetického pole — jenž není nemalý — na pohyblivou cívku. Ze čtyř takto získaných odečtení počítáme pak střed. Pro tutéž temperaturu provedeme pak ještě jednou svrchu popsané měření a pak teprve zvýšíme topný proud, abychom postoupili k temperatuře vyšší. Pro příklad vypsán je na str. 8. kus protokolu, tak jak je zaznamenáván přímo při práci.

1.

SLITINA 90% Ni + 10% Cu.

Č.	Mikrovolt.	Temp. absol.	$\chi.10^6$	$\frac{1}{\chi}$
1	15.540	579	135·53	7.380
2	16.400	593	102·56	9.750
3	17.000	603	86·76	11.530
4	17.720	615	74·80	13.370
5	18.520	628	63·21	15.820
6	19.435	643·5	53·73	18.610
7	20.515	661	45·33	22.060
8	21.010	668·5	42·40	23.580
9	22.770	696·5	34·57	28.930
10	24.330	720.5	29·30	34 140
11	25.475	737·5	26·80	37.310
12	27.035	760·5	23·75	42.080
13	28.030	775·5	22·35	44.740
14	29.340	794·5	20·57	48.620
15	30.335	808·5	19·44	51.450
16	31.145	820	18·61	53.750

Grafické znázornění a výpočty.

Získané výsledky znázorníme graficky (obr. 3.) nanášejíce na osu X absolutní temperaturu T a na osu Y převratné hodnoty suceptibility $\frac{1}{\chi}$. Až na úchylky poblíž teploty zániku obdržíme průběh přímočarý (obr. 4.). Podle získané přímky P můžeme v grafu zjistiti bod zániku Bz (bod Curierův), najdeme-li její průsek s osou X-ovou. Pořadnice na př. AA' představuje hodnotu $\frac{1}{\chi}$ pro teplotu T v bodě A' Poznamenali jsme již znění zákona Weiss-Curieova (6) $\chi(T - \Theta) = C$.

Teď z grafu vidíme, že

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{T - \Theta}{\frac{1}{\chi}} = (T - \Theta).\ \chi = C,$$

tedy: $C = \operatorname{cotg} \alpha.$

II.

SLITINA 85% Ni + 15% Cu.

Č.	Mikro-volt	Temp. absol.	$\chi.10^6$	$\frac{1}{\chi}$	Č.	Mikro-volt	Temp. absol.	$\chi.10^6$	$\frac{1}{\chi}$
1	12.040	519·5	269·68	3.710	22	21.520	677·0	27·87	35.880
2	12.499	528·0	195·50	5.120	23	17.985	619·0	42·74	23.400
3	12.863	534·0	159·46	6.270	24	18.315	625·0	40·64	24.610
4	13.310	541·5	128·75	7.770	25	19.115	638 0	36·51	27.390
5	13.482	544·5	119·36	8.380	26	20.000	652·5	32·74	30.550
6	13.740	549·0	110·38	9.060	27	20.795	665·0	30·13	33.200
7	14.059	554·5	98·93	10.100	28	21.580	677·5	27·88	35.870
8	14.244	557·5	93·24	10.720	29	22.370	690·0	25·91	38 590
9	14.493	561·5	86·05	11.620	30	22.220	687·5	26·41	37.860
10	14.639	564·0	82·61	12.100	31	22.965	699·5	24·74	40.420
11	14.882	568·0	77·35	12.920	32	23.900	714 0	22·95	43.570
12	15.085	571 0	72·49	13.790	33	24.280	719·5	22·21	45.020
13	15.380	576·0	67·55	14.800	34	25.135	732·5	20·82	48.040
14	15.615	580·0	64·74	15.440	35	25.885	744·0	19·74	50.660
15	15.825	583·0	61·76	16.190	36	26.405	752·0	18·98	52.660
16	16.420	593·5	54·64	18.300	37	27.320	765·5	18·06	55.380
17	16.600	596·5	53 08	18.840	38	27.925	774·0	17·37	57.580
18	17.120	605·0	48·19	20.750	39	28.715	785·5	16·59	60.260
19	17.660	614·0	44·39	22.520	40	29.235	792·5	16·16	61.890
20	18.290	624·0	40·32	24.800	41	29.760	800·5	15·81	63.250
21	20.080	653 5	32·34	30.930	42	30.515	810·5	15·18	65.890

Závěr.

Shrneme-li výsledky měření slitin Ni—Cu o vysokém obsahu Ni, tedy můžeme říci, že (nehledě k defektní slitině Alderově pro 80%) jest průběh fukce $\frac{1}{\chi}$ v závislosti na T znázorněn přímkami, které vesměs poblíž teploty zániku se mírně zakřivují směrem k ose Y.

Pro jednotlivé slitiny byly pak získány tyto hodnoty:

90% Ni Teplota zániku $\Theta = 550°$ abs., konstanta Curieova $C = 0{\cdot}00501$ (Alder $\Theta = 555°$, $C = 0{\cdot}00481$). U Aldera

III.
SLITINA 80% Ni + 20% Cu
(Alder)

Č.	Mikro-volt	Temp. absol.	$\chi.10^6$	$\frac{1}{\chi}$
1	10.302	488	140·49	7.120
2	10.711	495	117·75	8.490
3	11.219	504·5	96·32	10.380
4	14.468	509	87·55	11.420
5	12.007	518·5	75·95	13.170
6	12.654	530·5	64·99	15.390
7	13 302	542	56·86	17.590
8	13.908	552	50·51	19.800
9	14.400	560·5	46·67	21.430
10	14.951	569	42·94	23.290
11	15.683	581·5	38·55	25.940
12	16.225	590	35·70	28 010
13	16.143	589	36·69	27.260
14	16.710	598	33·86	29.540
15	17.610	613	30·01	33.320
16	18.480	628	26·24	38.120
17	19.780	649·5	22·16	45.120
18	20.940	667·5	19·87	50.320
19	22.820	697·5	17·51	57.130
20	24.215	718·5	16·14	61.940
21	25.705	731·5	14·84	67.390
22	24.700	726	15 31	65.340
23	25.560	739	14·64	68.280
24	26.160	748·5	14·02	71.330
25	28.660	784·5	12·39	80.690
26	30.635	812·5	11·53	86 750

IV
SLITINA 80% Ni + 20% Cu.
(Šafránek.)

Č.	Mikro-volt	Temp. absol.	$\chi.10^6$	$\frac{1}{\chi}$
1	10.346	489·0	180·87	5.530
2	10·515	492·0	164·43	6.080
3	10.868	498·5	131·40	7.610
4	11.226	505·0	111·71	8.950
5	11.901	517·0	86·59	11.550
6	12.501	527·5	72·04	13.880
7	12.972	535·5	63·46	15.760
8	13.475	544·5	56·75	17.620
9	14.049	555·0	48·99	20 410
10	14.745	566·0	44·06	22.700
11	15.390	576·5	39·07	25.590
12	15.920	585·0	36·36	27.500
13	16.895	601·0	31·88	31.370
14	17.480	611·0	30·06	33.270
15	18.375	625·5	27·22	36.740
16	19.365	642·0	24·72	40.450
17	20.310	657·5	22·92	43.630
18	21.250	672·5	21·00	47.630
19	22.385	690·5	19·32	51.760
20	23.655	710·0	17·66	56.630
21	24.645	725·5	16·84	59.390
22	25.550	739·0	16·01	62.470
23	27.265	764·5	14·33	69.790
24	28.490	782·5	13·58	73.650
25	29.660	799·0	12·76	78.380
26	30.295	808·0	12·59	79.440

jeví se u této slitiny pro $\frac{1}{\chi} = f(T)$ průběh po celé délce přímočarý, kdežto u slitin sousedních jest počátek zakřiven. Nová měření ukázala, že také u této funkce je zakřivení z počátku zřetelně patrno.

85% Ni: $\Theta = 520^\circ$ abs., $C = 0{\cdot}00443$ (Alder: $\Theta = 526^\circ$, $C = 0{\cdot}00447$),

80% Ni slitina připravená od Aldera: Nalezeny poznovu tři přímky, jichž charakteristické konstanty jsou: $\Theta_1 = 456^\circ$ abs., $\Theta_2 = 508^\circ$, $\Theta_3 = 467^\circ$ a $C_1 = 0{\cdot}00480$, $C_2 = 0{\cdot}00315$, $C_3 = 0{\cdot}00397$ (Alder: $\Theta_1 = 456^\circ$, $\Theta_2 = 565^\circ$, $\Theta_3 = 456^\circ$; $C_1 =$

0·00575, $C_2 = 0{\cdot}00185$, $C_3 = 0{\cdot}00396$). Nelze tedy předpokládati v práci Alderově chyby experimentální, když poznovu nalezeny byly tři přímky znázorňující $\frac{1}{\chi} = f(T)$. Zajímavo je, že přímka třetí v obou měřeních dává tutéž konstantu Curieovu, kdežto konstanty přímky první a druhé jsou podstatně změněny a sice tak, že obě se svým sklonem sbližují s přímkou třetí. To by nasvědčovalo tomu, že náhodné znečistěniny nebo snad nedokonalé slití obou látek niklu a mědi způsobilo, že teprve nad temperaturou 665° absol. přechází slitina do stavu stabilního, kdežto pod touto teplotou její stav není stabilní, ale s postupujícím časem i v tomto oboru vždy více se blíží stavu stabilnímu.

Že také slitina 80% správně připravená má vlastnosti analogické jako jsou u slitin ostatních, toho důkazem jsou výsledky získané pro nově připravenou slitinu:

Slitina 80% Ni (Šafránek). Slitina vykazuje pro $\frac{1}{\chi} = f(T)$ průběh přímočarý, s malou úchylkou poblíž teploty zániku v podobném smyslu, jako u ostatních slitin. Charakteristické konstanty jsou $\Theta = 468°$ abs., $C = 0{\cdot}00434$.

Naneseme-li výsledky do Alderových diagramů pro průběh C a Θ, tu zjistíme, že hodnoty Θ pro slitiny 80% a 85% přimykají se daleko lépe ku přímce, jež znázorňuje průběh Θ v závislosti na procentovém složení, než hodnoty Alderovy. Tedy ani slitina 80% Ni nejeví žádné anomalie.

Práce provedena byla ve fysikálním ústavu university ve Strasbourgu v laboratoři prof. Weise, jemuž za jeho blahovůli vyslovuji tímto svůj vřelý dík.

V Strasbourgu, 2. února 1923.

Résumé.

Propriétés magnétiques de quelques alliages nickel-cuivre au-dessus de point de Curie.

Par J. Šafránek.

Dans le travail ci-contre j'expose la théorie de M. Weiss, j'expose ensuite la méthode de mesure des propriétés magnétiques au-dessus de point de Curie ainsi que les résultats relatifs à quelques alliages de nickel-cuivre deduits de cette méthode.

M. Alder a étudié à Zurich en 1916 les alliages nickel-cuivre et a trouvé, comme d'habitude, pour l'inverse du coefficient d'aimantation x une fonction linéaire de la température. Un seul alliage fait exception, celui de 80 p. c. de nickel. Pour celui-ci il a trouvé dans différents intervalles de température 3 lignes droites donnant trois constantes de Curie et trois points de Curie différents.

J'ai mesuré de nouveau cet alliage, l'ellipsoide même dont s'était servi M. Alder, avec un appareil plus perfectioné de M. Foëx. J'ai trouvé de nouveau trois lignes droites dont la troisième est presque parallèle à celle de M. Alder. La première et la deuxième different de celles de M. Alder par une plus petite inclinaison de sorte que les constantes de Curie déterminées par ces deux lignes sont plus rapprochées de la valeur qui est donnée par la troisième. Mais la réfraction des lignes a lieu aux mêmes températures.

Pour constater si cette propriété exceptionelle n'est pas caractéristique de l'alliage de 80 p. c. de nickel, j'ai préparé de nouveau l'alliage de même composition en fondant du nickel de la Mond Nickel Co. et du cuivre électrolytique dans le vide au moyen du four à haute fréquence de M. Ribaud.

J'ai obtenu une seule droite comme M. Alder pour tous les autres nickel cuivre.

Il est probable que le résultat exceptionel d'Alder est dû à un défaut d'homogénéité de l'alliage.

Cela semble résulter du fait que les traitements ther-

miques successifs diminuent l'écart qu'il présente avec ceux qui se comportent normalement.

Toute la série de ces alliages obéit donc sans exception à la loi de Curie généralisée par M. Weiss et les constantes de Curie de M. Alder sont confirmées.

Je remercie M. Weiss qui m'a permis de faire ces recherches dans son laboratoire à Strasbourg.

IV.

O některých orgánech proximální části zažívacího traktu nižších obratlovců.

S 1 tabulkou a 15 vyobrazeními v textu.

Napsal **Dr. Jaromír Wenig.**

Předloženo 11./IV 1923.

Při svých studiích anatomických a embryologických, týkajících se nižších obratlovců, věnoval jsem již před delším časem svou pozornost různým orgánům, které v ústech těchto obratlovců se vyskytují a pozoruhodnými vlastnostmi se vyznačují. Jednalo se mi nejen o znaky anatomické těchto ústrojů, nýbrž též o jich význam pro život zvířete. Ježto orgány, které bližšímu popisu podrobiti míním, jsou tak umístěny, že jest možný stálý styk jich s čerstvou vodou a ježto — zvláště u některých — shledávám nápadné množství cev v pletivech těchto orgánů, připadlo mi, zda nejedná se zde o přídatné orgány dýchací, jimiž se respirace, vykonávaná normálními dýchacími ústroji, vydatně podporuje. Zvláště u Ammocoetů zdá se takováto respirační činnost ústních orgánů nepochybná. Bližší podrobnosti vysvitnou nejlépe při popisu anatomických poměrů u jednotlivých zástupců nižších obratlovců.

I. Cyclostomata.

a) *Hyperotreta.*

Při této skupině bylo mi omeziti se na tři exempláře *Myxine glutinosa.* Tyto exempláře měly délku kol 25 cm byly již několik roků ve formolu uloženy. Chtěje poznati z vlastního názoru zařízení dutiny ústní těchto zástupců nejnižších vertebrátů, odřízl jsem přední část těla v délce asi 6 cm a rozevřel ji podélným ventrálním řezem skrze kůži,

svalstvo a ventrální stěnu zažívací roury. Takto upravený a co možno nejvíce do plochy rozepjatý praeparát byl upevněn špendlíky do voskem vylité misky a pod vodou pozorován při malém zvětšení.

Nejdříve hledal jsem vyústění kanálu nosního do dutiny ústní, kterým liší se Myxiny od druhé skupiny Cyclostom, Hyperoartií, kde vak nosní a hypofysa*) jsou ventrálně slepě uzavřeny. Zhotoviv z tenkého špendlíku jakousi sondu, provlékl jsem ji — hlavičkou napřed, abych zamezil jinak možné propíchnutí pletiv — skrze celý kanál nosní, až hlavička vyšla vnějším otvorem nosním mezi čtyřmi známými tykadly; druhé dva páry tykadel leží více ventrálně při otvoru ústním. Násadka sondy byla na to odstraněna a sonda sama v nosní trubici ponechána.

Pohled na takto upravený praeparát znázorňuje obr. 1. Ze čtyř cirrů či tykadel »nosních« jsou na fotografii dobře patrna jen dvě ventrální; ústní cirry jsou následkem násilného rozevření úst uvedeny do polohy nepřirozené. V přední polovině délky ukryté sondy spatřujeme v medianí linii oválný útvar, který jest rýhou od okolí ohraničen; jest to vyvýšenina dorsální stěny ústní, jakýsi val kožní, který obklopuje nepatrně vyčnívající, nazad zahnutý žlutavý zub patrový. Nepatrně dále nazad a laterálně patrny jsou na fotografii po každé straně dva obloukovitě zahnuté, pilce či hřebínku podobné tmavé pásky. Jsou to zuby jazykové; »jazyk« byl totiž s celou ventrální stěnou sagittálním řezem rozříznut a poloviny jeho při otevření laterálně od sebe oddáleny. Na praeparátu jsou tyto zuby barvy světležluté až hnědožluté a hroty menších laterálních (ve skutečnosti medialních!) průsvitné; nutno si představiti, že v nerozříznutých a nerozevřených ústech leží laterální konce pilkovitých pásek při sobě navzájem, při medianí linii. Zuby jsou svou basí zapuštěny v jakési rýze, jejíž okraj jest přes tuto basi přehrnut; nazdvihneme-li jehlou tento okraj, zjistíme přesně počet zubů, z nichž nejmenší jsou obyčejně přehrnutou kožní zakryty. Ač někteří autoři, kteří se podrobněji těmito útvary zabývali (Müller

*) Zpracování těchto orgánů doufám podati v některé pozdější práci.

(1, 2), Behrends (8), Beard (9), Bashford Dean (7)), udávají variaci v počtu zubů u *M. glutinosa, M. australis* a *Paramyxine,* nalezl jsem u svých exemplářů vždy stejný počet bez výjimky: v proximální řadě osm hrotů, v distální devět; při tom vždy dva hroty nejmohutnější v každé řadě, tedy na obrázku laterálně ležící, vyrůstají ze společné základny, jsou svou basí spojeny v jeden útvar, kdežto ostatní jsou zcela samostatné.

Pozorujme nyní na obr. 1. končinu, kde hrot sondy vyčnívá z vnitřního otvoru chodby nosní. Nalézáme tam orgán, který jest vlastním předmětem této části mé práce. Po příkladu některých autorů [Parker (3)] budu orgán ten nazývati pro stručnost »velem«, ač jeho morfologická různost od stejnojmenného orgánu Petromyzontů, resp. Ammocoetů, jest nepochybná. Toto velum pozoroval již Joh. Müller (1) a uvádí ho ve své práci jako »gaumensegelartige Schleimhautfalte«. Vnitřní skelet tohoto vela popsal později Parker (3) způsobem, který se liší od mých pozorování. Nápadno jest, že G. Retzius (4) na svém, jinak pečlivém obrázku 6. sagittálního průřezu hlavou a kanálem nosním význačný tento orgán nezobrazuje.

Velum, jak na obr. 1. jest patrno, podobá se trubici, která se směrem nazad mírně nálevkovitě zúžuje. Délka této domnělé trubice měří u mých exemplářů průměrně 1 cm, pokud volně trčí do roury zažívací. Zkoumáme-li »trubici« podrobněji, shledáme, že lze ji bez porušení rozbaliti v jakousi lamellu či desku, která jest ve své medianí linii na dorsální stěnu ústní dutiny přirostlá kožním a vazivovým závěsem, a jejíž laterální okraje jsou dorsálně zahnuty, tak že vzniká dojem uzavřené trubice. Šířka lamelly rozestřené obnáší 7 mm. Proximální laterální okraje vela jsou rovněž ku dorsální stěně přirostlé a pokračují jako takové dále ku přídě v délce asi 5 mm pod kožním záhybem, který po stranách vela na fotografii (obr. 1.) jest částečně patrný. Těmito laterálními proximálními úpony vstupují do volné lamelly části skeletové. Zmíněný kožní záhyb má na praeparátu vroubkovanou konturu a jest na obr. II. příčnou vlnitou čarou naznačen; pod něj nutno sondou vniknouti, abychom se dostali do roury nosní. Pod tento záhyb ztrácejí se

— vidličnatě se rozbíhajíce — proximální laterální okraje vela.

Textový obr. I. znázorňuje příčný řez odstřiženým velem při malém zvětšení praeparačního mikroskopu. Uprostřed obrázku trčí vzhůru přerušený střední závěs; laterální okraje vela jsou dorsálně zdviženy. Mimo to patrny jsou na obrázku



Obr. I. — *Myxine glutinosa.* příčný řez »velem« s průřezem čtyř chrupavčitých tyčinek skeletu; uprostřed přerušený dorsální závěs.

čtyři ostrůvky chrupavky, protaté to tyčinky skeletu velárního, jež touto partií vela prostupují.

Rozprostřeme-li odříznuté velum a upevníme je špendlíky na anatomickou misku, můžeme pozorovati laločnatou konturu distálního zúženého konce; celkem jsou tři veliké laloky: jeden široký, oble konturovany lalok střední a dva delší, při úplně rozvinutém velu v ostrou laterální špičku vybíhající laloky postranní.

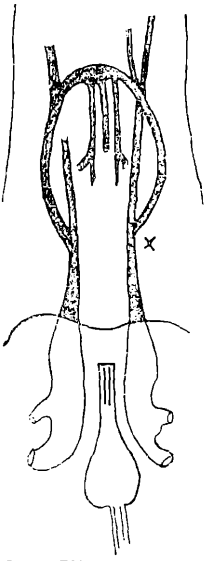
I při makroskopiském pozorování nápadné jest množství proužků, které jako nitky velem prostupují a tvoří — navzájem kommunikujíce — uvnitř ozdobnou síť. Proužky ty jsou různé tloušťky a mají na zcela nezbarvených preparátech nápadnou rumělkově červenou barvu*), čímž na první pohled velmi připomínají rozvětvené cévy krevní. Jak průřezy velem poučují, jsou to však tyčinky, složené z parenchymatické, pro Cyclostomata význačné chrupky, které tvoří oporu vela. Rozvětvení tohoto jemného chrupavčitého ústrojí jest naprosto souměrné a jako celek pozorováno velmi ozdobné, i podám

*) Exempláře popisované byly dlouhou dobu uloženy ve formolu.

zde stručně jeho popis, ježto zprávy o něm v literatuře neodpovídají zcela skutečnosti.

Ježto jsem předčasně použil svého skrovného materiálu ku zhotovení mikrotomických řezů za účelem histologického vyšetření, nemohu podati celistvý obrázek velárního skeletu a nutno se omeziti na vyobrazení zbylých částí, což však správnosti a snad ani přehlednosti popisu nikterak není na újmu.

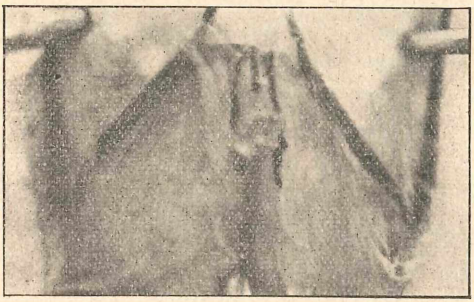
Byla již učiněna zmínka o proximálních *laterálních* závěsech vela na dorsální stěnu dutiny ústní; odstřihneme-li velum, zbudou proximální části těchto závěsů přirozeně na svém původním místě. Prohlížíme-li řeznou plochu, vidíme, že proťali jsme dvě červené chrupavčité tyčinky v každém závěsu, čili skelet vstupuje tudy do vela od ostatního skeletu hlavového v podobě dvou tyčinek či proužků červené chrupavky. Textový obr. II. znázorňuje nám schematicky proximální část velárního skeletu: po každé straně náčrtu dole viděti jest popsané právě dvě tyčinky přistupovati ku vlastnímu vnitřnímu skeletu vela. Od místa splynutí postupují dvě hlavní, u svého kořene široké, dále se zúžující tyčinky celého skeletu směrem distálním (na obr. II. jsou namířeny vzhůru). — Textový obr. III. odpovídá asi středu vela, které jest zde *násilně* rozevřeno a špendlíky po stranách vbodnutými upevněno, aby průběh chrupavčitých elementů bylo lze vystihnouti. Praeparát jest nezbarven, pouze xylolem vyjasněn, i jest tmavá, ve skutečnosti červená barva pruhů skeletových dobře patrna. Laterálně probíhající tmavé pruhy jsou pokračováním (od znaménka) distálně (na obr. II. vzhůru) mířících hlavních chrupavčitých tyčinek vela. Tyto hlavní pruhy probíhají v laterálních okrajích vela, i jest snadno na textovém obr. I. průseky jich jako chrupavčité horní ostrůvky nalézti. Z obr. III. jest zcela zřejmo, že *z laterálních hlavních pruhů odbočují* směrem k mediani linii dva krátké po-



Obr. II. — *Myxine glutinosa*, proximálně ležící část chrupavčitého skeletu vela.

dobné pruhy, které jsou uprostřed jakýmsi obloukem spojeny. Tyto laterální a mediální pruhy chrupavčité jsou Parkerova Pharyngobranchialia prvá a druhá.

Z obr. III. jest dále patrno, že z míst, kde střední oblouk spojuje se s konvergujícími tyčinkami, vycházejí další dva pruhy směrem vzhůru (tedy ve skutečnosti distálně); tyto dva pruhy jeví se na praeparátu násilně nerozevřeném jako direktní pokračování pruhů mediálních (jak na obr. IV. možno pozorovati). Dále jsou na obr. III. patrny tři větve, které

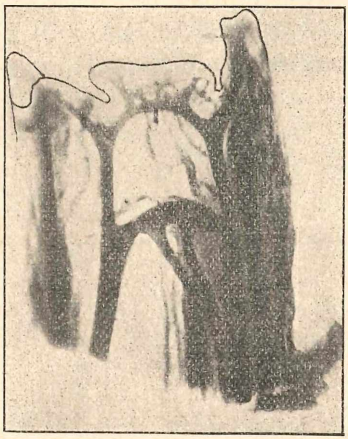


Obr. III. — *Myxine glutinosa*; pohled shora na rozestřené velum: vnitřní »faryngobranchialia« odbočují z laterálních a jsou uprostřed obloukem spojena, z něhož tři proužky směrem proximálně vycházejí. — Fot. dle praeparátu nezbarveného, xylolem vyjasněného.

z oblouku míří směrem dolů, tedy proximálně. Prostřední proužek zahýbá hned u svého počátku prudce dorsálně (i není na obr. IV. zachycen) a vstupuje závěsem vela ku skeletu hlavovému, jest tedy na praeparátu mém přestřižen. Dva laterální proužky končí zdánlivě jednoduchým hrotem, avšak vyšineme-li je jehlou z jejich polohy, abychom mohli na ně nahlédnouti se strany, vidíme, že jsou při svém konci lopatkovitě rozšířeny a zároveň vidličnatě rozděleny; jedna větévka míří dorsálně, i není při pohledu na plochu vyjasněného vela viditelna. Tyto poměry jsou znázorněny na obr. II., kde dorsálně mířící část vidlice jest rovněž přestřižena, takže její malý zbytek zůstal nad rovinou řezu.

Textový obrázek IV. představuje konečně distální konec vela s rozvětveným skeletem. Pohled na velum, které jest ve

svém přirozeném tvaru, téměř nerozbaleno, jest zde se strany ventrální. Laterální tmavé pruhy jsou pokračováním laterálních pruhů z obr. III. Vstupují, zúžujíce se, do velikých laterálních laloků konce vela, a končí těsně v jich ostrých hrotech bez dalšího rozvětvení; tyto konce leží v praeparátu hlouběji, i nemohou býti na fotografii zachyceny. Dále vidíme na obr. IV. dva tlusté pruhy mediální, které odpovídají mediálním pruhům obr. III. (zde jsou do plochy rozepjaty), zachyceny jsou však na obrázku až za svou kommunikací s laterálními. Oblouk je spojující jest dobře patrný. Ze tří tyčinek, proximálně směřujících (srovnej obr. II. a III.) jsou na fotografii jen obě laterální patrny, ježto třetí, prostřední, leží výše v pletivu závěsu, i není na fotografii zachycena (na praeparátu samém možno tuto třetí tyčinku viděti po snížení čočky praeparačního mikroskopu).



Obr. IV. — *Myxine glutinosa;* pohled na distální konec vela s rozvětveným chrupavčitým skeletem (Distální kontura přikreslena tuší dle praeparátu). — Fot. dle praeparátu borax-karmínového.

Od spojujícího oblouku pokračují medialní pruhy dále ku konci vela jako poněkud slabší tyčinky, počátky jejich jsou viděti i na obr. III. po stranách ku přídě (dolů) mířících tří tyčinek; touto končinou veden jest řez zobrazený na obr. I., i odpovídají dolejší dva ostrůvky chrupky slabším (v poměru k proximální části) dvěma ku okraji vela směřujícím proužkům, kdežto horní dva průřezy odpovídají laterálním pruhům velárním. Když slabší dvě medialní tyčinky dospěly značně blízko ku distalnímu okraji vela, spojují se opět obloukem, který na obr. IV. jest dobře zřetelný a jehož rozsah odpovídá asi šířce středního velikého laloku velárního. Z rozhraní oblouku a parallelních pruhů, které tento oblouk spojuje, vycházejí směrem distálně a laterálně slabší odbočky, které vcházejí do postranních laloků (obr. IV.); tvoříce oporu těchto, zatáčejí se parallelně s okrajem a končí bez dalšího

rozvětvení v jeho laterálním konci, t. j. v blízkosti hrotů laterálních tyčinek. Z oblouku samého pak vychází chrupavčité jemné pásky, které jsou oporou středního širokého laloku okraje vela. Jsou to dva laterálně se zatáčející a k laterální kontuře rovnoběžné pásky, které v okraji slepě zakončují a směrem ku periferii ještě několik kratičkých výběžků (na dobře průsvitných praeparátech zjistil jsem tři) vysílají. Tyto drobné opory středního laloku měly u jednoho exempláře tvar nikoliv obloučků, nýbrž dvou skupin prstovitě se rozbíhajících kratičkých pásků. Také v prostoru za distálním obloukem zjistil jsem útlé, prstovitě rozvětvené, jako ostatní skelet červené pásky, jichž souvislost s obloukem samým nebyla však zřetelná. Mimo to vychází z oblouku kratičký výběžek směrem proximálním, který na obr. IV jest viditelný. — Závěs vela (obr. I.) pokračuje téměř až ku samému okraji tohoto.

Obr. II. představuje schematicky část chrupavčitého skeletu, jak se jeví ve velu svinutém. Tlusté proximální kořeny tyčinek podobají se tvrdostí a barvou hnědému chitinu; k nim upínají se od přídy přistupující mohutné pruhy svalové. Odbočující tyčinky mají ve vypouklé stěně velární tvar oblouku. Příčná linie značí konturu příčné kožní řasy, která zakrývá vnitřní otvor trubice nosní; v této řase leží chrupavčitá ploténka podoby kopinatého listu, jejíž jakoby roztřepený hrot sáhá téměř až do okraje řasy. Celé chrupavčité mřížoví vela *Myxin* pro svou jemnost, souměrný a přímo ozdobný tvar zasluhuje zajisté pozornosti i nemáme jinde příkladu podobného komplikovaného chrupavčitého útvaru.

Můj popis velárního skeletu *Myxin* nesouhlasí zcela s tím, co bylo dosud o věci této podáno. Zdá se mi především nevhodno, chrupky, které tvoří pouhou oporu kožnatého a vazivového vela, útvaru tak anatomicky osamoceného, označovati jménem »Pharyngobranchialia«, jak je nazval Parker (3) a jak po jeho vzoru se označení toho i jinde užívá (Bronn [6]). Název »Pharyngobranchialia« jest, jak známo, užíván pro dorsální část rozčleněného pravého žaberního oblouku ryb, tedy pro orgán, který se žádného hlediska nelze srovnávati s velárním síťovitým skeletem *Myxin*. Dva orgány různé

hodnoty morfologické označovati stejným pojmenováním není vlastně ani přípustné. Stačí zajisté popsané chrupavčité mřížoví označiti jménem »skelet velární« a jednotlivé části označovati dle jich polohy, jak v popisu mém učiněno, což bude jistě správnější, než užívati jmen již pro jiné součásti skeletu zadaných. Stejně pro jasnost pojmů považlivým zdá se mi i označení různých proužků a plátků chrupavčitých skeletu hlavového jmény »epibranchiale«, »ceratotohyale« »quadratum«, »symplecticum« atd., jichž Parker (3), Ayers-Jackson (11), Neumayer (10) ve svých pečlivých a pracných studiích užili a do anatomie zavedli.

Můj popis velárního skeletu u *Myxine* nesouhlasí s podáním Parkerovým v následujících bodech: vnitřní »pharyngobranchiale« odbočuje z laterálního (obr. II., III.), dle Parkera jsou však vnitří zcela isolována; na spojujícím proximálním oblouku kreslí Parker jen dvě proximálně mířící tyčinky, ony, jež na mém obr. IV jsou viditelné (srovnej s obr. II. a III.); rozvětvení distálního oblouku v středním laloku jest poněkud jiné než Parker kreslí; konečně kontura vela má při úplném rozepjetí jen tři dříve uvedené laloky. Postranní »pharyngobranchialia« jest nutno počítati ku skeletu velárnímu (obr. I., IV.). — Popis pak skeletu velárního, který v díle Bronnově (6, Lönnberg) na podkladu práce Parkerovy jest podán, nelze srovnati se skutečností. Jsou zde uvedeny jen dva pruhy tvrdé chrupky, jež měkkou chrupkou jsou spojeny; z této vychází 7 výběžků, dva laterálně a pět směrem ku přídě. Popis tento nemohl jsem nijak se svým uvésti ve shodu.

Na příčných řezech velem zjistil jsem některé zajímavé poměry jeho skladby. Uvnitř vela nalézáme právě popsaný chrupavčitý skelet velární, množství pojiva a cévy krevní; celek jest pokryt zcela zvláštním epithelem, jehož ohromné, buňky zvláště pozornosti zasluhují.

Chrupavčité tyčinky skeletu mají na příčném průřezu tvar kruhovitý neb slabě elliptičný (obr. I., 2.); jsou obklopeny silnou vrstvou pojiva, které jinde v nitru vela tvoří jen řídkou výplň. Buňky v pojivném obalu skeletu jsou silně sploštělé a svým velkým rozměrem rovnoběžně k povrchu chrupky ulo-

žené v koncentrických vrstvách pojivných vláken. Mimo zde, na periferii chrupek, leží zhuštěné pojivo v mohutné vrstvě pod krycím epithelem jakožto cutis, v níž řídce roztroušené buňky leží rovněž parallelně ku povrchu vela. Mezibuněčná hmota jest v chrupce samé vytvořena jen v nepatrném množství a tvoří tenké stěny komůrek, v nichž uloženy jsou buňky chrupavkové (obr. 2.). Tvar komůrek jest naprosto nepravidelný, ježto na řezech stojí někde stěny jejich na sobě kolmo, jinde jsou obloukovitě prohnuty a jsou vůbec nestejně silné. Komůrky na periferii chrupky jsou vesměs jen úzké, štěrbinovité a k povrchu rovnoběžné, někde téměř mizivě malé; tyto periferní štěrbinovité komůrky chovají jen zřídka buňky, za to jsou tyto přítomny ve všech větších komůrkách, které leží blíže ku centru celé chrupky. Jsou zde zpravidla pouze po jedné v každé schránce, jen výjimečně nacházíme dvě. Tam, kde řez zastihne stěny komůrek v ploše, tangenciálně, jeví se ovšem větší plochy mezibuněčné substance která dle náhodné tloušťky své více méně jest průsvitná i lze skrze ni viděti zřetelně stěny vrstev hlouběji ležících; na obr. 2. jsou podobné poměry patrny v centrální části příčného průřezu chrupavčité tyčinky.

Široké cévy i teničké kapilláry jsou v nitru vela velmi hojně rozvětveny. Zejména v distální partii vela, v jeho zadním, volném okraji jest na průřezu patrno množství průseků kapillár. Zde také krycí epithel nedosahuje takové tloušťky jako jinde na povrchu vela. Zvlášť mnoho průseků širších i slabších cév nalézám také při laterálních okrajích celého orgánu, tedy v sousedství laterálních chrupavčitých tyčinek velárního skeletu (srovnej s obr. I.). Spojení těchto končin s centrálním úponem vela zprostředkují široké cévy, táhnoucí se v pojivu laterálních křídel velárních. Vzhledem k tomu, že pletivo vela protkáno jest bohatě sítí cévní a že toto leží bezprostředně za vnitřním vyústěním kanálu nosního (obr. 1.), tedy v místě, kde jest stálá výměna čerstvé vody možná, jest pravděpodobno, že velum *Myxin* přispívá ku okysličování krve v něm kolující. Výklad tento ztěžuje poněkud existence vysokého epithelu krycího, ač výška tohoto právě na volném okraji nedosahuje své normální tloušťky; i vrstevnatá cutis padá zde zajisté v úvahu, ač nejmenší kapilláry jsou ro

zestřeny namnoze hustě těsně pod touto a vnikají hojně i do jejího nitra (obr. VI.).*)

Epidermis vela jest svým složením pozoruhodna, ale materiál můj byl uložen několik roků ve formalinu, takže se nehodí ku histologickému zkoumání. Poznamenávám jen následující: zdá se, že epidermis velární liší se poněkud od epidermis povrchu těla, jak to popsali Retzius (5), Blomfield (30) a Kölliker (31). Shledal jsem v epidermis vela dva druhy buněk, veliké s jasnou plasmou a drobné buňky; mezi oběma druhy existují co do velikosti tu a tam přechody, i zdá se, že veliké buňky jsou jen změněné buňky obyčejné. Na obr. 3. a 4. jsou reprodukovány části epidermis s velikými jasnými buňkami, tmavá místa na obrázcích jsou na praeparátu zaujata drobnými buňkami temně zbarvenými. Druhý typ velikých buněk (Fadenzellen), které dle jmenovaných autorů chovají dlouhé, rozmanitě vinuté vlákno, jsem ve velární epidermis nemohl konstatovati.

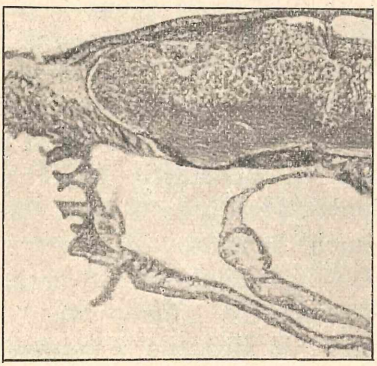
Struktury jader a plasmy nelze na nespolehlivě konservovaném materiálu správně odhadovati, budiž jen zmíněn zajímavý úkaz, který již Retzius v epidermis tělní pozoroval. Veliké jasné buňky, když dosáhly periferie epidermis, vystupují z této do okolí zachovávajíce charakter, jaký měly, byvše zařazeny v epithel. Na obr. 4. jest patrno, kterak veliká jasná buňka se srdčitým jádrem otevírá se ven, na obr. 3. dvě podobné buňky jsou již poněkud nad povrch vystouplé. Po vystouplých buňkách zbývají v periferii epidermis pohárovité neb kulaté dutiny, jak na obr. 4. a 5. možno viděti. Mitosy, které Retzius v tělní epidermis popsal a které patrně nahrazují stálý úbytek jejích buněk, jsem ve velární epidermis nemohl zjistiti. Bližší vylíčení různých zajímavých po-

*) Jiný výklad pro význam a účel vela jest těžko nalézti. Na obr. 1. jest velum u srovnání s celým praeparátem orgánem celkem malým. Představme si však tuto část ve stavu přirozeném, nerozevřenou, pak světlost dutiny ústní není příliš objemná. Velum mohlo by pak — ve stavu r o z v i n u t é m — zahraditi vstup vody do distálnějších partií žaberního traktu, když by to bylo z nějakých důvodů pro zvíře prospěšné. Že velum jest schopno pohybů, dokazují mohutné svaly, které do něho od přídy vstupují a hlavně na široké proximální části chrupavčitých tyčinek jeho skeletu (obr. II.) se nasazují.

drobností ponechávám na dobu, až bude možno čerstvý a náležitě fixovaný materiál zpracovati.

b) *Hyperoartia.*

Z této skupiny zpracoval jsem Ammocoety od *Petromyzon fluviatilis a P. Planeri* v délce do 10 mm, kteří byli fixováni chromovou kyselinou, dále pak vzrostlé Ammocoety od *Petromyzon Planeri* v délce asi 11 cm, k iichž fixaci použito



Obr. V. — *Ammocoetes* (*fluviatilis*) 8 mm dlouhý; řez laterálním okrajem kruhu vidličnatě rozvětvených tykadel; za nimi obloukovité velum.

sublimátu s kyselinou octovou neb pikrosublimátu. Řezy barveny byly safraninem dle Pfitznera, neb haematoxylinem Delafieldovým a kyselinou pikrovou neb konečně železitým haematoxylinem. V této práci chci sděliti některé podrobnosti týkající se »věnce« tykadlového a vela těchto vertebrátů.

Obr. 6. předvádí část sagittálního řezu *Ammocoetem* (*fluviatilis*) 5 mm dlouhým. Nad horním pyskem znatelný jest v ektodermu malý zářez, který představuje tangenciálně zasaženou jamku nosní. Ve vchlípení ústním jsou patrny průseky čtyř tykadel ústních mezi horním a dolním pyskem. Dorsální z nich ukazuje, že vývoj tykadel děje se jednoduchým vychlípením epithelu, tak že základ tykadla podobá se dutému kuželi. Vývoj takovýchto jednoduchých základů tykadel postupuje velmi rychle, i vstupují do dutých vychlí-

penin u exemplářů, jichž délka nepřekročila dosud 5 mm, elementy mesenchymové a tvoří se cévky krevní, které prostupují celou délkou tykadla.

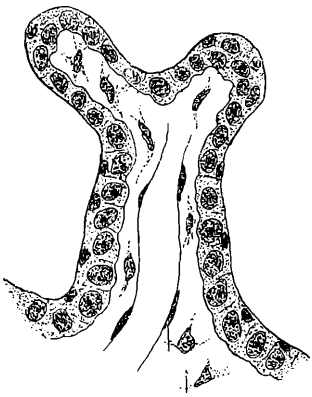
Na příčných řezech podobají se průřezy proximální části těla těchto stadií v končině, kde zasažen jest horní pysk a nejproximálnější odstavec nervové soustavy, útvarům podkovovitým, do jichž konkavity vyčnívají základy dorsálních tykadel; tato jsou založena v nepatrném počtu, průměrně šesti, a jsou v pravidelných vzdálenostech od sebe na klenbě pysku rozestavena. Jakmile řezy počnou zasahovati také proximální okraj dolního pysku, počnou se objevovati podobné průseky ventrálních tykadel, jichž počet — zatím rovněž nepatrný — doplňuje dorsální tykadla v jakýsi kruh či věnec, který nestojí tedy přesně v rovině vertikální, nýbrž jest skloněn ve směru cranio-caudálním.

Mimo vnikání mesenchymu a tvoření se cév uvnitř tykadel pozorujeme záhy další komplikace ve vývoji apparátu tykadlového. Jest to především rozvětvování tykadel, které se dostavuje velmi záhy a pak zmnožení jejich počtu, které nastává později.

Rozvětvení tykadel bývá z počátku přesně vidlicovité. Pohled na laterální okraj kruhu tykadlového představuje obr. V., který odpovídá stadiu asi 8 mm dlouhému; všecka čtyři zde viditelná tykadla nejsou řezem zasažena stejnoměrně, tak že pravidelné rozvětvení patrno jest pouze na druhém tykadle, počítaje shora. Obr. pak VI. představuje silně zvětšený (apochromat 3 mm Zeiss, komp. ok. 6) podélný průřez vidlicovitého tykadla. Dvojvrstevná stěna buněčná, jejíž vnější vrstva jest téměř mizivě nízká, tvoří obal útvaru. Vnitřek vyplněn jest z největší části cévkou krevní, tak že pro volný mesenchym téměř nezbývá místa. Jest zajímavo srovnati obr. VI. s obr. XV., který představuje ústní tykadlo obojživelníků *(Pelobates fuscus)*.

U *Ammocoetů (Planeri)*, kteří dosáhli délky 10 cm, jsou tykadla ústní již mohutně vyvinutá a dlouhá. Na klenbě podkovovitého horního pysku sedí skupina tykadel, mířících dolů do dutiny ústní. Rozvětvení, z počátku vidlicovité (obr. VI.), jest nyní mnohem bohatší; nacházím 4—6 prstovitých přívěsků na konci každého tykadla. Počet ten není ale nijak

konstantní. Obě vrstvy krycího epithelu jsou u těchto individuí stejně vysoké. Spodní okraj horního pysku, který rozvětvená tykadla nese, jest pod vrstvou svalovou silně protkán krevními cévami, které zde tvoří bohatou síť. Při slabých zvětšeních, při nichž stěny kapillár nejsou zřetelny, zdá se, že celý vnitřek tykadla jest hustě naplněn buňkami krevními.

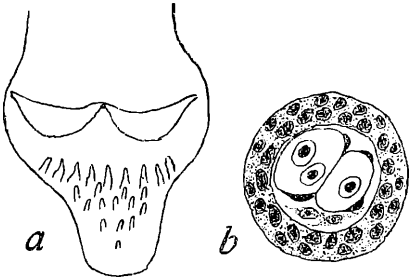


Obr. VI. — *Ammocoetes fluviatilis*, délka 8 mm; řez tykadlem vidličnatě rozvětveným z věnce ústního s cévkou uprostřed.

Při silných zvětšeních na zvlášť příznivých řezech jest patrno, že u kořene tykadla protaty jsou cévky dvě, patrně jedna přivádějící, druhá odvádějící krev z nitra tykadla. Cévky ty možno sledovati jako dráhy samostatné v určité délce tykadla, v jehož konci splývají ve větší společný útvar, který jest nabit krvinkami a z něhož vnikají drobné větévky až do konců jednotlivých prstovitých výběžků konce tykadla. Vůbec dle cévek možno souditi, že v každém tykadle děje se vydatný přítok i odtok krve, neb dvě cévky možno všude konstatovati. Dále jest patrno, že tykadla netvoří u těchto velkých exemplářů jednoduchý věnec, nýbrž že vyvinula se na veliké ploše klenby horního pysku. Zasahuje dorsální tykadla průměrně 150 řezů mé serie, které jsou 10 μ silné, pak teprve dospějeme ku podobným tykadlům laterárním, která činí přechod ku tykadlům dolního pysku. Že tykadla vyvinuta jsou jako drobné přívěsky a výrůstky na veliké ploše, ukazuje též obr. VII.a, který představuje pohled na spodní plochu horní klenby úst Ammocoeta. Přední část těla tohoto byla ventrálním medianím řezem otevřena, nasilně rozbalena a špendlíky na praeparační misku upevněna; postranní laloky kontury obrázku vznikly právě násilným oddálením vbodnutých špendlíků za účelem rozbalení rozstřiženého těla. Na praeparátu viděti jest dvojdílné velum a před ním hustou skupinu tykadel nazad směřujících; zadní, v jakési řadě sestavená a největší, odpovídají patrně původnímu

věnci tykadlovému, ostatní, menší, vznikla během dalšího růstu zvířete.

Distální tykadla dorsální strany jsou daleko mohutnější a bohatěji rozvětvena než proximální. Určitý počet prstovitých konečných výběžků není možno uvésti, neb tykadla podobají se nestejným, bizarně rozvětveným keříkům, takže řez zasahuje celé chomáče jich ve směru nejrůznějším. V basi tykadel rozplétá se množství krevních kapillár, jichž nejjem-



Obr. VII. *Ammocoetes* (*Planeri*), *a.* Ventrálním řezem rozříznutá a rozevřená hlava; poloha dvoukřídlého vela a ústních tykadel. — *b.* Příčný řez konečným přívěskem rozvětveného tykadla s cévkou přívodnou a odvodnou.

nější rozvětvení dosahuje do všech prstovitých konců rozvětveného tykadla. Jak bylo již řečeno, jsou tato zakončení zastižena řezem ve směrech nejrůznějších dle náhodné polohy, tak že o nějakém pravidelném uložení vnitřních kapillár není možno se přesvědčiti. Ale přece nalezneme ve velikém množství protatých konců dosti těch, které jsou protaty přesně příčně, tak že kontura řezu oním zakončením jest kruhovitá. A právě v takovýchto výběžcích možno zjistiti pravidelně průseky dvou těsně k sobě přimknutých cévek, z nichž jedna jest pravděpodobně přívodná, druhá krev odvádějící; jsou zpravidla nestejně široké. Průřez takovýmto nejjemnějším zakončením rozvětveného tykadla znázorňuje obr. VII.b, kde ony dvě cévky, vyplňující téměř celý vnitřek výběžku, jsou viditelny.

Nejdistálnější z tykadel dorsální skupiny jsou nejmohutnější a jsou zcela nepravidelně a mnohonásobně roz-

větvena. Mnohdy tykadlo trčí ve směru horizontálním do dutiny ústní a nese na své ventrální straně několik přívěsků, které se zase rozličným způsobem rozvětvují, tak že řez zasáhne množství jich ve směru nejrůznějším. V nitru těchto distálních tykadel jest velké množství pojiva, což odpovídá jejich značné tloušťce, a pojivem tím prostupuje celá síť cév krevních rozmanité tloušťky. Nějaký pravidelný způsob v uspořádání těchto cév nemohl jsem zjistiti; kapilláry krevní vnikají do všech nejjemnějších zakončení rozvětveného tykadla.

Když jsme na serii přešli řezy, které zasahují dorsální skupinu tykadel, počínají se na dalších řezech objevovati tykadla laterálních stran, která jsou podobně stavěna, jako posledně popsaná distální tykadla dorsální. Jsou tlustá, nejrozmanitěji rozvětvená a hlavně silně vascularisována; cévy proplétají se hojně pojivnou výplní vnitřku tykadla a zasahují do všech konců jeho. Řezy tyto počínají zasahovati proximální okraj dolního pysku, který v těchto končinách nenese dosud tykadel a jehož vnitřní kontura jest zcela hladká. Avšak již zde protínají řezy četná proximálně namířená zakončení rozvětvených tykadel ventrálních, jichž base až na dalších řezech jsou zastiženy. Proximální tykadla ventrální skupiny jsou vesměs tenká, hustě na svém podkladu sestavená, někdy kyjovitá neb hojně na konci rozvětvená. Obr. 7. ukazuje po levé straně dvě tupá široká tykadla laterální (dolní jest nepatrně zachyceno) a dvě tenká tykadla ventrální, z nichž pravé jest kyjovité, levé slabě dichotomicky rozvětvené. Světlé ostrůvky v nitru těchto tykadel jsou lumina krevních cév, které hojně protkávají vnitřek všech tykadel. Jak s e r i e ukazuje, jsou ventrální tykadla v proximální části skupiny velmi hustě beze všeho pravidelného rozřazení seskupena, řezy zastihují spousty konečných rozvětvení jednotlivých tykadel (obr. 7.). Dále vzadu nacházíme však tykadla v malém počtu, tlustší, nepatrně neb vůbec nijak rozvětvená, mnohá jen tupým hrbolům neb kuželům se podobající, ale stále hojně vascularisovaná. Dokonce jakési pravidelné rozestavení distálních tlustých tykadel ventrálních možno zjistiti. Jak obr. 8. ukazuje, leží dole uprostřed špičaté tykadlo kuželovité, po jeho stranách po jednom tykadle dlou-

hém; dále laterálně jsou tykadla nízká, tlustá a tupá a nad nimi nejdelší tykadla této končiny tvaru skoro kyjovitého. Dále nad těmito největšími již z laterální stěny činí dovnitř krátká a široká tykadla tvaru hrbolů. V pěti tykadlech ventrálních tmavá místa v jich osách jsou krvinkami naplněné cévy krevní, kdežto v největších tykadlech jsou cévy skoro prázdné, následkem toho na obrázku jako světlá místa se jevící. Popisované útvary leží na příčných řezech, které počínají zasahovati proximální část očí; na těchto řezech objevuje se mimo tykadla, která zřejmě ze spodiny úst vycházejí (obr. 7., 8.) spousta proťatých tykadel, či spíše jich drobných rozvětvení, jichž příslušnost ani k ventrálním, ani k laterálním, tím méně k dorsálním tykadlům, kteráž poslední v této končině již neexistují, nelze zjistiti. Poměry ty podobají se oněm, které vidíme na obr. 7. Pokračujeme-li pak dále distálně na serii, můžeme konstatovati, že tyto průseky drobných zakončení kupí se kol roviny bilaterální souměrnosti zvířete, tvoříce zde zhuštěný pruh. A na řezech ještě distálněji ležících, které ale dosud zastihují oči, jest patrno, že tato spousta přívěsků má kořen svůj v jakési vertikální příčce, která leží v dolní žlabovité části dutiny ústní, nad ventrálními tykadly (která jsou stále podobna oněm na obr. 8.), aniž by však měla úpon na stěnu úst. Jest tedy patrno, že tato tykadla nesoucí příčka má svůj kořen kdesi dále vzadu a že jest proximálně mezi ventrální tykadla vyhnuta. Když řezy minou její proximální, tykadly posázenou část, zachycují ji dále nerozvětvenou a úzkému, vertikálně postavenému ostrůvku podobnou, sahající téměř do poloviny celé světlosti úst. Hrázka jest všude hustě protkána krevními cévami, které místy jsou tak mohutné, že zatlačují veškeré pojivo jejího vnitřku a zasahují do všech jejích proximálních výrůstků, které jsme na předcházejících řezech pozorovali.

Konečně dospějeme na serii k místu inserce hrázky na ventrální stěnu úst. Jeden z těchto řezů předvádí obr. 9. Hrázka jest tvaru skoro kyjovitého a značně nižší proti řezům předcházejícím, svažuje se tedy od přídy nazad; pokryta jest mnohovrstevným epithelem, jehož nasedající kontura není hladká, nýbrž zasahuje zubatými výrůstky do hustého pojiva, které tvoří vnitřní massu hrázky. Světlá místa v hrázce na

fotografii 9. jsou průseky cév; kde jest na řezech síť cév zvláště hustá, kupí se těsně kol ní četné buňky pigmentové obsahující černý pigment. Celá stěna ventrální žlabovité prohlubně, z níž hrázka vyrůstá, tvořena jest — mimo integumentem — mohutnou svalovinou v centru a tuto obklopující vysokou vrstvou porosního tuhého pojiva a ovšem též epithelem úst.

Hrázku jako samostatný útvar od její inserce možno sledovati nazad na 19 řezech (12 μ). Pak vidíme, že splývá s pobočními valy (srovnej obr. 9.), tvoříc s nimi příčnou hráz mezi odstavcem tykadlovým a zadním velárním dutiny zažívací. Splynutím střední vertikální hrázky a postranních valů vznikl na spodině úst svalnatý, nazad se snižující medianí val, jehož stále vynikající, s počátku tupá střední část přechází poznenáhlu ve známý, štíhlý a vysoký ventrální kýl, sáhající až ku žláze štítné.

Vylíčené poměry jeví se na sagittálních řezech vzrostlými *Ammocoety* následovně. Obr. 10. představuje takovýto skoro medianí řez *Ammocoetem* as 11 cm dlouhým. Jest viděti proťatý horní chobotovitý pysk, který jest převážně ze svalstva složen. Za ním, před mozkem zasažena jest tangenciálně dutina orgánu čichového. Na spodní ploše horního pysku jest rozestaveno několik tykadel dorsálních; na sousedních řezech jest patrno, že jest těchto tykadel větší množství než na řezu, zvoleném z jiných důvodů k fotografování. Pokrývajíce skoro celou spodinu horního pysku, dosahují tato tykadla skoro až k jeho proximálnímu okraji, jsouce vidličnatě i jinak složitěji rozvětvena. Distálně ohraničuje tuto skupinu dorsálních tykadel ventrálně namířený nízký val či výstupek (na obr. 10. částečně viditelný), který jest nositelem četných tykadel, vesměs proximálně mířících. Jak val sám, tak tykadla, namnoze rozvětvená, jsou bohatě prostoupena sítí cévní. Tímto dorsálním valem jest částečně zatarasen vchod do velárního odstavce traktu branchio-intestinálního.

Na obr. 10. vidíme dále dorsálně zahnutý pysk ventrální. Hlavním jeho složivem jest svalstvo a není v něm téměř — jakož i v pysku horním — žádných kapillár. Uvádím tuto okolnost proto, aby mohutná vaskularisace apparátu tykadlového vynikla tím více a charakterisovala tento jako zvláštní

orgán, kde hojný příliv a odliv krve má určitý význam. Za dolním pyskem na basi dutiny sedí ventrální tykadla, na zobrazeném řezu nepatrně zasažená. Za těmito pak vztyčuje se do dutiny veliký orgán, který vstup z dutiny tykadlové do dutiny velární téměř úplně zatarasuje. Orgán tento nasedá širokou basí na spodinu dutiny ústní, rozšiřuje se na řezu ku přídě jaksi kuželovitě, tak že jeho přední plocha trčí jako široký terč do prostoru tykadlového. Tato přední plocha pokryta jest hustě tykadly, jež ovšem vesměs míří proximálně. Na fotografii některá z nich jsou zachycena celá (dvě vidličnatě rozvětvená), z jiných jen jejich části a rozvětvené konce. Tato tykadla jsou tykadla vertikální příčky, která byla dříve za tykadly ventrálními popsána a celý zobrazený orgán jest medianím (téměř) průsekem této příčky či hrázky.

Ku přídě obrácený, vchod do velárního odstavce zúžující a tykadly pokrytý terč (obr. 10.) má ovšem — z přídy pozorován — tvar úzké, vertikálně protažené ellipsy, jak z předchozího popisu jest patrno. Přechází také na distálnějších řezech bez valné změny svého tvaru v prostou vertikální hrázku (obr. 9.). Řez, který na obr. 9. jest znázorněn, prochází útvarem na obr. 10. viditelným za terčem tykadlovým, ale již v místech jeho inserce na spodinu ústní dutiny, tam, kde prudce svažuje se směrem nazad.

Pozornosti zasluhuje ještě vnitřní složení vertikální hrázky na obr. 10. zobrazené. Všecky řezy, příčné i sagittální, poučují, že v místech své inserce na basi úst i v části distálně se svažující (obr. 10.) složena jest z hustého pojiva, kterým jen v nepatrné míře prostupují cévy krevní směrem ku přídě (srovnej s obr. 9.). Za to nejširší proximální partie hrázky, bezprostředně za tykadly (obr. 10.), jest sítí cévní tak hustě protkána, že pojivo jest skoro úplně cévami zatlačeno. Zejména některé řezy jsou množstvím cév nápadné; celý, tykadla nesoucí terč jest jimi prostoupen, jak neshledáváme v žádném orgánu sousedním. Cévy jsou namnoze tak rozšířeny, že tvoří veliké prostory krvinkami naplněné. A z celé této sítě krevní jdou odbočky do všech tykadel, zde se rozvětvují a opatřují všecka nejjemnější rozvětvení tykadla.

Sledujeme-li serii, jíž odpovídá obr. 10., dále laterálně, shledáváme, že dopředu namířená, tykadla nesoucí a hojně

vaskularisovaná část hrázky záhy mizí a že řezy zastihují pouze její distální část, kterou nasedá na basi ústní dutiny. Tyto řezy ukazují hrázku stále nižší, nesoucí s počátku proximálně vybíhající tangenciálně zasažené laterální plochy úzké vertikální hrázky, které na těchto laterálněji ležících řezech míří jako křídlovité přívěsky ku přídě, nenesouce již žádných tykadel; tato jsou tedy jen na proximálně obrácené ploše hrázky vyvinuta. Konečně ještě více laterálně mizí na řezech vůbec ku přídě vyhnutý díl hrázky, z níž zbývá jen dorsálně mířící úzká lamella, snižující se stále více, čím blíže přicházíme k laterálnímu ohraničení úst. Tento laterální úzký díl hrázky spatřujeme na obr. 11., kde mezi ní a vzhůru ohnutým dolním pyskem zasažen jest již přechod spodiny úst ve stěnu laterální, nesoucí proximálně mířící tykadla laterální; u dorsálních z nich není zachycena jejich inserce na stěnu, ježto světlost vchodu do odstavce velárního jest zde přirozeně širší. — Cori (12) kreslí mediani hrázku u malých *Ammocoetů* úplně bez tykadel; skutečně tykadla na její přední ploše zakládají se poměrně pozdě. Cévy, které hrázce krev přivádějí a odvádějí z ní zpět, jsou arteria lingualis, která jako direktní pokračování carotis ventralis přivádí odkyseličenou krev ze systému vidlicovitě rozděleného truncu; céva odvádějící jest vena lingualis. Průřezy obou jsou v distálním pokračování hrázky všude viditelné.

Z předcházejícího popisu jest zřejmo, že tykadlový apparát u vzrostlých *Ammocoetů* jest mnohem komplikovanější, než jak vyplývá z různých popisů a udání, kde mluví se jen o věnci tykadlovém. Srovnání s podobným jednoduchým kruhem dá se užíti nejvýše u exemplářů zcela mladých (srovnej asi obr. V.). Později nacházíme tykadla, zpravidla rozvětvená, téměř na celé spodní ploše chobotovitého horního pysku, na laterálních stěnách úst, na pysku ventrálním i na přední ploše vertikální, ku přídě vyhnuté hrázky. Tak jest předvelární odstavec úst téměř zatarasen spoustou tykadel, k čemuž jejich rozvětvení značně přispívá. Dva momenty dávají nám vysvětlení, jaký jest asi význam tykadlového apparátu *Ammocoeta:* jejich umístění a jejich vaskularisace. Tykadla, mířice proximálně ze samého ohraničení úst, jsou ve stálém a bezprostředním styku s čer-

stvou vodou a plocha styčná jest značně zvětšena rozvětvením tykadel. Síť cevní u jich base, zejména v předním oddílu vertikální hrázky, i vaskularisace jich samých jest tak hojná a nápadná, že v žádném jiném orgánu, velum vyjímaje, nenacházíme nic podobného. Tato vaskularisace apparátu tak exponovaného není zajisté náhodná, i nelze pochybovati, že v tykadlech dochází ku vydatnému okysličování kolující krve a že apparát tykadlový jest tedy jakýmsi accessorním orgánem respiračním.

Z ostatních orgánů *Ammocoeta* spadá do rámce této práce ještě t. zv. velum, jakási ze dvou křídel sestávající řasa, která s dorsální a laterální stěny trčí do dutiny ústní, tvoříc rozhraní mezi odstavcem tykadlovým a žaberním traktu branchio-intestinálního. Velum jest orgán velmi složitý jak svým vnějším tvarem, tak vnitřním složením a nalézám dosti rozdílů mezi velem *Ammocoetů* zcela mladých (do délky 8 mm) a vzrostlých (přes 10 cm). Vzhledem k možnému rozsahu této práce chci se zde zabývati pouze poměry u těchto posledních.

Pozorujeme-li *Ammocoety* živé — nejlépe proti světlu, aby orgány alespoň částečně prosvítaly — vidíme, že velum pulsuje a pohybuje se v rychlém tempu směrem vpřed a zatahuje se opět nazad. Tento pohyb způsobuje nutně rychlou výměnu vody v okolí orgánu. Dle Coriho (12) jest to pouze jakýsi »Klappenapparat«, jehož zavření nastane přiložením se jeho vnitřních partií těsně na sebe, čímž zabrání se odtoku vody z odstavce žaberního a voda zde obsažená odtéká při následující kontrakci svalstva žaberními otvory. Mám za to, že velu, mimo funkci apparátu vodu pohánějícího a funkci ventilu či závěrky, přísluší — vzhledem k jeho stavbě u *velikých Ammocoetů* — i funkce orgánu respiračního. V orgánu čistě mechanicky působícím nebylo by asi tak hojné a složité vaskularisace, jakou nacházíme v nitru vela vzrostlých exemplářů.

Rozřízneme-li přídu těla *Ammocoeta* ventrálnním sagittálním řezem, rozevřeme násilně stěny a upevníme je rozevřené na praeparační misce, vidíme velum v jeho přirozeném tvaru. Jsou to dvě tenké lamelly barvy růžové, zavěšené na dorsální a laterální stěně bývalé trubicovité dutiny. Nalezl

jsem tato dvě křídla velární vydutá jako plachty ku přídě (obr. VII.a) za apparátem tykadlovým. To jest jejich nejproximálnější možná posice, z níž při pulsaci jsou distálně retrahována a ihned zpět do dřívější proximálně vyduté polohy činností složité vnitřní muskulatury uváděna.

Řezy vzrostlým, přes 10 cm dlouhým Ammocoetem ukazují nám poměry vela následovně: první z nich, které velum zasahují, protínají jeho proximálně vydutou část, jejíž průseky objevují se na řezu jako isolované ostrůvky v dutině ústní. Mimo to viditelny jsou na řezu proximální úpony vela na dorsální stěnu; úpony a ventrálnější průseky vela zde spolu nesouvisí, neb z tohoto zasažena jest jen jeho proximálně vypouklá stěna. Jakmile jest na serii dosaženo kontinuity nejproximálnější části vela s dorsálním úponem, jeví se velum jako dva mohutné laloky, visící na dorsální stěně a sáhající hluboko do dutiny ústní. Již zde možno na každém křídle rozeznati mediálně vystouplou a kratší část střední a s touto související laterálně vyhnutou a hlouběji sáhající část postranní. Střední části jsou charakterisovány tlustou vrstvou tuhého, chrupce poněkud podobného pojiva, totožného s oním, které v mohutné vrstvě mezi svalovinou tvoří vydatnou oporu tenké poměrně laterální a ventrální stěny tělní (srovn. obr. VIII. a 9.). Toto pojivo tvoří jako tlusté desky celé medialní stěny obou křídel velárních, poskytuje velu mechanické opory a slouží jako místo úponu mohutné svalovině, která jako mocný pruh prochází k němu celým dorsálním úponem berouc počátek svůj mezi tyčovitými ventrálními chrupkami lebky a laterální svalovinou tělní. Pruhy svalové úponem prostupujíce a vějířovitě se rozšiřujíce upínají se na celé laterální plochy medialních desek pojivových a vykonávají — mimo jiné svaloviny — z velké části zmíněné již rytmické pohyby křídel velárních.

Po několika málo řezech dospějeme do dutiny či světlosti proximálně vyduté části vela, t. j. na serii sříznuta jest již celá tloušťka jeho do předu vypouklé stěny. Tím zároveň dorsální úpon každého křídla rozdělil se ve dva úpony, jeden laterální a jeden medialní.

Na dalších řezech nabývá zmíněná světlost přirozeně většího rozměru i dospějeme brzy k řezu, který jest repro-

dukován na obr. 12. Mediální úpony křídel, vycházející těsně od tyčovitých chrupek hlavy, zavěšují vnitřní části vela, které jsou na obrázku mediálně lemovány tmavým pruhem. Tyto tmavé pruhy jsou průseky až sem pokračujících, dříve zmíněných, podpůrných pojivových desek vnitřních stěn vela. Jak z obrázku jest patrno, zaujímají tyto podpůrné desky v této končině téměř celou šířku mediálních částí vela, takže z mohutných svalových pruhů, dříve popsaných, jsou zde jen nejdistálnější partie, stoupající úponem a inserující se k dorsálním laterálním plochám desek. Dorsální tlustší konce desek vybíhají skoro v pravoúhlou hranu, a tyto dvě proti sobě mířící hrany oddělují od celkové dutiny ústní — zatím částečně — štěrbinovitý dorsální divertikl.

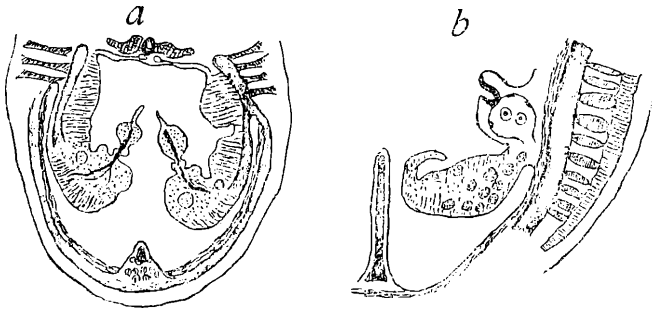
Již dříve bylo možno pozorovati, že laterální část každého křídla velárního počíná se osamostatňovati od části mediální. Na obr. 12. jest patrna již jen nepatrná souvislost obou částí. Laterální široké části křídel jsou dole jakoby ohnuty vzhůru a vybíhají v dorsálně mířící úzkou lamellu, která na předcházejících řezech dosahovala až k místu, kde úzký závěs laterální přechází v část širokou. Tato střední lamella jest na obr. 12. ve spojení s mediální částí křídla. Hlavním složivem širokých laterálních částí vela v těchto místech jest mocná svalovina, která tvoří vrstvu skoro rovnoběžně uloženou k laterální kontuře. Na dalších řezech přibývá této laterální svaloviny, která zde vyplňuje úplně dorsální laterální úpon a převážnou část celých laterálních partií; zároveň snižuje se distálně tenká střední lamella (srovnej obr. 12.), která konečně přečnívá jen nepatrně místo mediální inserce. Zde, v místě nejproximálnějšího konce chordy, přestává tuhá pojivná deska v mediálních částech vela a její charakteristicky temně zbarvené pojivo objevuje se již pouze v dorsálních a ventrálních jejích okrajích, jsouc uprostřed přerušeno. Laterálně po stranách dorsálních zbytků jdou stále praménky svalstva do mediálních částí odbočujíce od svalnaté inserce laterální. Pod počátkem chordy setkaly se také ostré dorsální hrany (srovnej obr. 12.), obsahující dosud tuhé pojivo, takže dorsální štěrbinovitý divertikl jest zde úplně od celkové dutiny oddělen. Tenká stěna, která divertikl tento ventrálně ohraničuje a která splynutím dorsálních hran povstala, tvořena

jest — mimo nepatrně vyvinutým svalstvem — týmž temně zbarveným pojivem, které skládá mediální opěrné desky vela. Divertikl zúžuje se směrem nazad a končí slepě na řezech, které protínají proximální část orgánu sluchového.

Tyto řezy leží mezi oněmi, které jsou zobrazeny na obr. 12. a VIII*a*; vidíme na nich, že mediální partie křídel (srovnej obr. 12.) nemají již vůbec charakteristicky temně zbarveného pojiva, které skládalo jich opěrné desky a tvořeny jsou obyčejným téměř nezbarveným pojivem, vlákénky svalovými a — zde velmi sporými — kapillárami. Dorsální úpony pod chrupky parachordální i ventrální úpony k mediálním plochám postranních částí křídel, respektive tenkých středních lamell (obr. 12.), jsou na těchto řezech velice zúženy. Za to ale ventrální část těchto zbytků mediálních částí blízko nad svou ventrální insercí zduřuje v jakousi rozšířeninu, která — na řezu podobna srdčité ampulle — sedí jako na stopce na inserující ventrální části. Ihned po objevení se těchto rozšířenin na serii přestává dorsální úpon pod chrupky parachordální, čili mediální část křídla nedosahuje více ke stropu celkové světlosti a jeví se pouze jako terminální úzký přívěsek »ampull«, který laterálně na ně nasedá, kdežto »ampulla« sama vychyluje se k mediani linii. Celek jest velmi složitý a vyžadoval by k úplně jasné představě více vyobrazení, než jest ku práci možno přiložiti, mám ale za to, že popis dosavadní i následující jakož i srovnání obr. 12. a VIII*a* učiní věc srozumitelnou.

Na obr. 12. jsou viditelny čtyři dorsální úpony, dva mediální, dva laterální, které ovšem proximálně v sebe přecházejí a objevily se jako samostatné úpony až po zasažení světlosti proximálně vyduté části vela. Na řezech posledně popisovaných, t. j. těch, které leží mezi obr. 12. a VIII*a*, zmizely úpony mediální a z celých vnitřních částí vela zbyly jen ventrální ampullovité rozšířeniny s nasedajícím zbytkem úponu, který více nedosahuje k místu bývalé inserce dorsální Ale též laterální úpony (obr. VIII*a*), se změnily: jejich inserce, původně přesně dorsální, posunuje se směrem nazad k laterální stěné dutiny, stávajíc se postupně širší, jakoby náhradou za ztracenou inserci mediální. Tak na obr. VIII*a* vidíme, že velum odbočuje svou zbylou

insercí, která jest zároveň široká, asi z místa přechodu dorsální stěny v laterální stěnu dutiny ústní. Náčrt obr. VIII*a* jest kreslen dle řezu poněkud nesouměrného. Jest na něm patrno, že laterální okraje obou křídel velárních jsou prostoupeny a tedy jaksi podepřeny vrstvou na praeparátu temně zbarveného pojiva, téhož, jaké tvořilo i mediální opěrné desky vnitřních okrajů křídel (obr. 12.). Pruh téhož pojiva vyskytuje se u



Obr. VIII. *Ammocoetes Planeri; a* dorsální proximální úpon laterálních částí křídel vela; mediální části nedosahují více dorsální stěny úst a jsou ampullovitě zakončeny. — *b* distální ventrální úpon laterální části křídla velárního; nad ním prvá arterie branchiální a vedle této rýha »pseudobranchiální«.

Ammocoetů též v dorsální části ventrální hrázky spodiny ústní, přibývá ho směrem nazad, takže v končině distálního konce vela tvoří hlavní složivo této hrázky (obr. VIII*b*).

Tuhé pojivo tvoří tedy na dvou místech (v každé polovici vela) oporu podajného vela a slouží za úpon svalstva pohybujícího velem: proximálně v částech mediálních (obr. 12.) a více distálně v částech laterálních (obr. VIII*a*). Jak z pravé strany tohoto náčrtu jest zřejmo, vniká toto podpůrné pojivo do křídla velárního z mohutné vrstvy tohoto pojiva, která mezi svalstvem objímá ventrálně i laterálně celé tělo, poskytujíc poměrně slabé stěně tělní náležité opory.

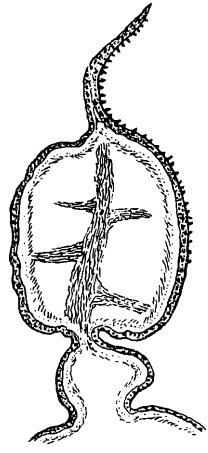
Náčrt VIII*a* znázorňuje zároveň, jak v těchto končinách se na řezech jeví mediální partie velárních křídel po ztrátě úponu na dorsální stěnu pod chrupky parachordální. Bylo již uvedeno, že ventrální zbytky těchto partií jsou zduřeny v podobu jakýchsi ampull. Ampully, jak z obrázku patrno, nasedají na širokou část křídel zúženou částí,

která na řezu připomíná jakousi stopku, která jest ale opět poněkud zduřena. Dorsální jazýčkovitý výběžek ampully jest průřez tenkého lemu, který jako zbytek přední suspendující části zakončuje rozšířený ventrální díl mediální části. Ampullovitá rozšíření vnitřních okrajů velárních pozoruji na 80 řezech serie (12μ), při čemž tvar jejich není úplně stejný. Tak, jak ho vidíme na obr. VIII*a* a IX. nacházím ho v proximální a distální části této řady, asi uprostřed svého rozsahu jest rozšířená část mnohem vyšší a jen zářezem oddělena od laterální tlusté části vela, takže dojem spojující »stopky« mizí.

Ostatně tvar vela a všech jeho dílů není zajisté nijak konstantní vzhledem k hojnému svalstvu, které velem všude prostupuje. Ampully u popisovaných vzrostlých exemplářů jsou nabity krví, což znesnadňuje přehled vnitřního zařízení jejich; možno ale rozeznati pruhy svalové, které uvnitř jednotlivých průseků rozšířené části, tedy ampull probíhají. Na příznivých řezech jest patrno, že praménky svalové z ventrolaterální části vela, z mohutné vrstvy svalové, zde uložené, vnikají zúženou částí (»stopkou«) do ampully (obr. VIII. a). Při silnějším zvětšení jest jeden z proximálních řezů rozšířeninou nakreslen na obr. IX. Pruh svalový, který na sousedních řezech možno sledovati skrze »stopku« až do ventrálního svalstva vela (srovnej s náčrtem VIII. a), stoupá vertikálně středem ampully, kde ho lze sledovati až do dorsálního jazýčkovitého výběžku. Z tohoto vertikálního centrálního pruhu odbočují laterálně slabší pruhy svalové, upínající se zřejmě (na praeparátu) na vnitřní stěny rozšířeniny. V distálních partiích vela nenalezl jsem takového systému svalového, vůbec žádného pruhu přesně vertikálně stoupajícího, nýbrž jen pruhy probíhající rovně i více méně šikmo od pravé stěny dutiny ku levé. Mimo to proťaty jsou četné snopce svalové příčně, probíhající tedy velem ve směru cranio-caudálním; tyto průseky objevují se na praeparátu jako ostrůvky roztroušené v masse krve, která rozšířeniny tak přeplňuje, že jednotlivých cév nelze vůbec rozeznati (na obr. IX. kreslen za účelem jasnosti pouze systém svalový). Příčné i podélné svaly lze mimo v ampullách zjistiti i v části zúžené, jakož i v dolních ohnutých širokých částech křídel

velárních, kde při vnější periferii tvoří podélné svaly mohutné ložisko.

Co zde jest podáno, jest jen nejdůležitější ze složitého systému svalového, jímž velum jest opatřeno; nelze pochybovati, že svalstvo vykonává nejenom za živa viditelné rytmické pohyby vela ku přídě a nazad, ale že kontrahuje i jeho protilehlé stěny, zejména v ampullovitých rozšířeninách, čímž přispívá ku rychlému oběhu v něm tak hojně obsažené krve.



Obr. IX. — *Ammocoetes Planeri;* řez ampullovitě rozšířeným vnitřním okrajem vela s rozvětvenou soustavou svalovou.

Rozšíreniny vnitřních okrajů distálnější části vela (obr. VIII., a IX.) zasluhují ještě jinak pozornosti. »Ampully« jsou vyvinuty již u exemplářů, které dosáhly délky 1 cm a pravděpodobně i u menších, kde velum i jeho skladba jest jednodušší než u vzrostlých Ammocoetů. Ampulla malého Ammocoeta jest zobrazeua na obr. 13. Rozšířenina sedí na zúžené části křídla velárního, do níž ve ventrální partii, fotografií nezachycené, vstupuje mohutný pramen příčně pruhovaného svalstva (srovnej s náčrtem VIII. a), které již u těchto mladých exemplářů tvoří na sousedních řezech uvnitř rozšířeniny samé popsaný rozvětvený systém (srovnej obr. IX.). Ampulla v tomto případě neobsahuje krve, i jest viděti v jejím nitru vytvořené útlé krevní cévy. Vnější kontura mediální stěny ampully jest hrubě zubatá a při velkých zvětšeních jest patrno, že jednotlivé zuby, prstovitým výběžkům podobné, tvoří povrchová vrstva krycího epithelu. Buňky tohoto okrsku jsou tvaru kuželovitého, kulatá jádra sedí v basální široké části, plasmatická část pak jest nad jádrem protažena v prstovitý, tupě končící výběžek. Tyto jsou hustě vedle sebe seřazeny a na řezu způsobují zubatou konturu ampully.

U vzrostlých exemplářů, jež jsou vlastním předmětem této části mé práce, nalezl jsem zubatou konturu, t. j. plochu pokrytou uvedenými kuželovitými čípky, téměř na celé mediální ploše rozšířených okrajů vela i dorsálního úzkého jich

lemu (obr. IX.), na tomto i v těch jeho proximálních částech, kde jest inserován na dorsální stěnu pod popsaný divertikl subchordální. Nejvíce a nejnápadnější čípky nese ale stěna ampullovitých rozšířenin. Ježto se tak zvláštní úprava krycího epithelu vyskytuje výhradně na vnitřních plochách vela, jest nepochybno, že má nějaký zvláštní význam pro celý orgán. Význam tento vysvětliti jest zajisté nesnadno a jest možno učiniti jen pravděpodobný odhad. Na živých, prosvítajících exemplářích jest viděti jen úsilný, rytmický pohyb celého vela směrem ku přídě a ihned zpět, nazad. Pohyby jednotlivých částí a eventuelní tepání ampullovitých rozšířenin, jemuž nasvědčuje rozvětvené vnitřní svalstvo (obr. IX.), unikají bohužel pozornosti. Má-li ale velum zahraditi odtok vody, jest nutno, aby mediální okraje jeho obou křídel se k sobě přiložily, při čemž může asi nastati i snížení obou polovin velárních. Při tom nutně vzniklou ventrální štěrbinu, tvaru klínovitého, zbytek to při kontrakci vela širokého ventrálního vchodu (srovnej obr. VIII.*a*), může alespoň přibližně zatarasiti klínovitá ventrální hrázka, zúžující se od apparátu tykadlového směrem nazad. Při prudkém přiložení se na sebe obou křídel vela může snad drsný, zubatý, t. j. čípky pokrytý povrch mediálních styčných ploch přispěti k pevnému jich přimknutí, k zamezení klouzavého pohybu obou při vzájemném nárazu. Že by se jednalo o nějaký apparát filtrační, zdá se mi při nepatrné výšce jednotlivých, drobných kuželů méně pravděpodobným.

Při popisu celkového průběhu vela přestali jsme v místech, kde počínají baňkovité rozšířeniny jeho vnitřních okrajů a kde vstupuje do laterálních okrajů se stran tuhé, tmavě barvitelné pojivo patrně k opoře vela. Předběhli jsme další postup popisu vylíčením mediálních rozšířenin, jich pravděpodobného významu a konstatováním, že vyskytují se as na 80 dalších řezech serie (asi za obr. VIII.*a*). Na celém tomto průběhu zachovává velmi přibližně svou podobu, jakou na uvedeném obrázku spatřujeme, jen jeho úpon sestupuje poznenáhlu níže po laterální stěně těla a ve ventro-laterální části, při dolejším ohybu, mohutní stále vrstva uložených zde podélných svalů velárních. Podpůrné tuhé pojivo udržuje se stále jako ložisko při úponu, jehož sestupem po laterální stěně níže stále při-

rozeně ubývá rozměru křídel; zároveň ztenčuje se stále ventrální, dříve klínovitý medianí kýl spodiny ústní postupně až v tenkou lamellu, jejíž oporou jest rovněž popsané tuhé, intensivně barvitelné pojivo; svalovina, která tvořila proximálně jeho podstatné složivo, vymizela téměř úplně.

Když přešli jsme na serii okrsek rozšířenin mediálních okrajů vela, jest jeho úpon na laterální stěnu dutiny již značně nízko. Dospějeme konečně k řezům, z nichž jeden znázorněn jest náčrtem VIII *b*. Jest zde viděti opornou vrstvu pojivnou mezi svalstvem ve stěně tělní jakož i z téhož pletiva složenou oporu tenké medianí hrázky ventrální. Ve stěně velární dutiny patrný jest hluboký zářez, vyznačený zvýšeným epithelem a na praeparátu hustým obrvením; jest to průsek ventrální části rýhy perifaryngeální (»pseudobranchiální«, *Dohrn*). Při této rýze naznačena jest první arterie branchiální, která jako pokračování vidličnatě za thyreoideou rozděleného truncu sprovází tuto rýhu na jejím vzestupu v dutině velární. Pod těmito orgány teprve leží zde již ventrální úpon zcela distální části vela; jeho tlustá laterální partie tvořena jest téměř zcela podélnou svalovinou, jíž proplétají se cévy krevní; mediální, tenká, na řezu jazýčkovitá a dorsálně zahnutá partie složena jest z obyčejného, málo barvitelného pojiva a četných cév. Na řezech ještě distálněji ležících sestupuje celý tento komplex orgánů stále do nižšího niveau za stálého ubývání tenké mediální části vela. Na těchto řezech nalezneme vstup arterie spiraculi do nitra vela z carotis ventralis. Konečně na řezech, na nichž rýha perifaryngeální leží již pod niveau dorsální hrany medianí příčky, ztrácí se úplně tenká mediální lamella vela; zbývá jen svalnatá část laterální se svým úponem, která poznenáhlu přechází v pouhý velu již nepodobný kořen svého podélného svalstva ve stěně tělní v končině podžaberní.

Hlavní systémy svalstva, které vykonávají rytmickou a prudkou pulsaci vela, jsou tři. Dva jsou proximální a vstupují do vela v krajině praeotické od chrupek parachordálních. Jeden z nich opatřuje mediální část křídla (srovnej s obr. 12.), druhý část laterální, kde jeho pruhy leží rovnoběžně k laterální kontuře vela. Třetí systém jest distální, vstupuje do ventrálního distálního úponu a tvoří

mohutnou svalovinu ventro-laterální distálnější partie křídel. Podobně popsal Cori (12) systémy svalstva ve velu zcela mladých *Ammocoetů*. Mimo tyto tři hlavní komplexy svalové existuje — zejména u vzrostlých Ammocoetů — množství drobných pruhů svalových, zejména v ohnutých mediálních částech a jejich rozšířeninách (srovnej obr. VIII. *a* IX.).

Co se týče přívodu a odchodu krve ve velu, nemohu uvésti ničeho, co by v tomto ohledu doplňovalo údaje Corino (12), jenž zvolil jedině správnou metodu k posouzení jednotlivých cév, totiž pozorování živého, průsvitného materiálu, která ovšem dá se užíti pouze pro materiál velmi mladý. Jedině pozorování proudící krve může tu býti spolehlivým vodítkem. Na pracparátech, jež jsou bohužel jediným prostředkem k poznání anatomie exemplářů vyrostlých, mohl jsem nalézti Corim označené hlavní přivádějící a odvádějící cévy. Jest to především arteria spiraculi, patřící do obvodu carotis ventralis; tato se proximálně dělí a dává původ třem cévám: arterii lingualis, která vstupuje do medianí hrázky jako přímé pokračování kmenu carotidy, arterii spiraculi do vela a ramu muscularis, který provází musculus constrictor veli. Arteria spiraculi, vstoupivši do vela jeho distálním ventrálním úponem, nalézá pokračování ve vena dorsalis veli, která ústí nad dorsálním úponem do veny facialis, vedoucí krev z přídy hlavy. Arteria spiraculi a vena dorsalis veli probíhají u malého *Ammocoeta* rovnoběžně s přední konturou vela v jeho okraji. Mimo toho dostává velum okysličenou krev slabou cévou, která vstupuje do vela dorsálním úponem ze systému dorsální aorty a přechází ve venu veli ventralis; tato vychází distálním ventrálním úponem na zad, aby vyústila do obloukovité veny mandibularis.

U velkých *Ammocoetů* jest rozvětvení cév uvnitř vela velice složité a bohaté a právě tato okolnost jest pro účel mé práce důležitá. Množství krve, jaké nacházím ve velu vzrostlých *Ammocoetů*, jest nápadně velké, takže cévy — velké i nejmenší — jsou jí v pravém slova smyslu nabity. Cévy proplétají se hustě všemi měkkými pletivy vela a toto množství jakož i ohnutý a vypouklý tvar jeho znemožňuje určiti příslušnost jich k některé ze vstupujících a vystupujících uvedených hlavních cév. U mladých exemplářů shle-

dáme někdy cévy prázdné a tu jest možno zjistiti stěny cév (obr. 13.). Jsou-li však cévy krví přeplněny, jak u velkých individuí jsem vždy nalezl, tísní se naplněné cévy těsně na sebe, kontura i endothel cév ztrácí se v masse krvinek i vzniká dojem jednotného, krví naplněného prostoru. Právě na přampullovité rozšířeniny mediálních okrajů vela (obr. VIII *a*) činí u starších exemplářů dojem jednotných nádržek krve; jen systém rozvětveného se svalstva (obr. IX.) lze rozeznati.

Průseky kapillár nalezneme ve všech partiích vela; proplétají se svalstvemi pojivem. Na některých místech rozšiřují se enormně dráhy krevní, takže vznikají rozsáhlé prostory, krví přeplněné; největší nacházím proximálně ve ventrální části laterálního oddílu, a pak více distálně ve ventrálním ohybu vela. Konvexní tvar vela ztěžuje značně toto pozorování. Představme si řez vedený před končinou, jíž odpovídá obr. 12. Rovnoběžně s povrchem vela probíhá veliký, proximální sval, vstupující dorsálním laterálním úponem. Ježto jest tento povrch konvexní, seřízly proximální řezy střední obloukovité části jednotlivých pramenů svalových; na zvoleném řezu jsou zachyceny jen ventrální úpony těchto na stěnu velární. Tyto ventrální sříznuté konce pruhů svalových jeví se jako hrubé zuby, čnící do nitra vela; do mezer mezi jednotlivé »zuby« zasahuje na řezu laločnatá kontura přední veliké rozšířeniny krevní. Tato vysílá — jakož i jinde na serii — výběžky mezi jednotlivé, zde stejně silné prameny svalové; výběžky ty naplněny jsou krvinkami, které takto dostávají se až k samé periferii vela. Obr. 14. představuje řez, ležící ještě více proximálně; jest zde zobrazen ventrální díl laterální partie vela, kde jednotlivé praménky velikého proximálního svalu jsou zachyceny v celé své délce, nejsouce profaty; jsou v pravidelných skoro vzdálenostech od sebe rozestaveny a tu a tam příčnými můstky spojeny. Světlosti mezi sousedními pruhy nejsou na některých řezech — a hlavně obrázcích — dobře patrny, ježto jsou zaplněny spoustou buněk krevních: vnikají sem výběžky z uvedených rozšířenin krevních. Na obr. 14. sahají od periferie vela dva tmavé proužky do určité výšky dvou sousedních štěrbin; jest to massa krvinek odtažená — snad následkem fixace — od stěn a proto zřetelná. Na jiných řezech nacházíme jich daleko více, ale světlosti by na fotografii nevynikly.

Podal jsem zde nejdůležitější body o tvaru a vnitřním složení vela vzrostlých *Ammocoetů*. Podrobnosti vyžadovaly by daleko více místa i vyobrazení, bez nichž nelze si jich představiti. Jest ale snad dostatečně patrno, že velum — tak jako popsaný apparát tykadlový — jest orgán nápadným množstvím krve opatřovaný. V obou ústrojích nacházíme takové množství krve, jako v žádném jiném orgánu, žábry snad vyjímaje. Tykadla i velum jsou ve stálém styku s vodou, jejíž pohyb — přítok i odtok — regulují rytmické a prudké pohyby vela. Toto, krví prostoupené a celkem tenkostěnné má pravděpodobně mimo funkce pulsační i ten význam, že v něm, zvláště snad v mediálních ampullovitých rozšířeninách jeho vnitřních okrajů, které zvlášť značné množství krve vedou, dochází ku vydatnému okysličování této. Pak bylo by velum nejen mechanicky působícím orgánem pulsačním, nýbrž i jakýmsi akcessorním orgánem dýchacím.

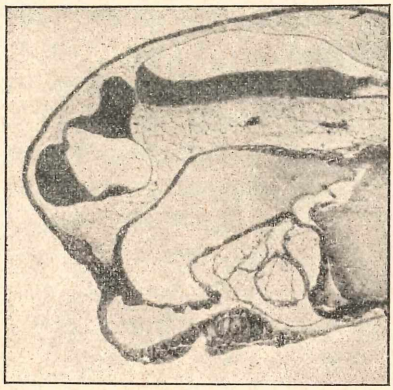
II. **Amphibia** (*Anura*).

Při svých studiích o vývoji srdce, labyrintu a štítné žlázy nižších obratlovců zpracoval jsem množství různých stadií larev našich obojživelníků. Zvlášť souvislou řadu vývojovou měl jsem v larvách druhu *Pelobates fuscus*, kterému jsem také největší pozornost věnoval; při těchto pozorováních všímal jsem si také zvláštních tykadlovitých ústrojů ústních, o nichž v této práci chci se podrobněji zmíniti. Nutno však povšimnouti si při této příležitosti pochodů, které tvoření úst embrya provázejí.

Materiál můj byl fixován silnou směsí Flemmingovou a barven buď safraninem neb za příčinou snadnějšího pořízení fotografií různými druhy haematoxylinu s eventuelním dobarvením kyselinou pikrovou. Řezy zhotoveny příčné sagittální i horizontální.

Nejmladší exempláře larev druhu *Pelobates fuscus*, jimiž počínám, měří sotva 4 mm délky. Část jednoho ze sagittálních řezů těmito exempláři předvádí textový obr. X. Jak z průřezu různých orgánů (zejména chordy na celém řezu) možno posouditi, prochází řez téměř přesně rovinou bilaterální

souměrnosti. Ventrálně patrna jest část zasaženého orgánu přísavného a nad ním v prostoru, kterým zúžena jest proximální část roury zažívací, průsek ventrikulu srdečního s odtaženou endothelovou výstelkou. Celá trubice entodermová naplněna jest dosud živným žloutkem, a sice v distální partii až po pericardiální dutinu žloutkem hrubě zrnitým, dále v předu pak více homogenním; hranice obou jest na



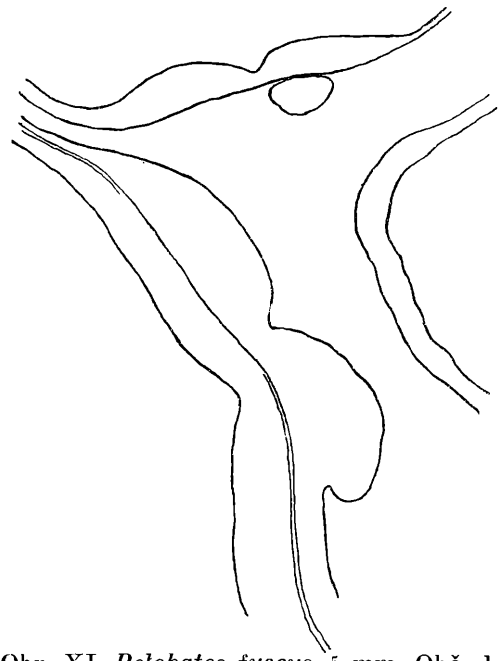
Obr. X. — *Pelobates fuscus*, délka 4 mm. Styk ento- a ektodermu. Nad místem, styku plakoda hypofysální.

obr. X. jako světlý, roztržením obou mass vzniklý pruh dobře zřetelná.

Otvor ústní není dosud prolomen a těleso entodermové jest dosud úplně uzavřeno. Na řezech, které procházejí v blízkosti medianí roviny, dochází ku styku proximální stěny entodermové s ektodermem, jak na obr. X. možno viděti, kdežto na řezech více tangenciálních jsou obě vrstvy v důsledku zaoblení tělesa entodermového více či méně od sebe vzdáleny. V místech dotyku ento- a ektodermu pozorujeme značnou ztluštěninu ektodermovou, která v místě nad dotykem vykazuje opět jakési ztluštění.

Pozorujeme-li celou serii při silném zvětšení, vidíme jasně, že téměř po celé přední ploše jest ektoderm rozlišen ve dvě vrstvy, které nepatrnou štěrbinkou jsou od sebe rozděleny. Jsou to známé vnější či krycí a spodní vrstva ekto-

dermová; jinde na celém sagittálním řezu toto rozlišení ve dvě vrstvy nelze buď vůbec konstatovati (hlavně v dorsálním ektodermu), neb jen velice nezřetelně. Zvolíme-li řezy, které leží laterálně od řezu vyobrazeného (obr. X.), kde dotyk entodermu ztěžuje poněkud pozorování, shledáme,



Obr. XI. *Pelobates fuscus*, 5 mm. Obě plakody ektodermové, v pravo proximální část entodermu, nahoře hypofysa pod zduřením chiasmatu.

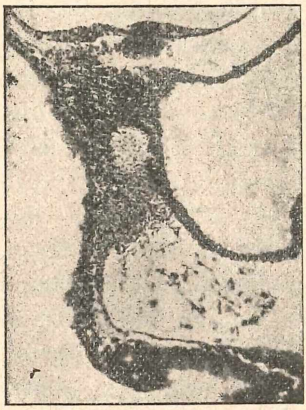
že spodní ektodermová vrstva, jejíž tloušťka jinde rovná se sotva třetině tloušťky vrstvy krycí, jest zduřena ve dvou nad sebou ležících místech v útvary, které se zcela podobají plakodám smyslových orgánů. Spodní ztlustlinu nazývám plakodou ústní i odpovídá asi ztluštění, které vyobrazil u Cyclostom Koltzoff (22), a kterou Šimkevič (23) za pravou plakodu považuje, neb se mu podařilo, různými umělými vlivy (roztokem cukru) vyvolati v ní změny (značné zduření) jako na plakodách smyslových; též pronáší Šimkevič domněnku, že tato plakoda vznikla splynutím dvou plakod párovitých a že dutina ústní odpovídá prohloubené proximální

plakodě. Horní ztluštění nazývám plakodou hypofysální, ježto dává původ hypofyse.

Obě plakody nakresleny jsou na obr. XI.; vidíme, že ztluštění podléhá spodní vrstva ektodermová, tak jako i sluchová a čichová plakoda vzniká z této vrstvy. V pravo jest nakreslena část přední stěny roury zažívací; na praeparátu jest prostor mezi touto stěnou a plakodami, zejména spodní, hustě vyplněn shromážděnými sem buňkami mesenchymu. Nahoře znázorněna jest spodina mozku, proximální ztluštění odpovídá Kupfferovu torus transversus telencefali, distální zduření chiasmatu, zúžená stěna dále v pravo spěje ku hrotu infundibula. Pod zduřením chiasmatu leží elliptičná hypofysa, dosud tak značně vzdálená od svého místa definitivního, v levo pod hypofysou vytečkována jest útlá cévka; vůbec všude jeví se tendence po sblížení tvořících se cévek a základu hypofysy. Na řezech více ku středu ležících jest patrno, že hypofysální základ není tak osamocen, jak se zdá z obr. XI., nýbrž že spojen jest souvislým pruhem buněčným s dorsální plakodou, od níž bujením buněk v tak mladých stadiích hypofysa béře původ. Řez, jemuž odpovídá obr. XII., zastihuje místo, kde došlo ku sblížení ento- a ektodermu, a sice dorsální roh entodermu splynul s ektodermem v jednolitou massu buněčnou. Sblížení stalo se asi v místě rozhraní obou plakod, místo pod stykem jest světlejší, zde nedošlo dosud ku sblížení obou vrstev, ještě více ventrálně pak jest zachyceno dolní ztluštění, přecházející skoro náhle v normální vnitřní vrstvu ektodermovou. Nahoře, nad stykem viděti jest (na praeparátu zřetelně) tenič kou vrstvu spodní, přecházející v massu dorsálního ztluštění, jež na tomto řezu souvisí s hypofysou. Na řezech pak nejbližších celá massa ztluštěné spodní vrstvy přechází v buněčný pruh hypofysy.

Při méně hojném výběru stadií neb u stadií, stojících těsně před prolomením úst, párovitost (ve směru vertikálním) proximálních plakod (obr. XI.) snadno může ujíti pozornosti; také jsem nikde v literatuře, v níž však *Pelobates* v ohledu tom není zpracován, podobných zpráv nenalezl. Někteří autoři (Haller (17) u *Amphibii*, Kupffer (18—21) u *Ammocoeta*) mluví o nepárové plakodě, kterou však označují jako čichovou (unpaare Riechplatte). Tato plakoda odpovídá asi útvaru

na mém obr. X., dvojitost snadno může býti přehlédnuta, neb snad všude neexistuje. Není však nejmenšího důvodu, jak myslím, tuto plakodu označovati jakožto čichovou, ježto má vztahy k orgánům jiným, k ústům a hypofyse, proto zvolil jsem jména dříve označená. Mediální okraje plakod, či již mělkých jamek čichových, zastihují moje řezy, které leží již značně laterálně a plakody ty leží také více dorsálně; není žádného styku párovitých plakod čichových s medianími plakodami ventrálnějšími. Mineme mnoho řezů ležících laterálně od medianích plakod (obr. X., XI.), na nichž spodní vrstva ektodermová jest po celé ploše pouze normálně tlustá (jest však, jak již připomenuto, na proximální ploše hlavy zřetelnější a od povrchní vrstvy odlišena, což jinde na těle nepozorujeme), než přijdeme k řezům, které zasahují znatelná ztluštění této proximální vrstvy — mediální okraje plakod čichových. Hypofysální a ústní plakoda jsou tedy u *Pelobates* od plakod čichových úplně separovány a jen zřetelnou spodní vrstvou spojeny



Obr. XII. *Pelobates fuscus;* styk ento- a ektodermu; hypofysa souvisí pruhem buněčným s dorsálním ztluštěním spodní vrstvy ektodermové.

Hypofysa u *Pelobates* vzniká tedy z horní mediání plakody a sice z její dorsální části. Žádná další dorsálněji ležící plakoda neexistuje. Haller (17) neuvádí žádné zvláštní plakody, z níž hypofysa béře původ* a to, co nazývá plakodou nosní, neodpovídá svou polohou plakodě mnou právě popsané, neb píše: »Unterhalb der sogenannten unpaaren Riechplatte Hoffmanns und oberhalb der Rachenhaut entsteht eine nach hinten zu ragende Verdickung der Grundschicht des Entoderms, die später zapfenförmig gestaltet hinter der Rachenhaut dem Entoderm auflagert.« Tento popis identifikuje Haller zcela s podáním Götte-ho (16, Fig. 293. Taf. XVI.)

*) Též z vyobrazení Kupfferových (20), týkajících se *Rana fusca, Salamandra* a Götte-ových (16) u *Bombinator* nevyplývá, že by v těchto místech nějaká plakoda byla vyvinuta.

kde žádná plakoda, ani dorsální ani ventrální (*Bombinator*) kreslena není. Při této příležitosti podotýkám, že dle Götteho jest hypofysa dutá již v době, kdy souvisí ještě s ektodermem; u *Pelobates* nalezl jsem u daleko starších exemplářů hypofysy již zcela samostatné, pod infundibulem ležící a laterálně carotidami obklopené ještě dokonale solidní, bez dutin.

Co se týká účasti entodermu, dosud zcela uzavřeného, na tvoření hypofysy, podotýkám následující. Götte a Haller tento zcela rozhodně, popírají jakoukoli účast entodermu na vývoji hypofysy; dle Kupffera (18, 20) u *Rana fusca* připojuje se však část tohoto k základu ektodermovému. U *Pelobates* u stadií, jimž dosud popsané obrázky odpovídají, není skutečně žádného styku ektodermových elementů hypofysy s entodermem, z něhož by se mohlo na podobné účastenství souditi. U exemplářů však, které jsou nepatrně mladší, přikládá se dovnitř rostoucí pruh hypofysální tak těsně k dorsální stěně proximálního entodermu (obr. XIII.), že ani nejsilnějším zvětšením nelze žádných hranic obou útvarů zjistiti; podobně shledal jsem u 3·5 mm dlouhých stadiích od *Bufo calamita*. I zdá se mi, že nelze možnou proliferaci entodermových buněk do ektodermového pruhu hypofysálního tak rozhodně jak Haller činí, vylučovati.

Připusťme, že nepatrné prohloubení celkového ektodermu na přední ploše hlavy (obr. X.) lze nazvati vchlípením ústním. V tomto případě mohla by ještě obstáti všeobecně tradovaná nauka, že hypofysa, která dle mého předcházejícího popisu vzniká z dorsálně ležícího ztluštění, tvoří se z ektodermového vchlípení ústního. Shledal jsem však u stadií mladších, hlavně však u exemplářů *Bufo calamita*, které měří pouze 2·5 mm, že buněčný pruh hypofysální vrůstá mezi spodinu mozku a dorsální stěnu entodermu dříve, než jakékoli sebe menší prohloubení proximální stěny ektodermové lze pozorovati; naopak, proximální stěna hlavy jest ven vypouklá. Vzniká tedy hypofysa dříve než ústa, prostě z ektodermu, resp. z jeho vnitřního ztluštění, či plakody. Teprve později jest místo tohoto původu vtaženo jakož i okolní ektoderm do prohlubiny ústní. U jiných obratlovců může hypofysa později vzniknouti z této již vtažené vrstvy, ale původ její není nutno odvozovati z úst, nýbrž — jako jiných orgá-

nů — prostě z ektodermu. Mám za to, že tyto úvahy jsou důležité pro posouzení duchaplných theorií — zejména Kupfferových — o vývoji hypofysy *Ammocoetů* z t. zv. palaeostoma. Ono zaklesnutí ektodermu před ústy, z něhož u *Ammocoeta* orgán za hypofysu dosud uznaný povstává, není nutno vykládati jako ústa, neb i u vyšších vertebrátů (*Amphibia*) vzniká hypofysa před, resp. nad ústy, a to dříve než ústa.



Obr. XIII *Pelobates fuscus;* mezi mozek a entoderm vrůstající základ hypofysy splývá s dorsálním rohem entodermu.

Do těchto úvah spadá ovšem i srovnání s *Amphioxem*, hlavně jeho pochybné Legrossovy (25) hypofysy s hypofysou vyšších chordátů a neméně pochybné srovnání ústní jamky Hatschekovy s orgánem čichovým, jemuž asi spíše odpovídá dorsální jamka Köllikerova. Doufám, že ve zvláštní práci o hypofyse bude mi možno tyto záhadné orgány podrobněji vyložiti, než v tomto pojednání, jež vlastně bylo určeno jinému předmětu.

Existence medianích plakod a jich účast při vývoji úst a hypofysy přivádí nás k dalším úvahám o významu plakod. Medianí plakody neliší se ničím od párovitých plakod ektodermu hlavového. Hypofysu lze těžko pochopiti jako smyslový orgán, ač v pracích Boecke-ových (27, 28) nacházíme pokusy pro tento výklad. Tím méně lze ústům přičítati význam bývalého orgánu smyslového. A přece oba tyto orgány vznikají za účasti a pomoci plakod; tím význam plakod jako útvarů čistě smyslových, jako původních primitivních orgánů smyslových, kteryžto význam zejména Froriepem (24) byl zdůvodňován, stává se pochybným. Neshledávám dále nutným požadavek, že plakoda musí míti znak párovitosti. Zdá se spíše, že všude tam, kde v ektodermu jest třeba množství materiálu pro vznikající orgán, ať už smyslový či jiný, nastává zhuštění a zvýšení — párové či nepárové — příslušné části ektodermu. I čočka oční vzniká z ektodermové plakody, kdežto vlastní smyslový orgán zrako-

vý, retina, vzniká ze stěn mozkových, v nichž žádné plakody nelze zjistiti a jež jsou rovněž ektodermového původu. Mám za to, že vždy dáti jest přednost výkladu jednoduchému než sebe duchaplněji konstruovanému ale nedokázatelnému.

Jako další stadium *Pelobates fuscus* volím ono, které dosáhlo délky asi 4·7 mm. Ústa jsou zde již hluboce vchlípená. Přepážka ústní (Rachenhaut), vzniklá ze styku ekto- a entodermu, jest zcela tenička, zejména na řezech vedených středem embrya, při periferii úst jest poněkud tlustší V tenké přepážce jen stěží lze silným zvětšením rozeznati její složení ze dvou vrstev, ento- a ektodermu. Ona massa buněčná, která plakodu ústní tvořila (obr. X., XII.), musí nyní vystýlati značně velký povrch vchlípení ústního. jest proto epithel vchlípení tohoto značně nízký, nejnižší právě na zmíněné přepážce.*) Použijeme-li silných zvětšení, možno zjistiti, že tato tenká přepážka mezi vchlípením ústním a entodermem nepředstavuje více souvislou dvojvrstevnou bláu, nýbrž že jest na dvou místech nad sebou protržena, právě v místech, kde jest nejtenší. Patrně napínání stále se ztenčující blány poznenáhlým rozšiřováním se úst přivodí ruptury této blány; vzniklými otvory jest viděti vystupování jemně zrnitého žloutkového obsahu, který dříve proximální část entodermové roury úplně vyplňoval, do vchlípené dutiny ústní. Proximální entoderm jest tedy již téměř úplně prázdný, kdežto distální, za srdcem, jest stále nabit zrnitou žloutkovou massou.

Hypofysa popisovaného stadia leží již za ztluštěním chiasmatu (srovnej s obr. XI.) téměř pod distálním koncem infundibula; hypofysa jest dosud solidní, bez dutiny, mezi ní a spodinou mozku, k němuž se těsně přikládá, jest ostrá

*) Ač růst těchto mladých stadií děje se značně rychle, není přece možno nalézti nikde v pletivech mitos ani amitos, když bychom už chtěli tyto připustiti. Ovšem růst do plochy může se díti ztenčováním vrstev, jak se také skutečně děje, ale buněk musí nutně přibývati početně. Podobný nedostatek mitos v rostoucím embryu pozoroval jsem často u mihulí, žraloků, ryb kostnatých ba i v rozrýhovaných vajíčcích *Rhynchelmis*. kde buněk přece rychle přibývá. Za to pozoroval jsem v některých embryích žraloků spousty mitos najednou ve všech pletivech, v jiných zcela podobných embryích bylo lze sotva tu a tam nějakou nalézti; podobně shledal jsem u všech obratlovců, jichž vývoj jsem sledoval. Snad děje se dělení v určité periodě hromadně a nastupuje pak delší doba klidu, kdy růst děje se jen různým přemísťováním a změnou tvaru hotových právě buněk.

hranice stále patrna. Představuje vlastně dosud hypofysa dlouhý solidní pruh buněčný, který sahá od infundibula téměř až k trhající se přepážce ústní.

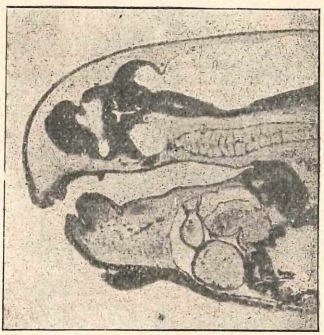
Řez nepatrně starším individuem, jehož rozdíl délkový nelze téměř ani přesně stanoviti, předvádí obr. XIV.; přepážka ústní jest již protržena a zbyl z ní jen dorsální do světlosti vyčnívající okraj jakožto hranice mezi ekto- a entodermovou částí proximální zažívací roury; tato dorsální část jevila se u předchozích stadií jako nejsilnější z celé ústní přepážky a také nejdéle se udržela. Nepatrně dále vzadu, za zbytkem přepážky, pozorujeme na obr. XIV. ve spodní stěně zažívací roury ostrý zářez — krátkou to rýhu hypobranchiální, z níž na sousedních řezech vyrůstá solidní thyreoidea jako pruh buněčný, sáhající až ku stěně dutiny pericardialní. — Hypofysa — na vyobrazeném řezu tangenciálně zasažená — mezi mozkem a faryngovým epithelem jako malý ostrůvek ležící, nedosahuje již tak daleko ku přídě, jako u stadia mladšího, a nabývá poznenáhlu tvaru spíše ellipsoidu než pruhu jsouc stále solidní. U těchto stadií pod 5 mm délky nelze dosud žádných zvláštních ústních tykadlovitých orgánů pozorovati.

U stadií *Pelobates fuscus*, která dosáhla délky 5 mm, při okraji úst tvoří se již horní i dolní pysk v podobě ostrého a oválného výstupku; v oblouku za horním pyskem jest viděti dva malé hrbolky, které při silném zvětšení podobají se dvěma tupým kuželům. Na jiných řezech možno takovýchto útvarů nalézti více; jsou to ektodermální základy tykadel ústních, které se jak ve svém základu tak i ve stavu pozdějším velmi podobají ústním tykadlům *Ammocoeta*.

U starších individuí nalézáme tyto základy ovšem stále větší, neb se prodlužují; vznikající tak ústní tykadla mají v dutině ústní larev pravidelné rozestavení, které v dalším bude popsáno.

Z četných starších stadií, u nichž vesměs nacházím podobné poměry, volím k popisu ona, která dosáhla délky 15 mm a jsou asi tři týdny stará. Řezy proximální částí hlavy zastihují horní i dolní část zobáku, na němž proces rohovatění již značně daleko postoupil, dále příčné lištny s rohovitými zoubky, určovací to znak larev žabích, a papilly

lemující proximální pole hlavové kol otvoru ústního. Jeden z těchto řezů předvádí obr. 15; tmavý obloučeк uprostřed jest úplně zrohovatělý přední konec dolní části zobáku, veliký oblouk nad tímto jest rovněž zrohovatělá horní část téhož. Čtyři tmavé pruhy dole jsou zasažené lištny s rohovitými zoubky, částečně viditelnými v pravém proužku. Proces rohovatění všech těchto částí jest značně složitý a bude vyžadovati zvláštní práce, jíž údaje Schulzeovy (14), Gutzeitovy (29) a j. mohou býti podstatně doplněny na základě nových method a teničkých řezů, pročež nebudu se o něm zde šířiti. Pod lištnami patrna jest řada proťatých, výše zmíněných papill. Papilly ty podobají se svou stavbou tykadlům, která budou jako zvláštní útvary ústní popsána, jsou však vesměs zcela krátké. Mimo z dvojvrstevného epithelu složeny jsou tyto papilly z řídkého mesenchymu. V četných z nich možno silnými zvětšeními zjistiti kapiláry krevní nabité krvinkami, i jest účel jich pravděpodobně asi týž, jako tykadlovitých ústrojů ústních, od nichž liší se umístěním a nepatrnou délkou. Na dalších řezech serie mizí ovšem tyto okrajové útvary a z uvedených ústrojů nalézáme jen distálnější části obou polovin rohovitého zobáku.



Obr. XIV. *Pelobates fuscus*, délka téměř 5 mm. Zbytek přepážky ústní na dorsální stěně; dole rýha hypobranchiální; pod mozkem nepatrná, úplně samostatná hypofysa.

Dolejší žlabovitá polovina přibývá rychle na objemu i jest možno všecky odstíny postupu rohovatění v pletivu jejím pozorovati. Konečně objevují se v částečně již zrohovatělém pletivu jasné ostrůvky obyčejného mesenchymu a po několika málo řezech obloukovité chrupavky mandibulární. Zrohovatělý povlak celého žlabovitého útvaru (srovnej s obr. 16.) má na těchto proximálních řezech serie zcela hladkou konturu a oba dorsální okraje vybíhají v tenké ostří, tvořené jemnou rohovinou, která jest v teničké lamelly a

vrstvičky jakoby rozloupána. Medianí šev symfysy obou chrupek jest na všech řezech velmi zřetelný. Na dalších řezech ubývá rohoviny a ostří dorsálních okrajů celého žlabu přechází v konturu zaoblenou, jen teničkou vrstvičkou rohoviny pokrytou; zde přestává také přesně obloukovitý tvar chrupavčitého skeletu dolního pysku, ježto každá jeho polovina stává se poznenáhla samostatnější a dolní její okraj uhýbá poněkud ventrálně.

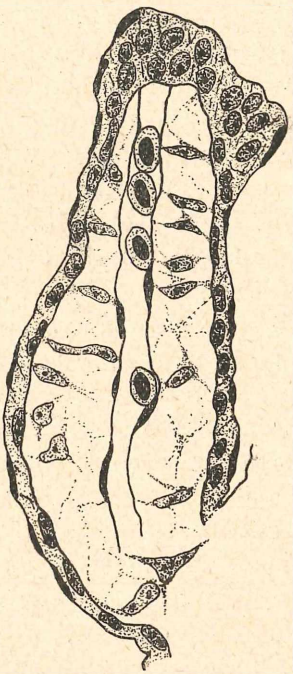
Konečně dospějeme k řezům, z nichž jeden jest zobrazen na obr. 16. Nezrohovatělý epithel vnitřní výstelky žlabovitého útvaru vysílá dovnitř prstovité výběžky; na proximálních řezech jsou zasaženy jako čtyři zcela souměrné útvary, dva po pravé a dva po levé straně. Na dalších řezech serie jest patrno, že některé z výběžků těch jeví tendenci po rozvětvení volného konce, jak na obr. 16. nahoře v pravo možno viděti. Tyto čtyři výběžky jsou hustě vyplněny mesenchymem a neviděl jsem (alespoň u těchto stadií) vstupovati cévy do jich nitra. Mimo tyto čtyři výběžky možno pozorovati ještě na dvou místech krycího vnitřního epithelu prozatím bochníčkovité zduřeniny, které jsou základem dalších podobných útvarů u starších stadií.

Blízko za místem krátkých a massivních tykadel (obr. 16.) dospějeme k místu, kde žlabovitý dolní pysk jest zavěšen na dorsální, resp. laterální stěně dutiny ústní, čímž ztrácí zde svou samostatnost. Dorsální jeho okraj přechází tenkou lamellou v mediální část vidlicovitého výběžku, který na obr. 16. po levé straně tohoto okraje jest ve své proximálnější části již viditelný. Dále na zad se tenký závěs rozšiřuje, až konečně žlabovitý útvar celou svou laterální, dříve volnou stěnou přikládá se k okolním pletivům. Tu jsme na serii v končině nozder a velikých tykadlovitých ústrojů ústních.

Obr. 17. znázorňuje pohled na ventrální prohlubinu úst v této končině; zasažena jsou tři tykadla vyrůstající ze spodiny a mimo to ještě konec podobného útvaru dále vzadu ležícího. Ježto jsou tyto ústroje různě ohnuty, není žádný z nich protat v celé své délce, nýbrž jen částečně. Počet těchto tykadel jest nepatrný; obyčejně nalezl jsem čtyři.

Tykadla této končiny jsou zhusta vidličnatě rozvětvena, neb jeví tendenci po rozvětvování. Na četných praeparátech

jest viděti na konci těchto ústrojů oblé hrbolky, prvé to stopy rozvětvení v těchto místech. Obr. 18. předvádí dvě tykadla z této skupiny proti sobě mířící; levé z nich jest vidlicovitě rozděleno, ač není v celé své délce zastiženo, ježto zahýbá se na zad. Ku bližšímu seznání stavby těchto tykadel nutno užíti silných zvětšení, i spatřujeme nákres jednoho z nich na obr. XV., který jest zhotoven při Zeissově immersi 1·5 mm a kompensačním okuláru č. 6. U base tykadla přechází obyčejný epithel ústní v jeho stěnu. V epithelu možno rozeznati zřetelně dvě vrstvy, které ho skládají; jádra vnější vrstvy jsou plochá, temně haematoxylinem zbarvená oproti velikým a jasně zbarveným jádrům vrstvy spodní. Vyobrazené tykadlo zahýbá zase nazad, i jest na jeho konci epithel zasažen plošně, proto jest zde množství jader viditelno. Vnitřek celého válcovitého ústroje jest jen velmi řídce vyplněn mesenchymovými buňkami a při silných zvětšeních možno viděti, že asi středem jeho prochází jemná kapillára ku jeho konci. Tato cévka má stěny velice útlé a proto tam, kde není právě naplněna buňkami krevními, uchází snadno pozornosti; ve stěně kapilláry lze zjistiti malá, plochá jádra pojná, jichž dlouhá osa sleduje ovšem směr cévky. Na obr. XV. jsou tato jádra v počtu pěti nakreslena, uvnitř cévky pak vidíme čtyři krvinky. Mesenchym tykadla, jak již řečeno chudý, vykazuje zvláštní uspořádání: t é m ě ř v š e c k a j á d r a l e ž í v t y k a d l u p ř í č n ě, což dobře kontrastuje s jádry stěny kapilláry (nejdelší jádro mesenchymové na obr. XV. přikresleno jest z řezu sousedního). Plasma mesenchymových buněk, v nepatrném množství přítomná, rozvětvena



Obr. XV. — *Pelobates fuscus;* řez ústním tykadlem s cévou uprostřed; příčná poloha buněk mesenchymových.

jest v prostoru tykadla jako velmi řídká síť, jíž buňky navzájem kommunikují; tato síť jest jen při silném zvětšení patrná. Vidíme, jak na obrázku částečně jest zřejmo, že mesenchymové buňky upínají se jedním koncem ku epithelové stěně téměř dutého orgánu, druhým koncem pak ku stěně centrální kapilláry, proto poloha jader mesenchymových jest téměř všude příčná a nikoliv rovnoběžná ku dlouhé ose tykadla, což na některých řezech možno konstatovati téměř bez výjimky. Cévka jest takto udržována ve své poloze.

Právě popsaná tykadla na spodině proximální části dutiny ústní jsou největší ze všech, která se v této době u *Pelobates* objevují; jsou také často rozvětvena, někdy přesně vidlicovitě (obr. 18.). Ze všeho jest zřejmo, že popisované ústní tykadlovité ústroje u mých exemplářů nacházejí se ještě ve svém vývoji. U starších exemplářů jest počet i velikost jejich větší. Ve zvlášť mohutně vyvinutých tykadlech mých mladých stadií shledávám, že cévka nejen vchází do jejich nitra, nýbrž zatáčí se v distálním konci a vrací se zpět, takže na příznivých řezech nacházíme dvě cévky vedle sebe (srovnej s obr. VII. *b* tykadla *Ammocoeta*); v distálním konci pak shledáme kruhovitý průsek ohybu. Kde nejsou právě krvinky v tykadle přítomny, ucházejí tyto podrobnosti snadno pozornosti pro jemnou stavbu kapillár.

Pokračujeme-li na serii dále nazad za řezem, kterému odpovídá obr. 17., pozorujeme následující: asi v končině nozder nabývá na řezu dutina ústní tvaru přibližně písmene *T* se širokým ramenem vertikálním a ještě širším horizontálním. Spodina ramene vertikálního, tedy spodina úst jest dorsálně vyklenuta, tak že má na řezu tvar přesného polokruhu. Jest úplně hladká, bez tykadel. Za to nad ní s laterálních stěn ční do nitra několik málo tykadel zcela podobných oněm proximálním na spodině samé (obr. 17.). Se stropu ústní dutiny vyrůstá přesně uprostřed nový tykadlovitý výrůstek, mířící ventrálně a jevící tendenci po rozvětvení. — Na řezech dalších, přibližně v končině Jacobsonova orgánu, není žádných tykadel a uvedený tvar ústní dutiny se poznenáhla mění rozšiřováním se spodní partie, i nabývá na řezu tvaru přibližně čtvercového. Ventrální, jednoduše vypouklý val pro-

ximální spodiny ústní změnil se rovněž; jeho dorsální partie má nyní tvar sedla ventrálně prohloubeného. Mesenchym tohoto sedlovitého útvaru jest nápadně hustý, jeho laterální okraje jsou zahnuty dorsálně. Mediálně pak od těchto vztýčených okrajů vyrůstá po každé straně po tykadlovitém výrůstku, který má tvar poněkud odchylný, spíše kyjovitý; cévky možno v těchto přívěscích zjistiti.

Další řezy blíží se k vyústění kanálů nosních choanami. V těchto místech, při choaně, vyskytují se opět teničké tykadlovité výběžky, které však na sagittálních řezech lépe lze pozorovati.

Asi na osmém řezu za choanami (tloušťka řezů 12 μ) počíná se objevovati na řezech průsek zvláštní příčné řasy, která napjata jest těsně pod klenbou dutiny ústní. Na některých praeparátech vlastně již dříve jevily se v příslušném místě průseky několika málo tykadel z řasy oné vyrůstajících a do předu namířených (obr. 19) jako malé ostrůvky. Příčná řasa sama jest protažena poněkud ku předu, tak že řezy zasahují nejdříve její přední okraj než dospějeme ku inserci řasy na laterálních stěnách. Inserci tuto spatřujeme po jedné straně na obr. 20; na levé straně téhož obrázku patrny jsou na přechodu stěny laterální v dorsální dvě tmavé vyvýšeniny, jakési pupeny, základy to nových tykadlovitých přívěsků. Příčná řasa jest různě vzdálena od klenby ústní, i jest na některých praeparátech prostor mezi ní a klenbou dosti objemný (obr. 20.), kdežto jinde přimýká se těsně ku klenbě (obr. 21.). Distálně přechází řasa ve klenbu samu, oddělujíc tedy jakýsi vzadu slepě uzavřený divertikl dutiny ústní.

Popsaná příčná řasa jest nositelem vyvinutých i tvořících se tykadel, která jsou částečně orientována dorsálně, tedy do slepého divertiklu dutiny ústní, částečně směrem ku předu; prvá jsou viditelna na obr. 22., druhá na obr. 19., v obou případech jsou však jen části neb průseky tykadel patrny. — V končině příčné řasy tvoří se u popisovaných stadií také z laterální stěny zatím krátké základy podobných tykadlovitých přívěsků a to zcela souměrně.

Vraťme se ku poměrům ventrální stěny dutiny ústní, kterou jsme na čas opustili po popsání sedlovitého útvaru s krátkými tykadlovitými výrůstky. Postranní zdvižené okraje

sedla udržují se na dalších řezech za choanami jako oboustranné vyvýšeniny spodiny úst, která zatím poznenáhlu změnila svůj tvar. Jeden z řezů, který zároveň zachycuje proximální volný konec přičné řasy dorsální, vidíme na obr. 21.: z obou postranních vyvýšenin ventrálních činí směrem vzhůru několik dalších tykadel, tvořících tedy dvě skupiny na ventrální stěně. Tato tykadla jsou u popisovaného stadia krátká a spíše tvaru kuželovitého, avšak těsně za nimi trčí dvě další laterálně vyhnutá, zcela souměrně uložená a dlouhá tykadla. Tato leží již za dorsální příčnou řasou; konečně jim podobnou a na týchž místech vyčnívající nacházím ještě na řezech, které zasahují proximální části očí.

Sagittální řezy potvrzují úplně popsané přesné rozdělení tykadel ústních. Vidíme zde tykadla proximální v končině rohovitého zobáku i tykadla sedlovitého výstupku ventrálního. Za mezerou mezi horním a dolním pyskem, která má na řezu tvar přibližně písmena *s*, pozorujeme jedno tykadlo ventrální ku přídě namířené. Dále vzadu na spodině úst leží sedlovitá (na příčném řezu) vyvýšenina s tykadly. Nejdále vzadu jest vztýčena téměř vertikálně lamella, chránící vstup do dutiny žaberní (těsně před ní spatřujeme pranepatrný základ nově se tvořícího tykadla jako tmavý bod). Na dorsální části kontury ústní vyúsťuje dovnitř choana, jejíž ústí jest trubicovitě protaženo, zabíhá hluboko ventrálně a vývod sám míří proximálně. Za touto choanou viděti jest z dorsální stěny úst vyčnívající, do předu zahnutý, prstovitý výběžek, který při použitém malém zvětšení zdá se býti pouhým tykadlem ústním. Jest to dříve popsaná dorsální řasa (srovnej obr. 21.), oddělující malý slepý divertikl dutiny ústní. Obr. 23. předvádí tři tykadla ventrální distální skupiny při silnějším zvětšení.

Orgány ústní u *Pelobates*, které nazývám tykadly, byly popsány Schulzem (13) jako papilly pouze dle svého vnějšího tvaru a rozestavení; histologické složení není v jeho práci respektováno. Rozestavení a počet tykadel v Schulze-ově studii nesouhlasí s tím, co má práce uvádí. Schulze popisuje poměry u dorostlých larev, které jsem neměl k disposici. Chtěl jsem poukázati, že tykadlovité orgány vznikají v určitém pořádku a umístění v dutině ústní a nepochybuji, že tvoří

se během dalšího vývoje u větším počtu a i na jiných místech, než u svých exemplářů uvádím. Ostatně SCHULZE konstatuje, že počet a uspořádání papill u všech prozkoumaných jedinců nesouhlasí a že i velikost jednotlivých orgánů není stejná. Autor rozeznává na stropě dutiny ústní přední, střední, postranní a zadní pole (Vorderfeld atd.) s různým, přibližně ale konstantním počtem papill; jeho zadní pole nenese již vůbec žádných a přechází do oesofagu. Podobně na dně úst rozeznává střední a postranní pole, toto s velkým počtem papill. V předu leží jeho »Zungenfeld«: na základu jazyka nalézá SCHULZE dvě konické úzké papilly a z pobočních stěny téže končiny vyrůstají do nitra dutiny tři až čtyři podobné útvary. Dále nalézá zcela distálně na hrázce žaberní (Kiemendeckplatte, »Velum« GÖTTE) pět prstovitých papill na volném okraji tohoto orgánu.

U larev *Bufo* (nepochybně *variabilis*) shledal jsem velmi podobně stavěné orgány v dutině ústní jako u *Pelobates*. Zvláště mohutná a silná jsou ona dvě tykadla, sedící proximálně stranách sedlovitého výstupku spodiny ústní. Také rozestavení tykadel jest u *Bufo* velmi podobné onomu u *Pelobates*. A u jiných druhů *Anur* jsou asi rovněž podobné poměry. Jaký jest asi význam ústních tykadel larev *Amphibií*? Mám za to, že přítomnost kapillár v jich nitru charakterisuje je jako akcessorní orgány dýchací, tak jako i tykadlům *Ammocoeta* a jeho velu přičítám vydatnou činnost respirační. A snad i v postchoanálním velu *Myxin* možno spatřovati orgán podobného významu. Jeho stavba zdá se méně než u ostatních popsaných zástupců nasvědčovati respirační funkci, ale jiný jeho význam jest nesnadno myslitelný. Všecky v této práci popsané ústní orgány nalézají se na exponovaných místech, kde stálým přístupem čerstvé vody jest okysličování krve v cévnatých přívěscích velmi snadno možné.

Jest zajisté zajímavo, že jsem tykadlovitých orgánů ústních nenalezl u larev Urodel (*Molge*); ani malé ani vzrostlé larvy nemají jich vůbec. U velkých larev postupným modellováním hlavy jest lumen dutiny ústní v klidu redukováno na úzkou horizontální štěrbinu; mohutný apparát jazykový a mandibulární činí dolní partii tlamy velmi ob-

jemnou. V tak úzké prostoře, jako jest lumen ústní těchto velikých larev, není dostatek místa pro vyčnívající tykadlovité útvary. Jak prostorná ve směru vertikálním jsou naproti tomu ústa larev Anur, vyplývá z obr. 16., 21. Nedostatek tykadel u Urodel dal by se tedy snad vysvětliti nepříznivými poměry prostorovými. Avšak u malých larev se tohoto výkladu použíti nedá, ježto u nich jest tlama dosti prostorná i ve směru vertikálním, třebas ne v té míře jako u Anur. Nedostatek ústních tykadel u Urodel zdá se mi podporovati můj názor o jich významu jakožto ústrojů dýchacích: okysličování žaberní jest zajisté daleko vydatnější u larev Urodel, které jsou opatřeny vnějšími žaberními keříky; tyto jsou ve stálém styku s čerstvou vodou, i není potřebí akcessorních orgánů dýchacích. Proud vody v žaberní dutině larev Anur nemůže však býti příliš vydatný, jsa z předu omezen čelistmi a hrázkou žaberní, ze zadu pak nepatrným otvorem, který zbyl po obrostení a uzavření vnitřních žaber. Vyskytnutí se tedy dodatečných pomocných orgánů respiračních jest speciellně u larev Anur snadno vysvětlitelné a pochopitelné.

I u jiných zástupců vertebrátů známy jsou orgány podobné vláknům, čípkům neb papillám, které — ač nejsou pravými žabrami — přece mají, jak uznáno jest, význam ústrojů dýchacích. Tak u želv *Trionychidae* tvoří oesofageální sliznice četné cévnaté výběžky a lalůčky, které umožňují zvířeti okysličování krve za jeho pobytu pod vodou. Také u samců dvojdyšných ryb *Lepidosiren paradoxa* existují papilly na zadních okončinách, které vyrůstají v době rozmnožování v mohutné, krví naplněné třepení, které nepochybně má význam dýchací a umožňuje samcům dlouhý pobyt pod vodou, kterého jest třeba ku hlídání vajec těchto ryb, uložených v chodbách ve dně vod, kde ryby tyto žijí. Vláknité třepení *Lepidosirena* funguje pouze temporárně a atrofuje, jakmile jest zvíře zbaveno této své rodičovské služby.

V Praze, v únoru 1923.

LITERATURA,

1. MÜLLER. Joh, Vergleichende Anatomie der Myxinoiden, der Cyclostomen mit durchbohrtem Gaumen: Abh d. Kgl. Akad. Wiss. Berlin 1836.
   Schluss d. vergleichenden Anatomie der Myxinoiden; ibidem 1845 (Ref. aus Bronn).
3. PARKER, On the skeleton of the Marsipobranch Fishes; Proc. R. Soc. London 34.
4. RETZIUS G., Das Gehirn und das Auge von Myxine. Biologische Untersuchungen Stockholm 1893.
   Ueber den Bau der Haut von Myxine glutinosa, ibidem 1905.
6. BRONN, Klassen und Ordnungen des Tierreichs, Leipzig 1905.
7. BASHFORD DEAN, Notes on Japanese Myxinoids. — Journ. Coll. Sc. Imp. Univ. Tokio 1904 (ref. z Bronna).
8. BEHRENDS, G, Ueber Hornzähne. Halle 1892.
9. BEARD, I, Morphological Studies. The Nature of the teeth of the Marsipobranch Fishes Zoolog. Jahrb. Bd. III. Jena 1889.
10. NEUMAYER, L., Zur vergleichenden Anatomie des Kopfskelettes von *Petromyzon Planeri* und *Myxine glutinosa*. Sitzungsber. Morph. Phys. Bd. 13. München 1888. (Ref. z Bronna).
11. AYERS-JACKSON, Morphology of the Myxinoidei. Journ Morph. Vol. 17. 1901.
12. CORI, K. J., Das Blutgefässystem des jungen *Ammocoetes*. Arbeiten d. zool. Inst. Wien 1906.
13. SCHULZE, Über die inneren Kiemen d. Batrachierlarven. Abhandl. d. K. Akademie d. Wissensch. Berlin 1883.
14. SCHULZE, Über cuticulare Bildung und Verhornung. Arch mikr. Anat Bd. V. 1869.
15. STENDELL, Die Hypophysis cerebri. Lehrbuch d. vergl. mikr. Anat. d. Wirbeltiere von A. Oppel, Jena 1914.
16. GÖTTE, Alex., Die Entwicklungsgeschichte der Unke. Leipzig 1874.
17. HALLER, B., Untersuchungen über die Hypophyse und die Infundibularorgane. Morph. Jahrb. Bd. 25.
18. KUPFFER, Studien zur vergleich. Entwicklungsgeschichte des Kopfes der Cranioten. München 1893. Heft 1.
19. Die Deutung des Hirnanhanges. München 1894.
20. Die Morphogenie des Centralnervensystems (HERTWIGS Lehrbuch d. vergl. u. experim. Entwickelungslehre d. Wirbeltiere 1906).
21. Über die Entwickelung von Petromyzon Planeri, Sitz. Ber. d. K. Bayer. Akad. d Wissensch. München 1888.
22. KOLTZOFF, Entwickelungsgesch. des Kopfes von Petromyzon Planeri. Bull. Soc. Imp. d. Natur. de Meycon 1901 (ref. ze Šimkeviče).
23. ŠIMKEVIČ, Lehrbuch d. vergleichenden Anatomie der Wirbeltiere Übers. v. MAIER-SUKATSHOFF. Stuttgart 1910.

24. Froriep, Über Anlagen von Sinnesorganen am Facialis, Glossopharyngeus und Vagus, über die genetische Stellung des Vagus zum Hypoglossus und über die Herkunft der Zungenmuskulatur. Arch. f. Anat. u. Physiol. 1885. (anat. Abt.).
Legros, Développement de la Cavité buccale de l'Amphioxus lanceolatus. Arch. d'Anat. microscop. 1898.
26. Wiedersheim, R., Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. Jena 1910.
27. Boecke, I., Über das Homologon des Infundibularorganes bei Amphioxus lanceolatus. Anat. Anz. Bd. XXI.
28. Über das Mesektoderm der Ganglienleisten und die Entwicklung der Hypophyse der Muraenoiden, Pet us Camper 1904
29. Gutzeit, Die Hornzähne der Batrachierlarven. Zeitschr wiss. Zool. Bd. 49.
30 Blomfield, I., The Thread-cells and Epidermis of Myxine. Quart. Journal of Micr. Science, Vol. 22.
31. Kölliker, A., Über den Inhalt der Schleimsäcke der Myxinoiden u. die Epidermis der Neunaugen. Würzb. Naturwissenschaftl. Zeitschrift I. Band. (ref. z *Retzia*).

VÝKLAD OBRÁZKŮ.

Obr. 1. — *Myxine glutinosa*; příd a těla ventrálně rozříznutá a otevřená, pohled na dorsální stěnu dutiny ústní. Kanálem nosním prochází sonda, patrny jsou cirry nosní, zuby jazykové i zub patrový. Hrot sondy leží na trubicovitém »velu«.

Obr. 2. — Příčný řez chrupavčitou tyčinkou skeletu velárního *Myxine glutinosa*; na periferii chrupky pojivný obal.

Obr. 3. — Část velární epidermis *Myxine glutinosa*; dvě veliké jasné buňky vystupují právě z povrchu epidermis, levá z těchto chová dosud veliké, zřetelné jádro.

Obr. 4. — Týž objekt; veliká jasná buňka se srdčitým jádrem otevírá se právě na povrch epidermis; v levo od ní zvonovitá dutina obsahující ještě část bývalé buňky. Ve spodních vrstvách epidermis menší, tmavší buňky.

Obr. 5. — Řez velem *Myxine glutinosa*; po levé straně pojivo a cutis; v pravo pohárovitá dutina po vystěhovavší se buňce.

Obr. 6. — *Ammocoetes* (*fluviatilis*) 5 mm dlouhý; sagittální řez hlavou s prvými základy ústních tykadel.

Obr. 7. — *Ammocoetes* (*Planeri*), délka přes 10 cm; patrna jsou dvě tlustá tykadla laterální (po levé straně obrázku) a dvě tenká tykadla ventrální; světlé body v nich jsou světlosti cév. Mimo to řez zachycuje velké množství basí i rozvětvených konců sousedních tykadel.

Obr 8. — *Ammocoetes* (*Planeri*) přes 10 cm dlouhý; řez v končině očí zasahuje ventrální tykadla v pravidelném rozestavení; nahoře průseky proximálních konců tykadel distálněji ležící vertikální hrázky.

Obr. 9. — *Ammocoetes* (*Planeri*) přes 10 cm dlouhý; inserce vertikální hrázky na ventrální stěnu; světlá místa v hrázce jsou průseky cév; pod ní svalstvo objaté vrstvou podpůrnébo pojiva.

Obr. 10. — Týž objekt; sagittální řez oběma pysky a mediani hrázkou; tykadla na pysku horním, dolním i na přídě terčovité rozšířeniny hrázky; světlá místa v přídě této jsou průseky sítě cévní u base tykadel se rozprostírající.

Obr. 11. — Týž objekt; úzký laterální okraj hrázky; mezi ním a dolním pyskem zasažen laterální okraj úst s tykadly ve své ventrální části.

Obr. 12. — Týž objekt; řez proximální vydutou částí vela; mediální a laterální partie křídel s dorsálními úpony; hlavním složivem částí laterálních jest svalstvo, mediálních tuhé pojivo, které tvoří tlusté opěrné desky; nepatrná souvislost ventrálních částí partie mediální a laterální (podrobněji v textu).

Obr. 13. — Řez prázdnou velární »ampullou« *Ammocoeta* (*fluviatilis*) 1 cm dlouhého; vnější povrch mediální stěny pokryt kuželovitě protaženými buňkami čímž na řezu vzniká zubatá kontura; uvnitř dutiny prázdné cévy.

Obr. 14. — *Ammocoetes (Planeri)* přes 10 cm dlouhý; řez ventrálním koncem proximální laterální části křídla velárního; úpon pramenů předního laterálního velkého svalu k povrchu vela; mezi nimi tu a tam kapilláry krevní.

Obr. 15. — *Pelobates fuscus*; řez přídou hlavy, dole zasaženy papilly, nad nimi lištny, nahoře obě poloviny rohovitého zobáku.

Obr. 16. — *Pelobates fuscus*; řez žlabovitou spodinou dutiny ústní, z jejíhož vnitřního epithelu tvoří se různé tykadlovité přívěsky.

Obr. 17. — Řez velikými tykadly na spodině proximální části dutiny ústní u *Pelobates fuscus*.

Obr. 18. — Řez dvěma tykadly téhož druhu; jedno jest vidlicovitě rozděleno.

Obr. 19. — Řez přídou hlavy *Pelobates fuscus*; tři body v dutině ústní jsou průseky proximálně namířených tykadel příčné řasy ústní; spodina úst nese dvě laterální kuželovité (na řezu) vyvýšeniny; na pravé z nich zasažena base ventrálního tykadla,

Obr 20. — Týž objekt; řez distálněji ležící než na obr. předešlém, poněkud šikmý, tak že zastižen jest jen jednostranný úpon příčné ústní řasy na laterální stěnu.

Obr. 21. — Týž objekt; řez dorsální příčnou řasou (jedno tykadlo činí do dorsální štěrbiny, jedno jest proťato po straně); ventrálně laterální skupiny distálních velikých tykadel.

Obr. 22. — Týž objekt; poněkud šikmý řez dorsální příčnou řasou s basemi tykadel a dorsálním divertiklem dutiny ústní.

Obr. 23. Tykadla ventrální distální skupiny u *Pelobates fuscus* ze řezu sagittálního.

Obrázky byly při reprodukci značně zmenšeny.

Résumé.

Sur quelques organes situés dans la partie proximale du tube digestif des Anamnia.

Myxine glutinosa.

Derrière l'orifice interne nasal chez *Myxine glutinosa* on trouve un organe singulier (velum PARKER, fig. 1). Il représente une lamelle ferme, qui est suspendue par sa partie médiane (fig. I) au toit de la bouche; les bords latéraux de cette lamelle sont sur la préparation dorsalement recourbés de sorte que l'organe ressemble à un tube se rétrécissant en arrière.

Le squelette du velum se compose d'un réseau de petites branches de cartilage rouge (fig. I — IV); le nom de »pharyngobranchialia« donné par PARKER aux principales branches longitudinales (fig. I) n'est pas très juste. Les branches médianes sortent-contrairement à la supposition de PARKER — des branches latérales et ne sont pas isolées (fig. II, III). L'arc de liaison proximal donne naissance à trois (non deux) branches, qui avancent dans la direction proximale (fig. III), la moyenne de ces branches se dirigeant vers la partie suspendant le velum. Les ramifications de l'arc distal sont fines et élégantes (fig. IV), le bord distal du velum n'a que trois lobes (lobe moyen et deux lobes latéraux pointus).

La fig. 2 montre la coupe transversale de la branche cartilagineuse du squelette du velum. La substance intercellulaire est exiguë, les capsules cellulaires à la périphérie sont petites, étroites et sont souvent dépourvues de cellules. Au centre (fig. 2) la coupe traverse la paroi des capsules au centre du plan.

L'épiderme, sous lequel on trouve la cutis formant des couches et garnie de vaisseaux, est la plus intéréssante des autres parties composant le velum. Il y a dans l'épiderme: des cellules de deux sortes, petites et grandes claires; les petites sont semées à travers les parties sombres des photographies (3, 4) et sont enveloppées d'une matière ressemblant à la corne, cette matière formant à la périphérie une bordure sombre et haute.

La seconde espèce des cellules d'épithèle sont les cellules grandes et claires (fig. 3, 4) ayant — pour ainsi dire — les plasma et noyau dégénerés, mais gardant toujours le caractère de cellule. La forme de ces cellules est très différente; les noyaux raboteux étant sujets à la fragmentation il existe des cellules présentant jusqu'à six fragments. Les figures mitotiques n'existent point, mais quelques cellules sont divisées par une cloison très subtile en deux parties ordinairement d'inégale étendue et renfermant un »noyau«. Selon toute probabilité c'est un cas de la division indirecte des cellules incapables de continuer à vivre. Le caractère des grandes cellules sortant de l'épithèle avec le noyau ne subit aucun changement (fig. 3, 4). La périphérie de l'épiderme d'où les cellules sont sorties, présente des cavités en forme de gobelet (fig. 5); il semble que les dites cellules se développent des petites cellules, les transitions des petites cellules rondes en cellules grandes et hautes pouvant être démontrées.

Ammocoetes.

Les tentacules de la bouche se forment comme de simples bosses de l'ectoderme (fig. 6) dans une sorte de cercle placé à la naissance de la bouche et bientôt les cellules du mésenchyme aussi bien que les vaisseaux font leur entrée dans ces tentacules (fig. VI). Les tentacules présentent des ramifications fourchues à l'origine (fig. VI) et très compliquées dans la suite. Les vaisseaux pénètrent même dans les plus petites ramifications des tentacules et les coupes strictement transversales pratiquées à travers ces tentacules font paraître deux vaisseaux dont l'un afférant du sang et l'autre efférant (fig. VII *b*). Plus tard les tentacules se développent sur l'étendue presque tout entière de la lèvre supérieure (fig. VII *a*), ensuite en grande quantité sur la lèvre inférieure (fig. 7) où ils sont régulièrement distribués dans la partie distale.

La surface proximale de l'élevation médiane présente également chez les exemplaires adultes une foule de tentacules ramifiés (fig. 10). La partie proximale de l'élevation située à la base des tentacules est entrelacée de vaisseaux

pénétrant et se ramifiant dans toutes les tentacules. L'élevation médiane se rétrécit latéralement dans une lamelle mince (fig. 11) et descend distalement (fig. 9) en atteignant la glande thyroïde et en conduisant l'artère et la veine linguale dans la partie proximale.

Les tentacules à la fois grandes et ramifiées des Ammocoetes adultes encombrent considérablement l'entrée de la cavité du velum (fig. 10) et étant richement vascularisées et en rapport continu avec l'eau fraîche, ils aident puissamment à l'oxydation du sang qu'ils contiennent.

Le velum de l'*Ammocoetes* est chez les exemplaires adultes un organe très compliqué et, sur les exemplaires frais, il ressemble à deux membranes proximalement convexes (fig. VII *a*). Dans les coupes situées derrière la partie proximale convexe on peut voir, que le velum est inséré au plafond de la cavité buccale au moyen de deux suspensoirs (fig. 12) La partie latérale est caractérisée par le grand muscle antérieur, qui traverse le suspensoir depuis la région praeotique, la partie médiale est caractérisée par un tissu tenace, qui compose les plaques d'appui (fig. 12) et sert à l'insertion du second muscle antérieur. Les arêtes dorsales de ces plaques séparent une sorte de diverticle dorsal subchordal de la cavité buccale. Dans les coupes suivantes la partie médiale perd la connexion avec le plafond de la cavité buccale et s'abaisse en arrière, son bord libre dorsalement recourbé étant dans la longue série de coupes (80 coupes 12 μ) enflé en forme d'ampoule (fig. VIII *a*). Des muscles dans ces »ampoules« pénètrent par la base étroite se ramifiant à l'intérieur et formant un système musculaire compliqué (fig. IX). Ces muscles servent probablement à contracter les ampoules pour faire circuler la grande quantité de sang, qu'elles contiennent. Ce n'est que dans les ampoules, qui sont justement vides, que les vaisseaux sont visibles (fig. 13), ailleurs tout est dissimulé par le sang. La surface médiale des ampoules étant parsemée de cellules coniques, le bord des ampoules est dans le coup dentelé (fig. 13). Ce bord dentelé semble avoir pour tâche d'empêcher les surfaces contigues de glisser, quand les ampoules (les bords médiaux du velum) se serrent pendant la pulsation du velum pour en-

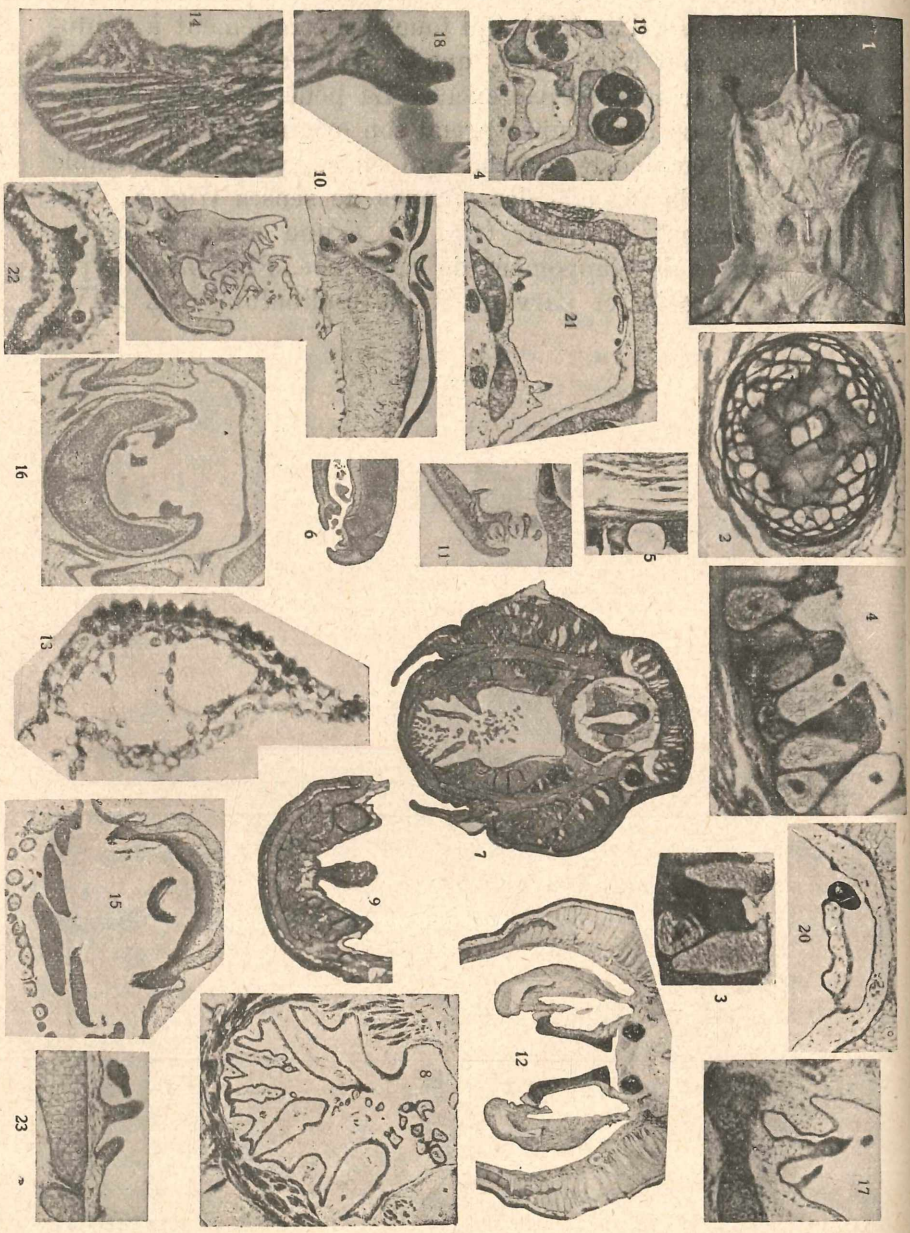
traver le découlement de l'eau. Le suspensoir latéral du velum, devenu large, descend peu à peu distalement sur la paroi latérale de la cavité buccale; les ampoules disparaissent en même temps dans les coupes et la partie médiale du velum diminue de plus en plus (fig. VIII *b*); ici se trouve le suspensoir du velum déjà sous la gouttière péripharyngeale (»pseudobranchiale«) et sa principale matière est fournie par le troisième système musculeux pénétrant par arrière avec l'arteria spiraculi. En outre le velum reçoit du sang également du système du sang oxydé de l'aorta dorsalis. Vena veli dorsalis et vena veli ventralis emmènent le sang. A l'intérieur du velum les vaisseaux forment un réseau très compliqué; velum renferme aussi des sinus et des vaisseaux capillaires gagnant à travers les muscles la périphérie du velum. Il est sûr, que velum remplit non seulement les fonctions d'un appareil battant mécaniquement, mais qu'il facilite aussi considérablement l'oxydation du sang; la richesse de vaisseaux traversant velum ainsi que l'appareil de tentacules dépasse celle de n'importe quel organe sauf les branchies.

Amphibia.

Chez les Amphibia (*Pelobates fuscus*) se développent bientôt, dans la cavité buccale, les tentacules dont la disposition est au debut tout à fait réguliere: à l'entrée de la cavité buccale à la lèvre ventrale (fig. 16, 17), sur la lamelle dorsale transversale (fig. 21, 22) ainsi que sur la paroi ventrale distale (fig. 21, 23). Les tentacules sont plus tard fourchus (fig. 18) et renferment de petites vaisseaux (fig. XV.), qui dans leur position sont fixées par des cellules du mésenchyme transversalement étendues entre la paroi du tentacule et les vaisseaux (fig. XV). Le nombre des tentacules augmente plus tard (Schulze 13). Etant donné que les tentacules renferment des vaisseaux et qu'ils sont en contact continuel avec l'eau fraîche, il semble qu'ils remplissent le rôle d' organes de la respiration accessoires.

Chez les Urodela (Molge) les tentacules font défaut attendu que l'oxydation du sang dans les branchies externes de ces amphibiens est en soi-même beaucoup plus abondante que dans les branchies internes des anoures.

L'hypophyse des anoures pénètre avant l'invagination de la bouche entre le cerveau et l'entoderme sous forme d'*une bande celluleuse* (fig. XII), qui touche si étroitement à l'entoblaste proximal (fig. XIII), que la prolifération des cellules du dit entoderme n'est pas exclue. La pénètration de l'hypophyse ci dessus mentionnée prend son origine dans la couche interne de l'ectoblaste, couche, qui en cet endroit ressemble tout à fait à la placode des organes de senses (fig. X, XI). L'épaississement inférieur (fig. XI) a une certaine importance pour le développement de la bouche. Plus tard l'hypophyse se détache et parvient à l'infundibulum (fig. XIV).


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23

V

Zur Theorie der Teilbarkeit.

Von **K. Rychlík.**

Vorgelegt am 7. Mai 1923.

In dieser Abhandlung führe ich den Begriff der kommutativen Halbgruppe H ein (§ 2) und auf Grund dieses Begriffes definiere ich für die kommutative Gruppe G, welche aus der Halbgruppe H durch Quotientenbildung (§ 3) entsteht, die ganzen Elemente, die Teilbarkeit und alle mit diesen zusammenhängenden Begriffe. Die Teilbarkeit (§ 4) definerie ich nicht nur für die ganzen Elemente sondern für alle Elemente aus G. Ebenso führe ich neben dem größten gemeinsamen Teiler (g. g. T.) und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (k. g. V.) in H auch den g. g. T. und das k. g. V. in G ein und betrachte ihre gegenseitige Beziehung (§ 5, § 6, § 9). Setzt man die Giltigkeit des Axioms G. g. T. (§ 6) voraus, so zeigt sich eine weitgehende Analogie mit den Sätzen, welche für die rationalen bzw. die rationalen ganzen Zahlen gelten (§ 10). Aber viele Sätze, die nicht mehr gelten, wenn man den g. g. T. in H betrachtet, behalten ihre Giltigkeit, wenn man den g. g. T. in G in Betrachtung zieht (§ 7, § 8). Weiter behandle ich die unzerlegbaren und Prim-Elemente (§ 11), wobei der Begriff der in G teilerfremden Elemente gute Dienste leistet, die Darstellung durch Primelemente mit den dabei geltenden Eindeutigkeitsätzen (§ 12) und endlich die Gruppen, in denen noch das Axiom E. gilt (§ 13); in ihnen geht die Analogie mit dem Gebiete der rationalen Zahlen am weitesten. Unter den Beispielen (§ 14) wird eine Anwendung des Begriffs des g. g. T. in G auf die Theorie der algebraischen Zahlen angegeben. Endlich benütze ich diese Ergebnisse bei den Integritätsbereichen und Körpern (§ 15, § 16), wobei ich das Axiom A. (§ 15) und den Begriff des Maßes (§ 16) einführe.

Die Abhandlung soll als Grundlage einer späteren dienen, wo ich mich mit der Teilbarkeit in den algebraischen Zahlkörpern beschäftigen will.

---

§ 1. Betrachten wir ein System von Elementen, in dem die Gleichheit als eine reflexive, symmetrische und transitive Relation definiert ist. Es sei für die Elemente dieses Systems ein Kompositionsgesetz festgelegt, welches jedem Paare a, b von Elementen des Systems, ein Element ab desselben Systems, ihr Produkt, eindeutig zuordnet, d. h., es soll für $a=a'$, $b=b'$ auch $ab=a'b'$ sein.

Zwei Systeme mit Komposition werden wir isomorph nennen, wenn es möglich ist, ihre Elemente ein-eindeutig so auf einander zu beziehen, daß dem Produkte irgend zweier Elemente des einen Systems, in dem anderen wieder das Produkt der entsprechenden Elemente zugeordnet ist. Die Relation »isomorph mit« ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Ein System mit Komposition, die wir in diesem Falle Multiplikation nennen wollen, wird eine komnutative Gruppe genannt, wenn für die Komposition die Bedingungen erfüllt sind:

I. Das assoziative Gesetz $(ab)c=a(bc)$.

II. Das kommutative Gesetz $ab=ba$.

III. Sind a, b Elemente des Systems, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Element x, für welches $ax=b$ wird, d. h., ist auch $ax'=b$, so ist $x=x'$. Wir werden dieses Element $\frac{b}{a}$ oder b/a bezeichnen.

Setzen wir für irgend zwei Elemente a, b aus der Gruppe $a/a=1_a$, $b/b=1_b$. Dann ist $a1_a=a$, $b=b1_b$, also $(a1_a)b=a(b1_b)$; daraus folgt nach I und II: $(ab)1_a=(ab)1_b$ und nach III: $1_a=1_b$. *Für alle Elemente aus der Gruppe hat a/a denselben Wert*, den wir (Haupt-)Einheitselement nennen und mit 1 bezeichnen werden. Es ist $a.1=1.a=a$, $1.1=1$ und auch $a/1=a$, $1/1=1$.

§ 2. Ein System mit Komposition, die wir wieder als

Multiplikation bezeichnen werden, wird eine kommutative*) Halbgruppe genannt, wenn in ihm die Gesetze I und II gelten, während III durch III 1 und III 2 ersetzt wird,

III 1. Ist $ab = ab'$, so ist $b = b'$.

III 2. Es existiert ein (Haupt-)Einheitselement 1, für welches $a1 = a$ gilt, wenn a alle Elemente des Systems durchläuft.

Dazu genügt, daß zu jedem Elemente a aus dem System ein Element 1_a existiert, so daß $a \cdot 1_a = a$ ist. Ist nämlich $b \cdot 1_b = b$, so kann man durch die früher gemachte Erwägung beweisen, daß $1_a = 1_b$ ist.

Jede Gruppe ist auch eine Halbgruppe, aber nicht umgekehrt, wie das Beispiel der ganzen rationalen von Null verschiedenen Zahlen zeigt, wenn man als Komposition die gewöhnliche Multiplikation betrachtet. Eine Halbgruppe, die keine Gruppe ist, werden wir als eigentliche Halbgruppe bezeichnen.

Eine Halbgruppe von endlich vielen Elementen ist zugleich auch eine Gruppe. Wenn nämlich x alle Elemente der Halbgruppe durchläuft, so gilt dasselbe von ax, woraus III folgt.**)

§ 3. Setzen wir jetzt voraus, daß alle Elemente einer Halbgruppe H in einer Gruppe F enthalten sind. Betrachten wir alle Elemente der Gruppe F, die in der Form a'/a'', geschrieben werden können, wobei a', a'' Elemente aus der Halbgruppe H sind. Diese Elemente bilden eine Untergruppe G von F: Die Giltigkeit von I und II ist evident, die von III folgt daraus, daß $\frac{a'}{a''} x = \frac{b'}{b''}$ durch $x = \frac{b'}{b''}\frac{a''}{a'}$ erfüllt wird.

Steht eine Gruppe G zu einer in ihr enthaltenen Halbgruppe H in der Beziehung, daß jedes Element der Gruppe G als Quotient von zwei Elementen der Halbgruppe dargestellt werden kann, so werden wir sagen, daß die Gruppe aus der Halbgruppe durch Quotientenbildung entsteht.

*) Im Folgenden wird das Wort Gruppe und Halbgruppe immer eine kommutative Gruppe, bezw. Halbgruppe, bedeuten.

**) Sogar ein System mit Komposition von endlich vielen Elementen, in dem die Sätze I, II, III 1 gelten, ist eine Gruppe.

Eine Gruppe kann aus verschiedenen Halbgruppen durch Quotientenbildung entstehen. Setzen wir voraus, daß G aus H durch Quotientenbildung entsteht. Die Elemente aus G von der Form $1/a$, wo a ein beliebiges Element aus H bedeutet, bilden eine Halbgruppe H^{-1}, aus welcher durch Quotientenbildung wieder G entsteht. H ist dann und nur dann eine eigentliche Halbgruppe, wenn H und H^{-1} nicht identisch sind.

Vermittelst jeder Halbgruppe K kann man eine Gruppe G mit einer in ihr enthaltenen Halbgruppe H bilden, so daß G aus H durch Quotientenbildung entsteht und H mit K isomorph ist. Betrachten wir nämlich neue Elemente $\frac{a'}{a''}$, die den Paaren a', a'' von Elementen aus K zugeordnet sind, und definieren wir die Gleichheit und die Multiplikation auf folgende Weise:

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}, \text{ wenn } a'\,b'' = a''\,b' \text{ ist,}$$

$$\frac{a'}{a''} \cdot \frac{b'}{b''} = \frac{a'\,b'}{a''\,b''}.$$

Diese Elemente bilden eine Gruppe G, die Elemente von der Form $\frac{a}{1}$ eine Halbgruppe H, die mit K isomorph ist, und G entsteht aus H durch Quotientenbildung. Wenn man isomorphe Systeme als nicht verschieden betrachtet, so kann man K mit H identifizieren.

§ 4. Es sei eine Halbgruppe H gegeben, und eine aus ihr durch Quotientenbildung entstehende Gruppe G. Wir werden die Elemente aus H als ganze Elemente aus G bezeichnen. Dann können wir auch den Begriff der Teilbarkeit und alle mit ihm zusammenhängenden Begriffe einführen. Wir werden sagen, daß a durch b teilbar ist, wenn a/b ganz ist, d. h. ein Element aus H. Ist e und zugleich $1/e$ ganz, so werden wir e eine Einheit nennen. Zwei Elemente a, b sind assoziiert $a \sim b$, wenn a durch b und auch b durch a teilbar ist.

Von einem Elemente werden wir sagen, daß es wesentlich eindeutig bestimmt ist, wenn es alle mit einem bestimmten Elemente assoziierten und nur diese durchlaufen kann.

Wie wir im vorigen Paragraphen erwähnt haben, kann eine Gruppe aus verschiedenen Halbgruppen durch Quotientenbildung entstehen. Das Wort »ganz« wird also verschiedene Bedeutung bekommen, je nach der Wahl der Halbgruppe H, deren Elemente wir als ganz bezeichnen. Wo es nötig sein wird, werden wir also durch Hinzufügung der Worte »in Bezug auf H« kennzeichnen, daß wir die Elemente der Galbgruppe H als ganz gewählt haben.

Jetzt werden wir eine Reihe von Sätzen aussprechen, deren Beweise so einfach sind, daß wir sie nicht einmal anführen werden.*)

1. Die Relation »teilbar durch« ist reflexiv und transitiv.

2. Ist a teilbar durch b und k ganz, so ist ak teilbar durch b.

3. Ist a_1 teilbar durch b_1, a_2 durch b_2, so ist $a_1 a_2$ durch durch $b_1 b_2$ teilbar.

4. Ist a teilbar durch b, so ist $1/b$ teilbar durch $1/a$.

5. Da Produkt und Quotient von zwei Einheiten wieder Einheiten sind, so bilden die Einheiten eine kommutative Gruppe.

6. a ist dann und nur dann assoziiert mit b, wenn a/b eine Einheit ist.

7. Daraus folgt unmittelbar: *Gibt es in der Gruppe G eine einzige Einheit 1, so ist $a \sim b$ dann und nur dann, wenn $a = b$ ist.**) *Ein wesentlich eindeutig bestimmtes Element ist dann eindeutig bestimmt.*

8. Die Relation »assoziiert mit« ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

9. Ist $a_1 \sim a_2$, $b_1 \sim b_2$, so ist auch $a_1 b_1 \sim a_2 b_2$.

10. Ist $a \sim b$, so ist $1/a \sim 1/b$.

11. Ist a_1 teilbar durch b_1, $a_1 \sim a_2$, $b_1 \sim b_2$, so ist a_2 teilbar durch b_2.

---

*) Ist H eine uneigentliche Halbgruppe, d. h., ist H mit G identisch, so sind alle Elemente aus G Eiheiten. Die hier folgenden Sätze verlieren zwar nicht ihre Gültigkeit, werden aber trivial.

*) Der allgemeine Fall kann auf diesen speziellen zurückgeführt werden durch Betrachtung der Quotientgruppe (komplementären Gruppe) G/E, wenn E die Gruppe der Einheiten bedeutet.

12. Ein Element ist dann und nur dann ganz, wenn es durch 1 teilbar ist.

13. Ein Element ist dann und nur dann eine Einheit, wenn es mit 1 assoziiert ist.

§ 5. Sind Elemente $a, b, \ldots, c$ aus G (bzw. H) gegeben, so werden wir ein Element d aus G (H) ihren größten gemeinsamen Teiler (g. g. T.) in G (H) nennen, wenn es folgenden Bedingungen genügt:

1. Alle Elemente $a, b, \ldots, c$ sind durch d teilbar.

2. Sind die Elemente $a, b, \ldots c$ durch ein Element n aus G (H) teilbar, so ist d durch n teilbar.

Der g. g. T. in G (H) braucht nicht immer zu existieren. Ist es aber der Fall, so ist derselbe wesentlich eindeutig bestimmt. Gibt es also in der Gruppe G eine einzige Einheit 1, so ist der g. g. T. in G (H) eindeutig bestimmt.

Ist nämlich $d' \sim d$, so erfüllt auch d' die Bedingungen 1, 2 und ist ganz, falls d ganz ist; umgekehrt, sind diese Bedingungen nicht nur für d, sondern auch für d' erfüllt, so ist $d' \sim d$. Es muß nämlich nach der Bedingung 2 d durch d', und, wenn wir die Rolle von d und d' vertauschen, auch d' durch d teilbar sein, also wirklich $d' \sim d$ gelten.

Ist 1 der g. g. T. in G (H) der Elemente $a, b, \ldots c$, (die dann, wie aus der Giltigkeit der Bedingung 1 folgt, auch im Falle, daß sie nur als Elemente aus G gegeben sind, ganz),dnis so werden wir dieselben teilerfremd in G (H) nennen.

Handelt es sich um den g. g. T. in G, so können wir in der Bedingung 2 $d/n = l$, also $n = d/l$ setzen; l ist wieder ein Element aus G. Wir können dann die Definition des g. g. T. in G auch auf folgende Weise aussprechen: d ist der g. g. T. in G der Elemente $a, b, \ldots c$ aus G, wenn die Bedingungen erfüllt sind: 1. $a, b, \ldots, c$ sind durch d teilbar; 2. wenn für ein Element l aus G $al/d, bl/d, \ldots cl/d$ ganz sind, so ist dieses Element l ganz.

Und speziell: Die Elemente $a, b, \ldots c$ aus G sind teilerfremd in G, wenn: 1. sie selbst ganz sind; 2. das Element l aus G ganz ist, sobald $al, bl, \ldots cl$ ganz sind.

Den g. g. T. in G (H) der Elemente $a, b, \ldots c$ aus G (H) werden wir mit $(a, b, \ldots c)$ bezeichnen und durch

den Index G (H) oder die Worte »in G« (»in H«) wird ausgedrückt, daß es sich um den g. g. T. in G (H) handelt.

Führen wir jetzt einige Sätze an:

1. *Ist a ein Element aus G (H), so existieren (a), (a, a) in G (H) und sind $\sim a$. Ist a ein Element aus G (H), k ganz, so existiert (a, ak) in G (H) und ist $\sim a$.*

2. *Seien $a, b, \ldots, c, a', b', \ldots c'$ Elemente aus G (H), für welche $a \sim a', b \sim b', \ldots, c \sim c'$ gilt. Existiert $(a, b, \ldots, c)$ in G (H), so existiert auch $(a', b', \ldots, c')$ in G (H) und es ist $(a, b, \ldots, c) \sim (a', b', \ldots c')$.*

3. *Sind a, b, c Elemente aus G (H) und existiert (a, b) in G (H), so existiert (a, b, c) in G (H) dann und nur dann, wenn $((a, b), c)$ in G (H) existiert.*

Betrachten wir den Fall, wo es sich um Elemente aus G und den g. g. T. in G handelt. Der andere Fall ist ganz ähnlich.

Wir müssen beweisen:

a) Wenn $(a, b) \sim d_0$, $((a, b), c) \sim d$ existieren, (es ist dann also $(d_0, c) \sim d$), so existiert auch (a, b, c) und ist $\sim d$.

Es soll also gelten:

1. a, b, c sind durch d teilbar.

2. Sind a, b, c durch n teilbar, so ist d durch n teilbar.

ad 1. Da $(a, b) \sim d_0$, so sind a, b teilbar durch d_0, und da $(d_0, c) \sim d$ ist, so sind d_0, c teilbar durch d; es sind also a, b, c durch d teilbar, w. z. b. w.

ad 2. Setzen wir voraus, daß a, b, c durch n teilbar sind. Da a, b durch n teilbar sind, so ist d_0 durch n teilbar; da weiter $(d_0, c) \sim d$ gilt und auch c durch n teilbar ist, so ist d durch n teilbar, w. z. b. w.

b) Wenn $(a, b) \sim d_0$, $(a, b, c) \sim d$ existieren, so existiert auch $((a, b), c) \sim (d_0, c)$ und ist $\sim d$.

Es soll also gelten:

1. d_0, c sind durch d teilbar.

2. Sind d_0, c durch n teilbar, so ist d durch n teilbar.

ad 1. a, b sind teilbar durch d und da $(a, b) \sim d_0$ ist, so ist d_0 teilbar durch d; aber auch c ist teilbar durch d.

ad 2. Setzen wir voraus, daß d_0, c durch n teilbar sind. Da $(a, b) \sim d_0$ gilt, so sind auch a, b durch n teilbar. Es

sind also die Elemente a, b, c durch n teilbar, und da $(a, b, c) \sim d$ ist, so ist d durch n teilbar, w. z. b. w.

Aus dem angeführten Satze folgt unmittelbar, daß, *wenn der g. g. T. in G (H) für beliebige zwei Elemente aus G (H) existiert, dasselbe für eine beliebige endliche Anzahl von Elementen aus G (H) gilt. In diesem Falle gilt für die durch die Klammer ( ) bezeichnete Operation das kommutative und assoziative Gesetz.*

4. *Sind a, b, c, k Elemente aus G, so existiert $(ak, bk, \ldots, ck)_G$ dann und nur dann, wenn $(a, b, \ldots, c)_G$ existiert und es ist $(ak, bk, \ldots, ck)_G \sim k\,(a, b, \ldots, c)_G$.*

Beweisen wir zuerst, daß, wenn $(a, b, \ldots, c)_G$ existiert und $\sim d$ ist, auch $(ak, bk, \ldots, ck)_G$ existiert und $\sim dk$ ist. Wir müssen also beweisen, daß, 1. $ak, bk, \ldots, ck$ durch dk, ein Element aus G teilbar sind, was unmittelbar einleuchtend ist; 2. wenn $ak, bk, \ldots, ck$ durch n aus G teilbar sind, dk durch n teilbar ist.

Ist $ak, bk, \ldots, ck$ durch n aus G teilbar, so ist $a, b, \ldots, c$ durch n/k aus G teilbar, also d durch n/k, d. h. dk durch n teilbar, w. z. b. w.

Wenden wir die eben bewiesene Behauptung auf die Elemente aus G $a' = ak$, $b' = bk, \ldots, c' = ck$, $k' = 1/k$ an. Aus der Existenz von $(ak, bk, \ldots, ck)_G$ kann diejenige von $(a, b, \ldots, c)_G$ gefolgert werden und es ist $(a, b, \ldots, c)_G \sim 1/k\,(ak, bk, \ldots, ck)_G$, d. h. $(ak, bk, \ldots, ck)_G \sim k\,(a, b, \ldots, c)_G$. Damit haben wir aber unseren Satz vollständig bewiesen.

Wenn $a, b, \ldots, c, k$ ganze Elemente sind und wir den g. g. T. in H betrachten, so können wir allgemein aus der Existenz von $(a, b, \ldots c)_H$ auf diejenige von $(ak, bk, \ldots ck)_H$ nicht schliessen. Wir können nur den Satz behaupten:

4. *Sind $a, b, \ldots, c, k$ ganze Elemente aus G, und existiert $(ak, bk, \ldots, ck)_H$, so existiert auch $(a, b, \ldots, c)_H$ und ist $(ak, bk, \ldots, ck)_H \sim k\,(a, b, \ldots, c)_H$.*

Sei $(ak, bk, \ldots, ck)_H \sim d'$. Da $a, b, \ldots, c$ ganz sind, so sind $ak, bk \ldots, ck$ durch k teilbar, also auch d' durch k teilbar, d. h. $d = d'/k$ ist ganz. Weiter ist leicht einzusehen, daß $a, b, \ldots, c$ durch d teilbar sind. Setzen wir endlich voraus, daß $a, b, \ldots, c$ durch ein ganzes Element n teilbar sind. Dann ist $ak, bk, \ldots, ck$ durch nk teilbar, also d' durch

nk teilbar, d. h. d durch n teilbar. Es existiert also $(a, b, \ldots, c)_H$ und ist $\sim d$, womit unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Aus den Sätzen 4 und 4' folgt:

Sind $a, b, \quad c$ Elemente aus G (H) und existiert $(a, b, \ldots, c) \sim d$ in G (H), so sind a/d, b/d, $\quad c/d$ teilerfremd in G (H).

§ 6. Wir werden jetzt die gegenseitige Beziehung des g. g. T. in G und in H betrachten.

Zuerst gilt der Satz:

Sind $a, b, \quad c$ ganze Elemente aus G, so ist d, ihr g. g. T. in G zugleich auch ihr g. g. T. in H.

Die Elemente $a, b, \quad c$ haben, da sie ganz sind, 1 zum gemeinsamen Teiler. Es muß also d durch 1 teilbar, d. h. ganz sein. Sind weiter die Elemente $a, b, \quad , c$ durch ein Element n aus G teilbar, so ist d durch n teilbar. Dies gilt aber auch, wenn wir n auf H beschränken.

Sind $a, b, \quad c$ ganze Elemente aus G, so kann man aus der Existenz von $(a, b, \quad , c)_H$ allgemein auf diejenige von $(a, b, \ldots, c)_G$ nicht schliessen. Das ist aber unter der Voraussetzung möglich, daß folgendes Axiom für die betrachtete Gruppe G erfüllt ist:

Axiom G. g. T. Jedes Paar von Elementen aus H hat einen g. g. T. in H.

Aus der Giltigkeit dieses Axioms folgt nach dem Satze 3 des vorigen § unmittelbar, daß jede endliche Anzahl von Elementen aus H einen g. g. T. in H hat. Wir werden aber auch beweisen, daß dieser g. g. T. in H auch der g. g. T. in G derselben Elemente ist und daraus den Satz folgern, daß jede endliche Anzahl von Elementen aus G einen g. g. T. in G hat.

Setzen wir also *die Giltigkeit des Axioms G. g. T. voraus* und beweisen wir den Satz:

Sind $a, b, \quad , c$ ganze Elemente aus G, so ist der g. g. T. dieser Elemente in H zugleich auch ihr g. g. T. in G.

Sei $(a, b, \quad , c)_H \sim d$. Wir sollen beweisen, daß $(a, b, \quad , c)_G$ existiert und $\sim d$ ist. Setzen wir voraus, daß die Elemente $a, b, \quad c$ durch ein Element n aus G teilbar sind; wir sollen zeigen, daß d durch n teilbar ist. Sei

$n = n'/n''$, wo n', n'' ganze Elemente sind. Setzen wir $n''a/n' = a'$, $n''b/n' = b'$, $n''c/n' = c'$. Dann sind a', b', c' ganz. Es ist weiter $n''a = n'a'$, $n''b = n'b'$, $n''c = n'c'$ also $(n''a, n''b, \ldots, n''c)_H \sim (n'a', n'b', \ldots n'c')_H$, und nach S. 4 § 5, $n''(a, b, \ldots, c)_H \sim n'(a', b', \ldots, c')_H$. $(a', b', \ldots, c')_H$ ist aber ganz, d. h. d/n ist ganz. Es ist also d durch n teilbar, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Kann man den g. g. T. der ganzen Elemente in G bestimmen, so ist die Bestimmung des g. g. T. für beliebige Elemente aus G leicht. Seien also $a, b, \ldots, c$ beliebige Elemente aus G. Man kann setzen $a = a'/g$, $b = b'/g$, $c = c'/g$, wo $a', b', \ldots, c', g$ ganz sind. Ist dann d' der g. g. T. der Elemente $a', b', \ldots, c'$ in H, also auch in G, so ist nach S. 4 § 5 $d \sim d'/g$ der g. g. T. der Elemente $a, b, \ldots, c$ in G.

Gilt in der Gruppe G das Axiom G. g. T., dann hat jede endliche Anzahl von Elementen aus G einen g. g. T. in G.

§ 7. Sind die Elemente $a, b, \ldots, c$ teilerfremd in G (und dann sind sie auch ganz), so sind sie auch teilerfremd in H. Allgemein kann man aber aus dem Umstande, daß $a, b, \ldots, c$ teilerfremd in H sind, nicht schließen, daß diese Elemente auch in G teilerfremd sind. Wenn aber das Axiom G. g. T. gilt, so ist die letztere Behauptung richtig. Wir werden zuerst einige Sätze über in G teilerfremde Elementenpaare beweisen, *ohne die Giltigkeit des Axiom G. g. T. vorauszusetzen. Teilerfremd wird in den folgenden Sätzen teilerfremd in G bedeuten und ( ) den g. g. T. in G.*

1. *Ist m ganz und sind a, b teilerfremde Elemente, dann existiert (am, b) dann und nur dann, wenn (m, b) existiert und es ist $(am, b) \sim (m, b)$.*

Da m ganz ist, existiert nach S. 1 § 5 $(m, 1)$ und ist ~ 1; weiter ist $(a, b) \sim 1$. Nach S. 1 § 5 existieren auch (bm, b), (am, bm) und es ist $(bm, b) \sim b$, $(am, bm) \sim m$. (am, bm, b) kann geschrieben werden in der Form $(am, (bm, b))$ und $((am, bm), b)$. Aus den Sätzen 2, 3 § 5 folgt also, daß (am, bm, b) nur gleichzeitig mit (am, b) einerseits und (m, b) anderseits existieren kann und dann $(am, bm, b) \sim (am, b)$ und auch $\sim (m, b)$ gilt. Daraus folgt aber unmittelbar unser Satz.

Wegen der Wichtigkeit des vorigen Satzes werden wir noch einen anderen Beweis angeben.

Setzen wir zuerst voraus, daß (m, b) existiert und $\sim d$ ist, und beweisen wir, daß auch (am, b) existiert und $\sim d$ ist. m und b sind durch d teilbar, also auch am und b. Machen wir die Voraussetzung, daß aml/d, bl/d ganz sind; wir sollen zeigen, daß l ganz ist. Aus der getroffenen Voraussetzung folgt, daß auch aml/d, bml/d ganz sind. Da a, b teilerfremd sind, so folgt daraus, daß ml/d ganz ist. Es ist also ml/d und bl/d ganz und da $d \sim (m, b)$ ist, so ist l ganz, w. z. b. w.

Nehmen wir zweitens an, daß (am, b) existiert und $\sim d$ ist, und beweisen wir, daß auch (m, b) existiert und $\sim d$ ist. Da a, b teilerfremd sind, so ist, wenn al, bl ganz sind, auch l ganz. am und b, also auch am und bm sind durch d teilbar, d. h. am/d und bm/d sind ganz; also ist m/d ganz. Es sind also m und b durch d teilbar. Setzen wir weiter voraus, daß ml/d, bl/d ganz sind; es soll bewiesen werden, daß l ganz ist. Dann ist aml/d, bl/d ganz, also, da $(am, b) \sim d$ ist, l ganz, w. z. b. w.

Als Spezialfall des vorigen Satzes führen wir an:

2. *Ist a teilerfremd zu b, a' teilerfremd zu b, so ist aa' teilerfremd zu b.*

Es ist a' ganz und es existiert (a', b) und ist ~ 1. Es existiert also auch (aa', b) und ist $(aa', b) \sim (a' b) \sim 1$, w. z. b. w.

Aus diesem Satze kann durch die vollständige Induktion der folgende abgeleitet werden:

3. *Ist jedes der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_k$ teilerfremd zu b, so ist auch das Produkt $a_1 a_2 \ldots a_k$ teilerfremd zu b.*

Und daraus folgt weiter:

4. *Ist jedes der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_k$ teilerfremd zu jedem Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_l$, so sind auch die Produkte $a_1 a_2 \ldots a_k$, $b_1 b_2 \ldots b_l$ teilerfremd zu einander.*

Endlich gelten die Sätze:

5. *Ist b' ein ganzer Teiler von b, und sind a, b teilerfremd, so sind auch a, b' teilerfremd.*

Setzen wir $b/b' = m$. Dann ist m ganz. Auch $b/m = b'$ ist ganz; es existiert also (m, b) und ist $\sim m$. Wir können also den Satz 1 anwenden. Es existiert (am, b) und ist $\sim$

(m, b), d. h. $(am, b) \sim m$. Es ist aber $(am, b) \sim (am, b'm) \sim (a, b')\ m$, d. h. $(a, b') \sim 1$, w. z. b. w.

6. *Ist m ganz, a, b teilerfremd, und am durch b teilbar, so ist m durch b teilbar.*

Es existiert (am, b) und ist $\sim b$. Nach dem Satze 1 existiert also auch (m, b) und ist $(m, b) \sim (am, b) \sim b$, d. h. es ist m durch b teilbar.

Setzen wir jetzt die Giltigkeit des Axioms G. g. T. voraus. In den vorhergehenden Sätzen handelt es sich durchgehends um ganze Elemente. Man kann alle vorkommenden G. g. T. als g. g. T. in H und ebenfalls die teilerfremden Elemente als in H teilerfremd betrachten, ohne daß die vorigen Sätze ihre Giltigkeit verlieren.

§ 8. Setzen wir zuerst die Giltigkeit des Axioms G. g. T. nicht voraus.

Nennen wir reduziert einen Bruch a'/a'', wenn a', a'' ganze in G teilerfremde Elemente sind.

Wir können leicht die Frage entscheiden, wann der reduzierte Bruch a'/a'' durch den reduzierten Bruch b'/b'' teilbar ist. Es soll $a'b''/a''b'$ ganz sein, d. h. $a'\ b''$ soll durch a'' und auch durch b' teilbar sein. Nach dem Satze 6 des vorigen § muß also, da a', a'' teilerfremd sind, b'' durch a'' teilbar sein, und da b', b'' teilerfremd sind, a' durch b' teilbar sein.

Der reduierte Bruch a'/a'' ist durch den reduzierten Bruch b'/b'' dann und nur dann teilbar, wenn a' durch b' und b'' durch a'' teilbar ist.

Daraus folgt unmittelbar:

Sind a'/a'', b'/b'' reduzierte Brüche, so ist $\frac{a'}{a''} \sim \frac{b'}{b''}$ dann und nur dann, wenn $a' \sim b'$, $a'' \sim b''$ gilt.

Führen wir noch zwei Folgerungen dieses Satzes an:

Sind $a = a'/a''$, $a = b''/b''$ zwei Darstellungen desselben Elementes a durch reduzierte Brüche, dann ist $a' \sim b'$, $a'' \sim b'''$.

Ein reduzierter Bruch a'/a'' kann nur dann ein ganzes Element darstellen, wenn a'' eine Einheit ist.

Gilt das Axiom G. g. T., so kann jedes Element a aus G durch einen reduzierten Bruch dargestellt werden.

Es ist $a = a_1/a_2$, wo a_1, a_2 ganz sind. Es existiert der g. g. T. der Elemente a_1, a_2, $d \sim (a_1, a_2)$. Sei $a_1 = da'$, $a_2 =$

da'' Dann ist 1 der g. g. T. in H der Elemente a', a'', d. h. a', a'' sind teilerfremd, und $a = a'/a''$ ist die gewünschte Darstellung.

§ 9. Das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.) in G (H) der Elemente $a, b, \ldots c$ aus G (H) ist ein Element m aus G (H), welches folgende Eigenschaften besitzt:

1. m ist durch $a, b, \ldots, c$ teilbar.

2. Ist ein Element n aus G (H) teilbar durch $a, b, \ldots, c$, so ist n durch m teilbar.

Das k. g. V in G (H) existiert nicht immer. Existiert es aber, so ist es wesentlich eindeutig bestimmt.

Der Zusammenhang zwischen dem k. g. V. in G und in H ist ganz einfach. Es gilt der Satz:

Sind $a, b, \ldots c$, ganze Elemente aus G, so existiert ihr k. g. V in G dann und nur dann, wenn ihr k. g. V in H existiert und beide sind dann assoziiert.

Wir beweisen zuerst: m, das k. g. V von $a, b, \ldots c$ in G, ist zugleich das k. g. V. derselben Elemente in H. m ist durch die ganzen Elemente $a, b, \ldots c$ teilbar, also ist es selbst ganz. Weiter gilt: Ist n aus G durch $a, b, \ldots c$ teilbar, so ist n durch m teilbar. Es ist also auch richtig, daß n durch m teilbar ist, wenn n ein durch $a, b, \ldots c$ teilbares Element aus H bedeutet. Weiter beweisen wir: m, das k. g. V. von $a, b, \ldots c$ in H, ist zugleich das k. g. V. derselben Elemente in G. Es gilt: Ist n aus H durch $a, b \ldots c$ teilbar, so ist n durch m teilbar. Da ein Element n aus G ganz ist, wenn es durch die ganzen Elemente teilbar ist, so kann man auch sagen: Ist n aus G durch $a, b, \ldots c$ teilbar, so ist n durch m teilbar. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Nach dem vorigen Satze genügt es, nur das k. g. V. in G zu betrachten. Wir werden das k. g. V. der Elemente $a, b, \ldots c$ mit $[a, b, \ldots, c]$ bezeichnen. Sind also $a, b, \ldots c$ ganz, so kann $[a, b, \ldots c]$ als das k. g. V. in H oder in G gedeutet werden.

Es gilt zuerst der Satz:

$[a]$, $[a, a, \ldots, a]$ existieren und sind $\sim a$. Ist k ganz, so existiert $[a, ak]$ und ist $\sim ak$.

Weiter gelten für das k. g. V. die Sätze, die den Sätzen 2, 3, 4 § 5 für den g. g. T. ähnlich sind.

Der Zusammenhang des k. g. V. und des g. g. T. wird durch den Satz ausgedrückt:

Sind $a, b, \ldots c$ Elemente aus G, so existiert ihr k. g. V in G, $[a, b, \ldots, c]$, dann und nur dann, wenn der g. g. T in G, $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right)$, existiert und es ist

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right)} \sim [a, b, \ldots c]$$

Setzen wir die Existenz von $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right)$ voraus. Sei $m \sim \frac{1}{\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right)}$. Wir werden beweisen, daß $[a, b, \ldots c] \sim m$ ist. Zuerst ist m durch $a, b, \ldots, c$ teilbar. $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right)$ als g. g. T. von $1/a$, $1/b$, $\ldots$ $1/c$ ist ein Teiler dieser Elemente. Es ist also zum Beispiel $\frac{1}{a\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right)}$ ganz, also auch m/a ganz, d. h. m durch a teilbar. Nehmen wir weiter an, daß ein Element n aus G durch $a, b, \ldots, c$ teilbar ist. Es ist also $1/a, 1/b, \ldots, 1/c$ durch $1/n$ teilbar, d. h. $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right) \sim \frac{1}{m}$ durch $\frac{1}{n}$ teilbar, oder, was dasselbe ist, n durch m teilbar. Damit ist der Beweis des ersten Teiles unserer Behauptung erbracht.

Schreiten wir jetzt zum Beweise, daß, wenn $[a, b, \ldots, c] \sim m$ existiert, auch $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right)$ existiert und $\sim \frac{1}{m}$ ist. Es ist m durch $a, b, \ldots, c$ teilbar, also $1/a$, $1/b$, $\ldots$, $1/c$ durch $1/m$ teilbar. Außerdem seien $1/a, 1/b, \ldots, 1/c$ durch n teilbar. Dann ist $1/n$ durch $a, b, \ldots, c$, also $1/n$ durch m, d. h. $1/m$ durch n teilbar. Es ist also wirklich $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right) \sim \frac{1}{m}$, w. z. b. w.

Es gilt weiter: Existiert (a, b) in G, so existiert auch $[a, b]$ und ist $\sim \frac{ab}{(a, b)}$. Und allgemeiner: Setzen wir $M = ab \ldots c$,

$A = M/a$, $B = M/b$, , $C = M/c$. Existiert $(A, B, \ldots, C)$ in G, dann existiert auch $[a, b, \ldots, c]$ und ist $\sim M/(A, B, \ldots, C)$.

§ 10. Setzen wir die Giltigkeit des Azioms G. g. T. voraus.

Betrachten wir die durch die Klammern ( ) und [ ] bezeichneten Operationen. Jedes Element in den Klammern kann durch ein assoziiertes ersetzt werden, das Resultat ist wesentlich eindeutig bestimmt.

Für die durch die Klammer ( ) bezeichnete Operation gilt das kommutative und assoziative Gesetz. Dasselbe gilt auch für die Operation [ ]. Weiter gilt die Formel

(1) $k\,(a, b, \ldots, c) \sim (ka, kb, , kc)$

und auch (2) $k\,[a, b, \ldots, c] \sim [ka, kb, , kc.]$

Aus (1) kann man die allgemeinere Formel ableiten:

(3) $(a_1, a_2, \ldots a_k)\,(b_1, b_2, \ldots b_l) \sim$

$(a_1 b_1, a_2 b_1, \ldots a_k b_1, a_1 b_2, a_2 b_2, \ldots a_k b_2, \ldots, a_1 b_l, a_2 b_l, \ldots a_k b_l)$, und eine ähnliche Formel (4) für die Operation [] aus (2).

Die Operationen ( ) und [ ] sind miteinander durch die Formel

(5) $[a, b, , c]\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right) \sim 1$

verbunden, die unmittelbar aus dem vorigen § folgt.

Sie kann auch in der Form geschrieben werden

(6) $(a, b, \ldots, c)\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{c}\right] \sim 1.$

Die Formeln für die Operation [ ] kann man aus den entsprechenden Formeln für die Operation ( ) dadurch erhalten, daß man in den letzteren für alle Elemente ihre reziproken Werte einsetzt und die Formel (5) benutzt [z. B. (2) aus (1)].

Ueberhaupt kommt bei allen Sätzen und Formeln für die Teilbarkeit in Gruppen, in denen das Axiom G. g. T. erfüllt ist, eine gewisse Dualität vor. Es sind dual mit einander:

»a ist ganz«,	»$1/a$ ist ganz«,
»a ist teilbar durch b«,	»a ist Teiler von b«,
»( )«,	»[ ]«.

Zu sich selbst dual sind:

»e ist eine Einheit«,

»$a \sim b$«.

Z. B. aus der Formel*)

(7) $([a, b, \ . \ ,c], m) \sim [(a, m), (b, m), \quad ,(c, m)]$

erhält man die duale

(8) $[(a, b, \quad ,c), m] \sim ([a, m], [b, m], \quad ,[c, m])$.

Der Grund dieser Dualität ist leicht anzugeben. G kann durch Quotientenbildung nicht nur aus H, sondern auch aus H^1 entstehen. Ist a ganz in Bezug auf eine der Halbgruppen H, H^{-1}, so ist $1/a$ ganz in Bezug auf die andere; ist also a teilbar durch b in Bezug auf eine der Halbgruppen H, H^{-1}, so ist a ein Teiler von b in Bezug auf die andere. Ein Element ist zugleich eine Einheit in Bezug auf H und H^{-1} und zwei Elemente sind zugleich assoziiert mit einander in Bezug auf H und H^{-1}. Daraus folgt unmittelbar, daß der g. g. T. i. B. a. H das k. g. V i. B. a. H^{-1} derselben Elemente ist und umgekehrt. Die Formel (7) gilt auch, wenn man ( ) und [ ] i. B. a. H^{-1} nimmt; so erhält man die Formel (8).

Führen wir noch eine interessante Formel an.

Sind a'/a'', b'/b'', c'/c'' reduziert, dann ist

$$(9)\quad \left(\frac{a'}{a''}, \frac{b'}{b''}, \quad \frac{c'}{c''}\right) \sim (a', b', \quad c') \left(\frac{1}{a''}, \frac{1}{b''}, \quad \frac{1}{c''}\right) \sim$$

$$\sim \frac{(a', b', \ldots, c')}{[a'', b'', \ldots, c'']}.$$ **)

Dabei ist der letzte Bruch reduziert.

Führen wir den Beweis für den Fall der 3 Brüche aus. Es ist

$$(10)\qquad (a', b', c') \left(\frac{1}{a''}, \frac{1}{b''}, \frac{1}{c''}\right) \sim$$

$$\sim \left(\left(\frac{a'}{a''}, \frac{b'}{b''}, \frac{c'}{c''}\right), \frac{(b', c')}{a''}, \frac{(a', c')}{b''}, \frac{(a', b')}{c''}\right).$$

Setzen wir $\left(\frac{a'}{a''}, \frac{b'}{b''}, \frac{c'}{c''}\right) \sim \frac{d'}{d''}$, wo d'/d'' reduziert ist. Wir

*) Châtelet, Leçons sur la Théorie des nombres, S. 45.

**) Ich habe ursprünglich diese Formel durch vollständige Induktion bewiesen. Auf den hier folgenden einfacheren Beweis hat mich mein Assistent Herr Dr. Horák aufmerksam gemacht.

können beweisen, daß $(b', c')/a''$, $(a', c')/b''$, $(a', b')/c''$ durch d'/d'' teilbar sind. Führen wir den Beweis z. B. für $(b',c')/a''$ aus. Aus der Definition von d'/d'' folgt, daß a'/a'', b'/b'', c'/c'' teilbar sind durch d'/d'', woraus unmittelbar erhellt, da es sich um reduzierte Brüche handelt, daß b', c' durch d', d'' durch a'' teilbar ist. Setzen wir $b' = \beta' d'$, $c' = \gamma' d'$, $d'' = a'' \alpha''$, wo β', γ', α'' ganz sind. Es ist dann

$$\frac{(b', c')}{a''} \sim \frac{d' (\beta', \gamma') \alpha''}{d''}, \text{ d. h. } \frac{(b', c')}{a''} : \frac{d'}{d''} \sim (\beta', \gamma') \alpha'',$$

also wirklich ganz. Die rechte Seite in (10) ist also $\sim d'/d''$, womit der Beweis der Formel (9) erbracht ist.

Um zu beweisen, daß (a', b', c') und $[a'', b'', c'']$ teilerfremd sind, erwägen wir, daß, wegen $(a', a'') \sim 1$, $(b', b'') \sim 1$, $(c', c'') \sim 1$ auch $((a', b', c'), a'') \sim 1$, $((a', b', c'), b'') \sim 1$, $((a', b', c'), c'') \sim 1$ gilt, also auch $((a', b', c'), a'' b'' c'') \sim 1$ und umsomehr nach § 5, § 6 $(a', b', c', [a'', b'', c''])$ ~ 1, da $[a'', b'', c'']$ ein Teiler von $a'' b'' c''$ ist.

Aus (9) folgt unmittelbar die Formel

$$(11) \left[\frac{a'}{a''}, \frac{b'}{b''}, \frac{c'}{c''}\right] \sim [a', b', c'] \left[\frac{1}{a''}, \frac{1}{b''}, \frac{1}{c''}\right] \sim \frac{[a', b', \ldots, c']}{(a'', b'', c'')},$$

wo wieder der letzte Bruch reduziert ist.

§ 11. Sei H eine eigentliche Halbgruppe. Die Giltigkeit des Axioms G. g. T. setzen wir zuerst nicht voraus.

Ein ganzes Element a werden wir zerlegbar nennen, wenn es in der Form $a \sim bc$ dargestellt werden kann, wo b, c ganze Elemente, aber keine Einheiten sind. Ist eine solche Darstellung für ein Element, welches ganz ist, aber keine Einheit, nicht möglich, so werden wir es unzerlegbar nennen. Es ist einleuchtend, daß *alle mit einem unzerlegbaren Elemente assoziierten wieder unzerlegbar sind.*

Es kann leicht angegeben werden, wann es unzerlegbare Elemente gibt. *Setzen wir voraus, es existiere ein ganzes Nichteinheitselement a, welches endlich viele mit einander nichtassoziierte Teiler hat. Wir werden beweisen, daß das Element a entweder unzerlegbar ist, oder als ein Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Elementen dargestellt werden kann.*

Den Beweis werden wir durch die vollständige Induktion führen. Sei n die Anzahl der mit einander nicht assoziierten Teiler des Elementes a. Für $n=2$ hat a nur Teiler, die mit 1 oder a assoziiert sind, ist also unzerlegbar. Setzen wir also voraus, der Satz gelte für die Elemente, die weniger als n Teiler haben. Ist a unzerlegbar, so ist der Satz gewiß giltig. Ist a zerlegbar, also $a=bc$, wo b, c ganze Elemente, aber keine Einheiten sind, so haben b, c weniger Teiler als a. Jeder Teiler von b ist nämlich auch ein Teiler von a, aber nicht umgekehrt; b ist nicht durch a teilbar, denn sonst wäre c und $1/c=b/a$ ganz, also c eine Einheit, gegen die über c gemachte Voraussetzung. Ähnlich für c. Von b und c gilt aber der zu beweisende Satz, also auch von a.

Ein Element p, das ganz, aber keine Einheit ist, soll ein Primelement heißen, wenn aus der Voraussetzung, daß das Produkt ab beliebiger zwei ganzer Elemente a, b durch p teilbar ist, a dagegen nicht durch p teilbar ist, die Teilbarkeit von b durch p folgt.

Ist p ein Primelement und $p' \sim p$, so ist auch p' ein Primelement. Zwei mit einander assoziierte Primelemente werden wir als wesentlich nicht verschieden bezeichnen.

Ein Primelement ist immer unzerlegbar. Wäre nämlich $p=qr$, wo q, r ganz sind, aber keine Einheiten, dann wäre das Produkt qr der ganzen Elemente q, r durch p teilbar, ohne daß q oder r durch p teilbar wäre.

Wir werden jetzt den Satz beweisen:

Ein ganzes Nichteinheitselement p ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn es teilerfremd in H zu jedem durch p nicht teilbaren Elemente a ist; dagegen ist ein ganzes Nichteinheitselement p dann und nur dann ein Primelement, wenn es teilerfremd in G zu jedem durch p nicht teilbaren Elemente a ist.

Sei a ein ganzes durch p nicht teilbares Element. Ist p unzerlegbar, so ist jeder ganze Teiler von p assoziiert entweder mit 1 oder mit p. Daraus folgt, daß als ganze gemeinsame Teiler von a und p nur die Einheiten vorkommen können, also $(a, p)_H \sim 1$ ist. Ist p zerlegbar, also $p = qr$, wo q,

r ganze Nichteinheitselemente sind, so ist $(q, p)_H \sim q$. Wir sehen also, daß p wirklich dann und nur dann unzerlegbar ist, wenn $(a, p)_H \sim 1$ ist.

Sei weiter p ein Primelement. Um zu zeigen, daß $(a, p)_G \sim 1$ ist, wenn a ein ganzes durch p nicht teilbares Element bedeutet, müssen wir beweisen, daß l ganz ist, wenn $al = a'$, $pl = p'$ ganz sind und l ein Element aus G bedeutet. Es ist dann $ap' = a'p$, d. h. ap' ist durch p teilbar. Da p ein Primelement ist, und a durch p nicht teilbar, so muß p' durch p teilbar sein, $p' = p\bar{p}$, wo $\bar{p}$ ganz ist. Dann ist $l = \bar{p}$, also l ganz, w. z. b. w. Umgekehrt sei $(a, p)_G \sim 1$ für jedes durch p nicht teilbare ganze a. Setzen wir voraus, ab sei durch p teilbar, wobei b ganz ist; dann ist $(ab, p)_G \sim p$, Nach dem Satze 1 § 7 ist $(b, p)_G \sim (ab, p)_G$, also $(b, p)_G \sim p$, d. h. b ist durch p teilbar, p ist also wirklich ein Primelement.

Aus dem bewiesenen Satze erhellt wieder, daß ein Primelement unzerlegbar ist. Ist nämlich a ein ganzes durch p nicht teilbares Element, so ist für ein Primelement $(a, p)_G \sim 1$, es existiert dann auch $(a, p)_H$ und ist $\sim (a, p)_G$ also ist auch $(a, p)_H \sim 1$, d. h. p ist unzerlegbar.

Setzen wir jetzt die Giltigkeit des Axioms G. g. T. voraus. Sei wieder a ein beliebiges ganzes durch p nicht teilbares Element. Jetzt folgt aus der Existenz von $(a, p)_H$ die Existenz von $(a, p)_G$ und ist $(a, p)_G \sim (a, p)_H$. Ist also p unzerlegbar, so ist $(a, p)_H \sim 1$, also auch $(a, p)_G \sim 1$, d. h. p ist ein Primelement.

Gilt in einer Gruppe G, die aus einer eingentlichen Halbgruppe durch Quotientenbildung entsteht, das Axiom G. g. T., so ist jedes unzerlegbare Element ein Primelement.

§ 12. *Nehmen wir den Fall, dass H eine eigentliche Halbgruppe ist; dagegen wird die Giltigkeit des Axioms G. g. T nicht vorausgesetzt.*

Aus dem vorigen § folgt unmittelbar der Satz:

Zwei mit einander nicht assoziierte Primelemente sind teilerfremd in G.

Und daraus folgt weiter:

Ist das Primelement q mit keinem Primelemente $p_1, p_2, \ldots, p_k$ assoziiert, so ist das Produkt $p_1 p_2 \ldots p_k$ teilerfremd zu q.

Ist keines der Primelemente $p_1, p_2, \ldots, p_k$ mit keinem der Prime lemete $q_1, q_2, \ldots, q_l$ assoziiert, so sind die Produkte $p_1 p_2 \ldots p_k$, $q_1 q_2 \ldots q_l$ teilerfremd. Das erste Produkt kann nicht durch das zweite teilbar sein. (Vergl. § 8).

Sind $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_l$ Primelemente und ist das Produkt $p_1 p_2 \ldots p_k$ teilbar durch das Produkt $q_1 q_2 \ldots q_l$, so ist $k \geqq l$ und durch eine Umnumerierung der Primelemente $p_1, p_2, \ldots, p_k$ kann erreicht werden daß $q_1 \sim p_1, q_2 \sim p_2, \ldots q_l \sim p_l$ ist.

Heben wir im Bruche $\frac{p_1 p_2 \ldots p_k}{q_1 q_2 \ldots q_l}$ die mit einander assoziierten Elemente fort, so weit es möglich ist. Kann aber nachher ein Bruch übrigbleiben, der noch einige der Primelemente $q_1, q_2, \ldots, q_l$ im Nenner hat? Durch Umnumerierung könnten wir ihn auf die Form bringen $\frac{p_1 p_2 \ldots p_{k-h}}{q_1 q_2 \ldots q_{l-h}}$ $(1 \leqq h \leqq l)$, wo keines der Primelemente $p_1, p_2, \ldots, p_{k-h}$ mit keinem der Primelemente $q_1, q_2, \ldots, q_{l-h}$ assoziiert ist. So ein Bruch kann aber nach dem vorigen Satze kein ganzes Element darstellen. Soll also $p_1 \ldots p_k$ durch $q_1 \ldots q_l$ teilbar sein, so müssen sich alle Primelemente $q_1, q_2, \ldots, q_l$ fortheben, womit der Satz bewiesen ist.

Aus dem vorigen Satze folgt unmittelbar:

Sind $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_l$ Primelemente und ist $p_1 p_2 \ldots p_k \sim q_1 q_2 \ldots q_l$, so muß $k = l$ sein und durch eine Umnumerierung der Primelemente kann erreicht werden, daß $p_1 \sim q_1, p_2 \sim q_2, \ldots p_k \sim q_k$ ist.

Setzen wir voraus, daß ein ganzes Element a als ein Produkt von Primelementen dargestellt werden kann $a \sim p_1 p_2 \ldots p_k$, und daß wir noch eine andere solche Darstellung haben $a \sim q_1, q_2 \ldots q_l$. Dann ist $p_1 p_2 \ldots p_k \sim q_1 q_2 \ldots q_l$, sodaß wir den vorigen Satz anwenden können. Wir werden sagen, daß die Darstellung eines ganzen Elementes durch ein Primelementenprodukt, wenn sie möglich ist, wesentlich eindeutig ist.

Sagen wir, daß ein Element a durch die wesentlich von einander verschiedenen Primelemente $p_1, p_2, \ldots p_k$ darstellbar ist, wenn $a \sim p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ ist, wo $n_1, n_2, \ldots n_k$ ganze rationale Zahlen sind. Aus dem vorigen folgt unmittelbar, daß *ein solches Element dann und nur dann ganz ist, wenn* $n_1 \geqq 0, n_2 \geqq 0, \ldots n_k \geqq 0$ *gilt.*

Sind $a \sim p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, $b \sim p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$ *zwei durch* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *darstellbare Elemente, dann ist* a *teilbar durch* b, *wenn* $n_1 \geqq m_1$, $n_2 \geqq m_2, \ldots, n_k \geqq m_k$ *gilt, und* $a \sim b$, *wenn* $n_1 = m_1, n_2 = m_2, \ldots, n_k = m_k$ *gilt.*

Daraus erhellt, daß *die Darstellungen eines Elementes* a *durch ein Produkt von einander verschiedenen Primelementen, wenn sie existiert, eindeutig ist in dem Sinne: Haben wir für* a *die Darstellungen* $a \sim p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ *und* $a \sim p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}$, *dann ist* $n_1 = m_1, n_2 = m_2, \ldots, n_k = m_k$,

Für die durch $p_1, p_2, \ldots, p_k$ darstellbaren Elemente $a \sim p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, $b \sim p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p^{m_k}$, $c \sim p_1^{l_1} p_2^{l_1} \ldots p_k^{l_k}$ kann leicht der g. g. T. und das k. g. V. angegeben werden. Es ist

$$(a, b, \ldots, c) \sim p^{D_1} p^{D_2} \ldots p^{D_k},$$
$$[a, b, \ldots, c] \sim p^{M_1} p^{M_2} \ldots p^{M_k},$$

wenn $D_i = \text{Min}\ (n_i, m_i, \ldots, l_i)$, $M_i = \text{Max}\ (n_i, m_i, \ldots, l_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gesetzt wird.

Auf den betrachteten Fall kann der Fall zurückgeführt werden, wo die Elemente $a, b, \ldots, c$ in endlicher Anzahl vorgelegt sind und a durch die von einander verschiedenen Primelemente $p_1, p_2, \ldots, p_k$; ebenso b durch $q_1, q_2, \ldots, q_l$; $\ldots, c$ durch $r_1, r_2, \ldots, r_k$ dargestellt werden kann. Es existiert dann eine endliche Menge von wesentlich von einander verschiedenen Primelementen $s_1, s_2, \ldots, s_g$, durch welche jedes der Elemente $a, b, \ldots, c$ dargestellt werden kann. Für $s_1, s_2, \ldots, s_g$ kann man z. B. alle wesentlich von einander verschiedenen Primelemente unter den Primelementen $p_1, p_2, \ldots p_k, q_1, q_2, \ldots, q_l \ldots, r_1, r_2, \ldots, r_k$ wählen. Ist dann z. B. $a \sim p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots, p_k^{n_k}$, und $s_1 \sim p_1, s_2 \sim p_2, \ldots, s_k \sim p_k$, was immer durch eine Umnumerierung erreicht werden kann, dann hat man $a \sim s_1^{u_1} s_2^{u_2} \ldots s_k^{u_k} s_{k+1}^{u_{k+1}} \ldots s_g^{u_g}$, wo $u_1 = n_1$, $u_2 = n_2$, $\ldots$ $u_k = n_k$, $u_{k+1} = u_{k+2} = \ldots = u_g = 0$ ist.

§ 13. Wenden wir unsere Aufmerksamkeit noch dem

Falle zu, wo das Axiom G. g. T. und überdies das folgende gilt:

Axiom E. Es existieren in G ganze Elemente, die keine Einheiten sind und jedes solche Element kann als Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Elementen dargestellt werden.

Aus § 11 folgt, daß Axiom E. sicher erfüllt ist, wenn H eine eigentliche Halbgruppe ist und jedes ganze Element endlich viele ganze mit einander nicht assoziierte Teiler hat.*)

Aus der Giltigkeit des Axioms G. g. T. folgt, daß jedes unzerlegbare Element zugleich auch ein Primelement ist (§ 11) und das Axiom E. liefert uns die Zerlegung des ganzen Nichteinheitselementes a in Primelemente $a \sim p_1\ p_2 \quad p_k$. Diese Zerlegung ist nach dem vorigen § »wesentlich eindeutig«. Aus dieser Derstellung der ganzen Elemente folgt dann weiter, da jedes Element aus G als Quotient von zwei ganzen Elementen betrachtet werden kann, daß jedes Element a aus G in der Form dargestellt werden kann $a \sim p_1^{n_1}\ p_2^{n_2} \quad p_k^{n_k}$, wo $p_1, p_2, \quad p_k$ wesentlich von einander verschiedene Primelemente sind und $n_1, n_2, \quad n_k$ ganze rationale Exponenten bedeuten. Es existiert zu jedem Elemente a aus G eine endliche Menge von Primelementen, durch die dieses Element dargestellt werden kann. Wir können dann die weiteren Sätze des vorigen § anwenden.

§ 14. Beispiele.

I. Eine Gruppe, in der die Untergruppe der Einheiten aus dem einzigen Elemente 1 besteht und das Axiom G. g. T. gilt, erhalten wir auf folgende Weise:

Sei G eine Gruppe, in der neben der Multiplikation eine eindeutige Operation (a, b) definiert ist. Ist also $a = a'$, $b = b'$, so soll $(a, b) = (a', b')$ sein. Für diese Operation gilt das kommutative und assoziative Gesetz, also

1. $(a, b) = (b, a)$,
2. $((a, b), c) = (a, (b, c))$.

Weiter gilt 3. $(a, b)\ k = (ak, bk)$,

4. $(1, 1) = 1$.

*) Sind die Axiome G. g. T. und E. erfüllt, so folgt umgekehrt aus der Darstellung der ganzen Nichteinheitselemente durch Produkte von Primelementen, daß solche Elemente endlich viele ganze mit einander nicht assoziierte Teiler haben.

Aus 3 und 4 folgt unmittelbar $(a, a) = a$.

Elemente, für die $(m, 1) = 1$ ist (und nach 4 existiert wenigstens ein solches Element, 1), bilden eine Halbgruppe H. Ist nämlich auch $(n, 1) = 1$, dann ist $(m, 1)\ (n, 1) = (m\ (n, 1), (n, 1)) = ((mn, m), 1)) = (mn, (m, 1)) = (mn, 1)$. Es sind also die Bedingungen I, II § 1, III 1, 2 § 2 erfüllt. Die Gruppe G entsteht aus H durch Quotientenbildung. Ist nämlich a ein beliebiges Element aus G, so setzen wir $a' = \frac{a}{(a, 1)}$, $a'' = \frac{1}{(a, 1)}$. Dann ist $a = a'/a''$ und a', a'' sind Elemente aus H. Es ist nämlich

$$(a', 1) = \left(\frac{a}{(a, 1)}, 1\right) = \frac{(a, (a, 1))}{(a, 1)} = \frac{((a, a), 1)}{(a. 1)} = \frac{(a, 1)}{(a, 1)} = 1,$$

$$(a'', 1) = \left(\frac{1}{(a, 1)}, 1\right) = \left(\frac{1, (a, 1)}{(a, 1)}\right) = \frac{(a, (1, 1))}{(a, 1)} = \frac{(a, 1)}{(a, 1)} = 1.$$

(Auch (a', a'') ist $= 1$).

Betrachten wir die Elemente aus H als ganz. Soll e eine Einheit sein, dann muß zugleich $(e, 1) = 1$, $\left(\frac{1}{e}, 1\right) = 1$ gelten, woraus unmittelbar $e = 1$ folgt. Es gibt also eine einzige Einheit 1. Daraus sieht man gleich, daß H nur dann uneigentlich ist, wenn G die triviale, nur aus dem Elemente 1 bestehende Gruppe ist.

Weiter ist leicht zu sehen, daß (a, b) der g. g. T. in G der Elemente a, b ist. Es gilt: 1. a, b sind teilbar durch (a, b); z. B. $a/(a, b)$ ist ganz, da $\left(\frac{a}{(a, b)}, 1\right) = \frac{(a, (a, b))}{(a, b)} = \frac{((a, a), b)}{(a, b)} = \frac{(a, b)}{(a, b)} = 1$ ist. 2. Sind a, b teilbar durch ein beliebiges Element m, so ist (a, b) teilbar durch m. Wirklich folgt aus $\left(\frac{a}{m}, 1\right) = 1$, $\left(\frac{b}{m}, 1\right) = 1$, daß $\left(\frac{(a, b)}{m}, 1\right) = 1$ ist. Es ist dann nämlich $\left(\frac{(a, b)}{m}, 1\right) = \left(\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right), 1\right) = \left(\frac{a}{m}, \left(\frac{b}{m}, 1\right)\right) = \left(\frac{a}{m}, 1\right) = 1$.

(Die früher angegebene Darstellung von a in der Bruchform $a = a'/a''$ ist reduziert, da $(a', a'') = 1$ ist).

II. Als Beispiel II werden wir betrachten:

Gruppe G:	Gesamtheit der reellen Zahlen,
Komposition, Haupteinheit:	gewöhnliche Addition, Null,
Halbgruppe H:	Gesamtheit der positiven Zahlen mit Null,
a ist ganz:	a ist positiv oder Null,
a ist teilbar durch b:	$a \geqq b$,
Einheit:	eine einzige, Null,
$a \sim b$:	$a = b$,
$(a, b, \quad c)$:	Min $(a, b, \quad c)$,
$[a, b, \ldots c]$:	Max $(a, b, \quad c)$,
Formel 10: (1) § 10:	$k + \text{Min}\ (a, b, \quad c) = \text{Min}\ (k + a, k + b, \quad k + c)$,
10: (2) § 10:	$k + \text{Max}\ (a, b, \quad c) = \text{Max}\ (k + a, k + b, \quad k + c)$.

Interessant ist die Interpretation der Formeln (7), (8), (9), (11) § 10.

Bedeutet G die Gesamtheit der ganzen rationalen Zahlen, H die der ganzen rationalen positiven Zahlen, dann existiert ein einziges Primelement: 1.

III. Setzen wir voraus, daß in der Gruppe G das folgende Axiom gilt:

Axiom R. Ist a ein Element aus G, so ist wenigstens eines der Elemente a, $1/a$ ganz.

Um die trivialen Fälle auszuschliessen, werden wir weiter die Veraussetzung machen, daß H eine eigentliche Halbgruppe ist. Das unter II betrachtete Beispiel ist ein spezieller Fall.

Das Axiom G. g. T. ist erfüllt. Man kann nämlich $(a, b)_G$ leicht bestimmen. Wenigstens eines der Elemente a/b, b/a ist ganz. Ist a/b ganz, so ist $(a, b)_G \sim a$, ist b/a ganz, dann ist $(a/b)_G \sim b$.

G/E bildet eine geordnete Menge. Die Begriffe Max, Min könnten leicht auf diesen Fall erweitert werden.

Es können nicht zwei wesentlich verschiedene Primelemente p, q existieren. Denn in diesem Fall wäre weder p/q noch q/p ganz (§ 12). Existiert also ein Primelement p, so sind alle Primelemente mit ihm assoziiert. Dies tritt speziell ein, wenn in einer Gruppe G neben dem Axiome R. das Axiom

E. gilt. Ist dann a ein beliebiges Element aus G, so ist $a \backsim p^n$, wo n eine ganze rationale Zahl bedeutet.

IV Führen wir noch ein einfaches Beispiel an, wo das Axiom G. g. T. nicht erfüllt ist, dagegen Axiom E. erfüllt ist.*)

Die ganzen positiven Zahlen $1, 3, 4, 5, \ldots$ (alle ganzen positiven Zahlen außer 2) bilden eine Halbgruppe H, wenn man sie durch gewöhnliche Multiplikation komponiert. Aus dieser entsteht durch Quotientenbildung die Gruppe G aller rationalen positiven Zahlen. Es gibt eine einzige Einheit 1. Der g. g. T. $(12, 24)_H$ existiert nicht. Die gemeinsamen Teiler von 12 und 24 aus H sind nämlich $1, 3, 4. (3, 6)_H$ existiert zwar und ist $= 1, (3, 6)_G$ existiert aber nicht; $3 \cdot \frac{4}{3} = 4$, $6 \ \frac{4}{3} = 8$ sind nämlich ganz, ohne daß 4/3 ganz sei. Daraus folgt, daß $[3, 6]$ nicht existiert. 3 und 6 sind teilerfremd in H, nicht aber in G $(3, 6)_H$ existiert zwar, es existiert aber trotzdem nicht $(3.4, 6.4)_H$ (§ 5). 3 und 4, 3 und 6 sind teilerfremd in H, nicht aber 3 und $4.6 = 24$; es ist $(3, 24)_H = 3.4$ und 8 sind unzerlegbar, aber keine Primelemente, da z. B. $24 = 3.8 = 4.6$ ist. Ist p eine natürliche Primzahl, dann sind auch p, $2p$ unzerlegbar; es sind aber keine Primelemente, wie aus $8p = 4.2p = 8.p$ folgt. Die Zerlegung in unzerlegbare Elemente ist nicht wesentlich eindeutig.

V Betrachten wir einen algebraischen Zahlkörper K endlichen Grades. Die ganzen von Null verschiedenen Zahlen aus K bilden eine Halbgruppe H, aus der die Gruppe G der von 0 verschiedenen Zahlen aus K durch Quotientenbildung entsteht. Es gilt das Axiom E., aber nicht allgemein das Axiom G. g. T. Sei $\mathfrak{H}$ die Halbgruppe der ganzen Ideale aus K, $\mathfrak{G}$ die Gruppe aller Ideale aus K. $\mathfrak{G}$ entsteht aus $\mathfrak{H}$ durch Quotientenbildung. In $\mathfrak{G}$ gilt nicht nur E., sondern auch G. g. T. Wir werden den Satz beweisen:

*) Siehe auch:
Fueter, Synth. Zahlentheorie, S. 111. Zahlstrahl der positiven ganzen rationalen Zahlen $\equiv 1 \pmod 3$.
Sommer, Vorl. ü. Zahlentheorie, S. 36. Zahlstrahl der positiven ganzen rationalen Zahlen $\equiv 1 \pmod 4$.

Das Ideal $\{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$ *aus* K, *wo* $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ *von* 0 *verschieden sind, ist dann und nur dann ein Hauptideal dieses Körpers* $\{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\} = \delta$, *wenn* $\{\delta\}$ *der g. g. T. in* G *der Zahlen* $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ *ist.*

Es gilt $\{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\} = \{\delta\}$ dann und nur dann, wenn das Hauptideal $\{\delta\}$ der g. g. T. in $\mathfrak{G}$, (oder auch in $\mathfrak{H}$ falls $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ ganz sind), der Hauptideale $\{\alpha\}, \{\beta\}, \ldots, \{\gamma\}$ ist. Setzen wir zuerst voraus, daß $\{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\} = \{\delta\}$ ist. Die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ sind also durch δ teilbar und es ist $\delta = \alpha\xi + \beta\eta + \ldots + \gamma\zeta$, wo $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ ganze Zahlen aus K sind. Daraus folgt unmittelbar, daß wenn $\alpha\lambda/\delta, \beta\lambda/\delta, \ldots, \gamma\lambda/\delta$ ganz sind, auch die Zahl λ ganz ist. Es ist nämlich

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda}{\delta}\xi + \frac{\beta\lambda}{\delta}\eta + \ldots + \frac{\gamma\lambda}{\delta}\zeta.$$

Also ist wirklich δ der g. g. T. der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ in G. Umgekehrt, setzen wir voraus, δ sei der g. g. T. der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ in G. Wir sollen beweisen, daß $\{\delta\}$ der g. g. T. der Hauptideale $\{\alpha\}, \{\beta\}, \ldots, \{\gamma\}$ in $\mathfrak{G}$ ist. Es ist wirklich $\{\alpha\}, \{\beta\}, \ldots, \{\gamma\}$ durch $\{\delta\}$ teilbar. Weiter müßen wir zeigen, daß, wenn für ein Ideal $\mathfrak{l}$ aus $\mathfrak{G}$ die Ideale $\alpha\mathfrak{l}/\delta, \beta\mathfrak{l}/\delta, \ldots, \gamma\mathfrak{l}/\delta$ ganz sind, auch das Ideal $\mathfrak{l}$ ganz ist. Nehmen wir an, daß die Ideale $\alpha\mathfrak{l}/\delta, \beta\mathfrak{l}/\delta, \ldots, \gamma\mathfrak{l}/\delta$ ganz sind. Sei $\mathfrak{l} = \{\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_l\}$. Daraus folgt, daß die Zahlen ganz sind: $\alpha\lambda_i/\delta, \beta\lambda_i/\delta, \ldots, \gamma\lambda_i/\delta$, $i = 1, 2, \ldots l$, also, da δ der g. g. T. der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ in G ist, ist auch λ_i ganz. Es ist also auch $\mathfrak{l}$ ganz. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

§ 15. Betrachten wir einen Integritätsbereich I und den aus ihm durch Quotientenbildung entstehenden Körper K.*) Elemente aus I werden wir als ganze Elemente aus K bezeichnen. Alle von 0 verschiedenen Elemente aus I bilden eine Halbgruppe H, ebenso die von 0 verschiedenen Elemente aus K eine Gruppe G, wenn man beidemal als Komposition die im Körper eingeführte Multiplikation betrachtet. G entsteht aus H durch Quotientenbildung. Für G und H können wir die früheren Erwägungen anwenden.

Fassen wir aber den Umstand ins Auge, daß zu den in

*) Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Crelles Journal 137, S. 178.

H bezw. G enthaltenen Elementen in I bezw. K noch 0 hinzukommt. Den Begriff der Teilbarkeit werden wir auf folgende Weise erweitern: Wir werden sagen, daß ein Element a aus K durch ein Element b aus K teilbar ist, wenn ein ganzes Element c aus K existiert, sodaß $a = bc$ gilt. Der neu eingeführte Begriff der Teilbarkeit stimmt mit dem früheren für die $\neq 0$ Elemente überein. Überdies ist 0 durch alle Elemente aus K teilbar, und 0 hat nur 0 zum Teiler aus K. Es gilt denn der Satz: *Sind die Elemente aus K, a, b, ... c, durch ein Element* $d \neq 0$ *aus K teilbar, so ist* $a + b + \ldots + c$ *durch d teilbar*, und allgemeiner, *sind weiter x, y, . ganz, so ist* $ax + by + \ldots + cz$ *durch d teilbar.*

Dass die Elemente a, b aus K assoziiert sind, werden wir ganz wie früher definieren (§ 4). Es ist ersichtlich, daß 0 nur mit 0 assoziert ist.

Den g. g. T. in $K(I)$ werden wir ähnlich wie in § 5. definieren:

Ein Element d aus $K(I)$ ist ein g. g. T. in $K(I)$ der Elemente $a, b, \ldots, c$ aus $K(I)$, wenn die Bedingungen erfüllt sind: 1. $a, b, \ldots c$ sind durch d teilbar; 2. sind $a, b, \ldots c$ durch ein Element n aus $K(I)$ teilbar, so ist d durch n teilbar.

Der g. g. T. in K(I) ist, wenn er existiert, wesentlich eindeutig bestimmt.

Ist keines der Elemente $a, b, \ldots c$ gleich 0, sind also $a, b, \ldots c$ Elemente aus $G(H)$, so stimmt diese Definition vollständig mit der Definition des g. g. T. in $G(H)$. Der g. g. T. in $K(I)$ der Elemente $0, 0, \ldots, 0$ ist wieder 0. Der g. g. T. in $G(H)$ der Elemente $a, b, \ldots, c, 0$ aus $G(H)$, wo nicht alle Elemente $a, b, \ldots c$ gleich 0 sind, existiert dann und nur dann, wenn der g. g. T. in $G(H)$ der Elemente $a, b, \ldots, c$ existiert und beide sind dann assoziiert. Es kann also immer die Bestimmung des g. g. T. in $K(I)$ auf die Bestimmung des g. g. T. in $G(H)$ zurückgeführt werden. Es ist umgekehrt evident, daß, wenn $a, b, \ldots, c$ Elemente aus $G(H)$ sind, ihr g. g. T. in $G(H)$ zugleich auch ihr g. g. T. in $K(I)$ ist.

Das k. g. V. werden wir nur in $G(H)$ betrachten.

Wir werden jetzt einen Fall angeben, wo das Axiom

G. g. T. erfüllt ist*). Setzen wir die Giltigkeit des folgenden Axioms voraus:

Axiom A. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus K, so existiert ein gemeinsamer Teiler d von a, b, welcher in der Form $d = ax + by$ dargestellt werden kann, mit ganzen Koeffizienten x, y aus K.

Es ist leicht zu sehen, daß d der g. g. T. der Elemente a, b in K ist. Man kann weiter leicht schließen, daß der g. g. T. in K für beliebige endliche Anzahl von ganzen Elementen a, $b, \ldots, c$ aus K existiert und in der Form $ax + by + \ldots + cz$ mit ganzen $x, y, \ldots z$ dargestellt werden kann. Aber auch für beliebige Elemente a, $b, \ldots, c$ aus K, existiert dann der g. g. T., in K und kann in der Form $ax + by +$ $+ cz$, dargestellt werden, wo $x, y, \ldots, z$ ganze Elemente aus K sind. Wir können a, $b, \ldots, c$ in der Form schreiben $a = a'/g$, $b = b'/g, \ldots, c = c'/g$ wo a', $b', \ldots, c', g$ ganz sind. Ist dann d' der g. g. T. in K der ganzen Elemente $a', b', \ldots, c'$, sodaß $d' = a'x + b'y + \ldots c'z$ mit ganzen $x, y, \ldots, z$ gilt, so ist $d = d'/g$ der g. g. T. in K von a, $b, \ldots, c$ und es ist wirklich $d = ax + by + \ldots + cz$.

Umgekehrt folgt aus der Giltigkeit des Axioms G. g. T. nicht die Giltigkeit des Axioms A. Z. B.: Sei K Körper aller rationalen Funktionen von x mit rationalen Koeffizienten, I Integritätsbereich aller Polynome in x mit rationalen ganzen Koeffizienten. Axiome: G. g. T., E. sind erfüllt, A. ist nicht erfüllt: p, x, wo p eine rationale Primzahl bedeutet, haben den g. g. Teiler 1 und es nicht möglich k, l aus I so zu bestimmen, daß $kx + lp = 1$ sei.

§ 16. Wir werden jetzt ein Beispiel anführen, wo Axiome A. und E., also auch G. g. T. und E. erfüllt sind. Setzen wir voraus, daß jedem Elemente a des Körpers K eine rationale Zahl $M(a) \geqq 0$ zugeordnet ist, die wir das Maß von a nennen werden. Diese Zahl soll folgende Bedingungen erfüllen:

M1. Es ist $M(a) = 0$ dann und nur dann, wenn $a = 0$ ist; sonst ist $M(a) \neq 0$.
Ist a ganz, so ist $M(a)$ rational ganz.

*) Einen Integritätsbereich (mit der Charakteristik 0), wo das Axiom G. g. T. erfüllt ist, nennt König, (Einleitung in die allg. Theorie d. alg. Grössen) einen vollständigen holoiden Bereich.

M2. $M(ab) = M(a) . M(b)$.

M3. Ist a nicht ganz, so kann man zwei ganze Elemente k, l aus K finden, sodaß $0 < M(ka + l) < 1$ ist.

Setzen wir in M2 a/b statt a, wo $b \neq 0$ ist. Dann ist auch $M(b) \neq 0$. Wir erhalten $M(a) = M\left(\frac{a}{b}\right) . M(b)$, also $M\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{M(a)}{M(b)}$.

Daraus folgt für $a = 1$, $b = 1$ $M(1) = 1$. Setzen wir in M2: $a = b = -1$, so erhalten wir $M(-1) = 1$. Es ist also $M(-a) = M(a)$. Ist e eine Einheit, so müssen $M(e)$ und $M(\frac{1}{e})$ ganze rationale positive Zahlen sein. Daraus folgt, dass dann $M(e) = 1$ ist, und weiter, daß $M(a) = M(b)$, wenn $a \sim b$ ist.

Es gilt der Satz: Ist e ganz, und ist $M(e) = 1$, so ist e eine Einheit. Dann ist nämlich auch $1/e$ ganz. Wäre $1/e$ nicht ganz, dann könnte man nach M3 ganze Elemente k, l finden, so daß man hätte $0 < M\left(k . \frac{1}{e} + l\right) < 1$, also $0 < M(k + le) < M(e)$, d. h. $0 < M(k + le) < 1$, was unmöglich ist, da $k + le$ ein ganzes Element, also $M(k + le)$ eine ganze rationale Zahl sein sollte.

Wir sehen also, daß der Satz gilt: *Ein Element e aus K ist dann und nur dann eine Einheit, wenn es ganz ist und wenn $M(e) = 1$ ist.*

Gehen wir jetzt zum Beweise über, daß das Axiom A. erfüllt ist, also der Satz gilt:

Für beliebige Elemente a, b, , c aus K existiert ein g. g. T. d in K und dieser kann in der Form $ax + by + \ldots + cz$ dargestellt werden, wo x, y, z ganze Elemente aus K sind.

Es genügt nach dem vorigen § die Gültigkeit von A. für ganze Elemente $a, b, \ldots, c$ aus K zu beweisen, die nicht alle $= 0$ sind. Bilden wir zu diesem Zwecke die Gesamtheit der Elemente aus K, »das Ideal«, $ax + by + \quad + cz$, wo $x, y, . \quad z$ alle ganzen Elemente aus K durchlaufen. Da die Maße der ganzen Elemente ganze rationale Zahlen sind, so gibt es unter den von 0 verschiedenen Elementen aus dem Ideal eines mit kleinstem Maße. Bezeichnen wir d dieses Element. Dann sind alle Elemente des Ideals durch d teilbar. Wäre z. B. die Zahl g aus dem Ideal nicht durch d teilbar, also g/d nicht

ganz, dann könnten wir nach M 3 zwei ganze Elemente k, l en, so daß $0<M\left(k\frac{g}{d}+l\right)<1$, d. h. $0<M(kg+ld)<M(d)$ wäre. $kg+ld$ gehört aber, wie leicht zu sehen, auch zum Ideal. Die letzte Beziehung wäre gegen die über d gemachte Voraussetzung. Es ist alo $d=ax_0+by_0+\ .\ .\ +cz_0$, wo x_0, y_0, $\ .\ .\ z_0$ ganz und $a, b, .. c$ durch d teilbar sind.

Auch im Falle, daß $a, b, .. , c$ nicht ganz sind, ist d, ihr g. g. T. in K, ein Element vom kleinsten von 0 verschiedenem Maße aus dem die Elemente $ax+by+\ .\ .\ cz$ (x, y, z ganz) enthaltenden Ideale. Es ist nämlich $M(ax+by+\ .\ .\ +cz)=M(d)\,M\left(\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y+\ .\ .\ +\frac{c}{d}z\right)\geqq M(d)$, da $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y+\ .\ .\ +\frac{c}{d}z$ ganz ist.

Beweisen wir nun, daß *Axiom* E. *erfüllt ist.*

Es soll dargelegt werden, daß, wenn a ein von 0 verschiedenes ganzes Element aus K ist, a entweder eine Einheit, oder ein Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Faktoren ist.

Ist a ganz und $M(a)=1$, so ist a eine Einheit; es gilt also für a der ausgesprochene Satz. Um zu zeigen, daß er für $M(a)=m$ gilt, setzen wir seine Gültigkeit für $M(a)<m$ voraus. Ist a unzerlegbar, so ist die Bepauptung evident. Ist aber $a=bc$, wo b, c keine Einheiten sind, so ist $M(a)=M(b).\,M(c)$, $M(b)$, $M(c)\neq 1$, also $M(b)<M(a)$, $M(c)<M(a)$. Da also $M(b)$ und $M(b)$ kleiner als m sind, so ist für sie der ausgesprochene Satz wahr, also auch für a.

Beweisen wir noch, daß, *wenn die Axiome* A. *und* E. *erfüllt sind, ein Maß konstruiert werden kann.*

Da dann auch das Axiom G. g. T. erfüllt ist, ist für $a\neq 0$, $a\sim p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ .\ .\ p_k^{n_k}$ (§ 13). Setzen wir $M(a)=g^{n_1+n_2+\ .\ .\ +n_k}$, wo g eine ganze rationale Zahl >1 ist, $M(0)=0$. Dann gelten gewiß M1, M2. Aber auch M3 ist erfüllt. Sei a ein nicht ganzes Element aus K, und a'/a'' seine reduzierte Darstellung, so daß 1 der g. g. T. von a', a'' ist. Es existieren also zwei ganze Elemente k, l, sodaß $ka'+la''=1$ ist, also $ka+l=1/a''$. Es ist also $0<M(ka+l)<1$, sodaß auch M3 erfüllt ist.

Spezielle Fälle:

I. K Körper der rationalen Zahlen, I Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen, $M(a) = |a|$

II. K Körper der 3., 4., 5.,*) Einheitswurzeln, oder eines der von Sommer**) angeführten quadratischen Zahlkörpern, I Integritätsbereich der ganzen Zahlen des entsprechenden Körpers, $M(a)$ Absolutwert der Norm von a.

III. Sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Körper, x ein in Bezug auf $\mathfrak{R}$ transzendentes Element, $K = \mathfrak{R}(x)$ Körper aller rationalen Funktionen in x, $I = \mathfrak{R}[x]$ Integritätsbereich aller Polynome in x. Jedes Element $a \neq 0$ aus K kann in der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ dargestellt werden, wo $f(x)$, $g(x)$ von Null verschiedene Polynome in x sind, von Graden m bezw. n. Dann ist $m-n$ unabhängig von der Darstellung des Elementes a in der Bruchform. Ist nämlich auch $a = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, wo $f'(x)$ ein Polynom vom Grade m', $g'(x)$ ein Polynom vom Grade n' bedeutet, beide $\neq 0$, so muß $f(x)\,g'(x) = f'(x)\,g(x)$ sein, also $m + n' = m' + n$, d. h. $m - n = m' - n'$ sein. Sei g eine beliebige ganze rationale Zahl > 1. Setzen wir $M(a) = g^{m-n}$, für $a = 0 : M(0) = 0$. Ist a eine echt gebrochene rationale Funktion, so ist $M(a) < 1$.

Es sind, wie leicht zu sehen, M 1, M 2 erfüllt. Aber auch M 3 ist erfüllt. Ist $a = \frac{f(x)}{g(x)}$, so kann man setzen $a = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$, wo $\frac{r(x)}{g(x)}$ echt gebrochen und $\neq 0$ ist, wenn a nicht ganz ist. Es ist also M 3 erfüllt, wenn $k = 1$, $l = -q(x)$ gesetzt wird.

Was sind Einheiten? Es sind Elemente aus $\mathfrak{R}[x]$, für die $M(e) = 1$ ist, d. h. von 0 verschiedene Polynome vom Grade 0, also von Null verschiedene Elemente aus $\mathfrak{R}$.

IV. Es sei K ein nichtarchimedisch bewerteter Körper.***) Die Elemente aus K, deren Bewertung $\leqq 1$, bilden einen

*) S. J. Ouspensky, Math. Ann. 66, S. 109.

**) Sommer, Vorl. ü. Zahlentheorie.

***) Kürschák, Crelles Journal, 142, 1913. Ostrowski, Acta mathematica, 41, 1917.

Integritätsbereich *I*.*) Die von 0 verschiedenen Elemente aus K bilden eine Gruppe G, für die das Axiom R erfüllt ist. Ist Axiom E erfüllt, so sind alle Primelemente im Körper mit einander assoziiert. Umgekekrt ist leicht zu sehen, daß ein Körper, in dem Axiom G. g. T. erfüllt ist und Primelemente existieren und alle mit einander assoziiert sind, als ein bewerteter Körper betrachtet werden kann. Ist p das Primelement, so ist für ein beliebiges von 0 verschiedenes Element $a \sim p^n$, wo n eine rationale ganze Zahl bedeutet. Für $\|p\|$ kann dann eine beliebige positive Zahl < 1 gewählt werden. Dann ist $\|a\| = \|p\|^n$.

Résumé.

Sur la théorie de la divisibilité.

J'appellerai semigroup un système à une seule composition, multiplication, qui jouit de propriétés suivantes: I. La loi associative. II. La loi commutative. III. 1. Si $ab = ab'$, on a $b = b'$. III. 2. Il existe un élément, l'unité principale 1, pour qui on a $a1 = a$, si a parcourt tous les éléments du système.

Chaque semigroup peut être complété de façon à constituer un group. Si chaque élément a d'un group G peut être représenté en forme $a = a'/a''$, où a', a'' sont des éléments d'un semigroup H, on dira que G provient de H par la formation de quotients. Si $G \neq H$, nous dirons que H est un semigroup propre.

Les éléments de H seront appelés éléments entiers de G. Si pour les éléments a, b de G a/b est un élément entier de G, on dira que a est divisible par b. Si e et $1/e$ sont entiers, on appellera e l'unité. Si a est divisible par b et réciproquement b par a, on dira que a et b sont associés, $a \sim b$. Si a et b ne sont pas associés, nous dirons aussi qu'ils sont essentiellement distincts.

*) Siehe meine Abhandlung: »Příspěvek k theorii těles«, Čas. math. fys. 48, 1919 und »Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper«, Crelles J. 153, S. 94.

$a, b, \ldots, c$ étant des élements de G (H), j'appellerai un élément d de $G(H)$ le plus grand commun diviseur (p. g. c. d.) dans G (dans H) de ces éléments, si d satisfait aux conditions suivantes: 1. $a, b, \ldots, c$ sont divisibles par d, 2. si $a, b \ldots, c$ sont divisibles par un élément n de G (H), d est divisible par n. Désignons par $(a, b, \ldots, c)_G$ le p. g. c. d. dans G et par $(a, b, \ldots, c)_H$ le p. g. c. d. dans H. Pour ce qui concerne le rapport mutuel du p. g. c. d. dans G et dans H, on a d'abord le théorème: Si $a, b, \ldots, c$ sont des éléments entiers de G, d, leur p. g. c. d. dans G est en même temps leur p. g. c. d. dans H. Admettons maintenant la validité d'axiome G. g. T.: Chaque paire d'éléments de H a un p. g. c. d. dans H. Nous pourrons exprimer le théorème reciproque du précédent: Si $a, b, \ldots c$ sont des éléments entiers de G, leur p. g. c. d. dans H est en même temps leur p. g. c. d. dans G.

Je définis ensuite le plus petit commun multiple dans G et dans H.

On dira qu'un élément entier p de G est irréductible, s'il ne peut être représenté comme produit ab, où a et b sont des entiers différents d'unitér. Si un élément entier p différents d'unité de G a la propriété, que le produit ab étant divisible par p, au moins un de facteurs a, b l'est aussi, on appellera p un élément premier. Supposons la validité d'axiome G. g. T. et d'axiome E.: Il y a dans G des éléments entiers et un tel élément peut être décomposé en produit d'un nombre fini d'éléments irréductibles.*) Chaque élément irréductible étant maintenant aussi premier, cette décomposition est essentiellement unique, c'est à dire, si $a \sim p_1 p_2 \ldots p_k$ et $a \sim q_1 q_2 \ldots q^l$, où p_1, $p_2, \ldots p_k$, $q_1, q_2, \ldots q_k$ sont des éléments premiers, on a $k = l$ et on peut arranger $q_1, q_2, \ldots q_k$ de telle sorte que l'on ait $p_1 \sim q_2$, $p_2 \sim q_2$, $\ldots p_k \sim q_k$.

Citons maintenant un théorème de la théorie des nombres, algébriques: Sois K un corps de nombres algébriques d'ordre fini. Les nombres entiers $\neq 0$ de K forment un semigroup H, et par la formation de quotients on obtient le group G de tous les nombres $\neq 0$ de K. La condition nécessaire et suffi-

*) L'axiome E. est valable, quand H est un semigroup propre et que chaque élément entier n'est divisible que par un nombre fini d'éléments entiers essentiellement distincts.

sante que l'idéal $\{\alpha, \beta, \ldots \gamma\}$ de K, où $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ sont $\neq 0$, soit un idéal principal $\{\alpha, \beta, \ldots \gamma\} = \{\delta\}$, est que δ soit le p. g. c. d. dans G des nombres $\alpha, \beta \ldots \gamma$.

Je m'occupe maintenant de corps et de domaines d'intégrité. Si le corps K provient du domaine d'intégrité I par la formation de quotients, le group G d'éléments différents de 0 de K provient aussi du semigroup H d'éléments $\neq 0$ de I par la formation de quotients. On peut définir la notion de divisibilité et toutes les notions qui sont en affinité avec elle. Une légère modification est causé par la présence de l'élément 0. L'axiome G. g. T. est satisfait certainement, si on suppose que l'axiome suivant soit valable: Axiome A.: a, b étant deux éléments de K, il éxiste un élément d de K, diviseur commun de a, b, qui peut être représenté en forme $d = ax + by$, où x et y sont des éléments entiers de K. Je rappellerai encore un cas particulier. Supposons que pour chaque élément du corps K éxiste un nombre rationnel unique $M(a) \geqq 0$, la mésure de a, qui jouit de propriétés suivantes: M 1. $M(a) = 0$ quand et seulement quand $a = 0$. Si a est entier, $M(a)$ est un nombre rationnel entier. M 2. $M(ab) = M(a) M(b)$. M 3. Si a n'est pas entier, on peut trouver deux éléments entiers k, l de K de sorte que $0 < M(ka + l) < 1$. On peut démontrer que les axiomes A. et E. sont satisfaits. La condition nécessaire et suffisante pour que un élément entier e soit une unité est $M(e) = 1$.

VI.

Über verschiedene Salzbeständigkeit der Pflanzen.

Von **W. S. Iljin.**

Vorgelegt am 10. Nov. 1923.

Zahlreiche, von Botanikern und Agronomen ausgeführte Beobachtungen beweisen mit Sicherheit, dass verschiedene Pflanzen sich nicht in gleicher Weise der Konzentration des Salzgehaltes des Bodens gegenüber verhalten. Für die Mehrzahl der gewöhnlichen Arten macht eine grössere oder geringere Anwesenheit von neutralen Salzen im Boden ein Wachstum derselben unmöglich; andere Arten vertragen dagegen verhältnismässig leicht eine Versalzung und können entweder normal, oder in ihrer Entwicklung mehr oder weniger gehemmt weiter existieren, es gibt endlich auch solche Arten, für die eine gewisse Anhäufung von Neutralsalzen nicht nur unschädlich, sondern sogar notwendig ist, und erreicht ihr Wachstum bei einem bestimmen, verhältnismässig starken Salzgehalt des Bodens ein Optimum. Zu der leztgenannten Kategorie gehört z. B. Salicornia herbacea, die zu ihrer günstigsten Entwicklung einen Zusatz von bedeutenden Mengen Chlornatriums in den Boden erfordert.

Die Ursachen der verschiedenen Salzbeständigkeit der Pflanzen wird nur dann verständlich, wenn die Frage vom physiologischen Standpunkt aus geprüft wird; eine morphologische Untersuchung, die manchmals wertvolle Angaben zum Verständnis der Ursachen der verschiedenen Wachsorte der Pflanzen lieferte, kann in gegebenem Falle keine Rolle spielen. Zunächst muss man sich vergegenwärtigen, wie die in die Pflanze eindringenden Salze den Gang der physiologischen Prozesse beeinflussen, wie sie die letzteren verzögern oder beschleunigen, ihnen die oder jene Richtung verleihen

oder eine Reihe neuer Prozesse hervorrufen. Ferner steht die Aufgabe auf zu verstehen, wie die Pflanze sich gegen die schädliche Einwirkung der Salze schützt. Nur auf diesem Wege kann man zu einer Erkenntnis der Ursachen der verschiedenen Salzbeständigkeit gelangen. Gewiss ist diese Aufgabe gross und umfangreich und bedarf zu ihrer Lösung eine ganze Untersuchungsreihe, weshalb ich in meinen Arbeiten mich nur mit einem Teil der aufgeworfenen Fragen befassen werde.

Meine in anderen Abhandlungen angeführte Beobachtungen zeigten, dass unter dem Einfluss der Kationen der Alkalimetalle der ersten Gruppe-Li, Na, K, Rb, Cs und NH_4, und aus der zweiten — Be und Ba, als auch einiger organischen Anionen entweder eine gesteigerte Lösung der vorhandenen Stärke geschieht, oder deren Bildung verzögert wird, falls die Zellen vorher in entsprechende Verhältnisse gebracht wurden. Als Folge einer vollständigen Stärkelösung trat eine Steigerung des osmotischen Druckes auf; infolgedessen aber, dass meine Arbeiten in der Hauptsache mit den Schliesszellen der Spaltöffnungen ausgeführt wurden, stellte sich bei dem Eintauchen der Epidermisschnitte in die Lösungen der obengenannten Salze ein bedeutenderes oder geringeres Öffnen der Spaltöffnungen ein. Dieses Lösungsvermögen war sämtlichen aufgezählten Ionen eigen, jedoch war die Intensität desselben nicht gleich, — zwecks Erreichung ein- und desselben Resultates mussten verschiedene Ionenmengen eingeführt werden; als äusserst energisch zeigte sich das Natrium, welches Element am meisten in der Natur vorkommt und einer der Hauptversalzer des Bodens ist. Ich hatte eine ganze Reihe vergleichender physiologischer Untersuchungen unternommen, in denen hauptsächlich der Einfluss von Chlornatrium auf die Stärkebildung und deren Zerfall in den Spaltöffnungen verschiedener Pflanzen geprüft wurde. Die Untersuchungen wurden in den Umgegenden der Stadt Jekaterinoslaw ausgeführt, wo es Sumpf-, Wiesen-, Steppen-, Salzgrund-, Sand- und andere Pflanzengemeinschaften gab.

Die erste Frage bestand darin, wie das Chlornatrium auf den Zerfall der bereits vorhandenen Stärke einwirkt. Zu diesem Zwecke wurden Epidermisschnitte verschiedener

Pflanzen mit geschlossenen und stärkangefüllten Spaltöffnungen in verschiedene starke Chlornatriumkonzentrationen hineingebracht, und periodische Bestimmungen des Stärkegehaltes in den Spaltöffnungen und deren Öffnen angestellt. Wie verschieden das Verhalten der einzelnen Arten dem Salz gegenüber ist, zeigt Tabelle I, wo die Beobachtungen an Beta vulgaris und Rumex acetosa angeführt sind. Anfangs enthielten die Spaltöffnungen genügende Stärkemengen und waren geschlossen; nach dem Eintauchen in Na Cl trat bei ihnen von 0,3 Norm. an und höher Plasmolyse ein; nach Verlauf von 3 Stunden war bei Rumax acetosa die Plasmo-

TABELLE I.

Na Cl Normal.	Beta vulgaris L.						Rumex acetosa L.					
	Stärkegehalt			Spaltöffnungszustand			Stärkegehalt			Spaltöffnungszustand		
	Anfangs	3 Stund.	8 Stund.	Anfangs	3 Stund.	8 Stund.	Anfangs	3 Stund.	8 Stund.	Anfangs	3 Stund.	8 Stund.
0,1	v.	v.	v.	schl.	schl.	schl.	v.	k.	k.	schl.	w. öf.	w. öf.
0,2	v.	v.	v.	schl.	schl.	schl.	v.	k.	k.	schl.	w öf.	w. öf.
0,3	v.	v.	v.	pl.	schl.	s. öf.	v.	k.	k.	pl.	w. öf.	w. öf.
0,4	v.	v.	v.	pl.	s. öf.	s. öf.	v.	w.	s. w.	pl.	w. öf.	w. öf.
0,5	v.	w.	w.	pl.	öf.	s. öf.	v.	w.	s. w.	pl.	w. öf	w. öf.
0,6	v.	s. w	s. w	pl.	öf.	s. öf.	v.	w.	w.	pl.	w. öf.	w öf.
0,8	v.	s. w.	s. w.	pl.	öf.	schl.	v	v.	v.	pl.	s. öf.	s. öf.

Stärke: »v.« = viel; »w.« = wenig; »s. w.« = sehr wenig; »k.« = kein.
Spaltöffnungen: »schl.« = geschlossen; »pl.« = Plusmolyse; »öf.« = geöffnet; »s. öf.« = schwach geöffnet; »w. öf.« = weit geöffnet.

lyse in sämtlichen Lösungen ausser der stärksten nicht nur verschwunden, sondern es öffneten sich auch weit die Spaltöffnungen; dasselbe lässt sich nach 8 Stunden feststellen, was den Stärkegehalt anbetrifft, so verschwand die Stärke sehr rasch und vollständig bei den Konzentrationen 0,1—0,3 Norm.; bei höheren Konzentrationen wurde die Lösung mehr und mehr gehemmt, bei 0,4—0,6 Nr. war wenig, bei 0,8 N aber war Stärke in der ursprünglichen Menge vorhanden; nach Verlauf von 8 St. nahm der Stärkegehalt bei 0,4 und

0,5 N. noch mehr ab; folglich wird die Stärkelösung bei Rumex acetosa durch verhältnismässig nicht zu starke Lösungen begünstigt, nach Überschreitung gewisser Grenzen wird aber der Prozess verzögert. Unter Zuhilfenahme der Ergebnisse meiner früheren Versuche sehen wir, dass zwecks Erreichung der Stärkelösung und des Öffnens der Spaltöffnungen bei Rumex acetosa, die Na Cl-Konzentrationen bei 0,05 N. getrieben werden muss; schwächere Konzentrationen üben bereits keine Wirkung aus. Ganz anders verhielt sich Beta vulgaris

TABELLE II.

Na Cl Normal.	Aster Tripolium L.				Glaux maritima L.			
	Stärkegehalt		Spaltöffnungszustand		Stärkegehalt		Spaltöffnungszustand	
	Nach 5 Stund.	Nach 20 Stund.	Nach 5 Stund.	Nach 20 Stund.	Nach 5 Stund.	Nach 20 Stund.	Nach 5 Stund.	Nach 20 Stund.
0,06	v.	v.	schl.	schl.	v.	v.	schl.	schl.
0,1	v.	v.	schl.	schl.	v.	v.	schl.	schl.
0,2	v.	v.	schl.	schl.	v.	v.	schl.	schl.
0,24	v.	v.	schl.	schl.	v.	v.	schl.	schl
0,3	v.	v.	schl.	schl.	v.	v	schl.	schl.
0,4	v.	v.	öf.	öf.	v.	w.	öf.	öf.
0,5	v.	k.	schl.	öf.	w.	k.	öf.	schl.
0,6	k.	k.	pl.	schl.	w.	k.	schl.	schl.

Stärke: »v.« = viel; »w.« = wenig; »k.« = kein.
Spaltöffnungen: »pl.« = plasmolysiert; »schl.« = geschlossen; »öf.« = geöffnet.

— eine merkbare Stärkelösung und bedeutendes Öffnen der Stomata trat erst von 0,5 N. an ein, d. h. erwies sich diese Pflanze 10mal beständiger, als die vorhergehende.

Eine ebenfalls sehr hohe Beständigkeit äusserten Aster Tripolium und Glaux maritima, welche auf Salzgründen aufgewachsen waren, was aus Tabelle II ersichtlich ist. Ein merkbares Stärkeverschwinden begann bei ihnen bei 0,5 Norm. Na Cl, und ein Öffnen der Spaltöffnungen bei 0,4 Norm. Ferner gehört dieser Kategorie der Halophyt Plantago maritima an, für den die kritische Konzentration 0,4 Na Cl beträgt. Zu den wenig beständigen muss man Rumex confer-

tus L., Ranunculus repens L., Polygonum Fagopyrum L., rechnen, für welche bereits 0,05 Norm. die kritische Konzentration darstellt. Im allgemeinen äusserten die Wiesenpflanzen die geringste Beständigkeit.

Die Mehrzahl der Versuche auf dem Gebiete der vergleichenden Physiologie wurde mit Hilfe einer anderen Methode angestellt, und zwar wurde der hemmende Einfluss von Na Cl auf die Stärkesynthese untersucht. Taucht man die Epidermis in schwache (0,02—0,1 Norm.) Zuckerlösungen ein, so speichern die Spaltöffnungen ziemlich energisch Stärke, wird aber der Zuckerlösung Chlornatrium oder ein anderes Salz beigegeben, so tritt eine Syntheseverzögerung ein, und es findet nicht nur keine neue Stärkebildung statt, sondern es werden sogar deren frühere Vorräte, falls solche in den Schliesszellen abgelagert wurden, aufgelöst. Am genauesten sind die erzielten Resultate, wenn die Spaltöffnungen zunächst keine Stärke enthalten, zu welchem Zwecke die Blätter am besten bei Licht in feuchter Atmosphäre behalten werden; ausserdem reagiert ein verhältnismässig junges Blatt schneller. Im Nachfolgenden werden die mit Hilfe dieser Methode ausgeführten Beobachtungen beschrieben. Die Gefässe mit den Schnitten wurden gewöhnlich im Dunkeln behalten. Bestimmungen des Stärkegehaltes wurden periodisch vorgenommen und dauerten zuweilen 36 und sogar 48 Stunden. Es ist zu beachten, dass gewöhnlich während der ersten Stunden die Stärke sich ziemlich leicht sogar in verhältnismässig hohen Konzentrationen ansammeln kann, nachher aber allmählich zu verschwinden beginnt. Um den Verlauf des Prozesses zu begreifen, muss man sich in der Zelle die Existenz zweierlei Fermente vorstellen, — eines synthetisierenden und eines analysierenden; das letztere ist wenig salzbeständig, jedoch muss man, wie es die Versuche zeigten, zwecks Einstellung seiner Arbeit einige Stunden lang einwirken lassen, und dann erst überwiegt die Arbeit des analysierenden Ferments und die Stärke löst sich allmählich; die Reaktionsgeschwindigkeit ist nicht für alle Pflanzen dieselbe, die einen werden sehr bald von den Salzen beeinflusst, die anderen dagegen bedürfen einer längeren Einwirkung. Ferner kann nicht bei allen Pflanzen Stärkelösung und Öffnen der Stomata unter dem Ein-

fluss der Salze stattfinden, — es gibt Arten, die nur unter ganz besonderen Bedingungen reagieren, wie z. B. bei Zusatz von stark verdünnten Säuren; überhaupt nimmt der physiologsche Pflanzenschutz gegen die schädliche Salzwirkung mannigfaltige Formen an.

Dass die Pflanzen den Salzen gegenüber verschiedene Beständigkeit besitzen, ist aus Tabelle III ersichtlich, wo

TABELLE III.

Maltose Normal	Salze Mol.	Rumex acetosa		Plantago maritima		Beta vulgaris	
		Nach 6 Stund.	Nach 24 Stund.	Nach 6 Stund.	Nach 24 Stund.	Nach 6 Stund.	Nach 24 Stund.
Na Cl	*Na Cl*						
0,06	0,0	v.	s. v.	v.	s. v.	s. v.	s. v.
0,06	0,05	v.	s. v.	v.	s. v.	s. v.	s. v
0,06	0,1	k.	k.	v.	s. v	s. v.	s. v.
0,06	0,2	k.	k.	v.	v.	s. v.	s. v.
0,06	0,3	k.	k.	w.	v	s. v.	s. v.
0,06	0,4	k.	k.	s. w.	k.	v.	v.
0,06	0,6	k.	k.	k.	k.	w.	k.
	$Na_4 SO_4$						
0,06	0,025	v.	s. v.	v.	v.	v.	s. v.
0,06	0,05	v.	v.	v.	v.	v.	s. v.
0,06	0,1	k.	k.	v.	w.	v.	s. v.
0,06	0,2	k.	k.	w.	k.	v.	s. v.
0,06	0,3	k.	k.	s. w.	k.	v.	v.
0,06	0,4	k.	k.	k.	k.	w.	w.
0,06	0,6	k.	k.	k.	k.	k.	k.

»v.« = viel; »s. v« = sehr viel; »w.« = wenig; »s. w.« = sehr wenig; »k.« = kein.

die Ergebnisse einer gleichzeitigen Untersuchung der Wiesenpflanze Rumex acetosa, der Kulturrübe Beta vulgaris und der Halophyte Plantago maritima angeführt sind. Beta vulgaris ist laut Angaben der agronomischen Literatur äusserst salzbeständig. Epidermisschnitte dieser Pflanzen wurden in 0,06 Norm. Maltoselösungen hineingebracht, denen in verschiedenen Mengen entweder Na Cl oder $Na_2 SO_4$ zugegeben wurde. Maltose stimuliert die Stärkesynthese, Salze hemmen dieselbe. Die Beobachtungen wurden nach Verlauf von 6 und 24 Stunden ausgeführt. Um die Synthese zum Stillstand zu

bringen, genügte bei Rumex acetosa 0,1 Mol. Na Cl, bei Plantago maritima waren dazu bereits 0,4 Mol. und bei Beta vulgaris sogar 0,6 M. erforderlich. Folglich zeigte die erste eine sehr geringe Beständigkeit, die letztere offenbarte dagegen eine starke Gegenwirkung dem schädlichen Einfluss des Salzes. Natriumsulfat wirkte stärker besonders auf Plantago maritima ein, dieses steht mit dem Umstand in engem Zusammenhang, dass bei gleichen Molekularlösungen die Konzentration der Natriumionen im Sulfat höher ist, als in Chlorid.

In Tabelle IV werden die Resultate eines wiederholten Versuches mit Beta vulgaris und Plantago maritima angegeben, die mit den vorhergehenden übereinstimmen.

TABELLE IV

Maltose Norm.	Na Cl. Normal	Beta vulgaris	Plantago maritima
0,075	0,0	s. v.	v.
0,075	0,1	s. v.	v.
0,075	0,2	s. v.	v.
0,075	0,3	v.	v.
0,075	0,4	v.	w.
0,075	0,6	w.	k.

»v.« = viel; »s. v.« = sehr viel; »w.« = wenig; »k.« = kein.

Ferner stellte ich systematische Beobachtungen an einer ganzen Pflanzenreihe an, die aus verschiedenen Vegetationsstandorten stammten: von Wiesen, vom Sandgrund, aus Steppen, aus Salzgründen, aus Sümpfen; ebenfalls wurden einige Kulturpflanzen untersucht. Es ist vollständig verständlich, dass eine besondere Salzbeständigkeit die Halophyten offenbarten. Um einen klaren Begriff darüber zu gewinnen, in welchen Verhältnissen diese Pflanzen zu existieren haben, führte ich eine Analyse des Bodenwassers der in der Umgegend der Stadt Jakaterinoslaw längs dem Dnjepr gelegenen Salzgründe, von denen das Versuchsmaterial stammte, aus und analysierte gleichzeitig den Boden den salzfreien Boden einer neben dem Laboratorium in Jekaterinoslaw auf einer Anhöhe befindlichen Steppe.

In der Wasserprobe wurde der Sulfatgehalt und Chloridgehalt bestimmt, und nach Gefrierpunkterniedrigung — die Molarität der wässerigen Lösung. Die Ergebnisse der Analyse sind in Tabelle V zusammengestellt. In dem Salzboden war 200-mal mehr Chlor- und 51-mal mehr Schwefelsäureanionen als in dem Boden der Steppe enthalten. Für uns hat nicht das absolute Gewichtsquantum der Salze, son-

TABELLE V.

	Steppe	Salzgrund
1. Auf 100 Teile des trockenen Bodens bei 100 % der vollen Wasserkapazität ist Wasser enthalten	41,82	36,37
Dasselbe bei 60 % der vollen Wasserkapazität . .	25,10	21,82
Dasselbe bei 20 % der vollen Wasserkapazität	8,37	7,27
2. 100 Teile des trockenen Bodens enthalten: Cl-Ionen	0,00106	0,2064
SO_4-Ionen .	0,006997	0,3555
3. Cl-Gramm-Ionen in 1 Liter bei 100 % der vollen Wasserkapazität	0,0007	0,1603
Dasselbe bei 60 % der vollen Wasserkapazität . .	0,00119	0,26
Dasselbe bei 20 % der vollen Wasserkapazität	0,0036	0,806
4. SO_4-Gramm-Ionen in 1 Liter bei 100 % der vollen Wasserkapazität .	0,00174	0,1017
Dasselbe bei 60 % der vollen Wasserkapazität .	0,0029	0,1695
Dasselbe bei 20 % der vollen Wasserkapazität	0,0087	0,489
$Cl + SO_4$-Gramm-Ionen in 1 Liter bei 100 % der vollen Wasserkapazität	0,0025	0,262
Dasselbe bei 60 % der vollen Wasserkapazität	0,0041	0,43
Dasselbe bei 20 % der vollen Wasserkapazität .	0,0123	1,30
6. Bestimmung der molekularen Gefrierpunkterniedrigung:		
Gramm-Molekeln in 1 Liter bei 100 % der vollen Wasserkapazität	0,0096	0,37
Dasselbe bei 60 % der vollen Wasserkapazität	0,016	0,62
Dasselbe bei 20 % der vollen Wasserkapazität	0,048	1,71

dern die Molekel- oder Ionenanzahl der in die Boden enthaltenen Salze von überwiegender Bedeutung, weshalb die Angabe in Gramm-Molekeln wichtiger erscheint. Zwecks Bestimmung der Konzentration der Bodenlösungen wurde die volle Wasserkapazität des Bodens gemessen. Auf Grund erhaltenen Grössen berechnete ich die gramm-molekuläre Chlo-

rid- und Sulfatkonzentrationen bei maximalem Wassergehalt des Bodens. Es ergab sich, dass im Salzgrund sogar unter diesen Bedingungen genügende Salzmengen vorhanden sind, um die Stärkesynthese bei gewöhnlichen Pflanzen zum Stillstand zu bringen. Wie aus vorhergehendem und aus nachfolgendem hervorgeht, kann Stärkelösung in Abwesenheit von Zucker sogar bei 0,05 Mol. und eine vollständige Syntheseverzögerung bei Mesophyten bei 0,05—0,1 Mol. eintritt. In Salzböden beträgt die Chloridenkonzentration selbst bei vollständiger Wassersättigung 0,16 Mol., diejenige der Sulfaten aber — 0,1 Mol., was im Ganzen 0,26 Mol. ergibt, dies können natürlich weder Wiesen-, noch Sandpflanzen ertragen. Im gewöhnlichen Boden der Steppe war ihre Konzentration in Tausendsteln und in Zehntausendsteln des Gr.-Mol. ausgedrückt.

Jedoch gehören unter unseren Bedingungen die Fälle einer vollständigen Sättigung des Bodens mit Wasser zu den seltensten; ausserdem wird bei der Betrachtung der Frage über den günstigsten Vegetationsort der Pflanzen derjenige Lebensmoment von entscheidender Bedeutung für die Feststellung der Existenzmöglichkeit der einen oder der anderen Art in den gegebenen Verhältnissen sein, wenn infolge intensiven Austrocknens die Bodenlösung ihr Konzentrationsmaximum erreicht. Zwecks Klärung der in ähnlichen Fällen geschaffenen Bedingungen, habe ich die gramm-molekuläre Salzkonzentration bei dem sog. optimalen Feuchtigkeitsgehalt im Betrage 60% von der vollständigen Wasserkapazität, und bei einem dem Minimum gleichen Feuchtigkeitsgehalt von 20% berechnet. Bei dem optimalen Feuchtigkeitsgehalt erreicht die Chloridenkonzentration 0,26 Mol., diejenige der Sulfate — 0,07 Mol., was zusammengefasst den sehr hohen Wert von 0,43 M. ergibt, bei dem nur noch spezifische Halophyten und einige Kulturarten existieren können. Erreicht aber die Trockenheit des Bodens 20% der Wasserkapazität, so steigt die Konzentration der Bodenlösungen bis zu äusserst hohen Werten an, indem sie für Chloride 0,8 Mol. und für Sulfate fast 0,5 M. beträgt, was zusammen 1,3 M. ergibt; unter dergleichen Bedingungen aber ist nicht nur die Existenz gewöhnlicher Pflanzen, sondern auch die der ausgeprägtesten

Halophyte unmöglich. Im gewöhnlichen Grund erreicht unter diesen extremen Bedingungen die Konzentration höchstens ein Hundertstel Mol.

Um einen vollständigen Begriff über die Konzentration der Bodenlösungen zu gewinnen, muss man nicht nur die Chloride und die Sulfate, sondern auch andere Salze und die Gesamtzahl der Molekeln und der Ionen in Betracht ziehen. Zur Erzielung einer vollständigeren Berücksichtigung bestimmte ich die molekulare Gefrierpunkterniedrigung der wässerigen Lösungen des Salzgrundbodens und des Steppebodens, und berechnete auf Grund dieser Grössen die molekulare Konzentration bei 100%, 60% und 20% der vollen Wasserkapazität. Wie zu erwarten war, ergaben sich Werte höherer Ordnung, als bei der Berücksichtigung nur der Anione der Chloride und der Sulfate; bei 100% der vollen Wasserkapazität erreichte die Konzentration —0,33 Mol., bei 60% —0,62 M. und bei 20% —1,71 M. Hierbei ist aber vorwegzunehmen, dass die letzten Zahlen etwas vergrössert sein müssen, da die Bestimmung der Erniedrigung des Gefrierpunktes in verdünnter Lösung ausgeführt wurde, wo die Salzdissoziation bedeutende Werte erreichte; mit zunehmender Konzentration muss sie immer mehr abnehmen. Nimmt man diesen Umstand in Betracht, so nähern sich die mit Hilfe der letzten Methode erhaltenen Zahlen den früheren.

Die angeführte Bodenanalyse zeigt sehr deutlich, dass die Salzkonzentrationen in salzhaltigen Boden um vieles die kritischen Konzentrationen übertreffen, nach Überschreitung deren die Stärkesynthese bei der Mehrzahl der Pflanzen schon nicht mehr stattfinden kann, was im Nachfolgenden gezeigt wird.

Nunmehr wende ich mich zur Prüfung der Versuchsergebnisse, die Tabelle VI zusammengefasst sind. Hierin wird gezeigt, bei welcher kritischen Chlornatriumkonzentration, ausgedrückt in Gramm-Molekeln, die Stärkespeicherung in den Schliesszellen aufhört, wenn ihnen Zucker zugeführt und dadurch die Synthese stimuliert wird. Es wurden 40 verschiedene Arten untersucht, wobei mit den meisten von ihnen die Versuche wiederholt wurden. In der Tabelle sind die Arten ihren biologischen Gruppierungen gemäss geordnet.

TABELLE VI.

1. Wiese.	
Rumex acetosa	0,07—0,075
Ranunculus repens	0,05—0,05
Trifolium medium	0,07
Scrophularia nodosa	0,07—0,075—0.1
Geranium collinum	0,1
Glechoma heberacea	0,1
Myosotis palustris	0,1—0,1
2. Salzgrund.	
Plantago maritima	0,4—0,4
Plantago major	0,4—0,4
Taraxacum salinun	0,4
Aster Tripolium	0,4—0,5
Chenopodium crassifolium	0,3—0,6
Rumex maritimus	0,3—0,4—0,6
Glaux maritima	0,3—0,6—0,6
3. Sumpf.	
Sagittaria sagittifolia	0,05—0,075
Ranunculus sceleratus	0,12
Alisma arcuatum	0,15
Nymphaea alba	0,2—0,2
Potamogeton natans	0,2
Hydrocharis morsus ranae	0,1—0,15—0,2—0,3
Alisma Plantago	0,3—0,3
4. Sand.	
Linaria odorata	0,05—0,05
Thymus odoratissimus	0,075—0,075
5. Steppe und Abhänge.	
Sempervivum ruthenicum	0,075—0,075
Scabiosa ochroleuca	0,075—0,075
Sedum Telephium	0,12—0,12—0,15
Campanula sibirica	0,15
Plantago major	0,15
Portulaca oleracea	0,2—0,2
Lycium barbarum	0,6
6. Kulturpflanzen.	
Prunus cerasus	0,1
Polygonum Fagopyrum	0,07—0,075
Vicia Faba	0,075—0,1
Dolichos sinensis	0,1
Brassica oleracea	0,15—0,15—0,2
Cucurbita Pepo	0,05
Citrulus vulgaris	0,15—0,2—0,2
Helianthus annus	0,2
Phaseolus vulgaris	0,4
Beta vulgaris (Sand)	0,4
„ „ (Salzgrund)	0,6—0,6—0,6—0,8
„ „ (Steppe)	0,6—0,6—0,6—0,8

Am empfindlichsten zeigten sich gegen die Salzwirkung die Wiesenpflanzen, bei ihnen hörte die Synthese in einigen Fällen bereits bei einem Zusatz von 0,05 Mol. Na Cl auf. Die höchste Konzentration betrug nur 0,1 M.; der Mittelwert aus 12 Messungen für 7 Arten ist 0,08 M. In allen diesen Fällen wurden Pflanzen von Wiesen und aus niedrigem Gesträuch entnommen, wo keine Anhäufung von Bodensalzen stattfindet.

Dieselbe schwache Empfindlichkeit äusserten auch zwei Sandpflanzen — Liniaria odora und Thymus odoratissimus, — bei ihnen blieb ebenfalls bei 0,05—0,075 M. die Stärkebildung bereits aus.

Äusserst salzbeständig sind dagegen die vorzugsweise in Salzgründen wachsende Pflanzen. Nur in verhältnissmässig seltenen Fällen betrug die kritische Konzentration 0,3 Mol., meistenteils entsprach sie aber 0,4—0,5 M. und erreichte 0,6 M.; als Mittelwert aus 15 Messungen für 7 verschiedene Arten ergab sich 0,44 M. Stellt man dies mit der obenangeführten Analyse nebenan und berücksichtigt man, dass die Pflanzen gewöhnlich von feuchtem Salzgrundboden genommen wurden, so wird es verständlich sein, dass für sie eine Erhöhung der kritischen Konzentration bis zu den angegebenen Grenzen eine Existenznotwendigkeit ist; sogar bei einer vollständigen Sättigung des Bodens mit Wasser kann die Konzentration sich dem Werte 0,3 nähern; zieht man ausserdem die Unebenheiten des Bodens, infolge deren einzelne Erhöhungen mehr austrocknen können, und die bedeutenden Dürreperioden, die in der Steppezone oft vorkommen, sowie die ungleichmässige Wurzelnverteilung im Boden in Betracht, so wird hieraus klar, dass die kritische Konzentration bei den Halophyten die gefundenen Zahlen nicht unterschreiten kann, widrigenfalls ihre Existenz unmöglich wird. Wären die Salzgründe einem starken Austrocknen ausgesetzt, so müssten die Pflanzen ihre Salzbeständigkeit bedeutend erhöhen.

Es folgen nun die Sumpfpflanzen, die ein ziemlich gemischtes Bild bieten; hier können Schwankungen von 0,05 Mol. bis 0,3 M. festgestellt werden. Den geringsten Wert lieferte Sagittaria sagittifolia, welche nicht vom Sumpf, sondern vom Flussufer genommen wurde, wo natürlich von irgend einer

Versalzung keine Rede sein kann. Überhaupt sind die in dieser Gruppe vorkommende Mannigfaltigkeit und die verhältnissmässig hohe Salzbeständigkeit vollauf erklärlich; einige von diesen Gattungen können leicht in Sümpfen inmitten von ausgeprägten Salzgründen vegetieren, wo gewöhnlich nach dem Austrocknen am Rande ein Salzkrust bestehen bleibt. Ausserdem enthalten Sümpfe an und für sich zweifelsohne Salze, welche hierher aus dem umgebenden Boden ausgespült, beim Fäulnisprozess gebildet und ausserdem im Laufe des heissen Sommers als Folge der Verdunstung des Wassers und der anhaltenden Konzentration angehäuft werden, wobei bis zum Herbst die Sumpfbecken sehr bedeutend austrocknen. Deshalb ist eine bedeutende Salzmenge an diesen Orten sehr wahrscheinlich, und ist auch die Mannigfaltigkeit und die verhältnismässig hohe mittlere Salzbeständigkeit bis 0,3 M. (ausgenommen Sagittaria sagittifolia), vollständig begreiflich.

Ebenfalls ziemlich bunte Eigenschaften weisen die unter »Steppe und Abhänge« zusammengefassten Pflanzen auf. Hier wurden Arten von Wiesensteppen und selbst von Wiesen, wie z. B. Plantago major u. Scabiosa ochroleuca, die verhältnismässig geringe Werte 0,075—0,15 M. lieferten, geprüft. Ebenfalls die Sukkulenten Sempervivum ruthenicum und Sedum Telephium mit 0,075—0,15 M. Hierunter befindet sich auch das Gesträuch Lycium barbarum, das sehr leicht an sehr trockenen Abhängen vegetiert; bei dieser Art ist die kritische Konzentration äusserst hoch — 0,6 Mol. Gewiss lässt sich in unseren Steppen auch eine, wenn auch unbedeutende Versalzung beobachten, von wichtigster Bedeutung für das Leben der Pflanzen kann die hohe Bodentrockenheit sein, die bei uns sehr oft vorkommt; unter diesen Bedingungen kann aber ein selbst unbedeutender Salzgehalt des Bodens ziemlich bedeutend werden; ausserdem sind diese Pflanzen oft einer Entwässerung ihrer Organe ausgesetzt.

Ferner kommen diverse Kulturpflanzen, unter denen die Unterschiede ebenfalls gross sind: die einen, wie z. B. Cucurbita Pepo, Fagopyrum esculentum, Vicia Faba, Prunus cerasus und Dolichos sinensis zu sehr wenig beständigen Typen gehören und nur 0,05—0,1 Mol. aushalten; eine

Mittelstellung nehmen die Gurke Citrulus vulgaris, der Koll Brassica oleracea, die Sonnenblume Helianthus annuus (bis 0,2 M.) ein, eine verhältnismässig hohe Beständigkeit zeigte Phaseolus vulgaris, bis 0,4 M., die mit Erfolg in den trockenen Steppen des Südens kultiviert wird. Am beständigsten war die Rübe Beta vulgaris, die im Mittel einer Konzentration von 0,6 M. Stand hielt, und zuweilen sogar bis 0,8 Mol.

Man könnte zum Schluss kommen, dass zwischen der Salzbeständigkeit und der Trockenbeständigkeit ein gewisser Zusammenhang existieren muss, was auch tatsächlich in den zwei letzten Fällen eintritt. Die in stärkerem Masse von der Dürre leidenden und in salzfreiem Boden wachsenden Pflanzen äussern eine sehr geringe Beständigkeit und offenbaren die Bewohner von trockenen Gegenden umgekehrte Verhältnisse. Das ist ganz klar, da der Salzgehalt in grösserem oder geringerem Masse einigen trockenen Böden eigen ist; ausserdem können in denselben infolge bedeutenden Austrocknens die Konzentrationen erheblich zunehmen; ich hatte bereits gezeigt, wie das bei der Abnahme des Feuchtigkeitsgehaltes von 100% der vollen Wasserkapazität bis 20% passiert. Pflanzen salzfreier und feuchter Böden sind dieser Gefahr nicht ausgesetzt.

In einer anderen Arbeit[1]) hatte ich gezeigt, dass die Salzbeständigkeit der Pflanzen sich auf künstlichem Wege erhöhen lässt, und es gelang mir eine Erhöhung um 2,3- und 5-mal zu erreichen; ferner konnte man auf Grund derselben Versuche zum Schluss kommen, dass die Pflanzen gerade auf dem Wege, dessen ich mich in meinen Untersuchungen bedient hatte, ihre Salzbeständigkeit in natürlichen Verhältnissen erhöhen. Hieraus kommt man zum Schluss, dass die Salzbeständigkeit keine konstante Grösse darstellt, sondern von der Pflanze selbst unter dem Einfluss äusserer Bedingungen geändert werden kann. Ich habe in dieser Richtung keine speziellen Versuche angestellt und spreche meine Voraussetzungen nur auf Grund ebenderselben Tabelle VI aus. Aus letzterer ist ersichtlich, dass ein und dieselbe, zu verschiedener Zeit und unter verschiedenen Bedingungen unter-

[1]) W. S. Iljin. Biochemische Zeitschrift 1922.

suchte Art verschiedene Ergebnisse liefert, es betragen z. B. bei Sagitaria sagittifolia die Schwankungen von 0,05 M bis 0,075 M. bei Brassica oleracea und bei Citrulus vulgaris von 0,15 bis 0,2 M., noch grössere Unterschiede ergeben sich bei Hydrocharis morsus ranae — von 0,1 bis 0,3 M., oder bei Rumex maritimus und Glaux martima von 0,3 bis 0,6 M. u. s. w. In dieser Beziehung sind Plantago major und die Rübe Beta vulgaris von grossem Interesse: die erste Art ist im allgemeinen sehr verbreitet und vegetiert an ziemlich verschieden beschaffenen Orten; gegebenenfalls stammte ein Exemplar aus der Baumschule von einer ziemlich feuchten Stelle; die Analyse der wässerigen Bodenlösung war oben angegeben und wies einen minimalen Gehalt lösbarer Salze nach; ein anderes Exemplar nahm ich aus einem Salzgrund, dessen Analyse ebenfalls angeführt ist; für das erste Exemplar betrug die kritische Konzentration 0,15 M., für das zweite — 0,4 M. Vielleicht haben wir hier nur mit zwei Abarten zu tun, die nur in ihren physiologischen Eigenschaften, welche äusserlich keinen Ausdruck gefunden haben, von einander abweichen, weshalb die Morphologen dieselben noch nicht unterscheiden können; es muss doch eingeräumt werden, dass die spezifischen Eigenschaften und Merkmale der Arten und Abarten nicht nur von morphologischer, sondern auch von physiologischer Natur sein können, und dass die letzteren nicht unbedingt in einer Veränderung der äusseren Form zum Ausdruck kommen. Jedoch ist es ebenfalls möglich, dass ein und dieselbe Art ihre Eigenschaften in Abhängigkeit von den äusseren Bedingungen zu ändern vermag.

Ein weiteres interessantes Beispiel liefert die Rübe Beta vulgaris, die drei verschiedenen Vegetationsorten entnommen wurde — vom sandigen Flussufer, vom feuchten Salzgrund, wo der Salzgehalt nicht zu hoch war, und von der Steppe zu einer trockenen und heissen Periode. Im ersten Falle betrug die kritische Konzentration = 0,4 M., in den zwei anderen = 0,6—0,8 M. Hierbei konnten gewiss die äusseren Bedingungen mit in's Gewicht fallen, doch sind wiederum die Sortenunterschiede nicht ausgeschlossen, denn es war ja kein präzis angestellter Versuch, wo eine bestimmte Art unter verschiedenen Bedingungen ausgesät wurde, sondern

es wurde bereits vorhandenes zufälliges Material genommen. Wäre es aber denn tatsächlich so, dass die Salzbeständigkeit der Pflanzen sich künstlich verändern liesse, so ist es auf keinen Fall denkbar, dass die Änderungen sehr gross sein könnten, und dass unter gleichen Bedingungen sämtliche Arten ein und dieselbe Salzbeständigkeit äussert, — denn das wäre eine zu grosse Vereinfachung der Frage. Physiologisch kann die Salzbeständigkeit, wie meine Untersuchungen es zeigten, durch nicht von der Menge der aktiven Salze abhängigen Ursachen, sondern von der physiologischen Eigenschaft, gewisse Substanzen anzuhäufen und zu produzieren, beeinflusst werden; so vermag z. B. eine bedeutende Zuckeranhäufung die Salzbeständigkeit stark erhöhen; ferner könnte die Reaktion des Mediums, d. h. der Säuregehalt und die Alkalessenz von Bedeutung sein; endlich auch die Ansammlung von Calcium und anderen benachbarten Salzen; wir wissen indess, dass Wahlfähigkeit eine spezifische Eigenschaft der Arten ist. Deshalb weist bei verschiedenen Arten, obgleich dieselben auch in gleichen Verhältnissen vegetieren, die Salzbeständigkeit bedeutende Abweichungen auf; bei mir wuchsen z. B. in der Baumschule auf gleichem Boden und bei gleichem Feuchtigkeitsgehalt verschiedene Arten auf, die abweichende Salzbeständigkeit äusserten, wie z. B. Rumex acetosa, Polygonum Fagopyrum, Vicia Faba, bei welchen die kritische Konzentration 0,075—0,1 M. betrug; Helianthus annuus mit dem Wert 0,2 M. und die an demselben Ort wachsende Beta vulgaris mit —0,6 M. Also sind die Artseigenschaften unbestreitbar.

Bei der Untersuchung der von mir behandelten Frage wäre von grossem Interesse, den Einfluss der Salzkonzentrationen nicht auf die Schliesszellen der Spaltöffnungen, sondern auf die Wurzeln, die unmittelbar mit diesen Salzen in Berührung kommen, zu studieren. In dieser Richtung habe ich nur einleitende Versuche angestellt. Ich hatte jedoch auch eine andere Frage angeschnitten, nämlich den Einfluss der Chlornatriummenge auf die Lösung und Speicherung von Stärke in dem chlorophyllhaltigen Parenchym. Bei dem Studium sowohl dieser Frage, als auch bei der Untersuchung der Spaltöffnungen begegnet man der Schwierigkeit, dass nicht

immer und nicht bei allen Pflanzen die Salze ein Verschwinden der Stärke hervorzurufen vermögen. An dieser Stelle will ich nur zwei Tabellen angeben. In einem Falle wurden Pflanzenblätter mit grossem Stärkegehalt in dem Parenchym in einzelne Teile zerschnitten, in Na Cl-Lösungen von verschiedener Konzentration hineingebracht und der Lichtwirkung ausgesetzt. Nach Verlauf von 24 Stunden wurde ein Nachweis von Stärke sowohl in dem Parenchym, als auch in den Spaltöffnungen vorgenommen. Die Ergebnisse sind

TABELLE VII.

Na Cl Normal.	Rumex acetosa L.		Petunia violacea Lindl		Rumex maritimus L.	
	Stomata	Parenchym	Stomata	Parenchym	Stomata	Parenchym
0,0	s. v.	s. v.	s. v.	s. v.	s. v.	s. v.
0,05	s. w.	v.	s. v.	s. v.	s. v.	s. v.
0,1	k	s. w.	v.	s. v.	s. v.	s. v.
0,15	k.	k.	s w.	s. v.	s v.	s. v.
0,2	k	k.	k.	v.	s. v.	s. v.
0,3	k.	k.	k.	s. w.	s. v.	s. v.
0,4	k.	k.	k.	k.	s. v.	s. v.
0,6	k.	k.	k.	k.	v.	k.

»s.« = sehr; »v.« = viel; »w.« = wenig; »k.« = kein.

in Tabelle VII zusammengestellt. Das Salz bewirkte bei gewissen hohen, für jede einzelne Art spezifischen Konzentrationen eine Spaltung der Stärke. Beim Mesophyt Rumex acetosa verschwand die Stärke in Parenchym bei einer Konzentration von 0,1 M.; beim Halophyt Rumux maritimus erst bei 0,6 M., was zweifelsohne einen bedeutenden Unterschied darstellt; Petunia violacea nahm eine Mittelstellung ein und ergab 0,3 M. Ebenfalls war die Salzbeständigkeit der Schliesszellen verschieden: am niedrigsten war sie bei der ersten Art, am höchsten beim Halophyt, mittelgross bei Petunia, Hierbei ist aber zu beachten, dass die Beständigkeit der Stomata und des Parenchyms nicht dieselbe ist, und dass auf Grund der einen man sich nur einen annähernden Begriff von der anderen bilden kann.

In Tabelle VIII sind die Versuche an 3 Arten zusammengefasst. Eine sehr geringe Beständigkeit besitzt Myosotis palustris —0,05 M., eine etwas höhere — Hydrocharis

TABELLE VIII.

Saccharose Normal	Na Cl Normal	Potamogeton natans		Hydrocharis morsus ranae	Myosotis palustris	
		I. Versuch	II. Versuch		I. Versuch	II. Versuch
0,1	0.0	v.	v.	v.	v.	v.
0,1	0,05	v.	v.	v.	k.	k.
0,1	0,1	v.	v.	k.	k.	k.
0,1	0,15	k.	k.	k.	k.	k.
0,1	0,2	k.	k.	k.	k.	k.
0,1	0,3	k.	k.	k.	k.	k.

»v.« = viel; »k.« = kein.

morsus ranae — 0,1 M., und eine noch höhere — Potamogeton natans — 0,15 M. Hier war ausser Salz noch überall Saccharose von der Konzentration 0,1 Norm. beigefügt.

W. Iljin.

Jekaterinoslaw.
Landwirtschaftliche Landesversuchungsstation.
1921.

Résumé.

Sur divers resistences des plants envers les sels.

W. S. Iljin.

L'action sur la plante des sels se trouvant dans le milieu ambiant dépend en premier lieu de la quantité et de la nature de ces derniers. Abstraction faite de leur importance comme matière alimentaire, les ions de sels jouent dans la vie des plantes un important rôle physico-chimique. Sous l'influence d'ions univalents des métaux alcalins, ainsi que d'ions du baryum et du beryllium, et de certains anions organiques l'amidon contenu dans la cellule végétale vivante est hydrolysé et transformé en sucre. Il en résulte une sensible augmentation de turgescence des cellules, et comme corollaire, les stomates s'ouvrent grands ouverts. Un ion très actif est celui du sodium très fréquent dans la nature, tant dans l'eau que dans le sol.

Dans ses recherches de physiologie comparée, l'auteur de ces lignes a étudié le comportement de différentes espèces de plantes vis-à-vis du chlorure de sodium à divers degrés de concentration. Dans certaines espèces l'amidon était déjà hydrolysé à une concentration de 0,05 à 0,1 Mol, d'autres ont pu résister à des solutions beaucoup plus concentrées, p. ex. chez la Beta vulgaris et les halophytes l'hydrolyse n'a eu lieu qu'à une concentration de 0,4 à 0,5 Mol.

Dans les cellules végétales placées dans de faibles solutions de maltôse on observe une energique synthèse d'amidon; ce processus est arrêté si l'on ajoute soit NaCl soit d'autres sels. L'auteur a étudié sous ce rapport 40 espèces de plantes appartenant à divers types oecologiques. A part de l'analyse physiologique des plantes en question, il a analysé — en préparant des extraits aqueux — le sol d'un salin et celui d'une steppe typique. L'analyse a démontré dans ces deux cas une enorme différence en ce qui concerne la teneur en sels. Dans les plantes des prairies placées dans une solu-

tion de maltôse la syntèse de la fécule s'arrête si l'on ajoute à la solution 0,05 à 0,1 NaCl. Les plantes arénicoles accusent le même phénomène. Pour arrêter le processus en question chez les plantes propres aux salins il est nécessaire d'employer une concentration de NaCl de 0,4 à 0,5 Mol voire même quelquefois de 0, 6 Mol; dans le cas exceptionnels il a suffi d'une solution à 0,3 Mol. Les plantes des marécages ont fourni des résultats assez divers, le degré critique de concentration variant dans ce cas de 0,2 — 0,3 Mol. Or dans cette dernière catégorie il y a bon nombre d'espèces susceptibles d'habiter dans le sol salin.

Parmi les plantes des steppes on trouve également des espèces très différentes à ce point de vue. Les plantes cultivées présentent le même, c'est la Beta vulgaris qui a fait preuve de la plus grande capacité de résistance. Dans cette espèce la synthèse d'amidon ne s'est arrêtée que sous l'influence d'une solution de 0,6 et même de 0,8 NaCl.

Pour la même espèces végétale le degré de résistence envers les sels n'est point une grandeur constante; par contre il varie selon l'habitation. Les écarts peuvent être assez considérables.

VII.

Les congruences dans les espaces non-euclidéens

par **V. Hlavatý.**

Présenté le 13 novembre 1923.

Introduction.

Le traité suivant se sert de la méthode du calcul affinoriel direct, inventé par M. J. A. Schouten[1]) et appliqué de même par M. D. J. Struik dans son excellent livre »Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung« (Springer 1922) (Il sera signalé par St...).

Pour nous faire intelligible ce discours, il nous faut toucher légèrement quelques problèmes fondamentaux de cette méthode, plus ou moins contenus aux travaux dessus-cités.

La métrique dans une multiplicité à n-dimensions non-euclidéenne M_n est donnée par le tenseur contravariant fondamental

1.) $$^2\mathbf{g}' = g^{\lambda\mu}\,\mathbf{u}'_\lambda\,\mathbf{u}'_\mu = \mathbf{a}'_1\,\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}'_2\,\mathbf{a}'_2 = \ldots = \mathbf{b}'\,\mathbf{b}' = \mathbf{c}'\,\mathbf{c}'$$
$$a^\lambda\ a^\mu\quad {}'_\lambda\,\mathbf{u}'_\mu\ ^2)$$

$\mathbf{u}'_\lambda$ est le vecteur métrique contravariant de la même direction que l'élément linéaire avec les composantes $dx^\mu = o\ \ \mu \leq \lambda$. Les $\mathbf{a}'$ $\mathbf{b}'$ $\mathbf{c}'$ sont les vecteurs contravariants idéals équivalents avec le composantes $a_\lambda \ldots b_\lambda\ c_\lambda$ telles, que

2.) $$a_1{}^\lambda\ a_1{}^\mu = a_2{}^\lambda\ a_2{}^\mu = \ldots\ a^\lambda\ a^\mu = b^\lambda\ b^\mu = c^\lambda\ c^\mu = \ldots = g^{\lambda\mu}$$

Nous indiquerons par $g_{\lambda\mu}$ le facteur de l'élément $g^{\lambda\mu}$ dans

[1]) Voir par exemple J. A. Schouten »Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung« (Math. Zeitschrift 1921, 58), signalé dans ce traité par Sch...)

[2]) Nous suivons ici l'ingénieuse convention de M. Einstein touchant la sommation.

le développemént du déterminant $|\, g^{\lambda\mu}\,|$, divisé par ce déterminant lui-même. —

On obtient le tenseur fondamental covariant à la forme

3.) $$^2\mathbf{g} = g_{\lambda\mu}\,\mathbf{u}_\lambda\,\mathbf{u}_\mu = \mathbf{a}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_2 = \ldots = \mathbf{b}\,\mathbf{b} = \mathbf{c}\,\mathbf{c} = \ldots = a_\lambda\,a_\mu\,\mathbf{u}_\lambda\,\mathbf{u}_\mu$$

Les $\mathbf{u}_\lambda$ — qui forment avec les dx^λ deux séries cogrédientes — sont les vecteurs métriques covariants.[3]) Les $\mathbf{a}\quad\mathbf{b}.\ \mathbf{c}\ldots$ s'appellent des vecteurs covariants idéals équivalents avec les composantes $a_\lambda \ldots\ b_\lambda \ldots\ c_\lambda$ telles, que

4.) $$a_{1,\lambda}\,a_{1,\mu} = \ldots = a_\lambda\,a_\mu = b_\lambda\,b_\mu = c_\lambda\,c_\mu = g_{\lambda\mu}$$

A l'aide de ces deux tenseurs fondamentaux, on parvient à l'identification des vecteurs co- et contravariants

5.) $$\mathbf{v} = v^\lambda\,\mathbf{u}'_\lambda = v_\mu\,\mathbf{u}_\mu = \sum_1^n{}^j\, v_j\,\mathbf{i}_j$$

$$^2\mathbf{g}' = {}^2\mathbf{g} = g^{\lambda\mu}\,\mathbf{u}'_\lambda\,\mathbf{u}'_\mu = g_{\lambda\mu}\,\mathbf{u}_\lambda\,\mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_\lambda\,\mathbf{u}'_\lambda = \mathbf{u}'_\mu\,\mathbf{u}_\mu = \sum_1^n{}^j\,\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_j$$

(Les vecteurs perpeudiculaires reçoivent des indices latins et leur sommation sera indiquée par Σ). Le produit scalaire de deux vecteurs co- ou contravariant s'écrit

6.) $$\mathbf{v}\ \mathbf{w} = g^{\lambda\mu}\,v_\lambda\,w_\mu \qquad \mathbf{v}'\,.\,\mathbf{w}' = g_{\lambda\mu}\,v^\lambda\,w^\mu$$ [4])

Par contraction du terme $g^{\lambda\mu}\,v_\lambda\,w_\mu$ ou $g_{\lambda\mu}\,v^\lambda\,w^\mu$ [5]) on parvient aux équations

7.) $$g^{\lambda\mu}\,v_\lambda\,w_\mu = v^\mu\,w_\mu = \mathbf{v}'\,\underline{|}\,\mathbf{w}$$
$$g_{\lambda\mu}\,v^\lambda\,w^\mu = v_\mu\,w^\mu = \mathbf{v}\,\underline{|}\,\mathbf{w}'$$

C'est pour cela, que nous appellerons le produit $\mathbf{v}\,\underline{|}\,\mathbf{w}'$ ou bien $\mathbf{v}'\,\underline{|}\,\mathbf{w}$ la première contraction. La i-tième contraction s'écrit

[3]) Sch. page 61 nous apprend la cohérence des $\mathbf{u}'_\lambda$ et $\mathbf{u}_\mu$.

[4]) Les $\mathbf{i}$ dans la forme 5 satisfont à l'équation

$$\sqrt{\mathbf{i}_j\,.\,\mathbf{i}_j} = 1 = (\mathbf{i}_j)_m$$

[5]) Voir Juvet: »Introduction au calcul tensoriel« Paris, Blanchard 1922.

7'.) $$\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_p \overset{i}{:} \mathfrak{w}'_1\,\mathfrak{w}'_2 \qquad \mathfrak{w}'_g = \overset{p}{\mathfrak{v}} \overset{g}{\overset{i}{:}} \mathfrak{w}' =$$
$$(\mathfrak{v}_p \overset{1}{:} \mathfrak{w}'_1)\,(\mathfrak{v}_{p-1} \overset{1}{:} \mathfrak{w}'_2) \ldots (\mathfrak{v}_{p-i+1} \overset{1}{:} \mathfrak{w}'_i)\;\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{p-i}\,\mathfrak{w}'_{i+1}. \qquad \mathfrak{w}'_g$$

Par suite des équations 1. 3. 7. on parvient aisément aux formules

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}' \overset{1}{:} \mathfrak{v}) \qquad \mathfrak{v}' = \mathfrak{a}'\,(\mathfrak{a} \overset{1}{:} \mathfrak{v}')$$

8.) $$\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_{i-1}\,\mathfrak{v}'_i\,\mathfrak{v}_{+1} \ldots \mathfrak{v}_p = \mathfrak{v}'_i \overset{1}{:} \mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_{i-1}\,\mathfrak{a}'\mathfrak{v}_{i+1} \ldots \mathfrak{v}_p$$
$$\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_{i-1}\mathfrak{v}_i\mathfrak{v}_{i+1}. \;.\mathfrak{v}_p = \mathfrak{v}_i \overset{1}{:} \mathfrak{a}'\,\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_{i-1}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_{i+1} \ldots \mathfrak{v}_p$$

En identifiant les vecteurs co- et contravariants, on peut aussi identifier le produit scalaire avec la première contraction

8'.) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})$$
$$\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_{i-1}\,\mathfrak{v}_i\,\mathfrak{v}_{i+1} \ldots \mathfrak{v}_p = \mathfrak{v}_i \overset{1}{:} \mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 \ldots \mathfrak{v}_{i-1}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_{i+1} \ldots \mathfrak{v}_p$$

L'affineur covariant $\overset{p}{\mathfrak{v}}$ peut être regardé comme produit général des p vecteurs (idéals)

9.) $$\overset{p}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{v}_3 \ldots \mathfrak{v}_p = \mathfrak{v}_1 \circ \mathfrak{v}_2 \circ \mathfrak{v}_3 \circ \ldots \circ \mathfrak{v}_p$$

Chaque changement de la position d'uns de vecteurs $\mathfrak{v}_i$ nous offre un isomeur, qui s'appelle pair où impair selon le nombre de permutations inverses pairs où impairs. La somme de tous les isomeurs, divi-ée par $p!$ s'appelle le produit vectoriel symétrique, et s'écrit

10.) $$^{p}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \smile \mathfrak{v}_2 \smile \mathfrak{v}_3 \qquad \smile \mathfrak{v}_p = \mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2\,\overset{\smile}{\mathfrak{v}_3}. \qquad \mathfrak{v}_p$$

Cette somme est un tenseur (affineur symétrique). La somme de tous les isomeurs pairs, diminuée de la somme de tous les isomeurs impaires — divisée par $p!$ — s'appelle le produit vectoriel antisymétrique (ou p-vecteur)

11.) $$_{p}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \frown \mathfrak{v}_2 \frown \mathfrak{v}_3 \qquad .\frown \mathfrak{v}_p = \mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2\,\overset{\frown}{\mathfrak{v}_3} \ldots \;.\mathfrak{v}_p$$

Si l'on peut écrire comme produit de p, vecteurs réels, on l'appelle p-vecteur simple.

(Cette considération est valable de même pour les affineurs contravariants).

Par $\mathbf{a}^{p\frown}\mathbf{a}^{p\frown}$ on désigne le produit vectoriel

12.) $$\mathbf{a}^{p\frown}\mathbf{a}^{p\frown} = (\mathbf{a}_1\widehat{\ }\mathbf{a}_2\widehat{\ }\mathbf{a}_3\widehat{\ }\ldots\ldots\widehat{\ }\mathbf{a}_p)\ (\mathbf{a}_1\widehat{\ }\mathbf{a}_2\widehat{\ }\mathbf{a}_3\widehat{\ }\ldots\ldots\widehat{\ }\mathbf{a}_p)$$

où les $\mathbf{a}$ sont les vecteurs idéals équivalents d'un tenseur $\mathbf{aa}$.

L'opération $\overset{r}{\frown}\!\!\mid$ s'explique par l'équation

13.) $$_p\mathbf{v}\overset{r}{\frown}\!\!\mid\overset{q}{\mathbf{w}} = (_p\mathbf{v}\,\overbrace{\mathbf{w}_1\,\mathbf{w}_2}\,\mathbf{w}_3\ldots\ldots\mathbf{w}_r)\ \mathbf{w}_{r+1}\ldots\ldots\mathbf{w}_q$$

Nous définissons le vecteur idéal covariant ∇ par l'équation

14.) $$\nabla = \mathbf{u}_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

et l'opération »d« par

15.) $$d = d\,\mathbf{x}'^{\lambda}\,\nabla \qquad (d\,\mathbf{x}' = d\,x^\lambda\,\mathbf{u}'_\lambda).$$

Supposons pour cette opération les règles suivantes

I. Soient Φ, ψ des formes affinorielles, où des formes scalaires, ou en obtient par $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ les formes du même genre.

II. $$d\,\Phi = \frac{\partial\,\Phi}{\partial x^\lambda}\,dx^\lambda$$

III. $$d\,(\Phi+\psi) = d\,\Phi + d\,\psi$$

IV. $$d\,(\Phi\,\psi) = (d\,\Phi)\,\psi + \Phi\,d\,\psi\ ^{6})$$

Pour le déplacement, nous faisons outre cela des suppositions suivantes

V. $$d\,\mathbf{u}_\lambda\,\mathbf{u}_\lambda' = 0$$

VI. $$\nabla\frown\nabla\ p = 0 \quad (\text{où bien } (d_1\,d_2 - d_2\,d_1)\,\mathbf{x}' = 0)$$

VII. $$d^{\,2}\mathbf{g}' = 0\ ^{7})\ ^{8}).$$

Le déplacement parallèle ainsi défini est le déplacement de Riemann parallèle d'après M. Levi-Civita. (Le parallélisme géodésique; la différentiation géodésique).

---

6) St. p. 38.

7) Sch. 70, 71.

8) d'où suit Lemma de M. Ricci $d^{\,2}\mathbf{g} = 0$.

Remarque: En supprimant quelques conditions des trois dernières, on obtient le déplacement plus général. Par exemple le déplacement affine est défini par V, VI, $\nabla\, {}^2\mathbf{g} = \overset{3}{\mathbf{T}}\cdots$, et pour le déplacement de M. Weyl on a V, VI, $\overset{3}{\mathbf{T}}\cdots = \mathbf{T}\,{}^2\mathbf{g}$.

I.

Quoique le vecteur ∇ soit défini comme vecteur covariant, on peut touver sa définition dans le système orthogonal où

16.)
$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{g}' = {}^2\mathbf{g} &= \sum_1^n{}^{i,j}\, a_i\, a_j\, \mathbf{i}_i\, \mathbf{i}_j = \mathbf{a}\,\mathbf{a} \\ a_i\, a_j &= 1 \text{ pour } i = j \\ &= 0 \text{ pour } i \neq j \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{v}$ un vecteur quelconque, donné par l'équalion 5. La composante (l, k) de l'affineur $\nabla\mathbf{v}$ est donnée par

17.) $\mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l\, {}^2\, \nabla\, \mathbf{v} = \sum_1^n{}^i\, \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l\, {}^2\, (\nabla v_i)\, \mathbf{i}_i + \sum^i v_i\, \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l\, {}^2\, (\nabla\, \mathbf{i}_i) = {}^{9})$

$$= \sum^{i,j} \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_i\, {}^2\, v_{ij}\, \mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_i + \sum^i v_i\, \mathbf{i}_k\, \mathbf{i}_l\, {}^2\, \{\nabla(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{i}_i)\}\, \mathbf{a} =$$

$$= v_{kl} + \sum_1^n{}^i\, v_i\, a_k\, \mathbf{i}_l\, {}^1\, \nabla a_i$$

Posons

18.)
$$\mathbf{i}_l\, {}^1\, \nabla\, a_i = a_{il}$$

A cause des équations 17. et 18. on obtient

19.)
$$\nabla\mathbf{v} = \sum_1^n{}^{i,\,k,\,l}\, (v_{kl} + v_i\, a_{il}\, a_k)\, \mathbf{i}_l\, \mathbf{i}_k$$

et pour $\mathbf{i}_m$

20.)
$$\nabla\mathbf{i}_m = \sum_1^n{}^{l,\,k}\, a_{ml}\, a_k\, \mathbf{i}_l\, \mathbf{i}_k$$

---

[9]) L'influence différentielle de ∇ est limitée par cette paranthèse fermante, dont la partie ouvrante est posée devant ∇.

Déplaçons le vecteur d'unité $\mathbf{i}_m$ géodésique-parallèlement le long d'une courbe, dont le vecteur d'unité tangent soit $\mathbf{j} = \sum_1^n {}^g j_g \mathbf{i}_g$. On obtient à cause de l'équation 15.)

21.) $$0 = \mathbf{j}^! \nabla \mathbf{i}_m = \sum_1^n {}^{l.k} j_l a_{ml} a_k \mathbf{i}_k$$

d'où suit

22.) $$\sum_1^n {}^l j_l a_{ml} a_k = 0$$

Si le système orthogonal $\mathbf{i}_i$ est déplacé géodésique-parallèlement, on a à cause des équations 19. et 22.

23.) $$\mathbf{j}^! \nabla \mathbf{v} = \sum {}^{i,l,k} (v_{kl} j_l + j_l v_i a_{il} a_k) \mathbf{i}_k =$$
$$= \sum {}^{i,l,k} v_{kl} j_l \mathbf{i}_k + \sum {}^i v_i \sum {}^{k,l} j_l a_{il} a_k \mathbf{i}_k =$$
$$= \sum {}^{l.k} v_{kl} j_l \mathbf{i}_k$$

Le différentiel géodésique d'une forme dans une multiplicité non-euclidéenne M_n relativement au système orthogonal — qui est géodésique-parallèlement déplacé à lui-même le long de la direction de la différentiation — égale au différentiel ordinaire relatif à ce système.[10]) Nous utiliserons bientôt cette remarque.

Supposons, que chaque point de la multiplicité non-euclidéenne M_n porte un vecteur d'unité $\mathbf{v}$, qui peut être regardé comme fonction de ce point à son tour. On obtient une assemblage de courbes, que nous appellerons la congruence $\mathbf{v}$. Ce n'est pas évidemment restreindre la généralité de nos futures démonstrations, que de supposer $\mathbf{v}$ relatif à un système orthogonal, déplacé géodésique-parallèlement à lui-même le long d'une direction, dont nous aurons besoin. Le cas échéant, on démontre facilement, que pour le changement géodésique $d\varphi$ — de la direction du vecteur tangent $\mathbf{v}$ — dans la direction du $\mathbf{j}$ on obtient

[10]) Voir St. p. 46.

24.) $$d\varphi = (\mathbf{j} \,!\, \nabla \mathbf{v})_m \, ds$$

Les formules de Frenet pour M_1 dans M_n supposent $\mathbf{j} = \mathbf{v}$. Nous élargissons le problème, en considérant le vecteur d'unité $\mathbf{j}$ dans toutes les directions de M_n (par le point en question) pourvu qu'il soit dans M_n.

Pour simplifier l'écriture nous changerons légèrement la convention de M. Einstein: Toutes les fois que dans un produit intervient une sommation portant sur un indice (latin), qui est affecté plus qu'une fois aux différentsfacteurs de ce produit, on supprime le signe Σ. L'indice affecté deux ou plusieurs fois au même facteur | doit être regardé comme indice simple. (Par exemple $K_{aa}\mathbf{i}_a\mathbf{i}_a = \Sigma^a K_{aa}\mathbf{i}_a\mathbf{i}_a$, $K_{aa} \neq \Sigma K_{aa}$.) Les indices $a, b, c, d,$ se rapporterons aux valeurs 1. n, $i, j, k \ldots$ aux valeurs 2, 3 .... n.

A cause de 24 ou définit le vecteur $\mathbf{K}$

25.) $$\mathbf{K} = \mathbf{j} \,!\, \nabla \mathbf{v}$$

comme vecteur de la première courbure absolue de la congruence $\mathbf{v}$. La première courbure absolue sera définie par le produit scalaire $\mathbf{K} \,!\, \mathbf{K} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}$. Nous appliquons le mot »absolue« parce que cette courbure ne dépend pas de l'affineur de Riemann

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = 2\,(\nabla \frown \nabla\, \mathbf{a})\,\mathbf{a}.$$

Formons le produit scalaire

26.) $$\mathbf{v} \,!\, \mathbf{K} = \mathbf{v} \,!\, (\mathbf{j} \,!\, \nabla \mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{j} \,?\, \nabla \mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{j} \,?\, (\nabla v_a)\,\mathbf{i}_a = \\ = v_a \mathbf{j} \,!\, \nabla v_a = 0$$

On en déduit deux théorèmes importants:
I. Tous les vecteurs $\mathbf{K}$ sont perpendiculaires au $\mathbf{v}$.
II. Les vecteurs (∇v_a) ne sont pas linéairement indépendants,
d'où suit, que le n-vecteur simple

27.) $$(\nabla v_{a_1}) \frown (\nabla v_{a_2}) \frown (\nabla v_{a_3}) \frown \ldots \frown (\nabla v_{a_n}) = 0 \,/\, (a_b = \ldots 1 \ldots n)$$

tandis que pour le (n-1)-vecteur simple

28.) $$(\nabla v_{a_1}) \frown (\nabla v_{a_2}) \frown (\nabla v_{a_3}) \frown \ldots \frown (\nabla v_{a_{n-1}}) \neq 0$$

Trouvons maintenant le vecteur d'unité $\mathbf{j}_1$, pour lequel $\mathbf{K} = 0$!

Les equations 23.), 25.) et le théorème II nous apprennent qu'il est nécessaire pour $\mathbf{j}_1$

29.) $$\mathbf{j}_1 \,!\, (\nabla v_{a_1}) \frown (\nabla v_{a_2}) \frown (\nabla v_{a_3}) \frown \ldots \frown (\nabla v_{a_{n-1}}) = 0$$

III. Le vecteur $\mathbf{v}$, dont la position à chaque point est fixée d'avance, peut être géodésiqueparallèlement déplacé le long du vecteur $\mathbf{j}_1$, qui satisfait à l'équation 29. (Le problème inverse au déplacement parallèle d'après M. Levi-Civita).

Le tenseur $^2\mathbf{W}$, défini par l'équation

30.) $$^2\mathbf{W} = (\nabla v_{.i}) \, (\nabla v_a)$$

est d'une importance extraordinaire. Par suite de l'équation 29. on a

31.) $$\mathbf{j}_1 \,!\, {}^2\mathbf{W} = {}^2\mathbf{W} \,!\, \mathbf{j}_1 = 0$$

Le tenseur $^2\mathbf{W}$ est donc du (n-1)ième rang.

Trouvons ses directions principales[11]) et mettons y les vecteurs d'unités $\mathbf{j}_i$.

On peut l'écrire

30'.) $$^2\mathbf{W} = w^2{}_{ii} \, \mathbf{j}_i \, \mathbf{j}_i$$

La première courbure absolue est maintenant donnée par

32.) $$\mathbf{K} \,!\, \mathbf{K} = \{\mathbf{j} \,!\, (\nabla v_a) \, \mathbf{i}_a\} \,!\, \{\mathbf{j} \,!\, (\nabla v_b) \, \mathbf{j}_b\} = \mathbf{j}\mathbf{j}^2 \, (\nabla v_a) \, (\nabla v_a) = \mathbf{j}\mathbf{j}^2 \, {}^2\mathbf{W}.$$

IV Les premières courbures extrêmes absolues sont les composantes orthogonales (aux directions principales) du tenseur $^2\mathbf{W}$. En les désignant par $K^2{}_{ii}$ on peut écrire

30".) $$^2\mathbf{W} = K^2{}_{ii} \, \mathbf{j}_i \, \mathbf{j}_i = {}'\mathbf{w} \, {}'\mathbf{w} = {}''\mathbf{w} \, {}''\mathbf{w} =$$

où les $^{(p)}\mathbf{w}$ sont les vecteurs idéals équivalents.

[11]) St. I. § 10.

Parce que les composantes (ii) du tenseur $^2\mathbf{W}$ sont carrées, on en peut déduire, que les directions des vecteurs $\mathbf{i}$, qui satisfont à l'équation

33.) $$\mathbf{i}\,\mathbf{i}\,\overset{2}{:}\,{}^2\mathbf{W} = 0$$

outre $\mathbf{j}_1$ forment un cône quadratique imaginaire à $(n-1)$ dimensions.

V. $\mathbf{j}_1$ est l'unique vecteur réel, le long duquel on peut déplacer géodésique-parallèlement le vecteur $\mathbf{v}$, dont la position est fixée d'avance.[12])

Soit

34.) $$^2\mathbf{g}' = \mathbf{a}'\,\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_1\,\mathbf{a}'_1 = \ldots = \mathbf{b}'\,\mathbf{b}' = \mathbf{c}'\,\mathbf{c}' = \mathbf{l}_i\,\mathbf{l}_i$$ [13])

le tenseur fondamentale métrique pour la domaine du tenseur $^2\mathbf{W}$.

Parce que

35.) $$^2\mathbf{g}' \overset{2}{:} {}^2\mathbf{W} = \mathbf{a}'\,\mathbf{a}' \overset{2}{:} \mathbf{w}\,\mathbf{w} = \mathbf{w} \overset{1}{:} \mathbf{w}$$

ne dépend que du $^2\mathbf{W}$, et parce que

36.) $$^2\mathbf{g}' \overset{2}{:} {}^2\mathbf{W} = \mathbf{l}_i\,\mathbf{l}_i \overset{2}{:} {}^2\mathbf{W} = \mathbf{w} \overset{1}{:} \mathbf{w} = \sum\nolimits_i K\,{}^2_{ii}$$

nous en pouvons déduire:

VI. La somme des premières courbures absolues par rapport à $(n-1)$ directions perpendiculaires (dans la domaine du $^2\mathbf{W}$) ne dépend pas de ces directions.

Nous allons maintenant porter notre attention sur l'affineur

37. $$\overset{p}{\mathbf{I}} = \mathbf{j}_1\,\mathbf{j}_2\,\mathbf{j}_3 \quad \mathbf{j}_p \qquad p \leqq n$$

Les considérations, faites par rapport à l'équation 25. peuvent être généralisées pour $\overset{p}{\mathbf{I}}$: Il suffit de trouver l'affineur $\overset{p}{\mathbf{K}}$, transformé par $\overset{1}{:} \nabla\mathbf{v}$ du $\overset{p}{\mathbf{I}}$, pour que nous puissions dé-

[12]) On suppose $^2\mathbf{W}$ dans la forme définie positive.

[13]) $\mathbf{i}_i$ soient les vecteurs d'unité orthogonaux.

finir le $\overset{p}{\mathbf{K}}$ comme l'affineur de courbure absolue.

Voici alors comment nous allons procéder. Ecrivons l'affineur $\nabla\mathbf{v}$ en produit des vecteurs idéals équivalents

38.) $$\nabla\mathbf{v} = v_{ab}\,\mathbf{i}_b\,\mathbf{i}_a = {}'\mathbf{p}\,{}'\mathbf{q} = {}''\mathbf{p}\,{}''\mathbf{q} = {}'''\mathbf{p}\,{}'''\mathbf{q} = \ldots = {}^{(p)}\mathbf{p}\,{}^{(p)}\mathbf{q}$$

La transformation linéaire par $^1\nabla\mathbf{v}$, appliquée sur $\overset{p}{\mathbf{I}}$ nous offre

39.)
$$\overset{p}{\mathbf{K}} = (\mathbf{j}_1\,{}^1\nabla\mathbf{v})\,(\mathbf{j}_2\,{}^1\nabla\mathbf{v})\ldots(\mathbf{j}_p\,{}^1\nabla\mathbf{v}) =$$
$$(\mathbf{j}_1\,{}^1\,{}'\mathbf{p})\;(\mathbf{j}_2\,{}^1\,{}''\mathbf{p})\;(\mathbf{j}_3\,{}^1\,{}'''\mathbf{p})\qquad(\mathbf{j}_p\,{}^1\,{}^{(p)}\mathbf{p})\,{}'\mathbf{q}\,{}''\mathbf{q}\,{}'''\mathbf{q}\ldots\,{}^{(p)}\mathbf{q} =$$
$$= \mathbf{j}_1\,\mathbf{j}_2\,\mathbf{j}_3\ldots\mathbf{j}_p\;{}^p\,{}^{(p)}\mathbf{p}\,{}^{(p-1)}\mathbf{p}\ldots{}'''\mathbf{p}\,{}''\mathbf{p}\,{}'\mathbf{p}\,{}'\mathbf{q}\,{}''\mathbf{q}\,{}'''\mathbf{q}\ldots\,{}^{(p)}\mathbf{q} =$$
$$= \overset{p}{\mathbf{I}}\,{}^p\,{}^{(p)}\mathbf{p}\,{}^{(p-1)}\mathbf{p}\ldots{}'''\mathbf{p}\,{}''\mathbf{p}\,{}'\mathbf{p}\,{}'\mathbf{q}\,{}''\mathbf{q}\,{}'''\mathbf{q}\ldots\,{}^{p)}\mathbf{q}$$

Pour éclaircir le maniement avec les vecteurs idéals nous trouvons les composantes $(b_1\,b_2\ldots b_p)$ de l'affineur $\overset{p}{\mathbf{K}}$ Pour plus de commodité, plaçons les p vecteurs $\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_p$ du système coordonné aux vecteurs $\mathbf{j}_1 \ldots \mathbf{j}_p$

40.)
$$\overset{p}{\mathbf{K}} = \mathbf{i}_1\ldots\mathbf{i}_p\;{}^p\,{}^{(p)}p_{a_p}\ldots{}'''p_{a_3}\,{}''p_{a_2}\,{}'p_{a_1}\,{}'q_{b_1}\,{}''q_{b_2}\,{}'''q_{b_3}\ldots$$
$$\ldots\,{}^{(p)}q_{b_p}\,\mathbf{i}_{a_p}\ldots\mathbf{i}_{a_3}\,\mathbf{i}_{a_2}\,\mathbf{i}_{a_1}\,\mathbf{i}_{b_1}\,\mathbf{i}_{b_2}\,\mathbf{i}_{b_3}\ldots\mathbf{i}_{b_p}$$
$$= {}^{(p)}p_p\,{}^{(p-1)}p_{p-1}\ldots{}'''p_3\,{}''p_2\,{}'p_1\,{}'q_{b_1}\ldots{}^{(p)}q_{b_p}\,\mathbf{i}_{b_1}\,\mathbf{i}_{b_2}\,\mathbf{i}_{b_3}\ldots\mathbf{i}_{b_p}$$

Parce que

41.) $${}^{(n)}p_{a_r}\,{}^{(p)}q_{b_q} = v_{b_q\,a_r} = {}^{(p-1)}p_{a_r}\,{}^{(p-1)}q_{b_q} = \ldots,\ a_b,\ b_c\ldots 1\ldots n$$

on a

40'.)
$$\overset{p}{\mathbf{K}} = {}^{(p)}p_p\,{}^{(p-1)}p_{p-1}\ldots{}'''p_3\,{}''p_2\,{}'p_1\,{}'q_{b_1}\,{}''q_2\ldots\,{}^{(p)}q_{b_p}\,\mathbf{i}_{b_1}\,\mathbf{i}_{b_2}\,\mathbf{i}_{b_3}\ldots\mathbf{i}_{b_p} =$$
$$= v_{b_p p}\,v_{b_{p-1}p-1}\ldots v_{b_3{}^3}\,v_{b_2{}^2}\,v_{b_1{}^1}\,\mathbf{i}_{b_1}\,\mathbf{i}_{b_2}\,\mathbf{i}_{b_3}\ldots\mathbf{i}_{b_p}$$

Prenons maintenant un vecteur d'unité $\mathbf{l}$ dans la domaine du $^2\mathbf{W}$. Soit $\mathbf{K}_l$ le vecteur de la première courbure absolue par rapport à $\mathbf{l}$. Tâchons à trouver le vecteur de courbure absolue par rapport au vecteur $\lambda_1\mathbf{l} + \lambda_2\mathbf{j}_1$ $(\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 = 1)$

On obtient d'après les équations 25.) et 29.)

41.) $$\mathbf{K} = (\lambda_1\,\mathbf{l} + \lambda_2\,\mathbf{j}_1)\,{}^1\nabla\mathbf{v} = \lambda_1\,\mathbf{l}\,{}^1\nabla\mathbf{v} + 0 = \lambda_1\,\mathbf{K}_l$$

VII. A chaque plan, passant par $\mathbf{j}_1$ ne répond par la transformation $\mathbf{!}\nabla\mathbf{v}$ qu'une seule direction, c'est-à-dire celle du vecteur de la première courbure absolue par rapport au vecteur d'intersection dudit plan avec la domaine du $^2\mathbf{W}$. (En effet le nombre de plans par $\mathbf{j}_1$ et celui de directions par le point en question dans l'espace linéaire perpeudiculaire au $\mathbf{v}$, égale à ∞^{n-2}).

Pour $\lambda_1 = 1$ on obtient $\mathbf{K}_l = \mathbf{K}$ extrême.

VIII. Les vecteurs de la première courbure absolue par rapport aux directions principales du $^2\mathbf{W}$ sont d'une valeur extrême.

On en déduit aisément le théorème:

IX. Parmi ces vecteurs $\mathbf{K}_l$ il y a $(n-1)$ vecteurs orthogonaux, dont la valeur est extrême, c'est-à-dire des vecteurs $\mathbf{K}_{ii}$, par rapport aux directions principales du tenseur $^2\mathbf{W}$.

En effet on a pour

$$42.)\quad \mathbf{K}_{ii}\,\mathbf{!}\,\mathbf{K}_{jj} = (\mathbf{j}_i\,\mathbf{!}\,'\mathbf{p}\,'\mathbf{q})\,\mathbf{!}\,(\mathbf{j}_j\,\mathbf{!}\,''\mathbf{p}\,''\mathbf{q}) = (\mathbf{j}_i\,\mathbf{j}_j\,\mathbf{?}\,''\mathbf{p}\,'\mathbf{p})\;('\mathbf{q}\,\mathbf{!}\,''\mathbf{q}) =$$
$$= \mathbf{j}_i\,\mathbf{j}_j\,\mathbf{?}\,(''\mathbf{p}\,''\mathbf{q}\,\mathbf{!}\,'\mathbf{q}\,'\mathbf{p}) = \mathbf{j}_i\,\mathbf{j}_j\,\mathbf{?}\,\{(\nabla v_a)\,\mathbf{i}_a\,\mathbf{!}\,\mathbf{i}_b(\nabla v_b)\} =$$
$$= \mathbf{j}_i\,\mathbf{j}_j\,\mathbf{?}\,(\nabla v_a)\,(\nabla v_a) = \mathbf{j}_i\,\mathbf{j}_j\,\mathbf{?}\,^2\mathbf{W} =$$
$$= \mathbf{j}_i\,\mathbf{j}_j\,\mathbf{?}\,K_{kk}{}^2\,\mathbf{j}_k\,\mathbf{j}_k = 0 \qquad (i \neq j)$$

Désignons par $^*\mathbf{K}$ les vecteurs de la direction des vecteurs $\mathbf{j}$, (voir 25.) dont les moduls égalent aux $(\mathbf{K})_m$. Pour ces $^*\mathbf{K}$ on peut tirer de l'équation 41. et des théorèmes VIII. IX. le théorème suivant:

X. L'extrémité du vecteur $^*\mathbf{K}$ décrit une multiplicité cylindrique à n dimensions dont la base peut être représentée par $^2\mathbf{W}$. Le vecteur $\mathbf{j}_1$ lui sert pour l'axe.

D'après ce théorème on peut écrire

$$42'.)\qquad {}^*\mathbf{K} = \alpha_a\,{}^*\mathbf{K}_{aa} \quad ({}^*\mathbf{K}_{11} = \mathbf{j}_1)$$

où les α_a sont les cosinus directeurs du $^*\mathbf{K}$ par rapport au système coordonné $\mathbf{j}_1\,\mathbf{j}_2 \ldots \mathbf{j}_n$. —

Retournons maintenant au vecteur $\mathbf{K}$! Il suffit d'après VII. d'étudier les vecteurs $\mathbf{K}_l$. L'affineur

43.) $$\overset{2}{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{ii}\ \mathbf{K}_{ii} = {}^2\mathbf{K}$$

est donc un tenseur, dont les directions principales se confondent avec celles des vecteurs $\mathbf{K}_{ii}$. On affirme aisément, que les tenseurs $^2\mathbf{K}$ et $^2\mathbf{W}$ ne diffèrent que par sa position. L'opération qui permet d'obtenir à partir du tenseur $^2\mathbf{W}$ le tenseur $\mathbf{K}$ est la transformation $! \nabla\mathbf{v}$, appliquée au $^2\mathbf{g}'$

44.) $$\overset{2}{\mathbf{K}} = {}^2\mathbf{g}' \overset{2}{?} {}'\mathbf{p}\ {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} = {}^2\mathbf{g}' \overset{2}{?} {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} = {}^2\mathbf{g}' \overset{2}{?} {}'\mathbf{p} \sim {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q}$$

Parce que

45.) $$2\ {}'\mathbf{p} \sim {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} = {}'\mathbf{p}\ {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} + {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} \quad \text{et}$$

46.) $$4\ {}'\mathbf{p} \sim {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q} \sim {}''\mathbf{q} = {}'\mathbf{p}\ {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} + {}'\mathbf{p}\ {}''\mathbf{p}\ {}''\mathbf{q}\ {}'\mathbf{q} + {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} + {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{p}\ {}''\mathbf{q}\ {}'\mathbf{q} =$$
$$= 2\ ({}'\mathbf{p}\ {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q} + {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q}) = 4\ {}'\mathbf{p} \sim {}''\mathbf{p}\ {}'\mathbf{q}\ {}''\mathbf{q}$$

(car les vecteurs idéals $'\mathbf{p}, ''\mathbf{p}$ ou $'\mathbf{q}, ''\mathbf{q}$ sont équivalents) on a pour 44.

44'.) $$\overset{2}{\mathbf{K}} = {}^2\mathbf{J}' \overset{2}{?} ({}'\mathbf{p} \sim {}''\mathbf{p})\ ({}'\mathbf{q} \sim {}''\mathbf{q}) = {}^2\mathbf{K}$$

La structure du second membre de l'équation 44') nous apprend, qu'en effet $\overset{2}{\mathbf{K}}$ est un tenseur $^2\mathbf{K}$.

Nous fixerons encore une fois notre attention sur le tenseur $^2\mathbf{W}$. Celui-ci effectue une transformation affine $! {}^2\mathbf{W}$ par laquelle un vecteur d'unité quelconque $\mathbf{I}$ est adjoint au vecteur $\mathbf{I}^* = \mathbf{I} ! {}^2\mathbf{W} = {}^2\mathbf{W} ! \mathbf{I}$.

Nous avons défini la première courbure absolue par rapport au $\mathbf{I}$ par l'équation

32'.) $$\mathbf{I}\mathbf{I} \overset{2}{?} {}^2\mathbf{W} = \mathbf{I} ! (\mathbf{I} ! {}^2\mathbf{W}) = \mathbf{I} ! \mathbf{I}^*$$

Or, cette courbure peut être regardé comme produit scalaire du vecteur originaire $\mathbf{I}$ et du vecteur transformé, Cette façon d'envisager le problème nous permettra d'étendre la définition de cette courbure pour les bivecteurs. (Nous nous bornerons aux bivecteurs simples).

Soit $\mathbf{I}_1 \sim \mathbf{I}_2$ le bivecteur mis en question, et $\mathbf{I}_1^* \sim \mathbf{I}_2^*$ le bivecteur transformé. Nous appellerons le produit scalaire

47.) $$K^2_{1212} = \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2 \,\vdots\, \mathfrak{l}^*_1 \frown \mathfrak{l}^*_2$$

le premier taux de courbure absolue (par rapport au ${}_2\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2$), si les vecteurs $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$ sont perpendiculaires. — Le sens géométrique du K^2_{1212} descend évidemment de l'quation 47)

Exprimons maintenant les $\mathfrak{l}^*$ à l'aide du tenseur ${}^2\mathfrak{W} = {}'\mathfrak{w}\,{}'\mathfrak{w} = {}''\mathfrak{w}\,{}''\mathfrak{w} = \ldots$.

48.) $$\mathfrak{l}^*_2 \frown \mathfrak{l}^*_1 = (\mathfrak{l}_2 \,\vdots\, {}'\mathfrak{w}\,{}'\mathfrak{w}) \frown (\mathfrak{l}_1 \,\vdots\, {}''\mathfrak{w}\,{}''\mathfrak{w}) = \mathfrak{l}_1\,\mathfrak{l}_2 \,\vdots\, {}'\mathfrak{w}\,{}''\mathfrak{w}\,({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w}) =$$
$$= \mathfrak{l}_1\,\mathfrak{l}_2 \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})\;\;({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w}) = \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2 \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})\;\;({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})$$

En conséquence

49.) $$K^2_{1212} = \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2 \,\vdots\, \{\mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2 \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})\;({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})\} =$$
$$= \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2\;\;\mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2 \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})\;\;({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w}) =$$
$$= \mathfrak{l}_1\;\mathfrak{l}_2\;\;\mathfrak{l}_1\;\mathfrak{l}_2 \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})\;\;(\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w}) = {}_2\mathfrak{l}\;{}_2\mathfrak{l} \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})$$

Exprimons le bivecteur ${}_2\mathfrak{l}$ à l'aide de deux vecteurs d'unité quelconques $\mathfrak{e}_1 \perp \mathfrak{e}_2$

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{e}_2 \sin\varphi \qquad \mathfrak{l}_2 = -\mathfrak{e}_1 \sin\varphi + \mathfrak{e}_2 \cos\varphi$$

50.) $$\mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2 = (\mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{e}_2 \sin\varphi) \frown (-\mathfrak{e}_1 \sin\varphi + \mathfrak{e}_2 \cos\varphi) =$$
$$= 0 + \mathfrak{e}_1 \frown \mathfrak{e}_2 \cos^2\varphi - \mathfrak{e}_2 \frown \mathfrak{e}_1 \sin^2\varphi + 0 =$$
$$= \mathfrak{e}_1 \frown \mathfrak{e}_2\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \mathfrak{e}_1 \frown \mathfrak{e}_2$$

Or, le bivecteur ${}_2\mathfrak{l}$, exprimé par deux vecteurs d'unité orthogonaux ne dépend pas de fixation précise de ces deux vecteurs. (Le résultat est en général valable pour p-vecteurs simples.)

Le résultat des équations 49. et 50. nous permet de justifier le théorème suivant:

XI. Le premier taux de courbure absolue par rapport au ${}_2\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \frown \mathfrak{l}_2$ ne dépend point de fixation précise des vecteurs $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ dans ${}_2\mathfrak{l}$

Construisons le produit scalaire

51.) $$K^2 = (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b})(\mathfrak{b} \frown \mathfrak{a}) \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{a} \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w})({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w}) =$$
$$= ({}'\mathfrak{w} \frown {}''\mathfrak{w}) \,\vdots\, ({}'\mathfrak{w} \frown {}'\mathfrak{w})$$

qui ne dépend que de tenseur ${}^2\mathfrak{W}$.

On en peut déduire

$$52.)\quad K^2 = (\mathbf{a}\frown\mathbf{b})\,(\mathbf{b}\frown\mathbf{a}) \overset{4}{:} \overset{4}{\mathbf{W}} = a_a\, b_b\, b_c\, a_d\, (\mathbf{l}_a\frown\mathbf{l}_b)(\mathbf{l}_c\frown\mathbf{l}_d) \overset{4}{:} \overset{4}{\mathbf{W}} =$$
$$= (\mathbf{l}_a\frown\mathbf{l}_b)(\mathbf{l}_b\frown\mathbf{l}_a) \overset{4}{:} \mathbf{W} = -(\mathbf{l}_a\frown\mathbf{l}_b)(\mathbf{l}_a\frown\mathbf{l}_b) \overset{4}{:} ('\mathbf{w}\frown''\mathbf{w})\,('\mathbf{w}\frown''\mathbf{w})$$
$$= -\sum_{1}^{n} {}_{a,\,b}\, K^2{}_{a\,b\,a\,b}$$
$$(('\mathbf{w}\frown''\mathbf{w})\,('\mathbf{w}\frown''\mathbf{w}) = \overset{4}{\mathbf{W}})$$

Nous désignerons cette somme comme le premier taux moyen de la congruence **v**.

XII. Le premier taux moyen (par rapport aux $\binom{n}{2}$ bivecteurs demi-perpendiculaires ne dépend pas de fixation précise des n vecteurs orthogonaux qui les composent.

Ecrivons

$$53.)\quad {}^2\mathbf{g} = \mathbf{a}\,\mathbf{a} = \mathbf{b}\,\mathbf{b} = \ldots = \mathbf{a}'\,\mathbf{a}' + \mathbf{a}''\,\mathbf{a}'' = \mathbf{b}'\,\mathbf{b}' + \mathbf{b}''\,\mathbf{b}'' = .$$
$$\mathbf{a}'' = a_1\,\mathbf{j}_1 \qquad \mathbf{b}'' = b_1\,\mathbf{j}_1,$$

il s'en suit que

$$54.)\quad \mathbf{a}'\,\mathbf{a}'' = \mathbf{a}''\,\mathbf{a}' = \mathbf{b}'\,\mathbf{b}'' = \mathbf{b}''\,\mathbf{b}' = 0,\ a_1\,a_i = 0 = b_1\,b_i$$

Par égard pour 53,) 54) et 51 on a pour 52.)

$$52'.)\quad K^2 = (\mathbf{a}' + \mathbf{a}'')\,(\mathbf{b}'\,\mathbf{b}' + \mathbf{b}''\,\mathbf{b}'')\,(\mathbf{a}' + \mathbf{a}'') \overset{4}{:} \overset{4}{\mathbf{W}} =$$
$$= \mathbf{a}'\,\mathbf{b}'\,\mathbf{b}'\,\mathbf{a}' \overset{4}{:} \overset{4}{\mathbf{W}} = -(\mathbf{j}_i\frown\mathbf{j}_j)\,(\mathbf{j}_i\frown\mathbf{j}_j) \overset{4}{:} \overset{4}{\mathbf{W}} =$$
$$= -\sum K^2{}_{ijij}$$

XIII. Le premier taux moyen égale à la somme négative des $\binom{n-1}{2}$ premiers taux par rapport aux $\binom{n-1}{2}$ bivecteurs demi-orthogonaux dans la domaine du ${}^2\mathbf{W}$ et ne dépend pas de fixation précise desdits bivecteurs.

Remarque I: Or, il n'est pas nécessaire, que les vecteurs $\mathbf{j}_i$ soient placés dans les directions principales du ${}^2\mathbf{W}$.

Remarque II: Le nombre $\binom{n-1}{2}$ peut s'écrire en général $\binom{m}{2}$, si nous désignons par »m« $<n-1$ le rang du tenseur $^{2}\mathbf{W}$, qui n'est pas nécessairement $(n-1)$.

On pourrait demander à quand le premier taux K^{2}_{1212} est indépendant de l'orientation du bivecteur ${}_{2}\mathbf{I}=\mathbf{I}_{1}\frown\mathbf{I}_{2}$. D'après la définition 49. il est nécessaire, que $\overset{4}{\mathbf{W}}$ soit de la forme $C^{2}(\mathbf{a}\frown\mathbf{b})\ (\mathbf{a}\frown\mathbf{b})$, où le C^{2} reste à fixer à l'aide de l'équation suivante

55) $$K^{2}_{1212}=(\mathbf{I}_{1}\frown\mathbf{I}_{2})(\mathbf{I}_{1}\frown\mathbf{I}_{2})+C^{2}(\mathbf{a}\frown\mathbf{b})(\mathbf{a}\frown\mathbf{b})=$$
$$={}_{2}\mathbf{I}_{2}'+C^{2}(a_{a}\,b_{b}\,a_{c}\,b_{d}\,(\mathbf{I}_{a}\frown\mathbf{I}_{b})(\mathbf{I}_{c}\frown\mathbf{I}_{d})=$$
$$={}_{2}\mathbf{I}_{2}\mathbf{I}+C^{2}(\mathbf{I}_{a}\frown\mathbf{I}_{b})(\mathbf{I}_{a}\frown\mathbf{I}_{b})={}_{2}\mathbf{I}_{2}\mathbf{I}+C^{2}\,{}_{2}\mathbf{I}_{2}\mathbf{I}=C^{2}$$

Par égard pour 52. et 55. on obtient

$$K^{2}=-\binom{n}{2}C^{2}$$ d'où suit

XIV. Si l'affineur $\overset{4}{\mathbf{W}}$ est de la forme

$$-\frac{K^{2}}{\binom{n}{2}}(\mathbf{a}\frown\mathbf{b})\ (\mathbf{a}\frown\mathbf{b}),$$

le premier taux de corbure absolue ne dépend point de l'orientation du bivecteur, par rapport duquel le taux est fixé.

Remarque: Nous pourrions aisément démontrer, que la forme dessus-citée peut s'écrire de même

$$\overset{4}{\mathbf{W}}=-\frac{K^{2}}{\binom{n}{2}}(\mathbf{a}'\frown\mathbf{b}')\ (\mathbf{a}'\frown\mathbf{b}')$$

par égard pour notre problème.

L'équation 52, par égard pour 31 nous apprend de même, que la somme

56.) $$\sum K^{2}_{1\alpha 1\alpha}=\mathbf{j}_{1}\frown\mathbf{j}_{\alpha}\,\mathbf{j}_{1}\frown\mathbf{j}_{\alpha}+\overset{4}{\mathbf{W}}=0$$

Le résultat n'est pas général. En effet, fixons un vecteur d'unité quelconque $\mathbf{I}_{1}\neq\mathbf{j}_{1}$ et formons la somme

57.) $$(\mathfrak{l}_a \frown \mathfrak{l}_1)\,(\mathfrak{l}_a \frown \mathfrak{l}_1) \overset{4}{:} \overset{4}{\mathfrak{W}} = -\,\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{l}_a\,\mathfrak{i}_a\,\mathfrak{l}_1 \overset{4}{:} \overset{4}{\mathfrak{W}} = -\,\mathfrak{l}_1\,{}^2\mathfrak{g}\,\mathfrak{l}_1 \overset{4}{:} \overset{4}{\mathfrak{W}} =$$
$$\mathfrak{l}_1\,{}^2\mathfrak{g}'\,\mathfrak{l}_1 \overset{4}{:} \overset{4}{\mathfrak{W}} = -\,\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{l}_1 \overset{2}{:} \{\cdot(('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w}) \,!\, ('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w})\cdot\}$$

Ce n'est pas sans intérêt que de développer l'affineur $\overset{2}{\mathfrak{W}}{}^{+} = ('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w}) \overset{1}{:} ('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w})$ de sa forme idéale, quoiqu'on voit déjà de sa structure, qu'il est un tenseur. — Prenons ${}^2\mathfrak{W}$ dans sa forme canonique 30''. et décomposons ses composantes en facteurs idéals d'après l'équation suivantes

58.) $$K_i\,K_j = K^2{}_{ij} \begin{matrix} = 0, \\ \neq 0, \end{matrix} \text{ pour } \begin{matrix} i \neq j \\ i = j \end{matrix}$$

Nous obtiendrons

59.) $$\overset{2}{\mathfrak{W}}{}^{+} = ('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w}) \overset{1}{:} ('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w}) = {}'\mathfrak{w}\,''\mathfrak{w} \overset{1}{:} ('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[{}'\mathfrak{w}\,''\mathfrak{w} \overset{1}{:} {}'\mathfrak{w}\,''\mathfrak{w} - {}'\mathfrak{w}\,''\mathfrak{w} \overset{1}{:} {}''\mathfrak{w}\,{}'\mathfrak{w}] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[{}'K_i\,''K_j\,{}'K_k\,''K_l\,\mathfrak{j}_i\mathfrak{j}_j \overset{1}{:} \mathfrak{j}_k\mathfrak{j}_l - {}'K_i\,''K_j\,''K_k\,{}'K_l\,\mathfrak{j}_i\mathfrak{j}_j \overset{1}{:} \mathfrak{j}_k\mathfrak{j}_l] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[{}'K^2{}_{i\cdot}\,''K^2{}_{ii}\,\mathfrak{j}_i\mathfrak{j}_i - {}'K_{\cdot i}{}^2\,(\Sigma\,''K^2{}_{jj})\,\mathfrak{j}_i\mathfrak{j}_i] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[K^2{}_{ii}\,K^2{}_{ii} - K^2{}_{ii}\,(\Sigma\,K^2{}_{jj})]\,\mathfrak{j}_i\mathfrak{j}_i = -\,\tfrac{1}{2}\,(\Sigma\,K^2{}_{jj})\,K^2{}_{ii}\,\mathfrak{j}_i\mathfrak{j}_i \qquad (i \neq j)$$

Les tenseurs ${}^2\mathfrak{W}$ et $\overset{2}{\mathfrak{W}}{}^{+} = {}^2\mathfrak{W}^{+}$ ont les mêmes directions principales.

Nous appellerons la somme exprimée par équation 57.) le premier taux moyen (de courbure absolue) par rapport au vecteur $\mathfrak{l}_1$. Par égard pour 57. et 59. nous justifions aisément le théorème suivant:

XV. Le premier taux moyen par rapport au vecteur $\mathfrak{l}_1$ ne dépend point de fixation précise de $(n-1)$ bivecteurs orthogonaux, passants par $\mathfrak{l}_1$. Il a la valeur extrême pour les directions principales du ${}^2\mathfrak{W}$, qui égale à l'orthogonale composante convenable du tenseur

$$('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w}) \,!\, ('\mathfrak{w} \frown ''\mathfrak{w}) = {}^2\mathfrak{W}^{+}.$$

Construisons maintenant la somme de taux par rapport aux $\binom{n-1}{2}$ bivecteurs orthogonaux mutuellement et à $\mathfrak{l}_1$!

60.) $$\mathbf{l}_i \frown \mathbf{l}_j \, \mathbf{l}_i \frown \mathbf{l}_j \overset{4}{:} \mathbf{W} = \{ (\mathbf{l}_a \frown \mathbf{l}_b)(\mathbf{l}_a \frown \mathbf{l}_b)' - (\mathbf{l}_a \frown \mathbf{l}_1)(\mathbf{l}_a \frown \mathbf{l}_1) \} \overset{4}{:} \mathbf{W} =$$
$$= -K^2 + \mathbf{l}_1 \, \mathbf{l}_1 \overset{2}{:} {}^2\mathbf{W}^+ = -\mathbf{l}_1 \, \mathbf{l}_1 \overset{2}{:} [K^2 \, {}^2\mathbf{g} - {}^2\mathbf{W}^+]$$

Les tenseur ${}^2\mathbf{W}$, ${}^2\mathbf{W}^+$ et

61.) $$ {}^2\mathbf{W}^{++} = K^2 \, {}^2\mathbf{g} - {}^2\mathbf{W}^+$$

ont les mêmes directions principales:

XVI. La somme de $\binom{n-1}{2}$ premiers taux de courbure absolue par rapport aux $\binom{n-1}{2}$ bivecteurs, orthogonaux mutuellement et á $\mathbf{l}_1$, ne dépend pas de fixation précise de ces bivecteurs et possède sa valeur extrême — qui vaut la correspondante composante orthogonale du tenseur ${}^2\mathbf{W}^{++}$ — pour les directions principales du ${}^2\mathbf{W}^{++}$.

Nous pouvons rapidement généraliser ce problème, en prenant l'équation 47.) pour notre point de départ. Définissons »le $(p-1)^{\text{ième}}$ taux de courbure absolue« par rapport au p-vecteur (simple) le scalaire

62.) $$(\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_3 \frown \ldots\ldots \frown \mathbf{l}_p) \overset{p}{:} (\mathbf{l}^*_p \frown \ldots\ldots \frown \mathbf{l}^*_3 \frown \mathbf{l}^*_2 \frown \mathbf{l}^*_1)$$

On en déduit sans difficulté la forme suivante

63.) $$K^2_{1,2,3,\ldots\ldots p_{1\,2\,3}\ldots\ldots p} =$$
$$(\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_3 \frown \ldots\ldots \mathbf{l}_p) \overset{p}{:} \{ (\mathbf{l}_p \overset{(p)}{!} \mathbf{w}^{(p)} \mathbf{w} \, . \, \overbrace{(\mathbf{l}_3 \overset{1}{!} {}''\mathbf{w}\, {}''\mathbf{w})} (\mathbf{l}_2 \overset{1}{!} {}''\mathbf{w}\, {}''\mathbf{w}) \circ$$
$$\circ (\mathbf{l}_1 \, {}'\mathbf{w}\, {}'\mathbf{w}) \}$$
$$= \mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_3 \frown \ldots\ldots \frown \mathbf{l}_p \overset{p}{:} \mathbf{l}_p \frown \ldots\ldots \frown \mathbf{l}_3 \frown \mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_1 \overset{p}{:} ({}'\mathbf{w} \frown {}''\mathbf{w} \frown {}'''\mathbf{w} \quad {}^{(p)}\mathbf{w}) \circ$$
$$\circ ({}^{(p)}\mathbf{w} \frown \ldots\ldots \quad {}'\mathbf{w} \; {}'\mathbf{w} \frown {}'\mathbf{w})$$
$$= (-1)^{2\binom{p}{2}} (\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_3 \frown \ldots\ldots \frown \mathbf{l}_p)(\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_3 \frown \ldots\ldots \frown \mathbf{l}_p)^2_{\,p} \, \mathbf{w}^{(p)} \frown \mathbf{w}^{p\frown} =$$
$$= {}_p\mathbf{l}_p \overset{2p}{:} \mathbf{w}^{p\frown} \mathbf{w}^{p\frown}$$

Passons maintenant pour le scalaire

64.) $$(\mathbf{a}_1 \overbrace{\mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_p})(\mathbf{a}_p \, . \, \overbrace{\ldots \mathbf{a}_2} \, \mathbf{a}_1) \overset{2p}{:} \mathbf{w}^{p\frown} \mathbf{w}^{p\frown} =$$
$$= \mathbf{a}_1 \, \mathbf{a}_2 \ldots . \mathbf{a}_p \, \mathbf{a}_p \, . \, . . \mathbf{a}_2 \, \mathbf{a}_1 \overset{2p}{:} \mathbf{w}^{p\frown} \mathbf{w}^{p\frown} = \mathbf{w}^{p\frown}{}_p \mathbf{w}^{p\frown}$$

où les vecteurs idéals équivalents $\mathbf{a}_a = a_{a,b} \mathbf{l}_b$ appartiennent au tenseur ${}^2\mathbf{g}$. Il s'en suit

65.) $$\mathbf{w}^{pn} \overset{p}{\cdot} \mathbf{w}^{pn} =$$

$$= a_{1,b_1} a_{2,b_2} \dots a_{p,c_p}\ a_{p_1 c_p} \dots a_{2,c_2}\ a_{1,c_1}\ (\mathbf{l}_{b_1} \widehat{\mathbf{l}_{b_2} \dots \mathbf{l}_{b_p}}) \circ$$

$$\circ (\widehat{\mathbf{l}_{c_p} \dots \mathbf{l}_{c_2} \mathbf{l}_{c_1}})\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn} =$$

$$= (-1)^{\binom{p}{2}} (\mathbf{l}_{b_1} \frown \mathbf{l}_{b_2} \frown \dots \frown \mathbf{l}_{b_p})\ (\mathbf{l}_{b_1} \frown \mathbf{l}_{b_2} \frown \mathbf{l}_{bp})\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn} =$$

$$= (-1)^{\binom{p}{2}} (\mathbf{l}_{b_1} \mathbf{l}_{b_2} \dots \mathbf{l}_{b_p})\ (\mathbf{l}_{b_1} \mathbf{l}_{b_2} \dots \mathbf{l}_{b_p})\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn}$$

$$= (-1)^{\binom{p}{2}} \sum {}_p\mathbf{l}\ {}_p\mathbf{l}\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn} =$$

$$= (-1)^{\binom{p}{2}} \sum K^2{}_{b_1 b_2 \dots b_p\ b_1 b_2 \dots b_p} \qquad \begin{pmatrix} b_n \dots\dots 1 \dots n \\ a \dots\dots 1 \dots n \end{pmatrix}$$

XVII. Le $(p-1)^{\text{ième}}$ taux moyen ne dépend pas de fixation précise de $\binom{n}{p}$ p-vecteurs (simples) orthogonaux.

Il s'en suit pour $p=n$ que le $(n-1)$ taux moyen s'annulle identiquement

Fixons notre attention à l'affineur du $2i^{\text{ième}}$ ordre

66.) $$\overset{2p}{\mathbf{g}}\ {}^{2p-i}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn} = \mathbf{w}^{pn}\ {}^{p-i}\mathbf{w}^{pn}$$

$$(\overset{2k}{\mathbf{g}} = \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k\ \mathbf{a}_k \dots \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_1)$$

On le reconnait d'après la structure du second membre de l'équation 66.) pour tenseur.

Construisons la somme de $\binom{n-i}{n-p}$ $(p-1)^{\text{ième}}$ taux par rapport aux $\binom{n-i}{n-p}$ p-vecteurs orthogonaux, passants par i-vecteur simple ${}_i\mathbf{l} = (\widehat{{}_1\mathbf{l}_2 \dots \mathbf{l}_i})$

67.) $$(\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \dots \mathbf{l}_i \frown \mathbf{l}_{a_1} \frown \mathbf{l}_{a_2} \dots \frown \mathbf{l}_{a_{p-i}})\ (\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \dots \frown \mathbf{l}_i \frown \mathbf{l}_{a_1} \frown \mathbf{l}_{a_2} \frown \dots \mathbf{l}_{a_{p-i}}).$$

$${}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn}$$

$$= (-1)^{\binom{p}{}} (\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2 \frown \dots \frown \mathbf{l}_i \frown \mathbf{l}_{a_1} \frown \mathbf{l}_{a_2} \frown \dots \frown \mathbf{l}_{a_p\ i})(\mathbf{l}_{a_{p-i}} \frown \dots \frown \mathbf{l}_{a_2} \frown \mathbf{l}_{a_1} \frown \mathbf{l}_i \frown \cdot$$

$$\dots \frown \mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_1)\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn} =$$

$$= (-1)^{\binom{p}{2}} (\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \dots \mathbf{l}_i \mathbf{l}_{a_1} \mathbf{l}_{a_2} \dots \mathbf{l}_{a_{p-i}} \mathbf{l}_{a_{p-i}} \dots \mathbf{l}_{a_2} \mathbf{l}_{a_1} \mathbf{l}_i \dots \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_1)\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn} \mathbf{w}^{pn} =$$

$$= (-1)^{\binom{p}{2}} \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \dots \mathbf{l}_i\ \overset{2(p-i)}{\mathbf{g}}\ \mathbf{l}_i \dots \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_1\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn} =$$

$$- (-1)^{\binom{p}{2}} \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \dots \mathbf{l}_i\ \overset{2\ p-i)}{\mathbf{g}'}\ \mathbf{l}_i \dots \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_1\ {}^{2p}\mathbf{w}^{pn}\ \mathbf{w}^{pn} =$$

$$= (-1)^{\binom{p}{2}} \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \quad . \mathbf{l}_i \mathbf{l}_i \quad . \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_1\ {}^{2i}\mathbf{w}^{pn}\ {}^{p-i}\mathbf{w}^{pn}$$

$$(a_n \dots\dots 1 \dots n,\ b \dots\dots 1 \dots n)$$

XVIII. Le $(p-1)^{\text{ième}}$ taux moyen de courbure absolue par rapport au i-vecteur ne dépend pas de fixation précise de $\binom{n-i}{n-p}$ p-vecteurs orthogonaux, passants par $_i\mathfrak{l}$.

La différence

68.) $$\mathfrak{w}^{p\wedge}\,{}^{2p}_{\cdot}\,\mathfrak{w}^{p\wedge} - \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\ldots\mathfrak{l}_i\,\mathfrak{l}_i\ldots\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_1\,{}^{2i}_{\cdot}\,\mathfrak{w}^{p\wedge}{}_{p\cdot i}\,\mathfrak{w}^{p\wedge}$$
$$= (\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\ldots\mathfrak{l}_i\,\mathfrak{l}_i\ldots\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_1)\,{}^{2i}_{\cdot}\,\{W\,{}^{2i}\mathfrak{g} - \mathfrak{w}^{p\wedge}{}_{p\cdot i}\,\mathfrak{w}^{p\wedge}\}$$
$$(W = \mathfrak{w}^{p\wedge}\,{}^{2p}_{\cdot}\,\mathfrak{w}^{p\wedge})$$

nous offre la somme de $(p-1)^{\text{ièmes}}$ taux par rapport aux $\binom{n-i}{p}$ p-vecteurs orthogonaux mutuellement et au i-vecteur $_i\mathfrak{l}$. Elle ne dépend pas de fixation précise desdits p-vecteurs. (Théorème XIX.) On a peut-être remarqué la ressemblence frappante des problèmes traités avec les courbures riemaniennes.[14])

A la fin de cette partie nous ne toucherons que légèrement le problème de la congruence $\mathfrak{v}$, definie à l'aide d'une multiplicité non-euclidéenne M_m dans M_n $(m<n)$. Il faut distinguer deux possibilités différentes. Ou la congruence $\mathfrak{v}$ est contenue dans M_m, ou elle n'est qu'attachée à M_m de la sorte, que chaque point »p« de M_m fixe un vecteur $\mathfrak{v}$ — par p — hors de la multiplicité M_m.

Le premier cas, nous l'avons déjà considéré dans cette partie (c'est-à-dire pour M_n dans M_N $(n<N)$. Le cas échéant, le mot géodésique n'est employé que par égard pour M_n. Par exemple, le système coordonné est géodésique-parallèlement déplacé par égard pour M_n. Or ce déplacement ne peut être regardé comme géodésique dans M_N, que si M_n est géodésique à son tour par égard pour M_N c'est à dire si l'affineur de courbure

$$^{4}_{\cdot}\,\mathfrak{g}^{*}\,{}^{2}_{\cdot}\,\nabla\,{}^{2}\mathfrak{g}^{**} = 0$$

(On à pour M_N $\quad {}^{2}\mathfrak{g} = \mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{*}\mathfrak{a}^{*} + \mathfrak{a}^{**}\mathfrak{a}^{**}$ et pour M_n..... ${}^{2}\mathfrak{g}^{*} = \mathfrak{a}^{*}\mathfrak{a}^{*}$[15])

[14]) St. II. § 11, 12.
[15]) St. III. §§ 6, 8.

Il nous reste la seconde possibilité, où la congruence $\mathbf{v}$ n'est qu'attachée à M_m. Dans ce cas on ne change que légèrement les résultats obtenus, en limitant la position des vecteurs — par rapport desquels on effectue la différentiation — pour l'espace tangent de M_m, qui ne passe pas nécessairement par $\mathbf{v}$.

Il y faut tout d'abord mentioner le cas, où l'espace tangent de M_m passe par $\mathbf{j}_1$ et par conséquence ony trouve un vecteur $-\mathbf{j}_1-$ le long du quel on peut déplacer la congruence $\mathbf{v}$ géodésigue-parallèlement à elle-même. Les résultat d'ailleurs obtenus pour n, ne changent que par egard pour ce n, qui prend la valeur m. Quant au tenseur $^2\overline{\mathbf{W}}$ de cette congruence, on l'obtient en décomposant le tenseur $^2\mathbf{W}$

$$69.) \qquad {}^2\mathbf{W} = {}^2\overline{\mathbf{W}} + {}^2\overline{\overline{\mathbf{W}}}$$

où $^2\overline{\mathbf{W}}$ est pour l'intersection des domaines du $^2\mathbf{W}$ et du tenseur fondamental de M_m. Si l'espace tangent de M_m ne passe pas par $\mathbf{j}_1$, on ne peut point déplacer le $\mathbf{v}$ géodésique-parallèlement à lui-même de long d'un vecteur contenu dans M_m. Par égard pour le théorème X on obtient le tenseur $^2\overline{\mathbf{W}}$, en appliquant la méthode suivante: Soit $_m\mathbf{l}$ le m-vecteur simple de l'espace tangent de M_m. Nous trouvons sa projection dans la domaine du $^2\mathbf{W}$

$$70.) \qquad {}_m\mathbf{l}^* = (-1)^{\binom{m}{2}} {}_m\mathbf{l}^{\prime m} \mathbf{a}^{\prime m} \mathbf{a}^{\prime m}$$

et nous décomposons le tenseur $^2\mathbf{W}$

$$71.) \qquad {}^2\mathbf{W} = {}^2\mathbf{W}^* + \mathbf{W}^{**}$$

où $^2\mathbf{W}^*$ est pour la domaine du $_m\mathbf{l}^*$. Or $^2\mathbf{W}^*$ est la projection du tenseur en question $^2\overline{\mathbf{W}}$ au $^2\mathbf{W}$, et satisfait à l'équation

$$71'.) \qquad \overset{4}{\mathbf{g}}{}' \overset{2}{\cdot} {}^2\overline{\mathbf{W}} = {}^2\mathbf{W}^*$$

Quant aux théorèmes obtenus d'avance pour »n«, on peut les appliquer pour ce cas, en changeant — selon la nature du problème — légèrement leurs textes. Nous ne donnons qu'un exemple de ce changement quant au théorème XIX, qui s'exprime de la manière suivante:

XIX'. Le $(p\text{-}1)^{\text{ième}}$ taux moyen de courbure absolue [c'est-à-dire par rapport au $\binom{m}{p}$ p-vecteurs orthogonaux mutuellement et au $(n\text{-}m)$ vecteur (simple) $_{n\text{-}m}\mathbf{l}$ qui est perpendiculaire à son tour à M_m] ne dépend pas de fixation précise desdits p-vecteurs ($p \leqq m$).

Grâce aux formules de Frenet, nous pourrions insister sur le développement de la théorie de p-vecteurs de courbure. Ce problème, plus ou moins simple — quand il s'agit d'une courbe — se complique d'une manière inattendue, s'il s'agit de la congruence $\mathbf{v}$. Le motif en est, que les vecteurs, par rapport desquels nous effectuons la différentiation peuvent changer leurs directions. Le problème posé ainsi n'a pas sa raison d'être, parce que les p-vecteurs de courbure obtenus ne sont plus simple en général[16]) [17])

Pour le cas qu'on prend toujours le même vecteur $\mathbf{j}'$, on parvient aux formules de Frenet pour la courbure, par égard pour vecteur $\mathbf{j}'$[18])

II.[19])

Nous avons considéré jusqu'ici des formes qui ne dépendent point de multiplicité M_n, où la congruence $\mathbf{v}$ est plongée. C'est pour cela que nous les avons désignés par le mot »absolu«. Il existe une série de formes qui se tiennent dans une étreinte relation avec la multiplicité M_n, c'est-à-dire avec son affineur de Riemann. (On l'appelle aussi l'affineur Riemann-Christoffel à cause des symboles à trois ou quatre indices de Christoffel, qui y interviennent.)

[16]) quoiqu'ils s'annullent de même identiquement pour $p=n$.

[17]) Soit par exemple.

$$\mathbf{j}^{(p)} ! \nabla \mathbf{v} = \mathbf{K}_{(p)_1} = K^{(p)}{}_1 \, \mathbf{k}^{(p)}{}_1$$

Le bivecteur de courbure $_2\mathbf{K}''{}'$ s'obtient par

$$_2\mathbf{K}''{}' = \mathbf{j}'' ! \nabla(\mathbf{v} \frown \mathbf{k}'_1) = \mathbf{j}'' ! [\nabla \mathbf{v} ! \mathbf{a}\,(\mathbf{a} \frown \mathbf{k}'_1) + \nabla \mathbf{k}'_1 ! \mathbf{a}\,(\mathbf{v} \frown \mathbf{a})$$
$$= \mathbf{K}''_1 ! \mathbf{a}\,(\mathbf{a} \frown \mathbf{k}'_1) + \mathbf{j}'' ! \nabla \mathbf{k}'_1 ! \mathbf{a}\,(\mathbf{v} \frown \mathbf{a}) =$$
$$(\mathbf{K}''_1 \frown \mathbf{k}'_1) + (\mathbf{v} \frown \mathbf{j}'' ! \nabla \mathbf{k}'_1)$$

En général il ne devient simple que si

$$\alpha_1 \mathbf{j}_1 + \alpha' \mathbf{j}' + \alpha'' \mathbf{j}'' = 0$$

où les α sont les coefficients facilement à trouver.

[18]) St. III § 1.

[19]) Nous supprimons pour cette partie la condition du déplacement géodésique-parallèle du système coordonné.

Pour en développer la théorie, il nous faut toucher rapidement quelques problèmes fondamentaux qui sont traités en toute profondeur chez *St.* II § 9 et *Sch.* § 19, 20.

Considérons un vecteur quelconque $\mathbf{w}$, multiplié par le champs scalaire p. L'opération ∇ appliquée sur ce produit nous donne

72.) $$\nabla\, p\,\mathbf{w} = (\nabla\, p)\,\mathbf{w} + p\,\nabla\,\mathbf{w}$$

73.) $$\nabla\nabla\, p\,\mathbf{w} = \nabla(\nabla p)\,\mathbf{w} + \nabla\, p\,\nabla\,\mathbf{w} =$$
$$= (\nabla\nabla\, p)\,\mathbf{w} + \nabla\,\mathbf{w} \,!\, \mathbf{a}(\nabla\, p)\,\mathbf{a} + (\nabla\, p)\,\nabla\,\mathbf{w} + p\,\nabla\nabla\,\mathbf{w}$$

On obtient de ce résultat sans difficulté l'opération

74.) $$\nabla\frown\nabla\, p\,\mathbf{w} = p\,\nabla\frown\nabla\,\mathbf{w}$$[20])

A cause de l'équation 8. et 74. on obtient pour $\mathbf{v}$

75.) $$\nabla\frown\nabla\,\mathbf{v} = (\mathbf{a}\,!\,\mathbf{v})\nabla\frown\nabla\,\mathbf{a} = (\nabla\frown\nabla\,\mathbf{a})\,\mathbf{a}\,!\,\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathbf{K}}\,!\,\mathbf{v}$$

L'affineur $(\nabla\frown\nabla\mathbf{a})\,\mathbf{a}$, qui est de la plus grande importance pour la théorie de la multiplicité M_n, est celui de Riemann $\frac{1}{2}\overset{4}{\mathbf{K}}$.

Nous n'insisterons pas ici pour la théorie de cet affineur, qui se trouve développé dans presque tous les traités du calcul tensoriel. Nous n'aurons besoin que d'une légère transformation de la forme du $\overset{4}{\mathbf{K}}$. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ les vecteurs idéals équivalents du tenseur fondamental. Or, on peut écrire:

76.) $$\nabla\,\nabla\,\mathbf{a} = \nabla\,\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})\,\mathbf{b} = \{\nabla\,[\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})]\,\mathbf{b}\} =$$
$$[\nabla\,\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})]\,\mathbf{b} + \nabla\mathbf{b}\,!\,\mathbf{c}\,[\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})]\,\mathbf{c} =$$
$$[\nabla\,\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})]\,\mathbf{b} + \{\nabla(\mathbf{b}\,!\,\mathbf{c})\}\{\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})\}\,\mathbf{c}$$ et à cause

de la condition VI.

77.) $$\nabla\frown\nabla\,\mathbf{a} = \{\nabla\,(\mathbf{b}\,!\,\mathbf{c})\}\frown\{\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})\}\,\mathbf{c}$$

78.) $$(\nabla\frown\nabla\,\mathbf{a})\,\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathbf{K}} = \{\nabla\,(\mathbf{b}\,!\,\mathbf{c})\}\frown\{\nabla\,(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})\}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}$$

Les vecteurs $\mathbf{c}$ et $\mathbf{a}$ étant équivalents, on peut les échanger

79.) $$\tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathbf{K}} = \{\nabla(\mathbf{b}\,!\,\mathbf{a})\}\frown\{\nabla(\mathbf{c}\,!\,\mathbf{b})\}\,\mathbf{a}\mathbf{c} = -\{\nabla(\mathbf{b}\,!\,\mathbf{c})\}\frown\{\nabla(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})\}\,\mathbf{a}\mathbf{c}$$

[20]) Voir la condition VI à l'introduction.

En sommant les équations 78., 79., on obtient

80.) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = 2\,\{\nabla(\mathbf{b}\,!\,\mathbf{c})\}\frown\{\nabla(\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})\}\,\mathbf{c}\frown\mathbf{a} = 2\,(\nabla\frown\nabla\mathbf{a})\,\mathbf{a}.$$

L'affineur $\overset{4}{\mathbf{K}}$ est donc antisymétrique dans ces deux premiers et deux derniers vecteurs idéals. Nous utiliserons bientôt ce résultat.

Remarque: On peut objecter à l'équation 80., que prise au sens idéal, elle nous semble fausse: Le second membre ne contient que le produit des premières dérivées partielles, tandis qu'en troisième membre interviennent les secondes dérivées partielles. Cette fausseté semblante disparaît au courant du calcul, ou le second membre ne reprend sa valeur effective, qu'après la juste association des vecteurs idéals.

Nous avons défini l'opération »d« par l'équation

$$d = d\,\mathbf{x}'\,!\,\nabla \qquad d\,\mathbf{x}' = dx^\lambda\,\mathbf{u}'_\lambda\,.$$

Trouvons maintenant l'expression pour l'opération $d_1\,d_2$

81.) $$\begin{gathered} d_1\,d_2 = d_1\,(d_2\,\mathbf{x}'\,!\,\nabla) = d_1\,d_2\,\mathbf{x}'\,!\,\nabla + d_2\,\mathbf{x}'\,!\,d_1\,\nabla = \\ d_1\,d_2\,\mathbf{x}'\,!\,\nabla + d_2\,\mathbf{x}'\,!\,d_1\,\mathbf{x}'\,!\,\nabla\,\nabla = \\ d_1\,d_2\,\mathbf{x}'\,!\,\nabla + d_2\,\mathbf{x}'\,d_1\,\mathbf{x}'\,?\,\nabla\,\nabla. \end{gathered}$$

On peut écrire d'après la condition VI.

82.) $$\begin{gathered} d_1\,d_2 - d_2\,d_1 = (d_2\,\mathbf{x}'\,d_1\,\mathbf{x}' - d_1\,\mathbf{x}'\,d_2\,\mathbf{x}')\,?\,\nabla\,\nabla \\ = 2\,(d_2\,\mathbf{x}'\frown d_1\,\mathbf{x}')\,?\,\nabla\frown\nabla \end{gathered}$$

Identifions les vecteurs co- et contravariants et posons

83.) $$\frac{d_1\,\mathbf{x}'}{d_1\,s} = \mathbf{j}_1 \qquad \frac{d_2\,\mathbf{x}'}{d_2\,s} = \mathbf{j}_2 \qquad \mathbf{j}_1 \perp \mathbf{j}_2$$ [21])

On en tire pour notre congruence $\mathbf{v}$

84.) $$\frac{d_1\,d_2\,\mathbf{v} - d_2\,d_1\,\mathbf{v}}{d_1 \quad d_2\,s}$$ [22]) $$= 2\,(\mathbf{j}_2\frown\mathbf{j}_1)\,?\,\nabla\frown\nabla\,\mathbf{v} = \mathbf{j}_2\frown\mathbf{j}_1\,?\,\overset{4}{\mathbf{K}}\,!\,\mathbf{v} = \mathbf{L}_{12}$$

---

[21]) Ces vecteurs ne sont dans aucune relation avec le vecteurs $\mathbf{j}_\alpha$ de la première partie.

[22]) Il faut faire bien la différence entre $\frac{d_1\,d_2\,\mathbf{v} - d_2\,d_1\,\mathbf{v}}{d_1\,s\;\;d_2\,s}$ et $\frac{d_1}{d_1\,s}\left(\frac{d_2\,\mathbf{v}}{d_2\,s}\right) - \frac{d_2}{d_2\,s}\left(\frac{d_1\,\mathbf{v}}{d_1\,s}\right)$

Dans $\mathbf{L}_{12}$ nous avons trouvé le vecteur, qui dépend et de la congruence $\mathbf{v}$ et de la multiplicité M_n. Nous l'appellerons le vecteur de la première courbure relative, et le carré $\mathbf{L}_{12} \,!\, \mathbf{L}_{12} = L^2{}_{12\,12}$ la première courbure relative. Le vecteur $\mathbf{L}_{ab}$ s'annulle identiquement pour les multiplicités enclidéennes. ($\overset{4}{\mathbf{K}} = 0$).

Le sens géométrique en est évident: L'affineur $\overset{4}{\mathbf{K}}$ transforme le bivecteur simple $\mathbf{j}_2 \frown \mathbf{j}_1$ dans ${}_2\mathbf{j}^* = \mathbf{j}_2 \frown \mathbf{j}_1 \,?\, \overset{4}{\mathbf{K}}$. L'affineur ${}_2\mathbf{j}^*$ effectue une transformation linéaire ${}_2\mathbf{j}^* \,!$, qui adjoint le vecteur en question $\mathbf{L}_{12}$ au vecteur $\mathbf{v}$.

L'affineur $\overset{4}{\mathbf{K}}$ peut s'écrire dans ses vecteurs idéals d'après 80.)

85.) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}_1 \frown \mathbf{K}_2)\,(\mathbf{K}_3 \frown \mathbf{K}_4) = ('\mathbf{K}_1 \frown '\mathbf{K}_2)('\mathbf{K}_1 \frown '\mathbf{K}_2)^{23})$$

Posons

87.) $${}_2\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 \frown \mathbf{j}_2, \quad \overset{4}{\mathbf{L}} = (\mathbf{K}_1 \frown \mathbf{K}_2)\,('\mathbf{K}_1 \frown '\mathbf{K}_2)\,(\mathbf{K}_4 \frown \mathbf{K}_3) \,!\, ('\mathbf{K}_3 \frown '\mathbf{K}_4) \,?\, \mathbf{vv}$$

Or, d'après 84. et 85. on a

88.) $$L^2{}_{1212} = {}_2\mathbf{j}_2\mathbf{j} \,!\, \overset{4}{\mathbf{L}} \quad \text{et}$$

89.) $$L^2 = \mathbf{abba} \,!\, \overset{4}{\mathbf{L}} = (\mathbf{a} \frown \mathbf{b})\,(\mathbf{b} \frown \mathbf{a}) \,!\, \overset{4}{\mathbf{L}} =$$

$$= a_a\, b_b\, b_c\, a_d\, (\mathbf{j}_a \frown \mathbf{j}_b)\,(\mathbf{j}_c \frown \mathbf{j}_d) \,!\, \overset{4}{\mathbf{L}} = -\,(\mathbf{j}_a \frown \mathbf{j}_b)\,(\mathbf{j}_a \frown \mathbf{j}_b) \,!\, \overset{4}{\mathbf{L}} =$$

$$= -\sum L^2{}_{abab}$$

L'expression L^2, »le taux moyen de la première courbure relative« — qui est la somme de toutes les premières courbures relatives par rapport aux $\binom{n}{2}$ bivecteurs perpendiculaires — ne dépend pas de fixation precise de ces bivecteurs (Théorème XX).

---

[23]) On peut de même trouver l'équation

86.) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}_1 \frown \mathbf{K}_2)\,(\mathbf{K}_1 \frown \mathbf{K}_2)$$

St. II. § 9. Juvet... Introduction au calcul tensoriel page 68 etc., Sch page 73.

L'affineur

89'.) $$\mathbf{a\,b\,b\,a}\,{}^{3}\,\overset{4}{\mathbf{L}} = (\mathbf{L}_1 \frown \mathbf{L}_2)\,{}^{1}\,(\mathbf{L}_3 \frown \mathbf{L}_4) = {}^{2}\mathbf{L}$$

est un tenseur du second ordre. Quoiqu'on le voie immédiatement de la structure de l'équation précédente, nous en donnons la forme développée.

Ecrivons

90.) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3\mathbf{K}_4.$$

Il s'en suit pour ${}^{2}\mathbf{L}$

91. $$\begin{aligned} {}^{2}\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \frown \mathbf{L}_2\,{}^{1}\,\mathbf{L}_3 \frown \mathbf{L}_4 &= \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\,{}^{1}\,{}'\mathbf{K}_1{}'\mathbf{K}_2{}'\mathbf{K}_4{}'\mathbf{K}_3\,{}^{1}\,\mathbf{K}_3\mathbf{K}_4\,{}^{2}\,\mathbf{v}\mathbf{v} = \\ &= -K_{abcd}{}'K_{efgh}v_iv_j\,\mathbf{i}_a\mathbf{i}_b\,{}^{1}\,\mathbf{i}_e\mathbf{i}_f\mathbf{i}_g\mathbf{i}_h\,{}^{1}\,\mathbf{i}_c\mathbf{i}_d\,{}^{2}\,\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j = \\ &= -K_{abcd}{}'K_{bfgh}v_iv_j\,\mathbf{i}_a\mathbf{i}_f\mathbf{i}_g\mathbf{i}_h\,{}^{1}\,\mathbf{i}_c\mathbf{i}_d\,{}^{2}\,\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j = \\ &= -K_{abcd}{}'K_{bfgc}v_iv_j\,\mathbf{i}_a\mathbf{i}_f\mathbf{i}_g\mathbf{i}_d\,{}^{2}\,\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j = \\ &= -K_{abcd}{}'K_{bfgc}v_dv_g\,\mathbf{i}_a\mathbf{i}_f = -K_{abcd}K_{bfgc}v_dv_g\,\mathbf{i}_a\mathbf{i}_f\,{}^{24}) \end{aligned}$$

Or, la composante $(a\ f)$ est d'après 91. et 85.

92.) $$-K_{abcd}K_{bfgc}v_dv_g = -K_{bacd}K_{fbgc}v_dv_g = -K_{bacg}K_{fbdc}v_dv_g$$

tandis que la composante $(f\ a)$ égale à

93.) $$-K_{fbcd}K_{bagc}v_dv_g = -K_{fbdc}K_{bacg}v_dv_g$$

On peut donc écrire à cause de 92.,) 93.) et 91.)

94.) $$^{2}\mathbf{L} = -K_{abcd}K_{bfgc}v_dv_g\,\mathbf{i}_a \frown \mathbf{i}_f$$

Par égard pour 88.) et 89.) nous avons

95.) $$\begin{aligned} \mathbf{l}_1\mathbf{l}_1\,{}^{2}\,\mathbf{abba}\,{}^{3}\,\overset{4}{\mathbf{L}} = \mathbf{l}_1\mathbf{l}_1\,{}^{2}\,{}^{2}\mathbf{L} = \mathbf{l}_1\,{}^{2}\mathbf{g}\,\mathbf{l}_1\,{}^{2}\,\overset{4}{\mathbf{L}} = \mathbf{l}_1\mathbf{l}_a\mathbf{l}_a\mathbf{l}_1\,{}^{4}\,\overset{4}{\mathbf{L}} = \\ = \mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_a\,\mathbf{l}_a \frown \mathbf{l}_1\,{}^{4}\,\overset{4}{\mathbf{L}} = -\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_i\,\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_i\,{}^{4}\,\overset{4}{\mathbf{L}}\,{}^{25}) \end{aligned}$$

Or, le dernier membre des équations 95.) nous réprésente la somme de courbures relatives par rapport aux $(n\text{-}1)$ bivecteurs orthogonaux, passants par $\mathbf{l}_1$, qui, d'après le second membre ne dépend que de $\mathbf{l}_1$. Nous l'appellerons le taux moyen de première courbure relative par rapport à $\mathbf{l}_1$:

---

24) i. j . . . 1 . . . n.

25) $a, b \ldots 1 \ldots n, i, j \ldots 2 \ldots n.$ $\mathbf{i}_1 \frown \mathbf{i}_1 = \mathbf{0}$.

XXI: Le taux moyen de première courbure relative — par rapport à $\mathbf{l}_1$ — ne dépend que de $\mathbf{l}_1$. Pour $\mathbf{l}_1$, placés aux directions principales du tenseur ${}^2\mathbf{L}$, on obtient ses valeurs extrêmes. Ils égalent aux composantes orthogonales convenables du ${}^2\mathbf{L}$.

La différence

96.) $$\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1 \overset{2}{\cdot} (L^2\, {}^2\mathbf{g} - {}^2\mathbf{L}) = L^2 - \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_1 \overset{2}{\cdot} {}^2\mathbf{L}$$

nous offre la somme de premières courbures relatives par rapport aux $\binom{n-1}{2}$ bivecteurs perpendiculaires mutuellement et au vecteur $\mathbf{l}_1$. Elle ne dépend que du $\mathbf{l}_1$. Ses valeurs extrêmes égalent aux composantes orthogonales convenables du tenseur $L^2\, {}^2\mathbf{g} - {}^2\mathbf{L}$, qui a les mêmes directions principales que le tenseur ${}^2\mathbf{L}$. (Théorème XXII.)

Pour généraliser cette étude, il nous faut trouver des formules générales, qui dépendent et de la congruence $\overset{1}{\mathbf{v}}$ et l'affineur $\overset{4}{\mathbf{K}}$.

Formons par égard pour 81.

97.) $$d_1\, d_2\, d_3 = d_1\, d_2\, (d_3\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla) = d_1\, d_2\, d_3\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla + \\ + d_3\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} d_1\, d_2\, \nabla = \\ d_1\, d_2\, d_3\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla + d_3\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \{d_1\, d_2\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla + d_2\, \mathbf{x}'\, d_1\, \mathbf{x}' \overset{2}{\cdot} \nabla\nabla\}\, \nabla \\ = d_1\, d_2\, d_3\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla + d_3\, \mathbf{x}'\, d_1\, d_2\, \mathbf{x}'^2\, \nabla\nabla + \\ + d_3\, \mathbf{x}'\, d_2\, \mathbf{x}'\, d_1\, \mathbf{x}' \overset{3}{\cdot} \nabla\nabla\nabla$$

De même

98.) $$d_1\, d_2\, d_3\, d_4 = d_1\, d_2\, d_3\, (d_4\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla) = \\ = d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla + d_4\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} d_1\, d_2\, d_3\, \nabla = d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, \mathbf{x}'^1\, \nabla + \\ + d_4\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \{d_1\, d_2\, d_3\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla + d_3\, \mathbf{x}'\, d_1\, d_2\, \mathbf{x}' \overset{2}{\cdot} \nabla\nabla + \\ + d_3\, \mathbf{x}'\, d_2\, \mathbf{x}'\, d_1\, \mathbf{x}^3\, \nabla\nabla\nabla\}\, \nabla = d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla + \\ + d_4\, \mathbf{x}'\, d_1\, d_2\, d_3\, \mathbf{x}^2\, \nabla\nabla + d_4\, \mathbf{x}'\, d_3\, \mathbf{x}'\, d_1\, d_2\, \mathbf{x}' \overset{3}{\cdot} \nabla\nabla\nabla \\ + d_4\, \mathbf{x}'\, d_3\, \mathbf{x}'\, d_2\, \mathbf{x}'\, d_1\, \mathbf{x}'^4\, \nabla\nabla\nabla\nabla$$

et généralement à cause de VI.

99.) $$d_1\, d_2 \ldots\ d_p = \\ \sum_{\mu}^{1} {}^{i}\, d_p\, \mathbf{x}'\, d_{p-1}\, \mathbf{x}' \ldots . d_{i+1}\, \mathbf{x}' d_i\, d_{i-1} \ldots\ldots d_1 \mathbf{x}^{1+\mu-i} \nabla^{\mu-i+1}$$

$$(\nabla^3 = \nabla\nabla\nabla \text{ etc.})$$

Nous pouvons évidemment appliquer le produit antisymétrique $\frown$ au symbole $d_1 \ldots\ldots d_p$, avec cette restrinction que ledit symbole ne sera appliqué pour un scalaire quelconque ou pour le vecteur $\mathbf{x}'$.

Identifions les vecteurs co- et contravariants, et posons $\frac{d_1 \ldots d_p \mathbf{x}'}{d_1 \ldots d_p s} = \mathbf{j}_a$. On obtient d'après VI et 99. pour notre congruence

$$100.)\quad p! \frac{d_1 \ldots d_p \mathbf{v}}{d_1 s\, d_2 s \ldots d_p s} = p!\,(\mathbf{j}_p \frown \mathbf{j}_{p-1} \ldots\ldots \frown \mathbf{j}_2 \frown \mathbf{j}_1)\, {}^{p}\!\nabla^{p}\, \mathbf{v}$$
$$= p!\ {}_{p}\mathbf{j}\ {}^{p}\nabla^{p\frown}\ \mathbf{v}$$

Afin de pouvoir déclarer le dernier membre des équations 100. pour vecteur de $(p\text{-}1)$ième courbure relative $\mathbf{L}_{12\ldots p}$, il faut démontrer, que le produit antisymétrique $\nabla^{p\frown}\mathbf{v}$ dépend de l'affineur $\overset{4}{\mathbf{K}}$.

Par égard pour 75. on parvient facilement aux équations

$$101.)\qquad 2\nabla[\nabla\frown\nabla\mathbf{v}] = (\nabla\overset{4}{\mathbf{K}})\,!\,\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}\,!\,\mathbf{a}\,\overset{4}{\mathbf{K}}\,!\,\mathbf{a}$$

et (à cause de 85)

$$102.)\qquad 2\nabla\frown\nabla\frown\nabla\ \mathbf{v} = (\nabla\underset{|}{\overset{2}{-}}\overset{4}{\mathbf{K}})\,!\,\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}\,!\,\mathbf{a}\underset{|}{\overset{2}{-}}\overset{4}{\mathbf{K}}\,!\,\mathbf{a}$$

Le premier membre à droite s'annulle identiquement à cause de l'identilé de Bianchi

$$103.)\qquad \nabla\underset{|}{\overset{2}{-}}\overset{4}{\mathbf{K}} = 0\ ^{26})$$

Il nous reste

$$104.)\qquad 2\nabla\frown\nabla\frown\nabla\mathbf{v} = (\nabla\mathbf{v}\,!\,\mathbf{a})\underset{|}{\overset{2}{-}}\overset{4}{\mathbf{K}}\,!\,\mathbf{a}$$

De même pour

$$105.)\qquad 2\nabla\frown\nabla\frown\nabla\frown\nabla\mathbf{v} = \nabla\underset{|}{\overset{3}{-}}(\nabla\mathbf{v}\,!\,\mathbf{a})\,\overset{4}{\mathbf{K}}\,!\,\mathbf{a} +$$
$$+ (\nabla\mathbf{a}\,!\,\mathbf{b})\underset{|}{\overset{3}{-}}(\nabla\mathbf{v}\,!\,\mathbf{a})\,\overset{4}{\mathbf{K}}\,!\,\mathbf{b}$$

---

[26]) Sch § 19.

Nous n'insisterons pas sur la généralisation de la formule $\nabla^p \mathbf{v}$. Nous croyons d'avoir sulfisamment démontré

a) qu'elle dépend de l'affineur $\overset{4}{\mathbf{K}}$.

b) qu'elle est antisymétrique dans ses premiers p vecteurs idéals.

On en déduit que

100.) $$p!\,\frac{d_1 \frown \ldots d_p}{d_1\, s \ldots . d_p\, s}\,\mathbf{v} = p!\,{}_p\mathbf{j}^{\,p} \nabla^p \mathbf{v} = \mathbf{L}_{12\ldots.p}$$

peut être déclaré comme »vecteur de (p-1) courbure relative par rapport an p-vecteur simple ${}_p\mathbf{j}$. Il s'annulle identiquement pour les multiplicités euclidéennes.

Le produit $\mathbf{L}_{12\ldots.p}\,\dot{}\,\mathbf{L}_{12\ldots.p} = \mathrm{L}^2_{12\ldots.p\ 12\ldots.p}$ s'appelle la (p-1)ième corbure relative.

Par le procès tout à fait semblable à celui que nous avons appliqué pour démontrer les théorèmes XX) XXI) et XXII), on parvient aux théorèmes suivants.

XXIII. Le taux moyen de (p-1)ième corbure relative ne dépend pas de fixation précise des $\binom{n}{p}$ vecteurs orthogonaux.

XXIV. Le taux moyen de (p-1)ième courbure relative-par rapport au i-vecteur (simple) ${}_i\mathbf{l}$ ne dépend pas de fixation précise de $\binom{n-i}{p-i}$ p-vecteurs orthogonaux passants par ${}_i\mathbf{l}$.

XXV. La somme de $\binom{n-i}{p}$ (p-1)ième courbures relatives par rapport aux $\binom{n-i}{p}$ p-vecteurs orthogonaux mutuelement et au ${}_i\mathbf{l}$ — ne dépend que du ${}_i\mathbf{l}$, sans être dépendant de fixation précise des i vecteurs d'unité orthogonaux, qui destinnent ${}_i\mathbf{l}$,

Il nous reste à étudier la congruence $\mathbf{v}$ par raport à une multiplicité M_m, c'est-à-dire plongée dans M_m dans M_n. Nous développons ici rapidement la théorie pour $p = 2$. Pour plus de commodité nous désignons par un accent affecté supérieurement à droite la domaine de la M_m, par deux accents affectés supérieurement à droite la domaine à (n-m) dimensions, orthogonale à M_m.

Soit $\overset{3}{\mathbf{H}}$ l'affineur de courbure de la M_m

105.) $$\overset{3}{\mathbf{H}} = (\nabla' \mathbf{a}')\, \mathbf{a}'' = -\overset{4}{\mathbf{g}'} \overset{2}{:} \nabla\, {}^2\mathbf{g}'' = \mathbf{H}_1 \frown \mathbf{H}_1\, \mathbf{H}_2$$

où les $\mathbf{H}_1\, \mathbf{H}_2$ sont des vecteurs idéals [27]).

Le théorème de Gauss touchant la courbure, peut être généralisé à cette forme

106.) $$\overset{8}{\mathbf{g}'} \overset{4}{:} \overset{4}{\mathbf{K}} = \overset{4}{\mathbf{K}'} - 2\,(\mathbf{H}_1 \frown {}'\mathbf{H}_1)\,(\mathbf{H}_1 \frown {}'\mathbf{H}_1)\, \mathbf{H}_2 . {}'\mathbf{H}_2$$ [28])

où le premier membre nous représente la composante du $\overset{4}{\mathbf{K}}$ dans M_m, et les ${}'\mathbf{H}_1, {}'\mathbf{H}_2$ sont des vecteurs idéals equivalents aux $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$.

D'après 84.) 106.) on a pour la congruence $\mathbf{v}$ plongée dans M_m

107.) $$\mathbf{L}'_{12} = \mathbf{j}'_2 \frown \mathbf{j}'_1 \overset{2}{:} [\overset{8}{\mathbf{g}'} \overset{4}{:} \overset{4}{\mathbf{K}} + 2\,(\mathbf{H}_1 \frown {}'\mathbf{H}_1)\,(\mathbf{H}_1 \frown {}'\mathbf{H}_1)\, \mathbf{H}_2 \overset{1}{:} {}'\mathbf{H}_2] \overset{1}{:} \mathbf{v}$$

On en voit que la structure de l'équation 84.) égale à la structure de l'équation 107.) Il s'en suit que les théorèmes obtenus d'ailleurs ne changent pas leur nature en général, si nous remplacons n par m.

Ce n'est pas sans intérêt que de mentioner les cas suivants:

1. M_n soit une multiplicité euclidéenne. Le cas échéant $\overset{4}{\mathbf{K}} = 0$, et nous avons

108.) $$\mathbf{L}'_{12} = 2\, \mathbf{j}'_2 \frown \mathbf{j}'_1 \overset{2}{:} (\mathbf{H}_1 \frown {}'\mathbf{H}_1)\,(\mathbf{H}_1 \frown {}'\mathbf{H}_1)\,(\mathbf{H}_2 \overset{1}{:} {}'\mathbf{H}_2) \overset{1}{:} \mathbf{v}$$

---

[27]) St. III. § 6.
[28]) St. III. § 1.

Or, $\mathbf{L'}_{12}$ ne dépend que de l'affineur $\overset{3}{\mathbf{H}}$ et du bivecteur $\mathbf{j}_2 \frown \mathbf{j}_1$.

Si M_m est géodésique dans M_n euclidéenne, c'est-à-dire, si M_m est euclidéenne à son tour, on a à cause de l'équation

109.) $$\overset{3}{\mathbf{H}} = \emptyset$$

108'.) $$\mathbf{L'}_{12} = \emptyset$$

2. Soit M_m une multiplicité géodésique dans M_n non enclidéenne. On a d'après 107.) et 109.)

110.) $$\mathbf{L'}_{12} = \mathbf{j'}_2 \frown \mathbf{j'}_1 \,\overset{2}{!}\, \overset{8}{\mathbf{g'}} \,\overset{4}{!}\, \overset{4}{\mathbf{K}} \,\overset{1}{!}\, \mathbf{v}$$

Il est intéressant d'approfondir un peu l'étude de ce cas. Supposons que M_n soit de la courbure riemanienne K constante. On a d'après Schur

111.) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = K\,(\mathbf{a} \frown \mathbf{b})\,(\mathbf{a} \frown \mathbf{b})$$

Or $$\overset{8}{\mathbf{g'}} \,\overset{4}{!}\, \overset{4}{\mathbf{K}} =$$

112.) $$= K\,\mathbf{a'}_1\,\mathbf{a'}_2\,\mathbf{a'}_3\,\mathbf{a'}_4\,\mathbf{a'}_4\,\mathbf{a'}_3\,\mathbf{a'}_2\,\mathbf{a'}_1 \,!\, [(\mathbf{a'} + \mathbf{a''}) \frown (\mathbf{b'} \frown \mathbf{b''})] \circ \circ [(\mathbf{a'} + \mathbf{a''}) \frown (\mathbf{b'} + \mathbf{b''})]$$

$$= K\,\mathbf{a'}_1\,\mathbf{a'}_2\,\mathbf{a'}_2\,\mathbf{a'}_1 \,\overset{2}{!}\, (\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'})\;\; \mathbf{a'}_3\,\mathbf{a'}_4\,\mathbf{a'}_4\,\mathbf{a'}_3 \,\overset{2}{!}\, (\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'}) =$$

$$= K\,(\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'})\,(\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'})$$

Il s'en suit pour $\mathbf{L'}_{12}$ d'après 110.) et 112.)

113.) $$\mathbf{L'}_{12} = {}_2\mathbf{j'}\;\; K\,(\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'})\,(\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'}) \,!\, \mathbf{v} \qquad ({}_2\mathbf{j'} = \mathbf{j'}_2 \frown \mathbf{j'}_1)$$

et pour $L^{2'}{}_{1212}$

114. $$L^{2'}{}_{1212} = K^2\,{}_2\mathbf{j'}\,{}_2\mathbf{j'} \,!\, (\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'})\,(\mathbf{c'} \frown \mathbf{d'})\,[(\mathbf{a'} \frown \mathbf{b'}) \,!\, \mathbf{v} \,!\, (\mathbf{c'} \frown \mathbf{d'}) \,!\, \mathbf{v}]$$

La première courbure relative d'une congruence plongée dans M_m géodesique dans M_n — qui a la courbure riemanienne constante — ne dépend pas de la position du bivecteur ${}_2\mathbf{j}$.

Ce théorème est de même valable pour $m = n$ et $p > 2$.

Prague, novembre 1923.

VIII.

Grundzüge der pflanzengeographischen Verbreitung und Gliederung der Lebermoose.

Von Prof. Dr. **Karel Domin** (Praha).

Vorgelegt am 5. Dezember 1923.

Während des Krieges vollendete ich das Manuskript für ein umfangreiches zweibändiges Werk »Ideen zur Pflanzengeographie der Sporenpflanzen«, welches in Berlin erscheinen sollte, was jedoch durch die gegen Ende des Krieges entstandenen und noch bisher bestehenden Schwierigkeiten vereitelt wurde. Da mir jetzt die Gelegenheit geboten ist, in den Sitzungsberichten unserer Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften wenigstens eines der kürzesten in sich abgeschlossenen Kapitel zu veröffentlichen, lege ich hiemit jenes über die Lebermoose in unveränderter Form vor, wie es seiner Zeit fertig gestellt wurde, denn die seither erschienenen Arbeiten über die Lebermoose dürften in den allgemeinen leitenden Gesichtspunkten über die Verbreitung dieser Gruppe der Sporenpflanzen kaum wesentliche Änderungen nach sich ziehen.

1. Allgemeine Prinzipien der Verbreitung der Lebermoose.

Die Lebermoose (*Hepaticae*) sind über die ganze Erdoberfläche, von dem Äquatorialgürtel bis in das arktische sowie antarktische Gebiet verbreitet, doch übertreffen, was die Zahl der Arten anbelangt, die tropischen Länder bei weitem die temperierte Zone. Die meisten sind ausgesprochen hygrophil und schon dadurch in ihrem Vorkommen stark eingeengt; nur ein unbedeutender Bruchteil ist xerophil ausgerüstet und dem Leben an trockenen, sonnigen Standorten angepasst. Die Ausbreitung durch vegetative Vermehrung ist ausgiebig und da auch die Übertragung von Gemmen und umsomehr von Sporen nach unseren Erfahrungen bei den übrigen Sporenpflanzen

durchaus nicht von der Hand zu weisen ist, so stünde zu erwarten, dass sich diese Gruppe durch zahlreiche eurytope und auch kosmopolitische Arten auszeichnen dürfte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Lebermoose bewohnen meist kleinere, streng umgrenzte Gebiete und richten sich in ihrer Verbreitung im allgemeinen nach denselben Prinzipien, die uns auch bei den Phanerogamen die Einteilung der gesamten Pflanzendecke in scharf umgrenzte floristische Bezirke ermöglichten. Die Mehrzahl der Gattungen ist zwar kosmopolitisch, doch beziehen die Arten meist nur kleinere Wohnbezirke und sind somit grösstenteils stenotop. Dies gilt besonders für die tropischen und subtropischen Formen; die Lebermoosflora der ganzen nördlichen gemässigten Zone zeichnet sich jedoch durch auffallende Gleichmässigkeit und viele gemeinsame Arten aus, worauf bereits HÜBENER (1) in seiner interessanten und wohl ältesten pflanzengeographischen Arbeit über die Lebermoose, in neuester Zeit auch ich (1) sowie K. MÜLLER (1) hingewiesen haben. So schreibt HÜBENER im J. 1834, also zu einer Zeit, da die Bryophyten Asiens noch so gut wie unbekannt waren, in der zitierten Arbeit: »Wenden wir uns zu den Vereinigten Staaten von Nordamerika, so finden wir die Uebereinkunft der Formen mit Europa wieder, und erblicken wir auch nicht immer die Art, so ist es doch ihre nächste Verwandtschaft, die uns an die unsrigen erinnert.«

Trotz der unleugbaren Flugkraft der Sporen sowie der ausgiebigen vegetativen Vermehrung sind die Lebermoose in ihrer Verbreitung gerade so spezialisiert und lokalisiert wie die Blütenpflanzen, ja in manchen grossen Gattungen sind die Areale unseren heutigen Kenntnissen zufolge noch weit beschränkter als bei den meisten Phanerogamen. Dies ist wohl auf mehrere Umstände zurückzuführen. Erstens benötigt die Mehrzahl der Lebermoose zu ihrem gedeihlichen Fortkommen Standorte von ganz bestimmten, ökologisch scharf ausgeprägtem Charakter, wodurch die Erweiterung der Areale beträchtlich erschwert wird, da die meisten der verwehten Sporen auf Plätzen landen dürften, wo ihrer Weiterentwicklung nicht die geringste Aussicht winkt. Die meisten Lebermoose

gedeihen auf feuchten Waldstellen, wo die Standortsverhältnisse üppiges Wachstum einer kryptogamischen, bei genügendem Lichtzutritt auch phanerogamischen Vegetation begünstigen. Auf solchen Standorten macht sich natürlich eine starke Konkurrenz der alteingesessenen Arten geltend und der neue Eindringling, dessen Sporen sich hieher zufälligerweise verirrten, hat kaum Aussicht, in dem Kampfe ums Dasein zu bestehen, selbst wenn die gelandete Spore auskeimt und sich weiter entwickelt. Auch der Umstand fällt auf die Wage, dass die Lebermoose einen uralten, heutzutage in den gemässigten und kälteren Klimaten sozusagen erstarrten, sich von ihren ganz speziellen Standorten nicht weiter ausbreitenden, wenig anpassungsfähigen Typus darstellen, welcher auf der nördlichen Hemisphaere seinen Entwicklungsgang in weit zurückliegenden Epochen durchgemacht und bereits zur Tertiärzeit in den Hauptzügen beendet hat. Die tropischen Arten sind zwar noch in reger Entwicklung begriffen, doch geht ihnen allerdings die Fähigkeit ab, sich einem gemässigteren Klima anzupassen; es befinden sich unter ihnen Formen, die sowohl durch konservativen als auch progressiven Endemismus entstanden sind und sich oft auf kleine Gebiete beschränken, selbst dann, wenn ähnliche Lebensbedingungen sich über eine weitaus ausgedehntere Area erstrecken.

Von nicht zu unterschätzender Bedeutung ist auch der Umstand, dass viele Lebermoose bloss selten oder nur spärlich fruchten, ja manche Arten wurden bisher stets nur steril angetroffen; so wurde z. B. der grössere Teil der aus der Gattung *Calypogeia* (mit 62 Arten) beschriebenen Spezies bloss steril gesammelt, darunter auch solche, die von zahlreichen weit entfernten Standorten bekannt sind. Auch *Trichocolea pluma*, ein im tropischen Asien, Ozeanien und Amerika recht gemeines Lebermoos, wurde bisher überall nur unfruchtbar beobachtet. Von den europäischen Jungermannien sind bei folgenden Arten Sporogone nach K. Müller (1) überhaupt unbekannt: *Gymnomitrium commutatum*, *Jamesoniella Carringtonii*, *Anastrophyllum Donianum*, *Jörgensenii*, *Reichardtii*"

Plagiochila spinulosa, tridenticulata, ambagiosa, punctata, Pedinophyllum Stableri, Leptoscyphus cuneifolius, Cephaloziella dentata, Adelanthus decipiens, dugortiensis, Pleuroschisma Pearsonii, Lepidozia pinnata, Pearsonii, Chandonanthus setiformis, Schisma aduncum, Sendtneri, Mastigophora Woodsii, Scapania planifolia, nimbosa, Pleurozia purpurea, Frullania riparia, Jackii. Aus welchen Gründen hier die Fähigkeit der Sporenerzeugung erloschen ist, bleibt fraglich; beachtenswert ist der Umstand, dass mit Ausnahme der einhäusigen *Pleurozia purpurea* alle angeführten Arten zweihäusig sind und dass das eine Geschlecht, wie Müller bemerkt, häufig fehlt. Den meisten dieser Arten fehlt ausserdem die Möglichkeit vegetativer Vermehrung, was sie ebenfalls zu alten Reliktformen, die vielleicht zum Teil bereits im Aussterben begriffen sind, stempelt. In anderen Fällen scheint jedoch die Unterdrückung der Sporogonbildung mit der Leichtigkeit der recht mannigfaltigen vegetativen Vermehrung im Zusammenhange zu stehen. Bei vielen Lebermoosen besitzt fast jede Zelle unter Umständen die Fähigkeit, einem neuen Individuum Ursprung zu geben. Eine verbreitete Art der vegetativen Vermehrung sind ein- oder auch mehrzellige Brutkörper (allgemein Gemmen genannt), die dann als feiner Staub Blätter oder Zweige bedecken und bei den foliosen Lebermoosen zumeist durch Umwandlung der Blattzellen entstehen. Andere Lebermoose vermehren sich wieder mittels leicht abbrechender vegetativer Zweige, die dann besonders durch Vermittlung von Wasser auf entfernte Standorte gelangen und zu neuen Pflänzchen auswachsen können. In noch anderen Fällen bilden sich wieder Adventivsprosse auf verschiedenen Thallusteilen oder es wird durch Knöllchen, mitunter aber auch noch auf andere Weise um die Nachkommenschaft gesorgt (vrgl. z. B. Goebel 1, K. Müller 1). Wir sehen somit, dass die vegetative Vermehrung nicht nur sehr mannigfaltig, sondern auch recht intensiv ist, wodurch besonders das gelegentliche Ausbleiben der Sporogonerzeugung in vielen Fällen erklärlich erscheint. Das oben erwähnte gänzliche Erlöschen der Sporenbildung bei mehreren wenig abändernden Arten, welches gleichzeitig mit der Unterdrückung der Gemmenbildung Hand in Hand geht, ist allerdings

durch das hohe, sich auch in der geographischen Verbreitung äussernde Alter der betreffenden Arten zu deuten, wie auch K. Müller richtig betont. Durch die vegetative Vermehrung wird in der Regel allerdings nur eine Ausbreitung über eine kleine Area ermöglicht, wenn auch die Übertragung winziger Brutkörperchen, wie wir solchen z. B. bei *Scapania, Calypogeia, Haplozia* u. a. begegnen, auch auf grosse Distanzen nicht ausgeschlossen erscheint.

Alle diese Umstände stehen der Entstehung zahlreicher eurytoper oder kosmopolitischer Areale hindernd im Wege. Die Lebermoose sind als ein alter, bereits im Frühtertiär gewiss weit verbreiteter Pflanzentypus zu betrachten, der wohl zu damaliger Zeit noch über eine grössere Lebenskraft und ein intensiveres Wanderungsvermögen verfügte und sich somit über die ganze Erde ausbreiten konnte, wenn sich auch diese Wanderung bei weitem nicht so rasch vollzog wie z. B. bei vielen Hymenomyceten, die in unveränderter Artform kosmopolitische Areale erlangten. Während der Tertiärzeit vermochten wohl mehrere Arten, dank der Flugkraft ihrer Sporen sowie vielleicht auch der intensiven Gemmenbildung zufolge, ihr Areal über die ganze Erde zu erstrecken; auf die Existenz dieser uralten Kosmopoliten weisen gegenwärtig einige jetzt geradezu unerhört zerrissene Artenareale hin, die sich als ehrwürdige Trümmer einstiger weiter Wohnbezirke repraesentieren (so z. B. in der Arktis oder Europa und dann wieder im antarktischen Gebiete auftauchende Arten). Unter den heutigen, an Zahl geringen Kosmopoliten ist wohl keine einzige Art als ein derartiger Archaeokosmopolit aufzufassen, sondern es sind diese wenigen weltumspannenden Areale erst in verhältnismässig jüngerer (postglazialer) Zeit zustandegekommen. Wir sehen an der heutigen Verbreitung der Lebermoose, dass bei diesen seit dem Ende der Tertiärperiode ein Siegeszug einer und derselben Art über die ganze Erdoberfläche eine sehr seltene Ausnahme bildet; die speziellen Lebensbedingungen in den einzelnen Gebieten veranlassten die Entstehung vieler kleiner Gattungen und besonders zahlreicher, auf kleine Gebiete beschränkter Arten, welche die durch klimatische und edaphische Verhältnisse bedingten Grenzen derselben genau innehalten. So hat besonders die durch ähnliche

Lebensbedingungen sowie auch durch übereinstimmende historische Florenentwicklung ausgezeichnete nördliche gemässigte Zone viele Arten gemeinsam, obzwar auch hier mehrere Typen ein lokales Vorkommen aufweisen.

KARL MÜLLER fügte seinem verdienstvollen und sehr sorgfältig durchgearbeiteten Werke (1) über die europäischen Lebermoose einen lesenswerten Abschnitt »Die geographische und ökologische Verbreitung der europäischen Lebermoose« bei, der dem Titelblatte zufolge gleichzeitig mit meiner Studie über die Verbreitung der Lebermoose (1) erschien*); somit konnte ich auch in der vorliegenden Arbeit die Resultate der Untersuchungen MÜLLER's erst in das druckfertige Manuskript einschalten.

Leider konnte ich das durch weiteren Artbegriff und sehr sorgfältige Verbreitungsangaben ausgezeichnete Werk K. MÜLLER's nicht als Grundlage für allgemeine pflanzengeographische Betrachtungen wählen, da dasselbe nur die 398 europäischen Arten umfasst, während schon einzelne tropische Gattungen diese Zahl an und für sich bedeutend übersteigen. K. MÜLLER betont mit vollem Recht die Uniformität der ganzen holarktischen Lebermoosflora, doch haben manche seiner Ausführungen *nur* für dieses Gebiet und nicht für die Lebermoose im allgemeinen Giltigkeit. Die europäischen Gebirge weisen tatsächlich bei weiterem Artbegriff nur äusserst spärliche Endemismen auf, doch wenn wir die ganze Reihe der Lebermoose überblicken, so finden wir eine Unmenge endemischer Arten, womit auch im Einklange steht, wie ja selbst K. MÜLLER ganz richtig hervorhebt, dass die Lebermoose streng umgrenzte Gebiete besiedeln und somit für pflanzengeographische Fragen ebenso gut wie die Phanerogamen verwendet werden können. K. MÜLLER weist darauf hin, dass das Alpengebiet nur ein einziges, als Reliktendemismus aufzufassendes Lebermoos, dagegen viele endemische Laubmoose und Phanerogamen (nach JEROSCH von den letzteren 64 Arten) besitzt und kommt somit zu dem Schlusse: »Je höher eine Entwicklungsreihe des Gewächsreiches steht, desto endemismenreicher ist sie.« Diesem Schlusse kann ich

*) Die zwei Hefte wurden von dem Buchhändler jedoch erst im J. 1917 geliefert!

nicht vollinhaltlich beipflichten, denn das Tatsachenmaterial lässst darauf schliessen, dass die Endemismen im hohen Grade mit den Lebensbedingungen, dem Konkurrenzkampfe sowie den Verbreitungsmöglichkeiten der Arten zusammenhängen; sehr plastische und für weite Wanderungen in ihren Verbreitungseinheiten gut ausgerüstete Arten konnten sich von ihrem Ausgangsorte aus leicht verbreiten, besonders wenn sie für solche Standorte befähigt sind, auf denen der Konkurrenzkampf durch Ausschaltung vieler Kommensalen stark herabgesetzt ist. Nun trifft es zwar zu, dass im allgemeinen die niederen Organismen vermöge ihres oekologischen Wesens sich leichter auf grössere Distanzen verbreiten können und infolgedessen meist ausgedehntere Areale und nicht so zahlreiche Endemismen aufweisen; aber wie uns das Reich der Pilze oder auch das der Algen (vrgl. den Gegensatz in der Verbreitung der Süsswasser- und der hochorganisierten Meeresalgen!) lehrt, ist es *nicht* die Organisationshöhe, die hier einzig und allein auf die Wagschale fällt. Bei den Lebermoosen haben, trotz der sehr ausgiebigen und mannigfaltigen vegetativen Vermehrung, trotz der leichten Übertragbarkeit der Gemmen und besonders der flugfähigen Sporen mehrere Faktoren auf die Ausbreitung einschränkend eingewirkt. Diese im Wesen ökologischen Faktoren waren meiner Ansicht nach für die geographische Verbreitung in erster Reihe massgebend; das hohe geologische Alter war gleichfalls nicht allein entscheidend, denn wir wissen, dass mehrere Marchantiaceen, die doch unzweifelhaft von sehr hohem Alter sind, aussergewöhnlich grosse Wohnbezirke erlangten, wozu ihnen wohl nicht zum mindensten ihre, von der Mehrzahl der Lebermoose verschiedene Lebensweise sowie Standortswahl verhalf. Man könnte eher aus der heutigen geographischen Verbreitung der Lebermoose den Eindruck gewinnen, dass in weit zurückliegenden Epochen ein für die Lebermoose viel günstigeres Klima geherrscht habe und dass sie zu jener Zeit auch grosse Wanderungen unternahmen, während sie gegenwärtig in den gemässigten und kälteren Klimaten sozusagen erstarrt sind. In dieser Epoche ist auch der Grundstein für die merkwürdige, durch Reliktstandorte aus einer einstens mehr zusammenhängenden Area entstandene

Diskontinuität einiger Arten zu suchen; ich kann nur K. Müller zustimmen, dass sich solche disjunkte Areale, wie er sie l. c. p. 827 anführt, ungezwungen auf diese Art erklären lassen. Nach der Eiszeit, die wahrscheinlich viele tertiäre Lebermoose aus Europa verdrängt, eventuell gänzlich vernichtet hat, blieb dann in der nördlichen gemässigten Zone der stark verarmte Überrest der tertiären, sich auf die ihr zusagenden Standorte streng beschränkenden Lebermoosflora erhalten, welche gegenwärtig einer artbildenden Weiterentwicklung nicht mehr fähig zu sein scheint. In den Tropen ist jedoch die bildende Lebenskraft nicht erloschen; die Unzahl der dort vorkommenden stenotopen und endemischen Typen lässt sich ungezwungen auf den progressiven Endemismus zurückführen. Es stehen einander somit die tropische und die nördliche gemässigte Zone schroff gegenüber; die Erörterungen K. Müller's haben *nur* für das letztere Gebiet Giltigkeit.

Aus dem erwähnten Erstarren der jetzigen holarktischen Lebermoosflora darf man jedoch nicht den Schluss ziehen, dass die meisten holarktischen Arten unveränderlich sind; gerade im Gegenteil gliedern sich viele Spezies (s. z. B. Müller l. c. 804 — 805) in eine Anzahl von Formen, in denen vielleicht der Ausgangspunkt für eine künftige Speziesbildung zu erblicken ist. Allerdings dürfte geraume Zeit verfliessen, ehe die holarktische Lebermoosflora, ein Abkömmling der tropischen und subtropischen Tertiärflora, die infolge der für sie ungünstigeren Lebensbedingungen gewissermassen erstarrte, imstande sein wird, ein neues, durch Weiterentwicklung der Arten ausgezeichnetes Entwicklungszentrum in der nördlichen gemässigten Zone auszubilden. Unter der grossen Zahl der kleinen Arten, die wir schon heute kennen, sind besonders einige vikariierende Arten vom Standpunkte der Speziesbildung aus beachtenswert; so ersetzen sich nach K. Müller (1) z. B. vielfach in manchen Gegenden *Encalyx obovatus* und *E. subellipticus*, *Scapania aspera* und *S. gracilis*, *Madotheca laevigata* und *M. thuja*, *Lejeunea cavifolia* und *L. patens*, die in verschiedenen Gebieten vorkommen, sowie *Scapania nemorosa* und *S. crassiretis*, die sich in verschiedenen Höhenlagen vertreten. Auch unter den in den värmeren Teilen Europas

und Nordamerikas vorkommenden Arten finden sich Paare vikariierender Arten, so z. B. nach MÜLLER *Cololejeunea calcarea* und *Biddlecomiae*, *Frullania dilatata* und *Brittoniae*, *F. tamarisci* und *Asagrayana*, *Jubula Hutchinsiae* und *pensylvanica*. *Microlejeunea ulicina* und *bullata*, *Plagiochila spinulosa* und *Austinii*, *Tesselina pyramidata* und *androgyna*.

K. MÜLLER scheint ursprünglich dem Winde als Verbreitungsfaktor der Sporen eine grössere Bedeutung beigemessen zu haben, denn er sagt (1 p. 91): »Die reifen Sporen fallen gewöhnlich in der Nähe ihrer Bildungstätte auf den Erdboden. Manchmal werden sie aber auch weiter befördert und als hauptsächlichste Transportmittel müssen wir Wind und Wasser ansehen. Durch Wind wurden allem Anscheine nach die Moose auf die erratischen Blöcke der norddeutschen Tiefebene*) übertragen«. Später (in demselben Werk 807, 843) änderte er jedoch seine Meinung dahin ab, dass eine Verbreitung der Sporen und Gemmen auf grosse Strecken durch Wind allem Anscheine nach nicht stattfindet, da die Lebermoose meist auf ganz windstillen Orten wachsen, dass aber eine solche ganz ausnahmsweise durch Vögel erfolgen könne.

Auch FR. STEPHANI (2) spricht in seiner Arbeit über die geographische Verbreitung der Lebermoose den Sporen die grosse Flugkraft ab. Er betont, dass den Lebermoosen ein gutes und weitreichendes Verbreitungsmittel fehle und weist darauf hin, dass die Sporen nicht über die Meeresflächen geweht werden, (worauf er aber nur aus dem Umstande schliesst, dass ein derartiger Transport nicht bewiesen wurde), ferner, dass die Sporen durch den Wind keineswegs weit getragen werden, da die Pflanzen in den Tropen besonders an solchen Orten wachsen, wo ihnen das nötige Mass von Feuchtigkeit geboten wird und eine heftige Bewegung der Luft keinen Zutritt hat; auch auf Treibholz gehen die Sporen im Meerwasser zugrunde, da — wie STEPHANI durch Versuche bewiesen hat — im Salzwasser ihre Keimfähigkeit in wenigen Tagen verschwindet. STEPHANI be-

*) K. MÜLLER wiederholt somit die von LIMPRICHT ausgesprochene Anschauung, das diese Moose nicht als Reliktpflanzen, sondern als Kolonisten neueren Datums erscheinen.

zeichnet die Lebermoose mit Recht als ein vorzügliches Werkzeug zur Ermittelung oder Bestätigung pflanzengeographischer Fragen, doch ist, wie spätere Erwägungen zeigen werden, seine Ansicht über die geringe Flugkraft der Sporen gewiss unrichtig. Allerdings muss zugestanden werden, dass durch die scheinbar windstillen Standorte die Leichtigkeit der Verbreitung der Sporen durch Luftströmungen vermindert wird, was jedoch bei weitem nicht so sehr auf die Wagschale fällt, wie die vorher erwähnten, einer Ausdehnung der Areale sehr ungünstigen Umstände, denen es zuzuschreiben ist, dass die verwehten Sporen nur ganz minimale Aussicht haben auszukeimen und im neuen Gebiete Fuss zu fassen. Nur bei Besiedelung neuen Bodens oder nach grossen Veränderungen der Standortsverhältnisse, die die ansässige Vegetation zum grossen Teil oder auch gänzlich vernichteten und eine Neubesiedelung zur Folge hatten, konnte sich die Uebertragung der Sporen auf grössere Distanzen mit besserem Erfolge geltend machen.

2. Das System der Lebermoose vom pflanzengeographischen Gesichtspunkte.

Der Beweis dafür, dass die Lebermoose in ihrer geographischen Verbreitung im ganzen dieselbe Regelmässigkeit und Lokalisierung einhalten wie die Blütenpflanzen, kann nur durch eine eingehende Analyse der Areale einzelner Gattungen und Arten erbracht werden. Es ist somit eine weitere oder engere Auffassung der Gattungen und Arten für pflanzengeographische Betrachtungen nicht gleichgültig. In dem grundlegenden Werke »Synopsis Hepaticarum« von Gottsche, Lindenberg und Nees von Esenbeck (1844—47) sind die Arten weit umgrenzt, doch die modernen Hepatikologen Fr. Stephani und Viktor Schiffner, die besten Kenner dieser Gruppe, erblicken gerade in diesem weiten Speziesbegriff den fundamentalen Fehler dieses sonst klasssischen Werkes. Der »Synopsis Hepaticarum« zufolge weisen viele Arten eine recht sonderbare Verbreitung auf, wie aus folgenden Beispielen erhellt:

Plagiochila dichotoma: afrikanische Inseln, Guinea, Nil-

gherries, Rio Janeiro, Minas Geraes (Brasilien), Amazonengebiet.

Frullania ericoides: Brasilien, franz. Guyana, Kuba, Tahiti, Manga Reva, Ost-Indien, Ascension, Mexiko.

Aneura pinguis: Europa, Brasilien, Chile und Peru, Hermite Island, Nepal.

Aneura multifida: Europa und Nord-Amerika, Java, Falkland Inseln, Kap Horn, Auckland Island, Neuseeland, St. ChristophInsel, Mauritius, Kap der Guten Hoffnung.

Radula complanata: nördliches Europa und Amerika, Madeira, Teneriffa, Kap der Guten Hoffnung, Ost-Indien, Nepal, Campbells Island, Chile.

Nach neuerer Auffassung zerfallen aber meist solche Arten in mehrere, geographisch schärfer umgrenzte Spezies, die jedoch oft nur durch unbedeutende morphologische Merkmale voneinander abweichen. SCHIFFNER und STEPHANI schreiben sich das Verdienst zu, dies zuerst erkannt zu haben. So sagt SCHIFFNER (1): »Wir erkannten zuerst, dass es sich dabei um verschiedene Arten handelt und dass bei der Beurteilung der Spezies nicht ausschliesslich nur ein gewisses Mass von morphologischen Verschiedenheiten ausschlaggebend ist, sondern dass die geographische Verbreitung als ebenfalls wichtiger Faktor in Rechnung zu ziehen sei«. SCHIFFNER hält auch geographisch getrennte, wie er selbst zugesteht, durch sehr minimale morphologische Merkmale unterschiedene Formen als Arten aufrecht, so z. B. das *Anastrophyllum nardioides* (Norwegen) und *A. Reichardtii* (Alpen), *Lophozia Hatcheri* (Magellanstrasse) und *L. Baueriana* (Europa), *Madotheca platyphylloidea* (Nordamerika) und *M. Jackii* (Europa), *Frullania saxicola* (Nordamerika) und *F. cleistotosma* (Tirol), etc. Demgegenüber hält aber K. MÜLLER in seiner Bearbeitung der europäischen Lebermoose (in Rabenhorst Kryptogamenflora) an dem Standpunkte der genügenden morphologischen Unterschiede fest. Mit Rücksicht auf die Leichtigkeit, mit der die Verbreitungseinheiten der meisten Sporenpflanzen auf grosse Distanzen transportiert werden können, sowie auf das hohe geologische Alter dieses Pflanzenstammes, das auch

manche auf den ersten Blick schwer erklärliche Areale leicht begreiflich macht, scheint mir die einseitige Betonung des rein geographischen Momentes, auf dem der Artbegriff bei Stephani und Schiffner in vielen Fällen basiert, nicht einwandfrei zu sein; es wäre wohl angezeigter, solche morphologisch nur unbedeutend abweichende Formen innerhalb einer und derselben Spezies als geographische Rassen, Varietäten oder Formen zu bewerten. Für pflanzengeographische Auseinandersetzungen muss eine einheitliche Bearbeitung die Grundlage bilden. Schiffner hat zwar die Lebermoose in Engler-Prantl Natürl. Pflanzenfam. übersichtlich bearbeitet, doch ist die Behandlung der Gattungen so kurz und allgemein gehalten, dass sie für unsere Zwecke unbrauchbar erscheint. Als Grundlage wählte ich somit das unlängst abgeschlossene fünfbändige Werk Stephani's »Species Hepaticarum« (1); die Arten (und öfters auch die Gattungen) sind zwar eng begrenzt und viele derselben müssen bei weitem Speziesbegriffe vereinigt werden, doch der Vorteil liegt in der einheitlichen Bearbeitung des riesigen Materiales, welches dem Verfasser dieser Monographie zur Verfügung stand. In manchen artenreichen Gattungen lässt sich vorläufig das umfangreiche Material kaum in ein übersichtliches System einteilen, da die Formen die verschiedenen Merkmale in allerlei Kombinationen aufweisen, so dass eine scharfe Umgrenzung der Sektionen und Artgruppen kaum möglich ist. Stephani hat sich diese Aufgabe meist dadurch erleichtert, dass er eine Einteilung der Arten innerhalb der Gattungen nach grossen geographischen Gebieten durchgeführt hat, wodurch er gleichzeitig bekennt, dass die Verbreitung der Lebermoose derart geographisch specialisiert ist, dass man die Arten im Einklange hiemit auch für praktische Zwecke (für das Bestimmen) einteilen kann. Anstatt Sektionen stellt Stephani bei vielen Gattungen geographische Gebiete auf (1. Europa et America septentrionalis, 2. Asia tropica, 3. Africa, 4. America tropica, 5. Australia, u. ä.), was natürlich für das System der kleinen Spezies sehr geeignet ist. Leider widmete Stephani den Verbreitungsangaben bei weitem nicht so viel Sorgfalt, wie der eigentlichen systematischen Bearbeitung, indem er die Areale nur sehr

allgemein und nicht immer übersichtlich und einheitlich anführt.*)

Die verschiedenen Systeme der Lebermoose haben für uns nur untergeordnete Bedeutung. Wir erinnern nur an die Systeme B. C. DUMORTIER's (1874), TREVISAN's DE SAINT-LÉON (1877), RICH. SPRUCE's (1885), A. W. EWANS' (1892), VIKT. SCHIFFNER's (1893, modifiziert 1917), L. M. UNDERVOOD's (1894), C. WARNSTORF's (1903), C. JENSEN's (1915), FR. STEPHANI's (1900—1916) u. v. a.; auch D. H. CAMPBELL, FRANK CAVERS u. a. haben sich mit der Phylogenie der Lebermoose eingehend befasst.

Die meisten Autoren (SCHIFFNER, WETTSTEIN, VELENOVSKÝ, LOTSY, etc) fassen die Laub- und Lebermoose als zwei selbständige Reihen auf; CAMPBELL und CAVERS vertreten jedoch die Anschauung, dass sich die Laubmoose durch Vermittlung der *Sphagnales* direkt aus den *Anthocerotales* ableiten. S. O. LINDBERG (1872) sagt aber im Gegensatze zu der Mehrzahl der Bryologen »Hepaticae are superior to Bryineae«.

Nach der üblichen Ansicht der Hepatikologen leiten sich die foliosen Lebermoose von den thallösen ab. RICH. VON WETTSTEIN leitet jedoch in seinem »Handbuche der system. Botanik« (I. Aufl. 1903-08, II. Aufl. 1911) umgekehrt die thallösen Formen von den foliosen ab und sagt: »Die beblätterten Formen der Lebermoose, und zwar die *Haplomitriaceae* und *Acrogynaceae* unter den *Jungermanniales*, nähern sich in mehrfacher Hinsicht (Beblätterung, Stellung der Archegonien) noch am meisten dem Typus der Laubmoose; immer mehr tritt die dorsiventale Ausbildung und damit die Reduktion der Blattbildung am Gametophyten hervor, bis schliesslich thallusähnliche Bildungen entstehen.

*) Bei den grossen, geographisch eingeteilten Gattungen zählt er z. B. eine auf der Insel Madeira endemische Art einmal zu Europa, ein andermal wieder zu Afrika und einmal sogar zum tropischen Amerika. »Falklands Islands (Marianae Insulae olim)« zählt er einmal (so z. B. IV. 620, 695) zu »Antarcticae«, ein andermal wieder zum tropischen Asien und Ozeanien; die Inseln Galapagos rechnet er entweder zu Ozeanien oder zum tropischen Amerika; aus seiner Angabe »Rio Negro« ist nicht immer ersichtlich, ob darunter Brasilien oder Argentinien gemeint ist, u. s. w.

Schon bei den *Anacrogynaceae* unter den *Jungermanniales* vollzieht sich diese Umbildung; die *Marchantiales* stellen einen Seitenzweig dar, bei dem es zwar zu einer thallusartigen Ausbildung des Gametophyten, aber zu einer hohen Differenzierung in demselben gekommen ist.«

V. Schiffner (1) bezeichnet diese Neuerung als eine höchst wertvolle neue Idee, der er sich völlig anschliesst; die niedere Organisationshöhe des Gametophyten der *Anthocerotheae* wird somit nicht als Kriterium für die ursprüngliche (primitive) Natur derselben aufgefasst, da gerade das Gegenteil der Fall ist. Dies entspricht auch den übrigen Archegoniaten, bei denen ebenfalls die fortschreitende Reduktion des Gametophyten mit korrelativer Höherentwicklung des Sporophyten Hand in Hand geht. Unserer Ansicht nach ist eine direkte Ableitung der thallösen Lebermoose von den foliosen nicht einwandfrei; immerhin muss man aber anerkennen, dass die meisten Autoren, die sich mit der Phylogenie der Bryophyten befassten, durch die thallusartige Ausbildung des Gametophyten resp. durch die Blattbildung irregeleitet wurden. Man kann ja nicht bestreiten, dass sich gerade die ersteren durch die Höherentwicklung ihres Sporophyten zweifellos als weiter vorgerückt, daher nicht primitiv, sondern abgeleitet erweisen.

K. Goebel (1) weist darauf hin, dass schon einige ältere Hepatikologen, so vor allem G. W. Bischoff (1834) von den beblätterten Formen ausgingen und aus diesen die thallösen ableiteten, dass somit die von Schiffner neuerdings zur Geltung gebrachte Idee keine neue ist. Goebel betont auch, dass es akrogyne beblätterte Lebermoose gibt, welche (so z. B. *Zoopsis*, *Pteropsiella*) auf eine einfachere ganz oder teilweise thallose Gliederung herabsinken, wobei aber die Sexualsprosse immer die typische Beblätterung beibehalten. Der Überzeugung Göbel's, dass wir derzeit zu einer allgemeinen Ableitung thalloser Formen aus foliosen nicht berechtigt sind, kann ich nur beipflichten. Die thallose Ausbildung kann als eine Anpassung an Standortsverhältnisse aufgefasst werden; übrigens ist sie mit der foliosen durch zahlreiche Mittelformen verbunden und man ist wohl berechtigt, die thallose und foliose Reihe als Parallelreihen

aufzufassen, bei welchen die fortschreitende Differenzierung des Sporophyten mit der Gliederung des Thallus nicht immer Schritt gehalten hat.

Oltmanns (1912) nimmt eine Einteilung der Lebermoose in 4 Reihen (1. *Anthocerotales*, 2. *Marchantiales*, 3. *Metzgeriales*, 4. *Jungermanniales*) an, während die Mehrzahl der Autoren nur drei Parallelreihen mit selbständiger Entwicklungsweise anerkennen. Es sind dies: 1. *Marchantiales*, 2. *Jungermanniales*, 3. *Anthocerotales*. Diese, wie sich V Schffner in seiner umfangreichen referierenden Arbeit (1) äussert, von Lindberg angeregte und von Leitgeb gut begründete Einteilung ist mit Recht zum Ausgangspunkt für das phylogenetische System gewählt worden. Die beiden Reihen zerfallen in je zwei sehr natürliche Gruppen, so dass vier Untergruppen entstehen, welche Schiffner in seinem System von 1893 (2) als Familien behandelt, die aber, wie er später (1) sagt, eher den Rang von Ordnungen tragen.

Das System der Lebermoose ist phylogenetisch sehr gut durchgearbeitet, nur über den Anschluss nach oben und unten sind wir trotz der sehr umfangreichen diesbezüglichen Literatur nicht im Klaren. Wettstein und Schiffner vertreten die Ansicht, dass die Bryophyten, Pteridophyten, Gymnospermen und Angiospermen eine phylogenetisch zusammenhängende grosse systematische Einheit (die Kormophyten) bilden. Allerdings ist hiedurch nicht gesagt, ob sich etwa die Bryophyten aus niederen Formen (der Thallophyten, *Coleochaete*, *Confervales*, *Phaeophyta*) herleiten oder ob wir uns ihre Entwicklung in Übereinstimmung mit der modernen polyphyletischen Auffassung der Gesamtentwicklung des Pflanzenreiches in nebeneinander verlaufenden Reihen vorstellen sollen. Dieselben Schwierigkeilen stellen sich auch bei dem Anschluss nach oben ein, denn eine direkte Ableitung der Pteridophyten aus den Bryophyten lässt sich kaum beweisen. Nach Schiffner und einigen anderen Autoren ist die denkbar geringste und am leichtesten überbrückbare Kluft einerseits zwischen den Anthoceroteen und andererseits den Ophioglossaceen gelegen.

3. Das tropische Element im Bereiche der holarktischen Lebermoosflora.

Wie bereits erwähnt, liegt das Entwicklungszentrum der Lebermoose in den tropischen Ländern, wo die artenreichsten Gattungen heimisch sind; einige der tropischen Genera haben jedoch vereinzelte Vorposten in der nördlich temperierten Zone, so z. B. die Gattungen *Trichocolea, Sendtnera, Marchesinia, Chandonanthus, Mastigobryum, Plagiochila, Lepidozia, Calypogeia, Chiloscyphus, Radula, Frullania* und *Lejeunia.* Man darf sich jedoch nicht vorstellen, dass diese Arten aus den Tropen in die gemässigte Zone eingedrungen sind, denn es handelt sich wenigstens in der Mehrzahl der Fälle nur um interessante Relikte der tertiären Lebermoosflora, die sich besonders im Bereiche der atlantischen Flora zu erhalten vermochten. Fr. Stephani (2) hebt hervor, dass diese in den Tropen zum Teil durch Hunderte von Arten vertretenen Gattungen in Europa nicht entstanden, sondern in einer weit zurückliegenden Epoche hieher eingewandert sind und als die anpassungsfähigsten auch erhalten blieben. Da aber die frühtertiäre Flora auf der nördlichen Hemisphaere einen tropischen Charakter aufwies und da sie — wie die Bernsteinfunde beweisen — besonders zahlreiche Jubuleen enthielt, so besteht nicht die Notwendigkeit eine Einwanderung aus den Tropen anzunehmen, was auch der Anschauung K. Müller's (1) entspricht; dieser macht auch auf die Tatsache aufmerksam, dass diese tropischen Elemente in Europa, wenn sie auch sogar einige der in Mitteleuropa häufigsten Lebermoose zählen (so *Frullania dilatata, Plagiochila asplenioides, Radula complanata, Madotheca platyphyla*), doch gegen Norden zu auffallend rasch an Häufigkeit abnehmen. K. Müller hat auch mit Erfolg den Versuch unternommen, statistisch nachzuweisen, dass bei den holarktischen Gattungen Europa und Nordamerika sehr viele gleiche Arten zählt, während diese tropischen Gattungen in diesen beiden Gebieten im wesentlichen durch verschiedene Arten vertreten sind. K. Müller führt als Relikte frühtertiärer und zu dieser Periode auf der ganzen nördlichen Halbkugel weit verbreiteter Arten folgende europäische Lebermoose auf (die in allen 3 Erdteilen nachgewiesenen sind durch einen

Stern hervorgehoben): **Calypogaea arguta* (bis Norwegen und den Faeroër-Inseln), *Cololejeunea minutissima*, **Corsinia marchantioides*, **Cyathodium cavernarum* (für Europa noch fraglich), **Dumortiera hirsuta*, *Fossombronia angulosa* (bis Norwegen), **Frullania riparia*, *F. saxicola*, **Jubula Hutchinsiae*, **Lejeunia flava*, **Lunularia cruciata*, **Madotheca thuja*, *Marchantia paleacea*, *Phragmicoma Mackayi*, **Plagiochasma rupestre*, *Radula Visianica*, *Riccia lamellosa*, *Michelii* und *nigrella*, *Sphaerocarpus texanus*, **Targionia hypophylla* und *Tessellina pyramidata*.

Von ganz ausserordentlich hohem pflanzengeographischen Interesse sind jedoch einige, auf der Westküste Grossbritanniens (zumeist in Irland) vorkommende Arten, die auch im tropischen Amerika wenigstens durch nahe vervandte, wenn nicht identische Formen vertreten sind und sich somit als Glieder des neotropischen, der europäischen Flora ganz fremden Florenelementes erweisen. Es sind dies folgende Arten: *Acrobolbus Wilsonii*, *Adelanthus decipiens* und *dugortiensis*, *Cololejeunea microscopica*, *Colura calyptrifolia* und *Jamesoniella Carringtonii*. Es wurde auch der Meinung Ausdruck geliehen (so noch in neuester Zeit von Douin), dass diese Arten durch den Golfstrom herübergebracht werden konnten, was jedoch mit Rücksicht darauf, dass sowohl die Sporen als auch die zarten Pflänzchen einen längeren Aufenthalt im Salzwasser kaum vertragen würden, nicht sehr wahrscheinlich ist. Meiner Ansicht nach könnte es sich — falls diese Arten nicht Relikte sind, wie K. Müller annimmt — nur um Sporenverwehung handeln, die ja nichts Unmögliches in sich hat. Welche Eventualität die richtige ist, lässt sich vorläufig kaum entscheiden.

4. Die Florenelemente der europäischen Lebermoosflora.

Die gesamte europäische Lebermoosflora gehört dem holarktischen, sich über die ganze nördliche gemässigte und kältere Zone erstreckenden Florenelemente an; nur die um das Mittelländische Meer gelegenen Länder reihen sich dem mediterranen, sich im allgemeinen im Einklange mit dem Klimacharakter durch seine mehr xerophytische Ausprägung kennzeichnenden Florenelemente an. Neben den meisten (nach

K. Müller 24) *Riccia*-Arten, von denen jedoch nicht wenige ziemlich weit nordwärts vordringen (*R. Crozalsii, Michelii* und *nigrella* nach Grossbritannien, *R. Bischoffii* bis nach Sachsen und dem Harz, etc.) können nach K. Müller (1) zu dem mediterranen Elemente folgende Arten gezählt werden:*) *Anthoceros Beltrani, caespiticius, constans, dichotomus, Husnotii, multilobulus, Cephaloziella calyculata, dentata, Clevea Rousseliana, Cololejeunea Rossettiana, Exormotheca pustulosa, Welwitschii, Fossombronia caespitiformis, Crozalsii, echinata, Husnotii, Loitlesbergeri, Gongylanthus ericetorum, Grimaldia dichotoma, Lophozia turbinata, Petalophyllum Ralphii,* alle *Riella*-Arten, *Southbya nigrella, stillicidiorum, Sphaerocarpus terrestris.*

K. Müller weist auf die bereits von Hübener (1) erkannte und auch von mir (1) hervorgehobene Tatsache hin, dass die Lebermoosflora der ganzen nördlichen Zone eine auffallend gleichmässige ist und dass es somit nicht angehe, das holarktische Europa in so zahlreiche Untergruppen, wie man solche bei den Phanerogamen und Laubmoosen unterscheiden kann, zu gliedern. Aus der Zusammenstellung der europäischen Lebermoose (bei K. Müller's weiterem Artbegriffe) und ihrer Verbreitung auf der nördlichen Hemisphaere geht heroor, dass von den 398 europäischen Arten nach dem heutigen Stande unserer Kenntnisse schon 239 oder 60% aus Nordamerika und 154 oder 39% aus dem bryologisch äussert ungenügend erforschten Asien bekannt sind. Bei Ausschlus des mediterranen Elementes gestaltet sich diese Übereinstimmung noch auffäliger; so kommen z. b. nach K. Müller von der holarktischen Gattung *Lophozia* 85% und von *Cephalozia* 76% der europäischen Arten in Nordamerika vor. Es sind somit die Beziehungen zwischen Europa und Nordamerika (im Gegensatz zu den Phanerogamen) i n n i g e r als die zwischen Europa und Asien. K. Müller ist geneigt die grosse Überreinstimmung der Lebermoosflora einzelner Kontinente der nördlichen Halbkugel dadurch zu erklären, dass die jetzt lebenden Arten fast durchweg Ü b e r-

*) Da die Nomenklatur und Artumgrenzung bei K. Müller eine andere als bei Stephani ist, so behalten wir dort, wo wir zitieren, dessen Bezeichnungen bei.

reste der arktotertiären Flora darstellen und dass sich die Lebermoose seit der Eiszeit nicht mehr weiter zu neuen Arten entwickelt hätten.

Unter dem holarktischen Florenelemente lassen sich nach K. MÜLLER's Ausführungen, abgesehen von den vereinzelten tropischen Relikteinsprengungen, nur zwei schärfer ausgeprägte Elemente unterscheiden und zwar das arktische (nur die 3 ersten Gruppen bei K. MÜLLER, die vierte ist dem Grundstock des holarktischen Florenelementes und nicht seiner arktischen Unterabteilung beizurechnen) und das atlantische.

1. Die arktische Gruppe.

Manche Arten gedeihen in den europäischen (eventuell auch in den nordamerikanischen und asiatischen) Hochgebirgen und erscheinen dann wieder im hohen Norden meist in der Ebene, während sie in den dazwischen liegenden Gebieten entweder gänzlich fehlen oder doch nur sehr spärlich auftreten. Man könnte dies durch die übereistimmenden Lebensbedingungen erklären, doch in der Regel ist in solcher Verbreitung die Einwirkung der Glazialperiode zu erblicken, die ja auch bei mehreren Blütenpflanzen eine ähnliche, mehr oder weniger disjunkte Area verursachte. So kommt die monotypische Gattung *Peltolepis* (mit der Art *P grandis*) in den Alpen, im Tatragebirge, sowie im hohen Norden (Norwegen, Finnland, Sibirien, Grönland) vor; es ist dies somit ein arktischer Typus, welcher in der Glazialperiode bis auf die Gebirge Mitteleuropas verdrängt wurde und sich hier auch später erhielt. Die Gattung *Pleuroclada* zählt zwei Arten, und zwar eine im Himalaya, die andere (*P. albescens*) in den Alpen (an vielen Stellen meist zwischen 2000—2500 m, mitunter bis 2900 empor-, selten bis 1800 m herabsteigend), in der Tatra (hier selten), dem schottischen Hochplateau, in Skandinavien, auf Island und Grönland sowie einer neueren Angabe C. HAYNES' (1) zufolge auch in Nordamerika; die Art ist auch im Norden meist alpin, steigt aber mitunter bis in die Kiefernregion herab; die Gattung dürfte somit einen arktotertiären Typus mit teilweise Reliktstandorten darstellen.

Die Gattung *Scapania* hat ihren Brennpunkt ebenfalls in

der nördlichen Zone und weist einige interessante, dem arktischen Gebiete und den südlicher gelegenen Hochgebirgen gemeinsame Arten auf; so wächst *S. crassiretis* in Norwegen, als Seltenheit in Grossbritannien und taucht dann wieder in den Alpen von Steiermark, Salzburg, der Schweiz und Italien auf. *S. helvetica*, nach STEPHANI in den Alpen endemisch, ist nach MÜLLER ebenfalls arktisch-alpin, denn sie kommt ausser auf zerstreuten Alpenstandorten auch in den Pyrenäen, einigen deutschen Mittelgebirgen, in der Tatra und in Skandinavien vor. *S. carinthiaca*, von einem einzigen Standorte in Kärnten bekannt, ist als endemisches Produkt des Alpenzuges zu betrachten; doch ist auch diese Art der aus der Schweiz, aus Italien und Schweden bekannten *S. Massalongii* so nahe verwandt, dass sie zunächst von K. MÜLLER (Bull. Herb. Boiss. 1901) als Varietät der letzteren aufgestellt wurde. Auch *Sphenolobus politus* ist ein arktisch-alpiner Typus: er kommt in den Alpen (meist zwischen 1600 — 2200 m) vor, ferner in Grossbritannien, Skandinavien und ist in den arktischen Ländern (Lappland, Spitzbergen, Sibirien, Grönland, Aljaska und Ellesmere-Land) cirkumpolar. *Chandonanthus setiformis* kommt im arktischen Gebiete (Norwegen, Lappland, Grönland, Aljaska), dann wieder in den Alpen, im Riesengebirge und dem Harz vor und wurde einmal auch in Schwarzwald gesammelt, scheint daselbst jedoch seither verschwunden zu sein.

Die arktischen Arten im weiteren Sinne kann man nach K. MÜLLER (mit Hinzurechnung der streng arktischen Arten) in 4 Untergruppen einteilen.

a) Als **arktische Arten im engeren Sinne** (daher solche, die aus der Arktis nicht in die Waldzone ausstrahlen) sind *Lophozia Binsteadi*, *Marsupella arctica*, *Scapania hyperborea*, *Kaurinii*, *Simmonsii*, *spitzbergensis* zu betrachten.

b) **Arktische Arten im weiteren Sinne**, d. h. solche, die südwärts gleichweit vorrücken, als ehemals die skandinavischen Gletscher reichten: *Lophozia Schultzii* und *Cephalozia Macounii*, möglicherweise auch noch *Diplophyllum ovatum*.

c) **Arktisch-alpine Arten im weiteren Sinne**, d. h. solche, die in nordischen Ländern verbreitet sind, aber auch in den mitteleuropäischen Hochgebirgen (besonders in den Alpen)

sowie sporadisch in einzelnen dazwischeniegenden Mittelgebirgen auftreten. Aus der europäischen Flora gehören hieher: *Anthelia julacea, Juratzkana, Chandonanthus setiformis, Clevea hyalina, Fimbriaria pilosa, Gymnomitrium alpinum, Haplomitrium Hookeri, Haplozia cordifolia, Lophozia heterocolpos, Kunzeana, obtusa, Wenzelii, Moerckia Blyttii, Scapania cuspiduligera, Sphenolobus saxicolus.*

d) **Streng arktisch-alpine Arten**, die zwischen den nordeuropäischen Ländern und dem Alpenzuge gänzlich fehlen, so *Alicularia Breidleri, Anastrophyllum Reichardtii, Arnellia fennica, Diplophyllum gymnostomophilum, Eremonotus myriocarpus, Fimbriaria Lindenbergiana, Gymnomitrium adustum, revolutum, Haplozia oblongifolia, Hygrobiella laxifolia, Lophozia Kaurinii, quadriloba, Marsupella apiculata, condensata, nevicensis, Neesiella pilosa, Odontoschisma Macounii, Peltolepis grandis, Pleuroclada albescens, Prasanthus suecicus, Sauteria alpina, Scapania apiculata, crassiretis, Massalongii, Sphenolobus politus.*

2. **Die atlantische Gruppe.** Atlantische Arten sind solche westeuropäische Typen, die sich von den Kanaren bis nach Grossbritannien und vielfach auch, dank dem Golfstrome, auf den Faeroër-Inseln und an der norwegischen Küste vorfinden und von denen einige ziemlich tief in das europäische Inland, andere wieder in das Mediterrangebiet vordringen und noch andere wieder an der Ostküste Nordamerikas erscheinen. Macvicar (1) schenkte zwar diesen Arten Aufmerksamkeit, doch fasst er das atlantische Element rein geographisch auf, während K. Müller die im Bereiche der atlantischen Flora vorkomenden tropischen Elemente ausschliesst und gesondert behandelt. Von den atlantischen Arten sind nach Müller nur auf Grosbritannien *Cephalozia hibernica, Lejeunea Macvicari, Plagiochila ambagiosa, Owenii, Radula Carringtonii, Holtii, voluta, Scapania nimbosa,* auf Norwegen *Anastrophyllum Jörgensenii* beschränkt, während *Lophocolea fragrans, Plagiochila spinulosa, Saccogyna viticulosa, Scapania gracilis* und *Frullania germana* (diese bisher aus Norwegen unbekannt) längs der ganzen atlantischen Küste von Norwegen bis zu den Kanaren verbreitet sind und auch in das Mediterrangebiet (bis etwa nach Italien) vordringen; andere

atlantische Lebermoose (*Calypogeia fissa*, *Lepidozia pinnata*, *Plagiochila spinulosa*, *Scapania compacta*) kommen noch ziemlich weit im Innern Europas vor. Von den übrigen atlantischen Arten wären dann noch *Frullania microphylla*, *Gymnomitrium crassifolium*, *Lejeunea patens*, *Lepidozia Pearsoni*, *Leptoscyphus cuneifolius*, *Lophozia atlantica*, *Marsupella Stableri*, *Plagiochila killarniensis*, *punctata*, *tridenticulata*, *Radula aquilegia* und *Sphenolobus Pearsonii* zu nennen.

Das pontische Element ist unter den Lebermoosen nicht ausgeprägt; auch die karpathische Gruppe (*Bucegia romanica*, früher nur aus den rumänischen Karpathen bekannt, wurde neuerdings auch in Nordamerika gefunden) und die kaukasische (einige wenige endemische Arten wie *Fimbriaria caucasica*, *Haplozia Levieri*, *Madotheca caucasica* stehen nach Müller den mitteleuropäischen sehr nahe) lassen sich nicht scharf unterscheiden. Was das alpine Element anbelangt, so ist auch dieses nach der Müllerischen Auffassung sehr schwach ausgeprägt; zu dem mitteleuropäisch-alpinen Elemente gehören nur *Marsupella pygmaea* und *Gymnomitrium commutatum* (einige andere hieher zu ziehende Arten dürften sich mit der Zeit als holarktisch herausstellen), unter dem eigentlichen Alpenelemente sich jedoch nur 3 Arten*) (*Riccia Breidleri*, *Lophozia jurensis* und *Schisma Sendtneri*) auf die Alpen beschränkt, von denen jedoch die beiden ersteren nach Müller noch in anderen Gebirgen gefunden werden dürften, woraus K. Müller folgert, dass eine endemische Flora der einzelnen höheren Gebirgszüge Europas bei den Lebermoosen nicht vorhanden sei, welchen Schluss er auf die ganze holarktische Zone ausdehnt. Übrigens hat schon Hübener (1) im J. 1834 diese Übereinstimmung wahrgenommen und ökologisch zu erklären versucht, indem er sehreibt: »Betrachten wir unsere Flora insbesondere, so finden wir, dass die Lebermoose in ihrem Vorkommen und in ihrer Lokalität weit beschränkter sind als die Laubmoose Wir finden, dass sie weit enger wie jene an ihre Standorte, an ihren Boden und an klimatisches Höhenverhältniss, als an geographische Breitegrade gebunden sind. Sobald Lage, Boden und Höhen harmonieren, finden

*) Vrgl. jedoch *Scapania carinthiaca*. S. 20.

wir am Harze auf dem Brocken, in den Sudeten auf der Schneekoppe dieselben Gestaltreihen wieder, wie auf der südlichen Alpenkette.«

5. Die Lebermoosflora von Aljaska verdient wegen der gründlichen Durchforschung (vergl. besonders die Arbeiten A. W Evans', M. A. Howe's und F. Stephani's) besondere Erwähnung. Sie hält sich zwar im Rahmen der Flora der nördlich gemässigten und kälteren Zone, doch weist sie verschiedene Eigentümlichkeiten auf. Wie A. W. Evans (2) bei der Besprechung der allgemeinen Züge dieser Lebermoosflora hervorhebt, ist sie im nördlichen Teile des Gebietes wesentlich gleich jener anderer nördlicher Regionen; in den südlichen und südöstlichen Teilen vermischen sich die nördlichen Typen mit für die pazifische Küstenregion Nordamerikas charakteristischen Arten. Zu diesen auf Aljaska vorkommenden charakteristischen, sämtlich in Nordamerika endemischen pazifischen Küstenarten gehören: *Gyrothyra Underwoodiana, Plagiochila alaskana, Fryei, Lepidozia filamentosa, Ptilidium californicum, Diplophyllum argenteum, imbricatum, Scapania Bolanderi, cordifolia, Radula arctica, Bolanderi, polyclada, Porella navicularis, Roellii, Frullania chilcootiensis, franciscana, nisquallensis.* Das Vorherrschen nördlicher Elemente auf Aljaska ist aus der Tatsache ersichtlich, dass 69 der auf Aljaska bekannten Arten auch in Nordeuropa und Asien vorkommen, 18 in Nordeuropa aber nicht in Asien, während eine, *Diplophyllum plicatum*, in Nordasien auftritt, jedoch in Europa fehlt. Von den übrigen 18 Arten sind die oben genannten 17 pazifisch und eine *(Lepidozia sandvicensis)* ist vorläufig nur von Aljaska und den Hawai-Inseln bekannt. Von den europäischen, in Aljaska vorkommenden Arten sind 5 in Europa ausschliesslich atlantisch; von diesen kommt *Mastigobryum* (= *Pleuroschisma*) *Pearsonii* nur in Nordwesteuropa sowie auf Aljaska, *Gymnomitrium crenulatum* ausserdem noch in der Antarktis, *Schisma aduncum* auf Sumatra vor; alle Arten dürften Relikte einer ehemaligen weiteren Ausbreitung darstellen. Von ganz besonderem pflanzengeographischen Interesse sind einige, der Lebermoosflora Aljaskas und jener der Hawai-Inseln gemeinsame Arten; ausser den weitverbreiteten *Marchantia polymorpha* und *Aneura multifida* sind dies *Anastrepta orcadensis,*

Lepidozia sandvicensis, *Diplophyllum albicans* und *Pleurozia purpurea*, deren Standorte sich auf den vulkanischen Hawai-Inseln kaum als Relikte aus der Zeit einer ehemaligen Landverbindung mit Amerika oder Asien erklären lassen.

6. Analyse der Areale.

Es seien zunächst solche Gattungen aufgezählt, die keine auffallend eurytopen Arten enthalten, wiewohl das Gattungsareal in manchen Fällen sehr weit oder stark disjunkt ist; die in Klammern beigefügte Nummer gibt die Gesamtzahl der Arten an.

1. *Cronisia* (1) (Brasilien).
2. *Funicularia* (1) (Brasilien).
3. *Sauteria* (3).
4. *Exormotheca* (4).
5. *Cryptomitrium* (1).
6. *Riella* (7).
7. *Hymenophytum* (4).
8. *Symphyogona* (39).
9. *Calycularia* (6).
10. *Makinoa* (1) (Japan).
11. *Cavicularia* (1) (Japan).
12. *Androcryphia* (1).
13. *Petalophyllum* (2).
14. *Treubia* (2).
15. *Haplomitrium* (1).
16. *Calobryum* (3).
17. *Notoscyphus* (8).
18. *Gyrothyra* (1).
19. *Stephaniella* (2) (Südamerika).
20. *Symphyomitra* (7).
21. *Cuspidatula* (4).
22. *Dichiton* (1) (Algier).
23. *Acrobolus* (11).
24. *Syzygiella* (18).
25. *Plagiochila* (780).
26. *Tylimanthus* (25).
27. *Southbya* (3).
28. *Arnellia* (1).
29. *Gongylanthus* (11).
30. *Clasmatocolea* (6).
31. *Conoscyphus* (2) (malayische Inseln).
32. *Saccogyna* (1).
33. *Jackiella* (4) (malayische Inseln).
34. *Wettsteinia* (1) (malayische Inseln).
35. *Protocephalozia* (1) (Brasilien).
36. *Pteropsiella* (1) (Südamerika).
37. *Schiffneria* (2).
38. *Zoopsis* (9).
39. *Alobiella* (13).
40. *Hygrobiella* (6).
41. *Pigafettoa* (1) (Magellanstrasse).
42. *Lembidium* (5).
43. *Marsupidium* (43).
44. *Chaetocolea* (1) (Anden).
45. *Lepidolaena* (9) (alle antarktisch)
46. *Mastigopelma* (2) (1 auf Samoa, 1 auf Celebes).
47. *Acromastigum* (1).
48. *Micropterygium* (9) (Amerika).

49. *Mytilopsis* (1) (peruvianische Anden).
50. *Sprucella* (1) (Afrika).
51. *Arachniopsis* (3) (Südamerika).
52. *Herpocladium* (3).
53. *Delavayella* (1) (China).
54. *Jubula* (13).
55. *Strictolejeunea* (2) (tropisches Amerika).
56. *Neurolejeunea* (5) (Amer.).
57. *Peltolejeunea* (6) (Amer.).
58. *Omphalanthus* (3).
59. *Amplolejeunea* (1) (tropisch Amerika).
60. *Leiolejeunea* (1) (Jamaika).
61. *Cyrtolejeunea* (1) (tropisch Amerika).
62. *Crossotolejeunea* (25) (tropisch Amerika).
63. *Anomalolejeunea* (3).
64. *Myriocolea* (1) Anden Ecuadors).
65. *Macrolejeunea* (4).
66. *Otigoniolejeunea* (7).
67. *Potamolejeunea* (8) (tropisch Amerika).
68. *Aphanolejeunea* (12).
69. *Diplasiolejeunea* (24).
70. *Metzgeriopsis* (1) (Malaya).
71. *Megaceros* (43).

Beachtenswert erscheint die formenreiche Gattung 25. *Plagiochila* mit 780 Arten, deren Mehrzahl in den Tropenländern (besonders im tropischen Amerika) heimisch ist, während nur ein kleiner Bruchteil (insgesamt 14 Arten) Europa und Nordamerika bewohnt. Fast sämtliche Arten dieser Gattung sind stenotop; Stephani gliedert sie in folgenge 7 Gruppen:

A. *Patulae.* America tropica: sp. 1—121. B. *Patulae.* Africa: sp. 122—157. C. *Patulae.* Asia et Oceania tropica: sp. 158—213. D. *Patulae.* Antarcticae: sp. 214—228. E. *Patulae.* Europa, America septentr.: sp. 229—233. F. *Ampliatae.* Europa, America septentr.: sp. 234—242. G. *Ampliatae.* Asia et Oceania tropica: sp. 243—416. H. *Ampliatae.* Africa: sp. 417—502. J. *Ampliatae.* Australia (incl. N. Zel.): sp. 503—540. K. *Ampliatae.* Chile, Fuegia, Patagonia: sp. 541—569. L. *Ampliatae.* America tropica: sp. 570—780.

Die Gattung *Omphalandus* (No. 58) hat ihre 3 Arten auf je 1 Erdteil verteilt (die eine im tropischen Amerika, die andere im Himalaya, die dritte in Ostafrika [Ruwenzori]) und ist somit ein typisches Beispiel eines disjunkten Gattungsareales. Die Gattung *Otigoniolejeunea* (No. 66) zählt 7 Arten,

davon 6 im tropischen Amerika, eine auf Madagaskar; die Gattung *Anomalolejeunea* (No. 63) weist eine Art in Südafrika, eine andere auf Madagaskar und die letzte in Brasilien auf, so dass auch Areale dieser Gattungen nach unseren heutigen Kenntnissen recht disjunkt erscheinen. Auch die 12 Arten der Gattung *Aphanolejeunea* (No. 68) sind in sehr auffallender Weise über die Erdoberfläche zerstreut: die Mehrzahl (7) ist auf das tropische Amerika beschränkt, zwei sind jedoch tropisch afrikanisch (die eine in Ost-, die andere in Westafrika), eine weitere ist auf Norfolk Island und noch eine andere in New Süd Wales endemisch und die letzte kommt in Irland in Europa vor!*) Die Gattung *Diplasiolejeunea* (No. 69) hat ebenfalls ihr Zentrum im tropischen Amerika, wo beinahe die Hälfte der Arten (11) heimisch sind, doch sind ausserdem 9 Arten afrikanisch (davon 5 aus Madagaskar endemisch), 3 malayisch (eine davon — *D. javanica* — ausser von Java auch von Luzon bekannt und daher wenigstens vorläufig disjunkt), eine auf Tasmanien beschränkt.

Solche disjunkte Gattungsareale, die wir besonders bei den sich um *Lejeunea* gruppierenden Gattungen finden, lassen sich in den meisten Fällen weder durch die historische Entwicklung der bezüglichen Gattungen noch durch Übertragung von Sporen über weite Meeresflächen erklären. Es sind dies Abkömmlinge eines und desselben pantropischen und in die temperierten Zonen ausstrahlenden Gattungsurtypus, der von den modernen Hepatikologen in zahlreiche kleine Gattungen zersplittert wurde. Diese Gattungen fassen Artgruppen von bestimmtem morphologischen Charakter zusammen; ihre als Gattungscharaktere angesehenen Merkmale konnten sich in verschiedenen Gebieten innerhalb der Grenzen des Urtypus ausbilden und es kann daher nicht überraschen, wenn man in weit entlegenen, pflanzengeographisch durchaus verschiedenen Regionen Arten vorfindet, die sich durch ihre

* Es ist dies *A. microscopica*, eine atlantische, mit neotropischen Formen am nächsten verwandte Art, welche nach K. MÜLLER (1) hauptsächlich an der Westküste Irlands und auf dem schottischen Hochland vorkommt und dann wieder, allerdings selten, auf den Faeröer-Inseln auftritt; von DELOGNE wird sie sogar auch aus Belgien angegeben.

Merkmale als Vertreter einer und derselben Sektion (resp. Untergattung) oder in jetziger Auffassung einer, selbstverständlich nicht mono- sondern polyphyletischen Gattung erweisen.

Zu der obigen Aufzählung können wir noch weitere Gattungen hinzufügen, welche keine kosmopolitischen oder auffallend disjunkten Arten aufweisen, obzwar einzelne Artenareale ziemlich weit, aber den floristischen Pflanzenbezirken entsprechend sind. Es sind dies:

72. *Peltolepis* (1), mit der Art *P. grandis* in den Alpen und der Tatra sowie im hohen Norden (Norwegen, Finnland, Sibirien, Grönland). Nach allem eine cirkumpolar arktisch-alpine Art, deren Standorte in Mitteleuropa als Relikte aus der Glazialperiode aufzufassen sind.

73. *Fimbriaria* (69). Die meisten Arten sind stenotop; *F. pilosa* ist jedoch in der ganzen nördlich-temperierten Zone (Europa, Asien [Sibirien, Japan], Nordamerika) verbreitet, sie findet sich hauptsächlich in den arktischen Ländern sowie in Gebirgen als arktisches Relikt vor.

74. *Sphaerocarpus* (7). Die grösste Area weist *S. terrestris**) auf (Westeuropa, Mediterrangebiet, Nordafrika, Nordamerika); die übrigen Arten sind amerikanisch.

75. *Blasia* (1). Die bekannte *B. pusilla* ist über das ganze Waldgebiet Europas, Asiens und Nordamerikas verbreitet, fehlt jedoch auf der südlichen Hemisphaere.

76. *Pellia* (3). Alle 3 Arten (*P. epiphylla*, *Neesiana*, *Fabroniana*) sind weit verbreitet und in der ganzen nördlich-temperierten Zone Europas, Asiens und Amerikas meist gemein.

77. *Sphenolobus* (29). Mehrere Arten haben ihr Zentrum

*) Nach K MÜLLER eine mediterrane, in Westeuropa bis nach Grossbritannien vordringende, in Nordamerika jedoch fehlende Art; dagegen wurde nach K. MÜLLER der nordamerikanische *S. californicus* von DOUIN in Frankreich entdeckt. Nach C. C. HAYNES' monographischer Übersicht der Gattung *Sphaerocarpus* ist aber die letztgenannte Art mit *S. texanus* identisch, welcher Bezeichnung die Priorität gebührt; der *S. texanus* zeichnet sich durch eine weite Area aus, denn er ist aus Nordamerika, Südamerika (Urugay), Nordafrika (Marokko) sowie aus Europa (Frankreich, Sardinien, England, Schweiz, Baden) bekannt und wohl noch weiter verbreitet.

in der gemässigten Zone der nördlichen Hemisphaere; besonders weit verbreitet ist *S. exsectus*: Europa (besonders an Felsen in Urgebirgen), Asien (Himalaya, Sibirien, China, Japan), Nordamerika (Kanada). *S. politus* ist nach STEPHANI in den Alpen und in Schottland heimisch; nach K. MÜLLER (s. S. 20.) hat er jedoch ein bedeutend weiteres Verbreitungsgebiet.

78. *Leioscyphus* (41). Eine Art, *L. Taylori*, weist weite Verbreitung auf der nördlichen Halbkugel auf: Europa (von den Alpen bis nach Skandinavien, aber auch noch in Dalmatien), Asien (Sibirien, China, Japan), Nordamerika (Kanada, Aljaska, Grönland).

79. *Harpanthus* (2), hievon *H. scutatus* in Europa (vom Mittelmeer und den Pyrenäen bis nach Grossbritannien und Skandinavien) und nördlichem Asien sowie in Nordjapan; nach K. MÜLLER auch in Nordamerika.

80. *Geocalyx* (3), davon *G. graveolens* in Europa, nördlichem Asien und Amerika.

81. *Pleuroclada* (2), hievon eine Art cirkumpolar arktisch (Alpen, Schottland, Skandinavien, Island, Grönland), die andere im Himalaja.

82. *Odontoschisma* (29) mit folgender Einteilung:

1. Europa und Nordamerika: sp. 1—4; die grösste Verbreitung weist *O. denudatum* (Europa, Japan, Nordamerika) auf.
2. tropisch Amerika: sp. 5—21.
3. Asien und Ozeanien: sp. 22—27 (3 in Japan, 3 auf den Hawai-Inseln).
4. Antarktische Arten: sp. 28—29.

83. *Schisma* (71). Diese Gattung ist vorwiegend tropisch, in Europa kommen nur zwei Arten vor (*S. Sendtneri* ist in den österreichischen Alpen endemisch), im tropischen Asien und Ozeanien 21, im tropischen Afrika 12 (hievon 3 nur auf Madagaskar, 1 auf Bourbon, 1 auf den Azoren), im antarktischen Gebiete (inkl. Neuseeland und Tasmanien) 6, im tropischen Amerika 30.

84. *Ptilidium* (5). Zwei Arten sind auf der nördlichen Halbkugel weit verbreitet: *P. pulcherrimum* ist überall in Europa, besonders in den Bergwäldern von 800—1500 m ver-

breitet, kommt ausserdem im nördlicheren Asien (Sibirien, Japan) und Amerika (bis auf Aljaska) vor, *P. ciliare* weist ein noch um Spitzbergen, König Oskar Land, Ellesmere Land sowie Grönland erweitertes Areal auf.

85. *Schistochila* (83), davon 7 Arten in Afrika, 35 in Asien und Ozeanien (1 hievon in Japan), 21 in Australien und auf Neuseeland, 20 antarktisch; fehlt im tropischen Amerika.

86. *Balantiopsis* (15), fast ausschliesslich antarktisch, nur eine einzige Art in Brasilien (*B. brasiliensis*) und eine andere in Queensland (*B. Brotheri*).

87. *Blepharostoma* (12). Die grösste Verbreitung weist *B. trichophyllum* auf: Europa (bis nach Lappland und Spitzbergen), Asien (Kaukasus, Kleinasien, Himalaya, Sibirien, Südchina, Japan), Nordamerika (bis nach Grönland, König Oskar Land und Ellesmere Land, südwärts bis New Jersey, Kolorado und Kalifornien).

88. *Anthelia* (3), davon *A. julacea* in Europa, nördlicherem Asien und Amerika im höheren Gebirge zerstreut, in der subarktischen und arktischen Zone gemein, *A. Juratzkana* mit gleicher Area, *A. africana* auf den Bergen Transvaals.

89. *Isotachis* (49) mit Vertretern auf der ganzen Erde mit Ausnahme der nördlichen Länder. 3 Arten sind aus dem tropischen Asien bekannt, ebenso viele aus tropisch Afrika, 13 aus Australien, Neuseeland und den nahe liegenden Inseln, 9 aus dem antarktischen Gebiete, 21 aus dem tropischen und subtropischen Amerika.

90. *Diplophyllum* (24). Einige Arten sind in der gemässigten und kalten Zone der nördlichen Halbkugel weit verbreit, so *D. taxifolium, obtusifolium* und *albicans* in Europa, Asien und Nordamerika, *D. obtusifolium* ausserdem auch in Japan, die letztgenannte Art in Japan und auf den Hawai-Inseln. *D. ovatum* ist aus Westeuropa (Frankreich, Belgien, Grossbritannien), Skandinavien, den Färöer Inseln, Japan und Nordamerika (Aljaska, Kalifornien) bekannt; es ist zu erwarten, dass das disjunkte Areal durch Standorte aus dem nordasiatischen Festlande ergänzt werden wird. Aus dem Bereiche der mitteleuropäischen Flora ist dieses Lebermoos bloss aus dem Thüringer Walde als Seltenheit bekannt.

91. *Madotheca* (153). Das Gattungsareal ist zwar kosmopolitisch, das Entwicklungszentrum liegt aber in den Tropen und Subtropen. Die nördliche gemässigte Zone (Europa und Nordamerika) zählt nur 18 Arten, Afrika 11 (4 auf Madagaskar endemisch), tropisch-Asien und Ozeanien 67, Australien mit den antarktischen Gebieten 12, tropisch-Amerika 45 (davon 13 in Mexiko endemisch). Die Areale sind pflanzengeographisch scharf umgrenzt. Eine verhältnismässig weite Verbreitung weisen *M. rivularis* (Europa, Algier, Marokko, Armenien, Libanon, Nordamerika) und *M. laevigata* (Europa, Kanaren, Madeira, Kaukasus, Nordamerika*) auf.

92. *Archilejeunea* (70), von STEPHANI wie folgt eingeteilt:

1. Afrika: sp. 1—11.
2. tropisch, subtropisch und Südamerika: sp. 12—40.
3. tropisch Asien u. Ozeanien: sp. 41—66.
4. Australien: sp. 67—79 (2 auf Neuseeland, 1 in Neu Süd Wales).
5. Nordamerika: sp. 70.

93. *Mastigolejeunea* (55), davon:

1. Afrika: sp. 1—13.
2. tropisch Amerika: sp. 14—23.
3. tropisch Asien und Ozeanien: sp. 24—51.
4. Australien: sp. 52—55 (2 in Ostaustralien, 2 auf Neuseeland).

94. *Bryopteris* (13,) davon 2 Arten in Afrika, 9 im tropischen Amerika (von diesen 4 im ganzen Gebiete gemein), 2 im tropischen Asien.

95. *Symbyezidium* (19), davon 2 Arten im tropischen Afrika, 12 im tropischen Amerika, 4 in Asien und Ozeanien, 1 in Ostaustralien.

96. *Brachiolejeunea* (65), davon in Afrika 10 Arten, im tropischen Amerika 26, in Asien und Ozeanien 22, in Australien 4, auf Neuseeland 2 und 1 in Chile.

97. *Marchesinia* (26), hievon 1 in Europa, 4 in Afrika, 18 im tropischen Amerika, 3 im tropischen Asien und Ozeanien.

98. *Dicranolejeunea* (28), alle tropisch, je 3 in Afrika und Asien, 22 in Amerika.

*) Das Vorkommen in Nordamerika ist jedoch nach EVANS und K. MÜLLER fraglich.

99. *Odontolejeunea* (22), alle tropisch, 5 in Afrika, 16 in Amerika, 1 auf den Samoainseln.

100. *Cyclolejeunea* (24), alle tropisch, 22 in Amerika, 2 in Asien.

101. *Prionolejeunea* (60) in folgender Einteilung: 7 Arten im tropischen Afrika, 47 im tropischen Amerika, 1 in Chile, 5 im tropischen Asien.

102. *Harpalejeunea* (56) und zwar 2 Arten im tropischen Afrika, 36 im tropischen Amerika, 8 im tropischen Asien und Ozeanien, 9 in Australien und im antarktischen Gebiete, eine einzige in Europa; die letztere Art *(H. ovata)* besitzt ein verhältnismässig weites Areal (Westeuropa, nördlich bis Südwestnorwegen, im Mediterrangebiet bis nach Italien (Apuaner Alpen) vordringend, Teneriffa, Madeira, Nordamerika).

103. *Strepsilejeunea* (45), davon entfallen auf Afrika (besonders Madagaskar) 6 Arten, auf das tropische Amerika 17, auf das tropische Asien und Japan 7, auf Australien und Neuseeland 7, auf das antarktische Gebiet 8.

104. *Trachylejeunea* (29) und zwar 1 Art im tropischen Afrika, 18 im tropischen Amerika, 8 im tropischen Asien und Ozeanien, 1 in Australien, 1 auf Neuseeland.

105. *Drepanolejeunea* (81), hievon entfallen auf das tropische Afrika 10 Arten, auf Südafrika 1, auf das tropische (resp. Süd-) Amerika 31 (1 in Patagonien), auf das tropische Asien und Ozeanien 33, auf Australien und Neuseeland 5, auf Europa 1. Die einzige europäische Art *(D. haematifolia)* weist, soweit bekannt, ein ziemlich disjunktes atlantisches Areal auf; sie wurde in Grossbritannien, Nordwestfrankreich, in den Pyrenäen und auf Madeira gefunden.

106. *Leptolejeunea* (55), davon 11 Arten im tropischen Afrika, 17 in tropisch- resp. Südamerika (1 in Chile), 24 in Asien und Ozeanien, 3 in Ostaustralien.

107. *Ceratolejeunea* (100), alle tropisch, davon 77 in Amerika, 12 in Afrika, 5 in Asien und 6 in Ozeanien. Eine der Afrika zugeschriebenen Arten (*C. Belangeriana*) weist eine interessante disjunkte Verbreitung auf: sie wurde in Ostafrika (Usambara), auf den Maskarenen und dann wieder

auf Java und Banka gefunden; es ist dies aber vielleicht eine noch weiter verbreitete palaeotropische Art.

108. *Taxilejeunea* (109), davon entfallen auf Afrika 9 Arten (1 nur in Südafrika), auf das tropische Amerika 81, auf das tropische Asien und Ozeanien 17, je 1 auf Neuseeland und Norfolk Island.

109. *Hygrolejeunea* (101) in folgender Einteilung: 13 Arten in Afrika (die meisten im tropischen Teile — 4 nur auf Madagaskar, — eine nur in Südafrika), 40 Arten im tropischen Amerika, 44 im tropischen Asien und Ozeanien, 4 in Australien.

110. *Pycnolejeunea* (76), davon 4 Arten in Afrika, 28 im tropischen Amerika, 1 in Chile, 40 in Asien und Ozeanien (5 hievon in Japan endemisch), je 1 in Australien, auf Neuseeland und Norfolk Island.

111. *Cheilolejeunea* (63) und zwar 11 Arten im tropischen Afrika, 1 auf Madeira, 25 im tropischen Amerika (7 in Brasilien endemisch), 21 im tropischen Asien und Ozeanien (2 nur in Japan), 2 auf Tasmanien, 1 in Europa (*Ch. Casaresii* bei Barcelona in Spanien) und 1 in Florida in Nordamerika.

112. *Cystolejeunea* (1). Die einzige Art (*C. lineata*) ist nach Stephani im tropischen und subtropischen Amerika sehr gemein.

113. *Rectolejeunea* (40), davon 1 Art auf Madagaskar, 30 im tropischen Amerika (5 auf Kuba endemisch), 8 im tropischen Asien und Ozeanien, 1 in Ostaustralien (Neu Süd Wales). *R. aloba* zeichnet sich vorläufig durch ein ziemlich disjunktes Areal aus; sie wurde auf Java, den Neuen Hebriden und den Samoainseln gefunden.

114. *Physocolea* (119), die meisten tropisch und subtropisch. Auf das tropische Afrika entfallen 20 Arten (davon 6 auf Madagaskar, 4 in Kamerun endemisch), auf das tropische Amerika 29, auf das tropische Asien und Ozeanien 58 (davon 8 auf Java, je 5 in Ostindien und auf den Hawai-Inseln, 4 in Neu Kaledonien, je 3 auf Neu-Guinea und in Japan endemisch), auf Australien und Neuseeland je 2, auf Norfolk Island 1, auf Nordamerika und Europa 6 (davon 3 nur in Nordamerika). Durch disjunkte Verbreitung fällt besonders *P. trichomanis* (Queensland, Tonkin) und *P. decliviloba* (Samoa-Inseln, Neu-

Kaledonien, Java) auf; weniger disjunkt ist die *P. Gottschei* (Ceylon, Andamanen, Neu-Guinea) und *P. hirta* (Borneo, Neu-Guinea, Salomon Inseln, Japan). Eine weite Verbreitung im tropischen Asien und Ozeanien weist auch die aus Japan bekannte *P. venusta* auf; *P. minutissima* ist aus Mittel- und Südeuropa sowie aus Nordamerika bekannt; *P. Rossettiana* wurde bisher nur in Italien und Algier gefunden.

Insoferne nicht anders angegeben, besitzen die Arten aller angeführten Gattungen kleinere oder floristisch gut umgrenzte Areale. Schon diese Auswahl beweist, dass die Verteilung der Lebermoose keine zufällige ist, sondern vielleicht noch strenger und konsequenter ähnlichen Regelmässigkeiten und Gesetzen folgt wie bei den Blütenpflanzen. In anderen Gattungen finden sich — meist vereinzelt — auch andere, zum Teil überraschende Areale, von denen zunächst alle kosmopolitischen oder auffallend disjunkten Areale erwähnt werden sollen.

α) Arten mit beinahe oder vollständig kosmopolitischen Arealen.

1. *Riccia fluitans:* ein echter Kosmopolit!

2. *Ricciocarpus natans:* über einen grossen Teil der Erdoberfläche verbreitet (so Europa, Ostindien, China, Japan, Australien, Nordamerika, Mexiko, Brazilien), beinahe kosmopolitisch, nur aus Afrika unbekannt.

3. *Targionia hypophylla:* Europa (besonders Mittelmeergebiet und Westeuropa), Tropisch- und Südafrika, auch auf Madagaskar und den Kanaren, in Asien in Kleinasien, Persien und im Himalaya, in Amerika auf der Vancouver-Insel, in Mexiko sowie in Südamerika (Peru, Ecuador, Chile), ferner in Australien, auf Tasmanien und Neuseeland, somit kosmopolitisch.

4.* *Reboulia hemisphaerica:* ein echter Kosmopolit, der in Europa (besonders im Mediterrangebiete), in Asien (Klein-Asien, Kaukasus, Himalaya, Java, Japan), in Nordamerika und Südamerika (Brasilien), in Ostafrika (Abessinien) sowie Südafrika (Transvaal), in Australien und auf Neuseeland festgestellt wurde.

5.* *Lunularia cruciata:* Südeuropa und Westfrankreich, Nordafrika sowie Ostafrika (Abessinien, Kilimandscharo),

Madeira, Kanaren (Teneriffa) und Azoren, ferner in Persien, Südamerika (Chile), Ostaustralien (Queensland). Wurde ausserdem mit Gartenerde vielfach verschleppt und erreichte so dank menschlichem Einflusse ein echt kosmopolitisches Areal; sie findet sich besonders in Gärten und Glashäusern verwildert vor. Wildwachsend ist sie wahrscheinlich über alle subtropischen Länder verbreitet. In Mitteleuropa und zum Teil auch anderorts in der gemässigten Zone ist *Lunularia* gewiss nicht indigen, sondern nur eingebürgert; sie hat sich hier allerdings durch Zutun des Menschen über Gärtnereien weit verbreitet. So wird sie z. B. heute nach K. Müller in Deutschland wohl in allen Gewächshäusern und deren Umgebung auf Gartenerde und Blumentöpfen gefunden und wird durch ihre rasche vegetative Vermehrung oft zu einem lästigen Gartenunkraut. Zum erstenmale hat sie A. Braun im Karlsruher botanischen Garten im J. 1827 beobachtet; Hübener (1) verzeichnet sie im J. 1834 bereits von mehreren Stellen (Bonn, Heidelberg, Schwetzing, Karlsruhe, Frankfurt) und äussert sich ganz zutreffend über ihre Einschleppung und ihre Wanderungen; auch aus Böhmen ist sie vielerorts bekannt (vergl. z. B. Kavina 1).

6.* *Dumortiera hirsuta:* tropisches Südamerika (Brasilien, Bogota in Kolumbien), Kleine Antillen (Guadeloupe), Mexiko, Westafrika (Kamerun, I. São Thomé), Kanaren, Ostafrika (Usambara) und nahe liegende Inseln (Réunion), in Europa nur in Irland, Frankreich und in Italien, Südasien (Nepal), Ostasien (Japan), Malaya (Java), Polynesien (Tahiti).

7. Marchantia polymorpha: gegenwärtig über die ganze Erde verbreitet. Schiffner, Kavina und andere Bryologen halten sie für eine echte kosmopolitische Art; Stephani kennt sie aber bloss aus ganz Europa, Nordamerika (bis auf Labrador und Aljaska, auch in Kalifornien), Mittelamerika (Kostarika), von den Azoren, aus Asien (Kaukasus, Himalaya, Sibirien, Japan) sowie von dem malayischen Archipel (Java); aus Südamerika, Afrika und Australien führt er sie nicht an. Nach D. H. Campbell (1) soll sie überhaupt in der malayischen Region fehlen, trotzdem sie mitunter angegeben wird; ich selbst habe sie in Ostjava in einem Gemüsegarten auf dem Tengger-Gebirge gesammelt, offenbar nur einge-

schleppt. G. W. Bischoff gibt ihre Verbreitung im J. 1835 (Bemerkungen über die Lebermoose, p. 982) folgenderweise an: »per totam non solum Europam habitat, sed et in Asia, Africa atque America boreali occurrit.« Ihr Indigenat auf der südlichen Hemisphaere ist sehr zweifelhaft; in Queensland sammelte ich sie stets nur in der Nähe der Häuser und Kulturen, was auf ihre Einschleppung hinweist. Sie wurde schon früher für Ostaustralien angegeben, ebenso für Südafrika und Südamerika, doch scheint es, dass sie auch hierher erst später eingewandert ist. Hübener (1) sagt zwar, dass sie auf der »ganzen bekannten Erde« verbreitet ist und in den Sümpfen Neuhollands und Van Diemenslands ebenso häufig erscheint wie in Lappland und auf Kamtschatka, doch meiner Ansicht nach hat K. Müller (1) mit vollem Recht als ihr wahres Verbreitungsgebiet nur die ganze nördliche Hemisphaere angegeben; aus diesem ursprünglichen Wohnbezirke hat sich dann das wenig wählerische, oft auch sekundäre Standorte (Mauer, Erde, Kohlenboden, Wassergräben etc.) bewohnende Lebermoos über einen grossen Teil der südlichen Halbkugel als ein Unkraut ausgebreitet.

8.* Aneura pinguis: eine echt kosmopolitische, fast über die ganze Erdoberfläche verbreitete Art, die aus ganz Europa, Nordamerika (bis nach Grönland), Mexiko, Westindien, von Südamerika (Brasilien), aus Asien vom Himalaya und aus Japan, aus dem malayischen Archipel (Java), aus Australien und Neuseeland bekannt ist.

9. Metzgeria furcata: in Europa überall gemein, in Südamerika (Chile), Afrika, im Kaukasus, in Australien (Viktoria, Queensland), auf Tasmanien und Neuseeland. Fehlt, soweit bekannt, völlig in Nordamerika, Sibirien und Japan.

10. Metzgeria hamata: Irland und Grossbritannien, Nordamerika, tropisches Amerika (Kostarika und dann besonders in Westindien), Südamerika (Peru, Patagonien), Südasien (Ostindien), Malaya (Java) und Neu Guinea, Neuseeland. — In Afrika bisher nicht gefunden.

11.* Metzgeria conjugata. Europa, Nord- und tropisch Amerika, Südamerika (Argentinien, Chile), Südafrika (Natal, Moçambique), Maskarenen, Madagaskar, Neuseeland. Nach K. Müller wahrscheinlich über die ganze Erde verbreitet

12.* Pallavicinius Lyellii Europa (besonders Mitteleuropa), Nord-, Tropisch- und Südamerika, Südafrika (Transvaal), tropisches Asien (Singapore, Tonkin) und Japan, malayischer Archipel (Java), Philippinen, Neu Hanover und Fidschi-Inseln, Neuseeland.

12. Anthoceros communis: nach STEPHANI pantropisch (»communis in terris tropicis per orbem terrarum«).

In dem riesigen Artenreichtum der Lebermoose, von welchem die fünfbändige Monographie STEPHANI's das beste Zeugnis ablegt, fanden wir nur diese 13 kosmopolitischen Arten; es sind dies meist anthropochore Typen, die sich sekundär ausbreiten, den Menschen in neue Gebiete begleiten und sich gewissermassen als Unkräuter unter den Lebermoosen präsentieren.

β) Arten mit auffallend disjunkten Arealen.

1.△ *Cyathodium foetidissimum*: Inseln Tahiti, Insel Nukuhiwa in der Marquesas Gruppe, Java. — Das Areal wird sich vielleicht durch neue intermediäre Standorte kontinuierlicher erweisen.

2.△ *Clevea hyalina*: Europa (bis in den hohen Norden), dann Grönland, Rocky Mts. in Nordamerika und Kaukasus. Die Art ist kalkhold und gewährt den Eindruck eines cirkumpolar arktischen Typus mit Reliktstandorten aus der Glazialzeit.

3.△ *Wiesnerella denudata*: Himalaya, Java, Japan, Hawai-Inseln. — Wahrscheinlich noch weiter und vielleicht kontinuierlich verbreitet.

4.△ *Acolea concinnata*: Europa (besonders im Norden und im Gebirge), Nordamerika (bis nach Aljaska und Grönland), Feuerland, Himalaya.

5.△ *Marsupella Funckii*: Europa (besonders in den Gebirgen Mitteleuropas häufig, aber auch in der Ebene), ausserdem auf Madeira und in Japan.

6.△ *Alicularia scalaris*: in den Gebirgen Europas verbreitet, ausserdem auf Madeira und den Kanaren, in Nord-Japan und auf Aljaska; nach K. MÜLLER auch an anderen Stellen Nordamerikas. — Die Areale beider Arten sind dadurch interessant, dass sie bis zu den nordwestafrikanischen Inseln reichen. Es scheint, dass es sich um cirkumpolare, weit süd-

wärts vorgerückte Typen handelt; die Areale folgender zwei Arten lassen ihr Wesen begreiflicher erscheinen.

7.△ *Solenostoma crenulatum*: in Europa gemein, auf Madeira und den Azoren, in Japan und Nordamerika (auch in Grönland).

8.△ *Solenostoma lanceolatum*: Europa, Nordamerika, Nordjapan, Kanaren (Teneriffa). — Die Diskontinuität dieser zwei Arten äusserst sich hauptsächlich durch ihr Fehlen auf dem asiatischen Festlande.

9.△ *Anastrophyllum Donianum*: Nordwesteuropa (Schottland, Färöer Inseln, Norwegen), China (Yün-nan).

10.△ *Lophozia turbinata*: Grossbritannien, Mediterrangebiet (Dalmatien, Istrien, österr. Küstenland, Italien, Algier), Samoa-Inseln.

11.△ *Anastrepta orcadensis*: Europa, Himalaya, China, Hawai-Inseln; neuerdings durch Ewans auch für Aljaska nachgewiesen.

12.△ *Cephalozia connivens*: Europa, Sibirien, Japan, Nordamerika, Grönland, Südafrika (nach Stephani; Müller führt sie jedoch aus Afrika nicht an).

13.△ *Adelanthus unciformis*: Südamerika (Peru, Chile) und Magellanstrasse, Kapland, Bourbon, Madagaskar. — Wahrscheinlich ein antarktischer Typus.

14.△ *Calypogeia arguta*: von Madeira und den Azoren längs der westeuropäischen Küste bis nach Grossbritannien und Norwegen, auch in Belgien sowie mehrfach in Südeuropa (Spanien, Portugal, Südfrankreich, Italien, Dalmatien, bis in die Schweiz vordringend) und dann wieder auf der ostasiatischen Insel Formosa auftauchend. Ausserdem gibt sie K. Müller von wenigen Stellen an der Ostküste Nordamerikas und Warnstorf von Java an. In Deutschland wurde sie eingeschleppt in Glashäusern beobachtet.

15.△ *Mastigobryum adnexum*: Neuseeland, Tasmanien und Kapland. — Wahrscheinlich Überreste eines ausgedehnten südpolar-antarktischen Areales.

16.△ *Mastigobryum convexum*: Chile und Magellanstrasse in Südamerika, Südafrika, Maskarenen, Madagaskar und Kilimandscharo.

17.△ *Psiloclada clandestina*: Neuseeland, Tasmanien, Neu-Guinea, Amboina, Kapland.

18.△ *Scapania calcicola*: Schweden, Kaukasus. — Nach K. Müller kommt aber diese Art auf Kalkfelsen in Niederösterreich, Salzburg, Ostbosnien, in der Schweiz, in Frankreich, Schweden und Schottland vor.

19.△ *Scapania Kaurinii:* Norwegen, Lappland, Kaukasus (nach Stephani), nach K. Müller auch auf Grönland.

20.△ *Scapania planifolia:* Grossbritannien, Skandinavien, Himalaya, Hawai-Inseln.

21.△ *Radula Carringtonii:* Irland, Schottland, Norwegen und Japan.

22.△ *Pleurozia purpurea*: Grossbritannien, Skandinavien, Färöer-Inseln, Himalaya, Hawai-Inseln*).

23.△ *Lepidozia plumulosa*: antarktisches Amerika, Chile, Patagonien, Juan Fernandez, Falkland-Inseln, Neuseeland und dann wieder Grönland.

24.△ *Calypogeia integristipula:* Europa, Japan. — Das Areal wird sich vielleicht durch Standorte in Sibirien ergänzen. K. Müller bezeichnet diese Art *C. Neesiana* und gibt sie auch aus Nordamerika an.

25.△ *Euosmolejeunea longiflora:* Brasilien und tropisches Westafrika (die portugiesische Insel I. São Thomé). — Stephani (l. c. V. 587) betont die vollkommene Identität beider Formen und bemerkt, dass auch die Geologen eine ehemalige Landverbindung zwischen der ostamerikanischen und westafrikanichen Küste annehmen.

26.△ *Frullania Ecklonii*: Südafrika und Chile.

27.△ *Lejeunea patens*: Grossbritannien, Norwegen, Färöers, Portugal, Kaukasus. — K. Müller führt die zwei letztgenannten Verbreitungsgebiete nicht an, hingegen aber die Ostküste Nordamerikas, wo die Art auch nach Evans vorkommen soll.

28.△ *Microlejeunea gracillima*: Ostindien, Singapore, Ceylon, Natal.

29.△ *Microlejeunea punctiformis:* Ostindien, Ceylon, Formosa. — Wahrscheinlich weiter verbreitet.

*) Die Angabe aus den Kleinen Antillen (Guadeloupe) ist nach Stephani wahrscheinlich irrtümlich.

30.△ *Leptocolea lanciloba:* Nikobaren und Hawai-Inseln.

31.△ *Colura obtusata:* tropisches Westafrika (Kamerun) und Brasilien!

32.△ *Aspiromitus vesiculosus:* Hawai- und Samoa-Inseln, Java.

33.△ *Aspiromitus falsinervis:* Java und Japan.

34.△ *Anthoceros longicapsulus:* Grossbritannien und Madeira.

35.△ *Dendroceros crassinervis:* Ostindien und Samoa-Inseln.

γ) Andere Lebermoose mit beachtenswerten Arealen.

Ausser den kosmopolitischen und auffallend disjunkten Arten sind noch manche andere, der ersteren oder letzteren Gruppe sich annähernde Spezies für das Studium über das Wesen der Areale wichtig; wir haben diese in eine dritte Gruppe zusammengefasst.

1.+ *Rupinia pyramidata:* Europa (vornehmlich Südeuropa), Nordafrika (Algier) und Südamerika (Brasilien, Paraguay).

2.+ *Corsinia marchantioides:* Mediterrangebiet, Kanaren, südöstliche Vereinigte Staaten (Louisiana) und Japan.

3.+ *Cyathodium aureo-nitens:* Südasien (Ostindien, Sikkim, Assam, Birma, Tonkin). malayischer Archipel (Java), Zentralafrika.

4.+ *Plagiochasma rupestre:* Mediterrangebiet, Madeira, Kanaren (Teneriffa), Ostafrika (Abessinien), Südafrika (Kapland).

5.+ *Grimaldia dichotoma*: Europa (besonders im Mediterrangebiete), Nordafrika (Algier), Ostafrika (Abessinien), Madeira, Kanaren, Kaukasus, Himalaya.

6.+ *Dumortiera trichocephala*: Südasien (Tonkin, Birma), malayischer Archipel (Java) und Polynesien (Samoa, Tahiti, Hawai).

7.+ *Preissia commutata*: in der ganzen nördlichen gemässigten und arktischen Zone ziemlich häufig, kalkliebend. In Europa reicht sie südwärts bis nach Griechenland, Italien und die Gebirge Spaniens, in Asien bis zum Himalaya und ostwärts bis nach Japan, in Nordamerika südwärts bis Me-

xiko. Nordwärts dringt sie bis nach Lappland, Spitzbergen, Sibirien und Grönland vor.

8.+ *Aneura pinnatifida:* Europa, Madeira, Kaukasus, Nordasien (auch Japan), Nordamerika.

9.+ *Monoclea Gottschei*: Zentralamerika (Kostarika, Guatemala, Nikaragua), Antillen (Jamaika, Portoriko, Guadeloupe), Südamerika (Venezuela [Caracas], Bolivien, peruvianische Anden), Ostasien (China, Japan).

10.+ *Fossombronia cristata*: Europa, Himalaya, Nordamerika.

11.+ *Fossombronia angulosa:* Südeuropa und Westeuropa (Frankreich, Norwegen, Grossbritannien), Algier, Madeira, Kanaren, Nordamerika, Kuba.

12.+ *Marsupella emarginata:* Europa (im Gebirge), Madeira, Azoren, Ostasien (nur Japan), Nordamerika (Gebirge und im Norden, so auf der Insel Miquelon in der Nähe Neufundlands und auf Aljaska).

13.+ *Jungermannia hyalina*: Europa, Madeira, Azoren, Kaukasus, Nordamerika und peruvianische Anden.

14.+ *Jamesoniella colorata*: Australien, Tasmanien, Neuseeland, Südafrika, Südamerika (Peru, Bolivien, Brasilien, Ecuador, Guyana, Venezuela) und Zentralamerika (Kostarika).

15.+ *Anastrophyllum piligerum*: Südasien (Himalaya, Ceylon), malayischer Archipel (Java, Sumatra, Borneo), Maskarenen, Philippinen (Luzon), Polynesien (Samoa und Hawai-Inseln), Kuba und Südamerika (Brasilien, Anden), Tristan d'Acunha, Ascension.

16.+ *Lophocolea Martiana:* verbreitet im tropischen Amerika, in Nordamerika nur in Florida, ausserdem im tropischen Westafrika (Kamerun) und auf Madagaskar.

17.+ *Chiloscyphus argutus*: tropisches und subtropisches Asien (auch Japan), Australien, Neuseeland und pazifische Inseln.

18.+ *Cephalozia Turneri:* Westeuropa von Grossbritannien bis nach Spanien, Portugal und Teneriffa, Südeuropa, Nordafrika (Tanger, Algier), Kanaren, Nordamerika (Kalifornien).

19.+ *Nowellia curvifolia:* Europa, Azoren, Madeira, Nordamerika, (inkl. Mexiko), Nordasien und Japan.

20.+ *Calypogeia fissa:* Mitteleuropa (Deutschland, Böhmen, Tirol, Schweiz), Westeuropa (Frankreich, Grossbritannien, Norwegen) und Südeuropa (Spanien, Italien, Dalmatien), Madeira, Azoren, südöstliche Verein. Staaten (Florida) und Japan.

21.+ *Lepidozia nematodes*: tropisches Amerika, Kuba, Südafrika.

22.+ *Lepidozia sejuncta:* tropisches Amerika (Brasilien, Mexiko, Antillen), Westafrika (Angola, Kamerun), Südafrika und Azoren, Tasmanien.

23.+ *Lepidozia cupressina*: tropisches Amerika, Südamerika (Chile, Patagonien, Feuerland), Westafrika (Angola, Kamerun).

24.△ *Chandonanthus setiformis*: eine cirkumpolar arktisch-alpine, aus dem gemässigten und arktischen Nordamerika, aus Sibirien, dem arktischen Europa sowie den Gebirgen Mitteleuropas (besonders Alpen und Riesengebirge, aber auch Böhmerwald, Schwarzwald, Eifel, Harz) bekannte, im hohen Norden (Aljaska, Labrador, Grönland, Ellesmere-Land, Spitzbergen, Lappland etc.) weit verbreitete Art.

25.+ *Chandonanthus hirtellus*: West- und Ostafrika, Maskarenen und Madagaskar, Südasien, malayisch-papuanische Inseln, Philippinen, Polynesien, Queensland.

26.+ *Lepicolea scolopendra*: tropisches Asien und Ozeanien, Tasmanien, Neuseeland.

27.+ *Lepicolea ochroleuca:* Südamerika (subtropisches Brasilien, Chile, Patagonien, Feuerland), Südafrika (Kapland).

28.+ *Mastigophora diclados*: tropisches und subtropisches Asien und Ozeanien, Maskarenen und Madagaskar, Tristan d'Acunha.

29.+ *Trichocolea pluma*: im tropischen Asien, Ozeanien und Amerika weit verbreitet, jedoch überall nur steril gefunden.

30.+ *Radula javanica*: tropisches Asien und Ozeanien, Maskarenen.

31.+ *Radula Lindbergiana*: Europa, Kaukasus, Nordpersien, Madeira, Azoren, Nordafrika (Algier, Tunis), Ost-

asien (China, Japan); neuerdings auch aus den östl. Vereinigten Staaten (Vermont) bekannt geworden.

32.+ *Radula complanata*: Europa, Kaukasus, Nordpersien, Affghanistan, Himalaya, Japan, Nordamerika; nach K. Müller überdies noch in Nordafrika, Nordasien und China.

33.+ *Madotheca rivularis*: Europa, Nordafrika (Algier, Marokko), Armenien, Libanon, Nordamerika.

34.+ *Madotheca laevigata*: Europa, Madeira, Nordamerika. Nach K. Müller ist jedoch das Vorkommen ausserhalb Europas fraglich.

35.+ *Frullania serrata*: malayische Inseln (Java, Celebes) und Philippinen (Luzon), Ostafrika (Maskarenen, Madagaskar, Usambara) und Südafrika.

36.+ *Frullania nodulosa*: Ostafrika, tropisches Asien und Ozeanien, Ostaustralien.

37.+ *Leucolejeunea xanthocarpa:* tropisches Amerika und südliche Vereinigte Staaten (Texas), Ostafrika, Südasien (Ostindien) und Japan, Java.

38.+ *Ptychanthus squarrosus*: tropisches Asien, Ostasien (Japan), Ostafrika.

39.+ *Ptychanthus striatus*: Ost- und Westafrika, tropisches und subtropisches Asien und Ozeanien.

40.+ *Thysananthus spathobistipus*: Maskarenen, Asien, Ozeanien.

41.+ *Caudalejeunea fruticosa*: Mauritius, tropisches Asien und Ozeanien.

42.+ *Caudalejeunea Stephanii:* Maskarenen, tropisches Asien und Ozeanien.

43.+ *Ptychocoleus aulacophorus*: tropisches und subtropisches Asien, Afrika und Australien.

44.+ *Lopholejeunea javanica*: Ostafrika, tropisches Asien und Ozeanien, Japan.

45.+ *Microlejeunea ulicina*: Europa, (hauptsächlich im westlichen Teile, ostwärts bis nach Salzburg), Kanaren, Madeira, Nordamerika.

46.+ *Leptocolea floccosa*: Java, Sumatra, Luzon, Japan.

47.+ *Colura corynephora*: Java, Luzon, Neu-Guinea, Neu-Kaledonien.

48.+ *Dendroceros subplanus*: Java und Manila auf der Insel Luzon.

49.+ *Notothylas javanica*: Java und Luzon.

Fortgesetzte Analyse der Gattungen mit Berücksichtigung ihrer geographischen Verbreitung.

Durch die vorhergehende dritte Gruppe, welche Arten ungleicher Areale umfasst, haben wir die Kategorie jener Gattungen erschöpft, die eine oder mehrere durch ihre Verbreitung bemerkenswerte Arten enthalten; es folgt nun eine kurze Übersicht aller Gattungen, von denen einzelne Arten in den 3 Gruppen erwähnt wurden; dadurch wird auch unsere Liste der Lebermoos-Gattungen vervollständigt.

115. *Riccia* (130), s. 1*. Die Mehrzahl der Arten ist stenotop; zahlreiche endemische Arten bewohnen Australien und zwar auch die trockenen Gebiete, da die Vertreter dieser Gattung dank ihrer Kurzlebigkeit auch die kurze Regenperiode für ihre Entwicklung auszunützen vermögen. Abgesehen von der einzigen kosmopolitischen Art zeichnen sich besonders die in der ganzen nördlichen gemässigten und kälteren Zone verbreiteten *R. glauca* sowie *R. sorocarpa* und *bifurca* durch eine weite Area aus. Sonst ist die Gattung über die ganze Erde verbreitet. Viele Arten sind sehr variabel und bilden nach dem Grade der Feuchtigkeit resp. nach dem Medium recht unähnliche, von den Systematikern öfters missgedeutete Formen (Biaiometamorphosen); es wären somit für systematische Bewertung der Formen weitere Kulturversuche sehr zu empfehlen.

116. *Ricciocarpus* (2), s. 2.**)

117. *Rupinia* (1), s. 1.+

118. *Corsinia* (1), s. 2.+

119. *Targionia* (2), s. 3.

120. *Cyathodium* (3), s. 3+, 1△.

121. *Plagiochasma* (31), s. 4+.

122. *Reboulia* (1), s. 4*.

*) Soweit nicht ausdrücklich angeführt, enthält jede Gattung ausschliesslich nur Arten mit kleineren oder wenn grösseren, so stets natürlichen (floristisch einheitlichen) Arealen.

123. *Grimaldia* (6), s. 5+; ein verhältnismässig weites Areal weist noch *G. fragrans* (Europa, Kaukasus, Sibirien, Japan, Nordamerika, Ostgrönland) auf; *G. pilosa* ist ein arktisch-alpiner, aus den Alpen (Tirol, norditalienische Provinz Belluno, hier in einer von MASSALONGO als *G. carnica* beschriebenen, nach MÜLLER jedoch nicht wesentlich verchiedenem Form), aus Norwegen, Finnland, Schweden, Sibirien, Spitzbergen und Grönland bekannter Typus.

124. *Neesiella* (3); die grösste Verbreitung weist *N. rupestris* auf (Europa, besonders in den Kalkalpen, aber auch im Riesengebirge sowie in der Fränkischen Schweiz, Japan, Nordamerika).

125. *Conocephalum* (2); die eine Art, *C. conicum*, ist weit verbreitet; sie ist in Europa, in Kaukasus, Himalaya, Nord- und Ostasien (Sibirien, China, Japan), sowie in Nordamerika (bis auf Aljaska) häufig und kommt hauptsächlich auf Kalk und mit Vorliebe im Gebirge vor. Ausserdem wurde sie auch in Nordafrika (Algier), auf Madeira und den Kanaren gefunden.

126. *Lunularia* (1), s. 5.

127. *Dumortiera* (3), s. 6+, 6.

128. *Wiesnerella* (1), s. 3△.

129. *Preissia* (1), s. 7+.

130. *Marchantia* (67), s. 7. — Die übrigen Arten weisen verhältnismässig stenotope Areale auf. Eine fossile Art (*M. Pealei*) wurde von F. H. KNOWLTON (1) aus dem Untereocän Nordamerikas (Montana) beschrieben.

131. *Aneura* (151), s. 8+, 8.* Von der Gesamtzahl entfallen nech STEPHANI auf die nördliche gemässigte Zone 6 Arten, auf das tropische und subtropische Asien und Ozeanien 53, aut das tropische Amerika 43, auf das antarktische Gebiet 35, auf Afrika 14. Ausser den oben zitierten Arten zeichnen sich durch weite Verbreitung noch folgende Arten aus: *A. multifida* und *palmata* (beide in Europa, nördlichem Amerika und Asien sowie in Japan, die erstere ausserdem nach neueren Angaben auf den Hawai- und Falkland-Inseln und somit recht disjunkt und *A. latifrons* (Europa, Azoren, Nordamerika und Japan, jedoch nicht auf dem asiatischen Festlande).

132. *Metzgeria* (54[1], s. 9*, 10*, 11.* Von der Gesamtzahl der Arten sind 3 kosmopolitisch, 1 in der nördlichen temperierten Zone heimisch, 8 sind auf das tropische Asien und Ozeanien, 9 auf Afrika, 28 auf das tropische Amerika, 15 auf das antarktische Gebiet beschränkt. Ein verhältnismässig weites Areal weist noch *M. pubescens* auf: Europa (von Italien nordwärts bis zum 63° n. B.), Kaukasus, Asien (steigt im Himalaya bis fast zu 4000 m empor, China, Japan), Nordamerika.

133. *Pallavicinius* (29), s. 12.*

134. *Monoclea* (2), s. 9+.

135. *Fossombronia* (40), s. 10+, 11+.

136. *Acolea* (18), s. 4△.

137. *Marsupella* (35), s. 12+, 5△. — Die meisten Arten sind alpin oder auch alpin-arktisch. Nach Stephani sind *M. Sprucei, styriaca, alpina, densifolia* (nur Alpen), *neglecta, aquatica* in den Gebirgen Europas endemisch, während *M. condensata* aus den Alpen und aus Norwegen, *M. nevicensis* aus den Alpen, Norwegen und Schottland angegeben wird. Nach K. Müller's Auffassung gestalten sich jedoch die Verbreitungsgebiete dieser Arten wesentlich anders: *M. Sprucei* bewohnt nicht bloss die mitteleuropäischen Gebirge, sondern kommt auch in Schweden, Schottland und auf den Faeröer-Inseln vor; *M. sparsifolia*, welcher K. Müller die *M. styriaca* als Synonym anreiht, wächst in den Gebirgen Mitteleuropas (vornehmlich in den Alpen) und erscheint ausserdem in Schottland, Norwegen, Finnland, Lappland, Schweden, sowie in Nordamerika; *M. alpina* (bei Müller *Gymnomitrium*) wird aus den höchsten Gebirgen Europas, so aus den Alpen, Pyrenäen, den Gebirgen Portugals, von dem Hochland der Auvergne, aus dem Riesengebirge sowie den Gebirgen Grossbritanniens und Skandinaviens angegeben; *M. neglecta* wird nur als eine in den Alpen Salzburgs, Steiermarks, Frankreichs und Italiens sowie auf der Hohen Tatra vorkommende Abart der *M. ustulata* bewertet, welch letztere ausserhalb des Alpenzuges noch aus Baden, den Pyrenäen, dem Riesengebirge, Harz und Norwegen bekannt ist; *M. condensata* ist auf das Hochgebirge der Alpen, Grossbritanniens und Skandinaviens sowie auf Grönland beschränkt; *M. nevicensis* kommt

in den Alpen (Steiermark, Kärnten, Frankreich), den Pyrenäen, dem Riesengebirge sowie in Schottland, Norwegen und Schweden vor; von ihr ist aber *M. Boeckii* (Grossbritanien, Skandinavien, rumänische Karpathen) spezifisch nicht verschieden. — Eine interessante Verbreitung weist *M. sphacelata* auf: sie kommt auf den Gebirgen Mitteleuropas (Alpen, Riesengebirge), in Schottland, Island, ferner im Kaukasus, Japan, auf Aljaska, auf der Inseln Miquelon bei Neufundland, sowie auf Grönland vor.

138. *Alicularia* (7), s. 6△.

139. *Solenostoma* (32), s. 7△, 8△.

140. *Jungermannia* (48), *s.* 13+.

141. *Jamesoniella* (34), s. 14+: ausserdem hat *J. autumnalis* in der gemässigten Zone der nördlichen Hemisphaere eine weite Verbreitung; sie kommt in Europa, Asien (Kaukasus, Sibirien, Japan) und Nordamerika vor.

142. *Anastrophyllum* (31), s. 9△, 15+. — In Europa 4 Arten, von denen jedoch das *A. Reichardtii* und *nardioides* wohl zu einer und derselben Spezies gehören; vrgl. auch V. Schiffner (3), K. Müller (1).

143. *Lophozia* (51), s. 10△; viele Arten sind europäisch-nordamerikanisch, einige in der ganzen nördlichen gemässigten Zone vertreten. *L. decolorans* ist aus den österr. Alpen, aus der Schweiz und aus Norwegen bekannt.

144. *Anastrepta:* (3), s. 11△.

145. *Lophocolea* (267), s. 16+. Stephani schildert die geographische Verbreitung der Gattung wie folgt: »Die Gattung ist über den ganzen Erdball verbreitet; in der nördlichen Waldregion durch wenige Arten repräsentiert, ist sie auch in den tropischen Gebieten nicht gerade formenreich; ihre Hauptverbreitung findet sie im antarktischen Gebiete Südamerikas, in Australien und Neu-Seeland, wo si ausserordentlich vorherrscht und durch eine grosse Anzahl Arten repräsentiert ist, die oft vor sehr abweichendem, ganz fremdartigem Habitus, ebenso aber auch von nicht selten ermüdend gleichartiger und schwer zu identifizierender Ausbildung sind.« — Die Einteilung der Arten ist folgende:

I. Antarcticae; sp. 1—60.
II. Australes: sp. 61—130.
III. Asia et *Oceania:* sp. 131—166.

IV America tropica: sp. 167—221.
V Africa: sp. 222—253.
VI. Europa, Asia, America septentr. sp. 254—267.

Aus der letzten Gruppe bewohnen das ganze genannte Areal die Arten *L. minor, bidentata* und *heterophylla.*

146. *Chiloscyphus* (137), s. 17+. — Das Gattungsareal ist kosmopolitisch, doch entwickelt sich der grösste Formenreichtum im antarktischen Amerika (Magellanstrasse), in dem Gebiete Neuseelands sowie der antarktischen Inseln und auf Tasmanien. Die Arten gliedern sich folgenderweise:

I. Asia et *Oceania tropica:* sp. 1—47.
II. Africanae: sp. 48—63.
III. America tropica: sp. 64—75.
IV Australes: sp. 76—120.
V Antarcticae; sp. 121—128.
VI. Europa et *America septentr.*: sp. 129—133.

4 Arten führt Stephani als »incertae sedis« an; eine hievon ist in Australien, 2 im tropischen, 1 im antarktischen Amerika heimisch. — *Ch. polyanthus* ist in der ganzen nördlich-temperierten Zone verbreitet, besonders im Gebirge.

147. *Cephalozia* (131), s. 18+, 12△. — Die Arten gliedern sich nach Stephani wie folgt:

a) Subgenus *Eucephalozia*:

I. Europa, America septentr., Japonia: sp. 1—25.
II. Asia et *Oceania tropica:* sp. 26—30.
III. Africa: sp. 31—36.
IV. America tropica: sp. 37—49.
V Australes et *Antarcticae*: sp. 50—58.

b) Subgenus *Cephaloziella:*

I. Europa et *America septentr.:* sp. 59—81.
II. Asia tropica: sp. 82—88.
III. Africa: sp. 89—91.
IV. America tropica: sp. 92—95.
V Australes et *Antarcticae*: sp. 96—109.

c) Subgenus *Prionolobus:*

I. Europa et *America septentr.*: sp. 110—125.
II. Asia tropica: sp. 126.
III. Africa: sp. 127.
IV Australes et *Antarcticae:* sp. 128—130.
V America tropica: sp. 131.

In ganz Europa, dem nördlichen Asien und Amerika kommen *C. media, bicuspidata, fluitans, divaricata, myriantha* vor. *C. Lammersiana* ist aus Europa, Nordamerika und Nordjapan bekannt; *C. reclusa* weist ein größeres Areal auf als die vorhergehenden Arten, denn sie kommt in Europa, Nordamerika, im Kaukasus, in Sibirien und in Japan vor. — Die ganze Gattung hat ihr Entwicklungszentrum in der gemässigten Zone der nördlichen Hemisphaere, wo 64 Arten, somit beinahe 50% der Gesamtzahl, heimisch sind.

148. *Nowellia* (3), s. 19+.

149. *Adelanthus* (10), s. 13△; auf Europa und das antarktische Gebiet entfallen je 2 Arten, auf Tropisch-Amerika 6.

150. *Calypogeia* (62), s. 24△, 20+; die Mehrzahl der Arten ist nur steril bekannt. Ein weites Areal hat auch *C. trichomanis* (Europa, Kleinasien, Nordamerika, Sibirien, Japan).

151. *Mastigobryum* (335), s. 15△, 16△. Die meisten Arten sind stenotop; die Gesamtarea der Gattung ist zwar kosmopolitisch, doch halten die Arten, deren Zentrum im warmen Asien und Ozeanien liegt, die Grenzen floristischer Bezirke genau ein. Ein Areal, wie es z. B. *M. triangulare* aufweist (in den Gebirgen Europas, im nördlichen Amerika und Japan), gilt in dieser Gattung für ein weites. Von der Gesamtzahl der Arten entfallen auf die nördliche gemässigte Zone 3, auf das tropische Asien und Ozeanien 202, auf das tropische und subtropische Amerika 90, auf Australien und die nahe liegenden Inseln 20, auf Afrika (samt Inseln) 28.

152. *Psiloclada* (3), s. 17△.

153. *Lepidozia* (218), s. 21+, 22+, 23+. Auf Afrika entfallen 11 Arten, auf Tropisch-Amerika 47, auf Australien und Tasmanien 29, auf Neuseeland 32, auf das antarktische Amerika und Chile 16, auf Asien und Ozeanien 61, auf die nördliche gemässigte Zone 22 (davon 11 in Japan endemisch). — *L. setacea* kommt in Europa, Nordamerika, Japan und im Himalaya vor; *L. reptans* hat eine ähnliche Verbreitung, kommt aber auch in Kleinasien und China vor, fehlt jedoch in Japan.

154. *Chandonanthus* (8), s. 24+, 25+.

155. *Lepicolea* (5), s. 29+, 27+.

156. *Mastigophora* (10), s. 28+.

157. *Trichocolea* (32), s. 29+. Von der Gesamtzahl besitzt das tropische Amerika 19 Arten, das tropische Asien und Ozeanien 7, das australische Gebiet 5 und die nördliche gemässigte Zone eine einzige Art (*T. tomentella*, Europa. Mittelchina und Nordamerika).

158. *Scapania* (78), s. 18△, 19△, 20△. — STEPHANI gliedert die Arten wie folgt:

I. *Septentrionales* (die meisten in Europa, eine geringere Zahl in Nordamerika): sp. 1—44.

II. *Asia et Oceania tropica*: sp. 45—62.

III. *America tropica*: sp. 63—65.

IV. *Japonia*: sp. 66—78.

Die Gattung *Scapania*, die von K. MÜLLER (2) eingehend monographisch bearbeitet wurde, beschränkt sich in ihrem Vorkommen fast ganz auf die nördliche Halbkugel, während aus der Äquatorialzone nur wenige Arten bekannt sind und aus der südlichen Hemisphaere keine einzige angegeben wird. *S. apiculata* ist über den grössten Teil des Wohnbezirkes der Gattung verbreitet, denn sie kommt häufig in Europa, in Sibirien und Nordamerika vor. Zahlreiche Arten sind arktisch-alpin, so z. B. die auf S. 20 erwähnten *S. crassiretis*, *helvetica* und *Massalongii*; nach MÜLLER's gelungener pflanzengeographischen Analyse der ganzen Gattung finden sich unter den europäischen Scapanien 20 Arten (somit 59%), die in den Gebirgen Mitteleuropas sowie in Nordeuropa verbreitet sind. Von diesen 20 arktisch-alpinen Arten sind 14 auch in Nordamerika oder Nordasien oder in allen drei Kontinenten gefunden worden, während die drei oben genannten arktisch-alpinen Arten wie auch *S. calcicola*, *intermedia* und *obscura* auf Europa beschränkt erscheinen. *S. carinthiaca* ist nur von Heiligenblut (Kärnten) bekannt und auch *S. vexata* wurde bisher ausserhalb der italienischen Gebirge nicht gefunden, während die früher als ein endemisches Produkt der Alpen angesehene *S. aspera* neuerdings in Nordamerika (Vermont) festgestellt wurde. — Von den etwa 80 bisher bekannten Scapanien entfallen nach K. MÜLLER auf Europa 35 Arten (davon 15 endemisch), auf Amerika 29 (9 endemische), auf Asien 42 (28 end.) auf Ozeanien 5 (4 end.).

159. *Radula* (220), s. 21△, 30+, 31+, 32+. Die Gattung ist vorwiegend tropisch; in Europa und Nordamerika ist sie nur durch 7 Arten, im tropischen Asien und Ozeanien durch 69, in Australien und auf Neuseeland durch 29, im tropischen und subtropischen Amerika durch 66, im antarktischen Gebiete durch 15, in Afrika durch 34 Arten vertreten. Ausser den oben zitierten Arten hat *R. reflexa*, ziemlich häufig im tropischen Asien und Ozeanien, eine weite Verbreitung.

160. *Pleurosia* (10), s. 22△.

161. *Frullania* (726), s. 26△, 35+, 36+. — STEPHANI gliedert diese Gattung wie folgt:

a) Subgenus *Chonanthelia* (91):

Davon hat Afrika 15 Arten, tropisches und subtropisches Amerika 53*), Asien und Ozeanien 18, das australische Gebiet (Australien, Tasmanien, Norfolk Island, Neuseeland) 4, Nordamerika 1.

b) Subgenus *Galeiloba* (250):

Afrika zählt 46 Arten (davon 13 auf Madagaskar, 3 in Südafrika, 1 auf Sokotra, 3 auf der Insel Mauritius endemisch), Tropisch-Amerika 30, Japan und Korea 20, Neuseeland, Australien und Tasmanien 45 (davon 16 auf Neuseeland endemisch), antarktisches Amerika (Chile, Patagonien, Feuerland) 10 (davon 6 nur in Chile), tropisches Asien und Ozeanien 87 (davon 13 auf Neu-Kaledonien, 11 auf Java, 10 in China endemisch), Europa und Nordamerika 12, wobei keine einzige Art diesen beiden Gebieten gemeinsam ist.

F. squarrosa wird in der einleitenden Übersicht als im tropischen Amerika heimisch angegeben, in der eigentlichen Bearbeitung lautet jedoch die Verbreitungsangabe »Terrae tropicae et subtropicae, ubique valde communis«, so dass diese Art als kosmopolitisch zu betrachten wäre. Als endemisches Produkt der Alpen sind nach STEPHANI *F. cleistostoma* (Südtirol) und *F. Jackii* (österr. und savoische Alpen) anzusehen; K. MÜLLER weist aber darauf hin, dass *F. cleistostoma*, welche bloss aus der Umgebung von Meran bekannt ist, mit der im Osten der Vereinigten Staaten vorkommen-

*) Hieher ziehe ich die *F. boliviana* aus Bolivien, welche STEPHANI der nordamerikanischen Arten zuzählt.

den *F. saxicola* identisch sei und somit ein merkwürdig disjunktes Areal zeigt. *F. Jackii* ist nach MÜLLER besonders in den Alpen verbreitet und strahlt von hier sporadisch bis auf die Tatra und den Balkan aus; ausserdem kommt sie noch in Baden, Südnorwegen, Zentralasien, nach C. JENSEN auch auf den Färöer-Inseln vor.

c) Subgenus *Thyopsiella* (198):

Davon 29 Arten in Afrika (9 nur auf Madagaskar, 2 in Südafrika), 98 im tropischen Amerika, 48 im tropischen Asien und Ozeanien (8 in Neu-Guinea endemisch), 5 in Australien und auf Tasmanien, 18 in Europa und Nordamerika. *F. tamarisci* hat Europa mit Nordafrika (Tunis), China und Nordamerika gemein; *F. fragilifolia* ist nach STEPHANI auf die Alpen beschränkt (nach K. MÜLLER durch einen grösseren Teil Europas zerstreut und auch von den Kanaren bekannt).

d) Subgenus *Homotropantha* (34):

Die Mehrzahl der Arten (31) sind in Asien und Ozeanien heimisch, mehrere hievon weisen im tropischen Anteile dieses Gebietes eine ziemlich grosse Verbreitung auf; 2 Arten sind im tropischen Amerika (eine davon auf Jamaika), 1 auf den Falkland-Inseln endemisch.

e) Subgenus *Meteriopsis* (53):

Hievon entfallen auf Afrika 9 Arten, von denen 4 auf Madagaskar endemisch sind; Tropisch-Amerika hat 29 Arten (davon 10 nur in Peru), Tropisch-Asien und Ozeanien 15; von diesen kommt je 1 endemische Art auf Ceylon, China, Neu-Kaledonien und den Samoa-Inseln vor, je 2 auf Java und den Philippinen, 3 auf Neu-Guinea; eine Art haben Ceylon und die Philippinen, eine andere Java und die Philippinen gemeinsam; das Areal einer weiteren Art erstreckt sich von Ostindien bis Neu-Guinea und zu den Philippinen, während die letzte Art im ganzen Gebiet zerstreut vorkommt.

f) Subgenus *Diastaloba* (100):

Davon hat Afrika 16 Arten (je 3 auf Madagaskar und in Südafrika endemisch), Tropisch-Amerika 21, Asien 38,

Australien (östliche Staaten, Tasmanien, Neuseeland) 11, das antarktische Gebiet 10, Nordamerika 4 (von diesen kommt jedoch eine, F. KUNZEI, auch auf den Antillen und in Brasilien vor).

Schon aus dieser Übersicht geht klar hervor, dass diese artenreiche Gattung vorwiegend tropisch ist. Von der Gesamtzahl entfallen auf Asien und Ozeanien 257 Arten, auf das tropische Amerika 233; dann folgen Afrika mit 115 und Australien mit 65 Arten. Das nördliche gemässigte Gebiet (abgesehen von den asiatischen, speziell japanischen Arten) zählt nur 35 Arten; 21 Arten sind als antarktisch zu betrachten. Die Zahl der eurytopen Arten ist im ganzen sehr gering.

162. *Leucolejeunea* (6), s. 37+.

163. *Ptychanthus* (27), s. 38+, 39+; auf Afrika entfallen hievon 3 Arten, auf das tropische Asien 22 (je 1 aber in China und Japan endemisch), auf Tropisch Amerika 1, auf Ostaustralien und Neuseeland ebenfalls 1.

164. *Thysananthus* (34), s. 40+. Das Entwicklungszentrum der Gattung liegt im tropischen Südasien und dem naheliegenden Archipel. Afrika zählt nur 2 Arten, Tropisch Amerika 5, Asien und Ozeanien 26 (hievon sind mehrere in dem ganzen Verbreitungsgebiet gemein), Neuseeland eine einzige.

165. *Caudalejeunea* (16), s 41+, 42+; auch bei dieser Gattung entfallen die meisten Arten (10) auf das tropische Asien und Ozeanien; zwei davon rücken bis auf die ostafrikanischen Inseln vor; eine einzige ist aus dem tropischen Amerika, 4 aus dem tropischen Afrika (1 nur auf Madagaskar) bekannt.

166. *Ptychocoleus* (85), s. 43+. Tropisch Afrika beherbergt 25 Arten, das tropische Amerika 9, Asien und Ozeanien 48, Ostaustralien 2 (ausserdem kommen hier noch 2 auch aus Neu-Guinea bekannte Arten vor), Neuseeland 1.

167. *Lopholejeunea* (74), s. 44+. Tropisch Afrika hat 17 Arten, Tropisch Amerika 13, Asien und Ozeanien 38, Neuseeland und Australien 6.

168. *Euosmolejeunea* (37), s. 25△. Die meisten Arten zählt das tropische Amerika (19), ihm folgt dann das tropische Asien und Ozeanien mit 11 Arten (eine davon nur in Japan),

Tropisch Afrika mit 5 und das australische Gebiet mit 2 (1 in Queensland, 1 auf dem Campbell Island).

169. *Lejeunea (Eulejeunea)* (189), s. 27△. Afrika weist 30 Arten auf, Tropisch Amerika 84, Tropisch Asien und Ozeanien 51 (10 in Ostindien, je 7 auf Java und den Philippinen, 6 in Japan, 5 in Neu-Kaledonien, 4 in Neu-Guinea, 3 auf Ceylon und 2 auf den Hawai-Inseln endemisch), Australien 3 (je 1 in Westaustralien, Neu-Süd-Wales und Queensland), Neuseeland 5, Tasmanien und Norfolk Island je 1, das antarktische Amerika 2 (je 1 in Chile und Patagonien); in Europa und Nordamerika kommen nur 11 Arten vor, darunter eine (*L. cavifolia*) den beiden Gebieten gemeinsam und ausserdem auch aus Nordafrika (Tunis), Kanaren, Sibirien und Japan bekannt; *L. americana* kommt sowohl in Nord als auch Tropisch Amerika vor.

170. *Microlejeunea* (73), s. 45+, 29△. Afrika hat 16 Arten (6 auf Madagaskar, 3 in Kamerun endemisch), tropisch Amerika 24, tropisch Asien und Ozeanien 19 (darunter 4 in Ostindien, 1 in Japan endemisch, 4 [*M. sundaica, albicans, cucullata, Cumingiana*] in dem ganzen Gebiet verbreitet), Australien 2, Auckland-Inseln 3 (davon eine auch auf Tasmanien), Neuseeland 1, antarktisches Amerika 3; in Nordamerika und Europa kommen 5 Arten vor, von denen eine schon früher Erwähnung fand; zwei Arten sind auf Nordamerika, je 1 auf Irland und Madeira beschränkt.

171. *Leptocolea* (31), s. 30△, 46+. Zwei Arten sind tropisch westafrikanisch (1 in Kamerun, 1 auf der Insel Sao Thomé), 7 im tropischen und subtropischen Amerika, 21 im tropischen Asien und Ozeanien (davon 4 auf den Hawai-Inseln, je 3 auf Neu-Guinea und Java, 2 in Neu-Kaledonien, je 1 auf Borneo und in Ostindien endemisch; *L. yulensis* ist vorläufig nur aus Neu-Guinea und Java bekannt), 1 in Ostaustralien (Neu-Süd-Wales).

172. *Colura* (28), s. 31△, 47+. In Europa durch eine einzige Art (Grossbritannien, Südfrankreich) vertreten; 2 Arten in Afrika, 7 im tropischen Amerika (darunter 31△!), 2 im antarktischen Südamerika (Magellanstrasse), die meisten (16) im tropischen Asien und Ozeanien (4 auf Java, 2 auf den Hawai-Inseln endemisch).

173. *Aspiromitus* (53), s. 32△, 33△. Eine tropische Gattung, in Europa durch eine einzige Art in Frankreich vertreten; 10 Arten sind afrikanisch, 17 tropisch amerikanisch (davon 2 in Mexiko endemisch), 24 sind auf Tropisch-Asien (meist Malaya) und Ozeanien beschränkt; eine einzige Art dringt nach Ostaustralien (Neu-Süd-Wales) vor.

174. *Anthoceros* (144), s. 13*, 34△. Tropisch Amerika sowie Asien und Ozeanien halten sich in der Artenzahl Gleichgewicht; auf das erstere Gebiet entfallen 42, auf letzteres 43 Arten; afrikanisch sind 20 Spezies, in Australien ist die Gattung durch 11 Arten, auf Neuseeland durch 5, auf der Norfolk-Insel durch 1, in Europa und Nordamerika durch 22 Arten vertreten; von diesen ist *A. laevis*, von SCHIFFNER u. a. für kosmopolitisch gehalten, nach STEPHANI und MÜLLER über das ganze Verbreitungsgebiet (ganz Europa, Marokko, Teneriffa, Nordamerika) verteilt. Die pantropische Art (13*) wird von STEPHANI den tropisch amerikanischen Typen zugezählt.

175. *Dendroceros* (41), s. 35△, 48+. Die grössere Hälfte der Arten (24) findet sich im tropischen Asien und Ozeanien (3 davon in Japan endemisch, *D. javanicus* in den ganzen Verbreitungsgebiete sehr gemein); Tropisch Afrika besitzt 3 Arten. Ostaustralien ebenso viele, Neuseeland 1, Tropisch Amerika 10.

176. *Notothylas* (11), s. 49+. — 4 Arten sind tropisch amerikanisch, ebensoviele afrikanisch, 2 kommen im tropischen Asien und Ozeanien vor, die letzte (*N. orbicularis*), die Europa mit Nordamerika gemeinsam hat, taucht dann noch auf den Galapagos-Inseln auf.

7. Pflanzengeographische Ergebnisse der Arealanalysen.

Die im Vorhergehenden durchgeführte Analyse aller Gattungen der Lebermoose bestätigt in hervorragender Weise, dass die Verbreitung der Arten vom pflanzengeographischen Standpunkte aus als eine hochspezialisierte bezeichnet werden muss. Es wurden insgesamt **176 Gattungen mit 6898 Arten** aufgezählt; darunter sind nur 14 (inkl. der *Frullania squarrosa*, s. sub No. 161), daher nur 0·2% vollkommen

kosmopolitisch. Weltumspannende Areale bilden somit eine seltene Ausnahme, selbst wenn man annimmt, dass sich noch einige wenige, nach den bisherigen Kenntnissen disjunkt eurytope Areale mit der Zeit als kosmopolitisch erweisen werden. Manche disjunkte Areale sind pflanzengeographisch sehr bemerkenswert; zum Teil sind sie durch Reliktstandorte, die eine vormalige, mehr oder minder zusammenhängende und weit grössere Verbreitung voraussetzen, bedingt, zum Teil sind sie jedoch dadurch zustande gekommen, dass die Sporen (seltener vegetative Vermehrungseinheiten) auf grosse Distanzen transportiert wurden und die Pflanzen sich durch einen glücklichen Zufall auf dem neuen Standorte zu erhalten vermochten. Die Übertragung der Sporen durch Luftströmungen über schmale Meeresstrassen, ja selbst über weite Ozeanflächen ist leicht denkbar, wenngleich meist für die Ausbreitung des Areales ganz belanglos. Unter günstigen Umständen, so besonders bei ähnlichen klimatischen Verhältnissen der neuen Standorte, konnte die Sporenverwehung für die Wanderung mancher Arten von grosser Bedeutung werden, so besonders bei der Ausbreitung von Insel zu Insel. Es ist ja nicht denkbar für eine jede Insel eine ehemalige Landverbindung anzunehmen, um so z. B. die Areale jener Arten zu erklären, die auf zerstreuten Standorten durch den malayischen Archipel bis weit ins Ozeanien ausstrahlen. So scheint auch die postglaciale Neubesiedelung der Färöer-Inseln, in Bezug auf die Bryophyten hauptsächlich auf diesem Wege stattgefunden zu haben, da eine Landverbindung wenig wahrscheinlich erscheint. Einige Arten, so z. B. *Anastrophyllum piligerum* (s. 15+) weisen ein sehr weites und gleichzeitig disjunktes Areal auf; in einigen Fällen wird sich vielleicht durch eingehendes Studium feststellen lassen, ob die isolierten Standorte durch Sporenverwehungen zu erklären oder als Relikte aufzufassen sind.

Das hohe geologische Alter der Lebermoose wird durch mehrere Momente angedeutet; es wird nicht nur allein durch vorgefundene fossile Reste, von denen besonders jene aus dem norddeutschen Bernstein sehr gut erhalten und den lebenden Formen so ähnlich sind, dass sie von Göppert und Caspary ohne weiteres diesen angereiht werden, sondern

hauptsächlich auch durch die heutige geographische Verbreitung sprechend bewiesen. Zu Ende der Tertiärzeit war die zirkumpolare Flora noch sehr reich an Vertretern dieser Pflanzengruppe; durch die Glazialperiode wurden allerdings die meisten Formen südwärts verdrängt und nur wenige vermochten dann in der postdiluvialen Zeit wieder bis in den hohen Norden vorzurücken; einige dieser vom Norden vertriebenen Flüchtlinge konnten sich auch auf den Gebirgen der gemässigten Zone erhalten, wodurch Areale zustandekamen, wie wir solche schon vorher kennen lernten. Die meisten, wenn nicht alle Gattungstypen existierten wenigstens in Urformen bereits in der Tertiärzeit, wie die grosse Zahl kosmopolitischer oder in überraschender Weise disjunkter Gattungsareale beweist. Die Lebermoose sind aber im allgemeinen gegen Temperatur und Feuchtigkeit sehr empfindlich, was sich schon dadurch äussert, dass den tropischen Formen die Anpassungsfähigkeit für die temperierte Zone in der Regel fehlt. Es kam somit auch bei den kosmopolitischen Gattungen zu einer weitgehenden Spezialisierung, welche sich durch die grosse Zahl stenotoper Arten offenbart. Selbst innerhalb grösserer floristischen Gebiete mit sehr ähnlichen Lebensbedingungen konnte nur ein geringerer Teil die ganze Area okkupieren. Die Flora der kalten Zone der nördlichen Hemisphaere stellt in ihren Hauptzügen eine verarmte Flora der gemässigten Zone mit wenigen Endemismen vor. Auf der südlichen Hemisphaere jedoch ist das antarktische Gebiet an Lebermoosen sehr reich und sind diese recht eigenartig.

Das Entwicklungszentrum der Lebermoose liegt in den tropischen und subtropischen Gebieten, wobei nur die heisstrockenen Striche (so der grösste Teil Australiens, sowie viele Gebiete Afrikas) gemieden werden. Der grösste Reichtum entfaltet sich in den feuchtwarmen Regenwalddistrikten Südasiens und Ozeaniens, andererseits unter ähnlichen Bedingungen im tropischen Amerika. Es ist eine beachtenswerte Tatsache, dass nur sehr wenige grössere Gattungen auf die alt-, resp. neuweltlichen Tropen beschränkt sind, indem sich fast alle wenigstens durch einzelne Arten als pantropisch praesentieren. Die einzige Ausnahme bildet die

auf Tropisch-Amerika beschränkte Gattung *Crossotolejeunea* mit 25 Arten. Ausserdem beherbergt das tropische Amerika noch folgende endemische Gattungen: *Strictolejeunea* (2) (No. 55), *Amplolejeunea* (1) (No. 59), *Cyrtolejeunea* (1) (No. 61), *Potamolejeunea* (8) (No. 67); auf Jamaika ist die Gattung *Leiolejeunea* (1) (No. 60), auf Brasilien sind 3 monotypische Gattungen, *Cronisia*, *Funicularia* und *Protocephalozia* (No. 1, 2, 35) beschränkt.

Palaeotropisch ist zunächst die Gattung *Schistochila* (83) (No. 85) sowie 4 in dem malayischen Archipel endemiche Gattungen und zwar *Conoscyphus* (2) (No. 31), *Jackiella* (4) (No. 33), *Wettsteinia* (1) (No. 34) und *Metzgeriopsis* (1) (No. 70), während *Mastigopelma* (2) (No. 46) durch eine Art auf Celebes und die zweite auf den Samoa-Inseln vertreten erscheint. Die interessante Gattung *Treubia* wurde vorher als monotypisch und auf Java endemisch betrachtet; die ursprüngliche Art (*T. insignis*) wurde aber später auch auf den Tahiti-Inseln gefunden und eine neue Art auf den Samoa-Inseln entdeckt. Vielleicht existiert noch eine dritte, antarktische Art (Neuseeland, Westpatagonien), die aber — da nur steril gesammelt — generisch noch etwas zweifelhaft ist (vrgl. Stephani I. 373). Dieses Beispiel lässt erwarten, dass die Wohnbezirke vieler tropischer Gattungen und auch Arten durch weitere Forschungen beträchtlich erweitert werden und dass manche jetzt schwer erklärliche Areale durch Hinzukommen neuer Arten resp. neuer Standorte einheitlicher erscheinen werden.

Die grössten Gattungen haben zwar weltumspannende Areale, doch auch ihr Brennpunkt liegt offenbar in den feuchtwarmen Tropen und zum Teil auch Subtropen, während nur wenige Arten in die nördliche gemässigte Zone ausstrahlen. So ist die Gattung *Plagiochila* mit 780 Arten vorwiegend tropisch; nur auf das tropische Amerika entfallen 332 Arten, während Europa und Nordamerika deren bloss 14 besitzen. Auch die Gattung *Frullania* (No. 161) mit 726 Arten ist vorwiegend tropisch, wie die oben gegebene Analyse beweist. Die Gattung *Radula* (No. 159) mit 220 Arten ist ebenfalls im Wesen tropisch; nur 7 Arten finden sich in Europa und Nordamerika vor. Die Gattung *Madotheca* (No.

91) mit ihren 153 Arten hat zwar ein kosmopolitisches Areal, der Brennpunkt ihrer Entwicklung liegt aber in den Tropen und Subtropen; Europa und Nordamerika weisen zusammen 18 Arten auf. Die Gattung *Lejeunea* (No. 169) mit 189 Arten ist hauptsächlich auf die Tropen gebunden, desgleichen auch die Gattungen *Thysananthus* (34) (No. 164), *Ptychocoleus* (85) (No. 166), *Hydrolejeunea* (101) (No. 109), *Lopholejeunea* (74) (No. 167), *Euosmolejeunea* (37) (No. 168), *Trichocolea* (32) (No. 157), *Schisma* (71) (No. 83, in Europa nur 2 Arten), *Drepanolejeunea* (81) (No. 105, eine einzige Art in Europa), *Leptocolea* (31) (No. 171), *Aspiromitus* (53) (No. 173, eine einzige Art in Europa), *Dendroceros* (41) (No. 175) u. a. Die artenreiche Gattung *Symbyezidium* (19) (No. 95) ist ausschliesslich tropisch, und auch die Gattung *Bryopteris* (13) (No. 94) hat ihre Vertreter bloß in Tropisch-Amerika, Afrika und Asien.

Einige tropische Gattungen sind vorwiegend in Amerika vertreten und entsenden nur wenige Arten in die altweltlichen Tropen. Zu diesen können gerechnet werden: *Dicranolejeunea* (No. 98) mit 28 Arten, davon 22 im tropischen Amerika und nur je 3 in Tropisch-Asien und Afrika; *Cyclolejeunea* (No. 100) mit 24 Arten, davon 22 im tropischen Amerika und nur 2 in Tropisch-Asien; *Prionolejeunea* (No. 101) mit 60 tropischen Arten, davon 47 in Tropisch-Amerika; *Ceratolejeunea* (No. 107) mit 100 Arten, davon 77 im tropischen Amerika; *Rectolejeunea* (No. 113) mit 40 Arten, davon 30 im tropischen Amerika.

Die gemässigte Zone der nördlichen Hemisphaere zählt auch einige charakteristische Gattungen, so sind dies *Blasia* (1) (No. 75), *Pellia* (3) (No. 76), *Marsupella* (35, meist im Gebirge) (No. 137), *Lophozia* (51, die meisten in der nördlichen temperierten Zone) (No. 143), *Scapania* (No. 158) mit 78 Arten, von welchen 44 in der nördlichen gemässigten Zone und 13 in Japan heimisch sind, *Thallocarpus* (1, Europa und Nordamerika), *Haplomitrium* (1, Europa), u. a. In Japan sind endemisch die Gattungen *Makinoa* (1) (No. 10) und *Cavicularia* (1) (No. 11), in China *Delavayella* (1) (No. 53). Die japanische Lebermoosflora ist überhaupt sehr interessant; im J. 1906 waren nach A. W. Evans (1) bereits mehr als

250 Arten bekannt, darunter sowohl nördliche wie auch südliche Typen.

Das antarktische Gebiet weist mehrere charakteristische Gattungen auf, so z. B. *Lepidolaena* (No. 45) mit 9 antarktischen Arten, *Pigafettoa* (1) (No. 41) auf die Magellanstrasse beschränkt, *Balantiopsis* (15) (No. 86) mit bis auf 2 ausschliesslich nur antarktischen Arten. Andere Gattungen sind wenigstens in dieser Region reich vertreten, so hat *Aneura* (151) (No. 131) 35 antarktische Arten, *Lophocolea* (267) (No. 145) 60 antarktische und 70 australische Arten und *Chiloscyphus* (137) (No. 146) ist ebenfalls in dem antarktischen und australischen Gebiete reichlich vertreten.

Echt kosmopolitische Gattungen sind z. B. *Metzgeria* (64) (No. 132) und *Fossombronia* (40) (No. 135). *Anthoceros* (144) (No. 174) ist zwar am stärksten in den Tropen vertreten, immerhin aber durch mehrere Arten (22) auch in Europa und Nordamerika repräsentiert. *Riccia* (130) (No. 115) entfaltet besonders in einigen subtropischen Ländern grossen Formenreichtum.

Auf Südamerika sind ferner 2 kleine Gattungen, *Pteropsiella* (1) (No. 36) und *Arachniopsis* (3) (No. 51) beschränkt.

Das tropische Afrika besitzt keine grösseren endemischen Genera und steht auch in der Artenzahl dem tropischen Asien und Amerika stark nach. Diese bei dem Pteridophyten sich wiederholende Erscheinung steht wohl auch mit der Trockenheit vieler Gebiete dieses Erdteiles im Zusammenhange. Die feuchtwarmen Regenwalddistrikte beherbergen in der Tat eine viel reichere Hepatikenflora. Besonders artenreich und manigfaltig ist diese auf der Insel Madagaskar, wo sie sich durch sehr zahlreiche endemische Arten (jedoch keine Gattungen) auszeichnet. In ihrer Zusammensetzung zeigt sie Beziehungen sowohl zu dem afrikanischen Festlande als auch zu den asiatischen Tropen und weist ausserdem sogar einige wenige amerikanische Typen (so *Lophocolea Martiana*, 16+) auf. Recht interessant erscheinen die zwei dem tropischen Westafrika und Brasilien gemeinsamen Arten (s. 25△, 31△), wenn auch unter den Blütenpflanzen ähnliche Vorkommnisse nicht ganz unbekannt sind. Auf Algier ist die monotypische Gattung *Dichiton* (No. 22) beschränkt.

Für die zahlreichen sehr disjunkten Gattungsareale bieten folgende Momente gewissermassen eine Erklärung: a) das hohe Alter der Lebermoose; durch Aussterben des Gattungstypus in einem Teile des ursprünglichen Wohnbezirkes konnten leicht unregelmässig zerrissene Areale entstehen; b) die moderne Zersplitterung von Gattungen im weiteren Sinne in eine Anzahl kleiner Genera (s. S. 26), wodurch aus kosmopolitischen oder pantropischen Typen oft disjunkte Gattungen entstanden. Die Hepatikologen, welche den Speziesbegriff derart mit der geograpischen Verbreitung verknüpften und ihn gewissermassen von derselben abhängig machten (s. S. 12), haben bei der Aufstellung der Gattungen dieses Moment merkwürdigerweise gänzlich ausser Acht gelassen. Schliesslich konnten auch auffallend disjunkte Areale dadurch zustande kommen, dass Sporen einer Gattung auf irgend eine Weise (durch Wind, Zugvögel) auf grosse Distanzen transportiert wurden und sich im neuen Gebiete stabil niederlassen konnten.

Bei den sehr disjunkten Arten dürfte sich der Wohnbezirk in manchen Fällen durch neue Standorte ergänzen, so z. B. bei 1△, 3△, 7△, 8△, 11△, 14△, 18△, 21△, 24△, 29△, 30△, 32△, 33△, 35△. Andere heute disjunkte Areale erweisen sich als Überreste eines ausgedehnten zirkumpolaren Wohnbezirkes, der durch die Glazialperiode stark Einbusse erlitt. Überraschend erscheinen folgende zwei Areale: *Acolea concinnata* (4△) zirkumpolar arktisch-alpin (mit Standorten im Himalaya) und dann wieder antarktisch (Feuerland) sowie *Lepidozia plumulosa* (23△) im antarktischen Gebiete (von Südamerika bis Neuseeland) verbreitet und dann wieder auf Grönland auftauchend. Für die erstere Art wäre vielleicht eine sprungweise Einwanderung aus Nordamerika durch Vermittlung der zentralamerikanischen Hochgebirge, wie wir sie ja auch für manche Blütenpflanzen annehmen (vrgl. Domin bei *Koeleria*) und das spätere Aussterben auf intermediären Standorten denkbar. Bei der *Lepidozia plumulosa* handelt es sich aber um einen ausgesprochen antarktischen Typus (die Gattung ist ja durch 16 Arten im antarktischen Amerika und 32 Arten auf Neuseeland vertreten), der gewiss auf irgend eine, heute allerdings schwer festzustellende Weise

in der postglazialen Zeit nach Grönland vorrückte, also eine Wanderung in umgekehrter Richtung durchmachte.

Das Vorkommen der *Acolea concinnata* im antarktischen Gebiete (Feuerland, SPEGAZZINI teste MASSALONGO, s. STEPHANI 1, II. 11) wird übrigens von K. MÜLLER mit Stillschweigen übergangen; diesem Autor zufolge kommt diese Art nur auf der nördlichen Hemisphaere vor. Dagegen führt K. MÜLLER die *Acolea crenulata*, welche STEPHANI in seinen »Species« nur aus Norwegen, Grossbritannien und Aljaska erwähnt, überdies auch aus dem Südpolargebiet (Südgeorgien) an, wo dieses Lebermoos von SKOTTSBERG gesammelt und von STEPHANI bestimmt wurde. Somit weist wenigstens diese, in Europa ausgesprochen atlantische Art eine höchst merkwürdige disjunkte Verbreitung auf, die wohl am besten als Trümmer eines ehemalig ausgedehnten Wohnbezirkes aufzufassen ist. Zu solchen interessanten Fällen gehört auch *Lophozia Hatcheri* und die mit ihr identische, nach K. MÜLLER's genauen Untersuchungen durch keine morphologischen Charaktere abweichende *L. Baueriana*, welche SCHIFFNER unter einseitiger Hervorhebung des geographischen Momentes (vrgl. S. 11) für spezifisch verschieden hält. Sie kommt zerstreut fast durch ganz Europa vor, ist zwar aus Asien nicht bekannt, erscheint aber wieder auf Grönland, Labrador und in den arktischen Ländern Nordamerikas und taucht ausserdem in Patagonien und der Antarktis auf! Auch *Lepidozia Floerkei* hat nach MÜLLER eine ähnliche Verbreitung: sie ist in ganz Europa (in Mitteleuropa nur im Gebirge) verbreitet und ausserdem auch aus Sibirien, Nordamerika und der Antarktis (inkl. Südgeorgien) bekannt. Auch *Aneura multifida* (sub No. 131), welche lange Zeit als eine auf der ganzen nördlichen Hemisphaere im gemässigten Klima weit verbreitete Art galt (vrgl. noch K. MÜLLER 1, II. p. 336) wurde neuerdings auch auf den Hawai-Inseln (EVANS) und ausserdem noch im antarktischen Gebiete auf den Falkland-Inseln (vrgl. MÜLLER 1, II. p. 827) gefunden. Dieses merkwürdig disjunkte Areal dürfte sich jedoch, da die Art vielfach verkannt wird, mit der Zeit einigermassen ergänzen und wahrscheinlich zu einem unvollstämdig kosmopolitischen anwachsen. Wir sehen somit eine gleitende Reihe von fast

kosmopolitischen, auf beiden Hemisphaeren vorkommenden Arten (wie z. B. die von K. Müller ebenfalls dem stark disjunkten Arten zugerechnete *Metzgeria hamata* (10*), die aus dem nördlichen Westeuropa nach Südasien, Ozeanien und Neuseeland sowie von Aljaska über Mittelamerika und Peru bis nach Patagonien ausstrahlt) bis zu solchen Typen, welche wie die genannten Lophozien in der nördlichen gemässigten und kalten Zone sich finden und dann wieder ohne Zwischenstandorte im antarktischen Gebiete auftauchen.

Von den übrigen Lebermoosen mit disjunktem Areale führt K. Müller z. B. folgende beachtenswerte Fälle an: *Lepidozia sandwicensis* (ad No. 153) von Aljaska und den Hawai-Inseln; *Mastigobryum* (=*Pleuroschisma*) *Pearsonii* (ad No. 151) nur von Irland und auf Aljaska bekannt, auf den Hawai-Inseln durch eine verwandte Art vertreten; *Diplophyllum albicans* (sub No. 90) von Europa, Japan, Nordamerika bis Aljaska und den Hawai-Inseln; *Mastigophora Woodsii* (ad No. 156) von Nordwesteuropa und Himalaya bekannt; *Schisma aduncum* (ad No. 83) aus Nordwesteuropa, Sumatra und Aljaska. Eine interessante disjunkte Verbreitung weist *Lejeunea flava* auf, die nach Müller in Europa nur von wenigen Stellen bei Killarney in Irland bekannt ist, ausserdem aber auf Madeira und Teneriffa, auf Sumatra im tropischen Südasien sowie auf Jamaika in Westindien vorkommt. Auch das Areal von *Notothylas orbicularis* (No. 176) ist ziemlich disjunkt; die Art ist aus Europa nur von wenigen entfernten Stellen Böhmens, Schlesiens, Oberbayerns, Südtirols und Steiermarks bekannt, tritt dann als ziemlich verbreitet in Nordamerika auf und erscheint ausserdem in der Aequatorialzone auf den entlegenen Galapagos-Inseln. Da sie feuchte, lehmige Äcker bewohnt, so wäre die Möglichkeit ihrer Einschleppung nicht von der Hand zu weisen; Limpricht hat auch die Vermutung ausgesprochen, dass sie durch amerikanisches Getreide eingeschleppt wurde, was jedoch Müller für ganz unwahrscheinlich hält und diese Art in Europa als Überbleibsel einer früheren Flora betrachtet.

Andere disjunkte Arten lassen sich von einem ehemaligen erweiterten südpolarantarktischen Wohnbezirke herleiten; sie treten mehr oder minder disjunkt im antarktischen

Amerika, den antarktischen Inseln, in dem neuseeländischen Gebiete und in Südafrika auf und rücken mitunter weit nordwärts vor. Zu diesen gehört *Adelanthus unciformis* (13△, bis Madagaskar), *Mastigobryum adnexum* (15△), wahrscheinlich auch *Frullania Ecklonii* (26△); *Mastigobryum convexum* (16△) strahlt bis auf den Kilimandscharo, *Psiloclada clandestina* (17△) sogar bis nach Neuguinea und Amboina aus.

Sehr merkwürdig sind Areale solcher Arten, die von Nordeuropa sehr disjunkt über den Himalaya bis auf die Hawai-Inseln ausstrahlen, wie dies bei *Scapania planifolia* (20△) und *Pleurozia purpurea* (22△) der Fall ist; beide Arten sind wohl ihrem Wesen nach als zirkumpolar arktisch-alpin anzusehen.

Beachtenswert erscheint auch der Umstand, dass sich die Lebermoose mit disjunktem Areale in Europa meist auf das atlantische Gebiet beschränken und sich hier als formerstarrte, meist keine Sporen und Brutkörper erzeugende Relikttypen präsentieren.

Die heute disjunkten Lebermoosareale deuten darauf hin, dass in weit zurückliegenden Epochen mehrere eurytope und kosmopolitische Arten existierten, die gewiss über ein intensives Wanderungsvermögen verfügten, da es sonst ausgeschlossen wäre, dass dieselben Typen in unveränderter Artform das arktische sowie antarktische Gebiet erreichen könnten. Von den heutigen Kosmopoliten erweist sich die Mehrzahl als Archaeokosmopoliten, worauf schon ihre hauptsächlichste Verbreitung in wärmeren Teilen der Erde hinweist; dies gilt z. B. von *Dumortiera hirsuta*, *Metzgeria hamata*, *Reboulia hemisphaerica*, während die allbekannte *Marchantia polymorpha* sich deutlich als Neokosmopolit erkennen lässt.

8. Zur Oekologie der Lebermoose.

Die Lebermoose sind zwar eingehend systematisch bearbeitet, doch enthält die grosse Monographie Stephanis leider keine Angaben über das Wesen der Standorte. Die Verbreitung der Arten ist hier so allgemein gegeben, dass sich daraus keine ökologisch-pflanzengeographischen Schlüsse ziehen lassen. Wir sind somit heute noch wenig über die Lebensbedingungen und die Beziehungen der Hepatikenfloren

einzelner Länder zu Klima und Boden unterrichtet, noch viel weniger als über die Laubmoose, da ja auch in den meisten bryogeographischen Arbeiten die Lebermoose stiefmütterlich behandelt werden. Nur inbezug auf die europäische Lebermoosflora sind wir dank dem zweibändigen Werke K. MÜLLER's (1) besser unterrichtet, da wir hier bei jeder Art eingehende und sorgfältige, sowohl auf eigener langjähriger Erfahrung als auch auf der bezüglichen Literatur basierende, nicht nur rein geographische, sondern auch oekologisch gehaltene Standortsangaben finden. K. MÜLLER widmete überdies das Schlusskapitel seines Werkes der Oekologie der Lebermoose im allgemeinen, wo er das Wichtigste des über dieses Thema Bekannten zusammentrug. Was die aussereuropäischen Lebermoose anbelangt, sind die vielen Arbeiten ALEXANDER WILLIAM EVANS (so die Beiträge zur Lebermoosflora der Vereinigten Staaten und Kanada, von Portoriko, Bermuda, Japan, Hawai etc.) systematisch von grosser Bedeutung, enthalten jedoch nur wenig oekologische Angaben.

In der Wahl der Standorte sind die Lebermoose im allgemeinen ziemlich wählerisch hauptsächlich in Bezug auf die Luft- und Bodenfeuchtigkeit und sodann auf die Temperatur. Die meisten Arten sind hygrophil, ein kleinerer Teil mesophil, während ausgesprochene Xerophyten eine Ausnahme bilden. Auch was das Substrat anbelangt, gibt es verhältnismässig nur wenige Arten, die sich mit den verschiedensten Standorten begnügen. Die Lebermoose bilden somit charakteristische Bestandteile bestimmter Pflanzenvereine, in welchen sie unter gleichen Lebensbedingungen regelmässig erscheinen. Die physikalischen Eigenschaften des Substrats, besonders sein Wassergehalt, sind meist in erster Reihe entscheidend; von hoher Wichtigkeit ist aber auch die Beschattung und die Luftfeuchtigkeit, und ausserdem die chemische Einwirkung des Substrats, obzwar diese sich nicht immer gleich durchdringend geltend macht. Als charakteristische kalkstete Arten wären *Clevea hyalina, Metzgeria pubescens, Pellia Fabbroniana, Riccia Michelii, Preissia commutata, Scapania calcicola, aspera, Arnellia fennica, Cololejeunea calcarea, Lophozia Kaurinii, badensis, Mülleri, Madotheca laevigata* u. a. zu nennen; auch *Conocephalum conicum* ist we-

nigstens kalkhold. Für Silikatgestein (vor allem Gneiss, Granit, Glimmerschiefer) sind nach K. MÜLLER u. a. folgende Arten charakteristisch: *Alicularia scalaris, Anastrepta orcadensis, Anastrophyllum Donianum, Reichardtii, Chandonanthus setiformis, Diplophyllum albicans, Eucalyx obovatus, Frullania Jackii,* viele *Gymnomitrium-* und *Marsupella*-Arten, *Scapania planifolia* und *undulata, Schisma aduncum, Sendtneri, Sphenolobus minutus, saxicolus* u. a.; auf silikatreichen Sandsteinfelsen kommen oft in erheblicher Menge, vielfach sogar in Massenvegetation *Calypogeia Neesiana, Cephalozia media, reclusa, Conocephalum conicum, Geocalyx graveolens, Jamesoniella autumnalis, Lepidozia silvatica, Leptoscyphus Taylori, Odontoschisma denudatum, Sphenolobus Michauxii, minutus* vor

Ausgedehnte Areale bewohnende Arten verhalten sich innerhalb ihres Wohnbezirkes öfters ungleich, was den verschiedenen Kombinationen der Lebensbedingungen entspricht. So macht auch SCHIFFNER darauf aufmerksam, dass die meisten in unserer geographischen Breite felsbewohnenden Arten in der arktischen Zone erdbewohnend werden. Allerdings fällt dabei öfters der Umstand auf die Wage, dass es sich meist um arktische Typen handelt, welche sich in grösserer Entfernung von ihrem Brennpunkte am besten auf den Felsen, wo die Konkurrenz anderer Kommensalen eine geringe ist, behaupten können.

Die Lebermoose sind recht anpassungsfähig, doch äussert sich ihre Plastizität nur selten dadurch, dass dieselben Arten in unveränderter Form grosse Wohnbezirke einnehmen, sondern dass sich derselbe Urtypus den Lebensbedingungen entsprechend in verschiedene Arten oder wenigstens Varietäten umformt und somit spezialisiert. Ähnliche äussere Einflüsse machen sich durch interessante Konvergenzerscheinungen bemerkbar. So lenkt STEPHANI (2) die Aufmerksamkeit darauf, dass man in der nördlichen gemässigten Zone dem Erdreiche dicht anliegende und durch zahlreiche Rhizoiden angeheftete Pflanzen mit treppenartig gestellten ganzrandigen oder zweispitzigen Blättern vorfindet, welche gewiss als Erzeugnisse dieser Zone anzusehen sind. Ganz ähnlich ausgestaltete Lebermoose tauchen aber wieder im antarktischen Gebiete auf, worin STEPHANI mit Recht den Beweis dafür

erblickt, dass ähnliche Vegetationsbedingungen ähnliche Formen erzeugen. V Schiffner (1) macht ferner darauf aufmerksam, dass durch äussere Einflüsse Formen einer und derselben Art äusserlich total unähnlich werden können (z. B. *Plagiochila asplenioides, Lophozia inflata, Cephalozia bicuspidata, Ricciocarpus natans* etc.), während Formen verschiedener Abstammung durch gleiche Bedingungen so ähnlich werden können, dass sie morphologisch auch von erfahrenen Kennern nur schwer zu unterscheiden sind (z. B. *Lophozia Wenzelii* und *L. ventricosa* var. *uliginosa*, Formen von *Scapania, Calypogeia, Aplozia* u. s. w.).

Wasserformen sind bei Lebermoosen eine seltene Erscheinung, obzwar auch solche typisch oder nur gelegentlich vorkommen. Als echte Wasserpflanze ist in erster Reihe *Riella* anzusehen, welche ihren gesamten Entwicklungsgang im Wasser durchmacht und sowohl in Süsswasser als auch in ziemlich starken Salzlösungen zu wachsen vermag. Auch *Ricciocarpus* ist ein vorwiegend aquatischer Typus, der sich jedoch auf feuchtem Erdboden und Schlamm zu einer Landform zu verwandeln imstande ist; auch *Riccia fluitans* bildet ausser der gewöhnlichen Wasserform eine terrestre Form auf Schlamm und feuchter Erde. Alle diese im Wasser lebenden Formen sind jedoch, wie auch *Goebel* (1) richtig bemerkt, von auf dem Lande lebenden Typen abzuleiten und nicht vielleicht umgekehrt. Ausserdem kennen wir mehrere gelegentliche, im stillen oder strömenden Wasser auftretende Formen der Lebermoose, die aber meist nur in geringer Tiefe unter dem Wasserspiegel wachsen; eine Ausnahme hierin bildet die im Bodensee mehrere Meter tief beobachtete *Haplozia riparia* sowie die in Schweden 3 m unter dem Wasserspiegel gefundene *Calypogeia sphagnicola* var. *submersa*. Gelegentliche Wasserformen wurden öfters auch als eigene Arten beschrieben; so gehört nach Müller die Wasserform *Calypogeia Mülleriana* zu ihren terrestren Stammform *C. trichomanis*, *C. submersa* zu *C. sphagnicola*, *Chiloscyphus fragilis* und *rivularis* zu *C. polyanthus*, *Haplozia rivularis* zu *H. pumila*, *Haplozia turfosa* zu *H. crenulata*, *Marsupella sphacelata* zu *M. Sullivantii*.

Im übrigen sind die Lebermoose vorwiegend erdbe-

wohnend; manche wachsen jedoch epihytisch auf Baumstämmen (so sind z. B. in Europa nach Müller *Cololejeunea minutissima, Colura calyptrifolia, Frullania dilatata, tamarisci, Madotheca Baueri, platyphylla, Metzgeria fruticulosa, furcata, pubescens, Microlejeunea ulicina, Ptilidium pulcherrimum, Radula complanata* u. a. Rindenbewohner). In den Tropen finden sich ausserdem viele akrogyne Jungermanniaceen als epiphylle, Blätter von Bäumen und Sträuchern bewohnende Formen.

Die Lebermoose bevorzugen im allgemeinen feuchte und schattige Standorte und gedeihen oft auch im allertiefsten Schatten, auf stätig finsteren Plätzen. Die Mehrzahl der Gattungen ist tropisch und nur wenige dieser tropischen Genera entsenden vereinzelte Vertreter in die nördliche gemässigte Zone. Aber auch die kalte Zone wird von den Lebermoosen nicht gemieden, wie die verhältnismässig reiche Hepatikenflora Grönlands oder die Aljaskas beweist. Von wie grosser Bedeutung der Einfluss der konstant hohen Feuchtigkeit auf die Verbreitung der Lebermoose ist, beweist am besten die Tatsache, dass sich selbst mehrere sonst tropische Gattungen bis in das feuchte antarktische Gebiet Südamerikas und bis nach Neuseeland vorwagten. Wenngleich es sich dabei meist nicht um identische Arten handelt, ersehen wir hieraus doch, dass die hohe Feuchtigkeit gewissermassen für die mangelnde Wärme Ersatz bietet. Bis auf Neuseeland strahlen z. B. folgende tropische, im antarktischen Amerika fehlende Gattungen aus: *Taxilejeunea* (109) (No. 108), *Ptychanthus* (27) (No. 163), *Thysananthus* (34) (No. 164), *Ptychocoleus* (85) (No. 166), *Pycnolejeunea* (76) (No. 110), *Dendroceros* (41) (No. 175), alle mit je einer neuseeländischen Art. Auch die tropische Gattung *Lopholejeunea* (74) (No. 167) rückt über Ostaustralien nach Neuseeland vor; die tropische und subtropische Gattung *Physocolea* (119) (No. 114) ist auf Neuseeland durch zwei endemische Arten vertreten. Andere Gattungen sind ausser in Neuseeland auch im antarktischen Amerika heimisch; so hat z. B. die vorwiegend tropische *Lejeunea* (189) (No. 169) 5 endemische Arten auf Neuseeland und 2 im antarktischen Amerika, die Gattung *Radula* (220) (No. 159) ist im Wesen tropisch und antarktisch

und auch auf Neuseeland stark vertreten (durch 29 endemische Arten). Die vorwiegend palaeotropische (im tropischen Amerika gänzlich fehlende) Gattung *Schistochila* (83) (No. 85) weist zahlreiche neuseeländische und antarktische Arten auf. Zwei Arten der tropischen Gattung *Brachiolejeunea* (65) (No. 96) rücken auf Neuseeland, eine nach Chile vor. Die tropischen Gattungen *Harpalejeunea* (56) (No. 102) und *Drepanolejeunea* (81) (No. 105) sind zugleich antarktisch, fehlen aber auf Neuseeland; beide sind durch je 1 Art auch in Europa vertreten. Die grosse, vorwiegend pantropische Gattung *Plagiochila* (780) (No. 22) ist durch zahlreiche Arten in dem antarktischen Amerika sowie auf Neuseeland repräsentiert: ebenso ist die tropische Gattung *Schisma* (71) (No. 83) im antarktischen Amerika und auf Neuseeland vorhanden.

Schon diese Beispiele beweisen, dass die Ausstrahlung der tropischen Gattungen in das antarktische Gebiet stärker ist als jene in die nördliche gemässigte Zone. Dieser Umstand hängt wohl einerseits damit zusammen, dass die grössere Feuchtigkeit dieser Gebiete auf das Vorkommen der Lebermoose befördernd einwirkt, andererseits ist er der ruhigeren Entwicklung in den vergangenen Perioden zuzuschreiben, da hier keine so weitgehende und vernichtende Störung eintrat wie sie die Glazialperiode auf der nördlichen Hemisphaere verursachte.

Die heisstrockenen Gebiete entbehren meist vollkommen einer Hepatikenflora. Immerhin gibt es aber manche xerophil ausgerüste und verschiedenartig angepasste Lebermoose, welche selbst an exponierten und sonnigen Standorten gut gedeihen. Von diesem Gesichtspunkte aus ist die Gattung *Stephaniella* beachtenswert, deren zwei Arten dem trockenen Klima und den dürren Plätzen der südamerikanischen hohen Anden vorzüglich angepasst erscheinen; wie Goebel mitteilt, wachsen sie auf lehmigem, starker Austrocknung unterworfenem Boden als kleine, 2—4 mm lange Pflänzchen, die mit ihren Wurzelsprossen bis 30 mm (!) in den Boden eindringen. Auch *Corsinia marchantioides* (2+) stellt einen xerophilen, durch hervorragende Lebenszähigkeit angezeichneten Typus dar, dessen bereits $^3/_4$ Jahre im Herbarium aufbewahrte Exemplare

wieder auflebten und weiter wuchsen. In der böhmischen Flora gelten als charakteristische Xerophyten besonders *Grimaldia barbifrons* und *Riccia Bischoffii*; andere Arten (so z. *B. Preissia, Reboulia, Metzgeria pubescens*) finden sich mitunter auf sonnigen und trockenen Plätzen, sonst aber auf feuchten Stellen. Dia Marchantiaceen zeichnen sich überhaupt durch verhältnismässig grössere Plastizität aus, obzwar die meisten feuchte Erde, Teichschlamm, nasse Brachfelder und ähnliche Standorte bevorzugen. Sie wissen sich oft auf einem trockenen Standorte dennoch ein geeignetes Plätzchen aufzusuchen, wodurch sie befähigt sind, ihre Wohnbezirke leicht auszubreiten. Mehrere unter ihnen zeigen auch doppelte Anpassung, indem sie selbst sonnige und trockene Perioden überstehen können ohne Schaden zu nehmen. Besonders in der Trockenstarre sind sie äusserst widerstandsfähig und ertragen auch hohe Temperaturen. Schon im normalen Zustande verträgt z. B. *Marchantia polymorpha* noch eine Temperatur von 44·9° C ohne Schädigung; ausgetrocknete Rasen von *Grimaldia dichotoma* konnte Mattirolo sogar eine halbe Stunde auf 94° C erwärmen, ohne dast sie ihre Lebensfähigkeit einbüssten. Die Ricciaceen besitzen in der Gattung *Riccia* mehrere entweder gut xerophil ausgerüstete oder durch ihre Kurzlebigkeit selbst Gegenden mit Wüstenklima und mit einer einzigen kurzen Regenperiode angepasste Typen. Dadurch erklärt sich der Reichtum dieser Gattung in den trockenen Gebieten Inneraustraliens, wo sonst die Lebermoose meist überhaupt fehlen. Wie ich im Innern Nordqueenslands wiederholt beobachtete, entwickelt sich hier in den trockenen Savannenwäldern nach ausgiebigen Niederschlägen auf halbnacktem, zeitweise nassem Boden eine interessante, offene oder nur halbgeschlossene, aus einjährigen Zwergpflanzen bestehende Pflanzengesellschaft, die oft auch Riccien beherbergt; allerdings ist diese Vegetation von sehr kurzer Dauer, da der Boden allmählich austrocknet und steinhart und öde wird. Die nachfolgende Trockenperiode überdauern die Pflanzen nur als Sporen oder sie bilden auch Knöllchen für die Dauer der Ruheperiode aus. So verschwindet nach Goebel (1) der grosse Thallus der nordafrikanischen *Riccia canescens* während der sommerlichen Trockenzeit

vollständig; in der Erde findet man dann weissliche Knöllchen, welche dadurch entstanden sind, dass die Thallusenden nach unten hin stark knollig anschwellen. Auch bei einigen australischen Riccien bilden sich derartige Vermehrungsknöllchen, die überdies auch bei der Gattung *Anthoceros*, bei *Exormotheca Welwitschii*, einigen Fossombronien sowie bei *Petalophyllum Ralfsii* beobachtet wurden.

Einige interessante xerophile Arten enthält auch die Gattung *Plagiochasma*, besonders bei ihren Vertretern im Mediterrangebiete, in Nord- und Südafrika sowie in Mexiko. Auch *Targionia* ist an trockene Standorte angepasst. Einige xerophile Lebermoose sind überhaupt sehr zähe und widerstandsfähig; so zeigte MATTIROLO, dass *Grimaldia* nach mehr als einjähriger Vertrocknung wieder aufzuleben vermag.

Über die Schutzeinrichtungen gegen zu intensive Belichtung und starke Insolation hat K. MÜLLER (1) die wichtigsten Daten zusammengestellt; er rechnet hiezu sowohl den »Fensterthallus« der Riccien als auch die Luftkammerbildung bei den Marchantien. Was das Verhalten einzelner Lebermoose gegen hohe Temperaturen anbelangt, sei noch auf die Ausnahmserscheinung hingewiesen, dass *Cephalozia connivens* auf dampfender Erde an den Fumarolen von Pozzuoli in Italien gesammelt wurde.

Die Familie der Marchantiaceen weist einige Typen auf, welche sich auch sekundär ausbreiten und als wahre Antropochoren dem Menschen folgen. So ist dies z. B. die allbekannte *Marchantia polymorpha* (7*), die in vielen Ländern nur eingesschleppt auftritt und selbst dort, wo sie autochton ist, sich oft als Unkraut auf feuchten und nassen Plätzen, auf der Erde und auf Gemäuer sowie in Kulturen ausbreitet. Dadurch unterscheidet sich dieses Lebermoos (nebst einigen anderen der kosmopolitischen und eurytopen Arten) von der Mehrzahl seiner Genossen, wodurch es ihm auch ermöglicht wurde, ein weltumspannendes Areal zu bilden. Auch *Lunularia cruciata* (5*) verdankt ihr kosmopolitisches Areal erst menschlichem Einflusse; zu ihrer Verbreitung in der näheren Umgebung der Mutterpflanze tragen die sich in den Bechern zahlreich bildenden Vermehrungskörperchen wesentlich bei (vergl. z. B. KAVINA [1]).

Im Gebirge steigen die Lebermoose bis in die höchste Region empor; es sind dies einerseits Tieflandformen, die die veränderten Lebensbedingungem des Hochgebirges zu ertragen vermögen, andererseits der alpinen und hochalpinen Region angepasste Formen oder Arten. Entwicklungsgeschichtlich sind diese von zweierlei Typus und zwar entweder arktische Arten, die in südlicheren Breiten nur im Hochgebirge ihnen zusagende Bedingungen vorfinden, oder es sind dies endemische Erzeugnisse der betreffenden Gebirge. Man vergleiche dies bezüglich das über die Gebirgsarten Europas im allgemeinen (S. 22) Gesagte sowie unsere Bemerkungen über die Gebirgsbewohner der Gattungen *Marsupella* (No. 137), *Frullania* (No. 143), *Lophozia* (No. 161), *Clevea* (2△), *Anthelia* (No. 88) u. a. Auch *Fimbriaria pilosa* (sub No. 73) ist in arktischen und subarktischen Ländern der ganzen nördlichen Halbkugel ziemlich häufig und in den mitteleuropäischen Gebirgen (z. B. Sudeten, Schweiz) als Relikt aus der Glazialperiode bemerkenswert. Die südamerikanischen Anden weisen sogar endemische Gattungen auf, so *Chaetocolea* (1) (No. 44) aus den hohen Anden (2700 m), *Mytilopsis* (1) (No. 49) aus Peru und *Myriolocea* (1) (No. 64) aus Ecuador. Auch das Himalayagebirge hat seine endemischen Typen.

K. Müller führt in dem Kapitel über die vertikale Verbreitung der Lebermoose ausser den weit verbreiteten, in den verschiedensten Höhenstufen fast gleich gut gedeihenden Arten (so z. B. *Alicularia geoscyphus, Calypogeia trichomanis, Cephalozia bicuspidata, Diplophyllum albicans, Lepidozia reptans, Lophozia ventricosa, Marchantia polymorpha, Plagiochila asplenioides, Preissia commutata, Radula complanata, Scapania curta, Sphenolobus exsectus*) folgende vier Höhenstufen an: 1. Lebermoose der Ebene und unteren Bergregion (*Aneura incurvata, sinuata, Anthoceros laevis, punctatus, Blasia pusilla, Blyttia Lyellii, Fossombronia Wondraczekii, Haplozia caespiticia, crenulata, Lophozia Mildeana, Notothylas orbicularis* u. a.): 2. Eigentliche Gebirgslebermoose (in Höhenlagen von 500—1200 m) (*Anastrepta orcadensis, Aneura latifrons, palmata, Eucalyx obovatus, Haplozia Breidleri, sphaerocarpa*, viele Lophozien und Marsupellen, *Nowellia curvifolia, Radula Lindbergiana, Scapania apiculata,*

aspera, helvetica u. v. a.); 3. Lebermoose der Region oberhalb der Baumgrenze (doch nicht bloss auf diese Region beschränkt) (*Arnellia fennica, Fimbriaria Lindenbergiana, Haplozia cordifolia, Lophozia quadriloba, Marsupella ustulata, Moerckia Blyttii, Scapania obliqua, subalpina, uliginosa, Sphenolobus politus* u. a.); 4. Hochalpine, nur oberhalb der Baumgrenze vorkommende Lebermoose (*Alicularia Breidleri, compressa, Anastrophyllum Reichadtii, Anthelia julacea* [bis 2900 m], *Juratzkana, Gymnomitrium adustum, alpinum, corallioides* [bis 3500 m], *varians, revolutum* [bis 3100 m], *Lophozia decolorans* [bis 2800 m], *Marsupella apiculata, pygmaea, nevicensis, Odontoschisma Macounii, Peltolepis grandis, Prasanthus suecicus, Schisma Sendtneri* [bis 2650 m], *Scapania crassiretis* u. a.).

Einige Tieflandarten steigen im Süden in höhere Lagen empor. So wächst bei uns die kalkholde *Pressia commutata* sowohl in der Ebene wie auch im Gebirge, während sie in Südeuropa (Spanien, Italien) meistenteils nur als Gebirgstypus auftritt. Es ist jedoch möglich, dass es sich in diesem Fall um einen dealpinen Typus handelt.

Umgekehrt steigen auch einige Gebirgsarten in die Niederung herab. So ist z. B. die weitverbreitete *Metzgeria pubescens* (No 132) im Grunde ein Gebirgstypus, welcher im Kaukasus, in Kaschmir und im Himalaya (hier bis zu 4000 m) sowie in Nordamerika hoch im Gebirge emporsteigt. Im hohen Norden wächst sie jedoch auch in niedereren Lagen; in Böhmen ist diese kalkliebende Art im Gebirge (auf krystallinischem Kalk) weit seltener als auf den warmen Silur- und Devonkalkhügeln der weiteren Prager Umgebung. Es scheint somit, dass es sich im letzteren Falle um einen dealpinen Typus handelt, welcher während der Eiszeit in niedere Lagen herabstieg und sich hier selbst nach Wiederkehr eines wärmeren Klimas auf dem ihm zusagenden Kalksubstrat (gleich mehrerer dealpiner Blütenpflanzen wie *Sesleria coerulea, Biscutella laevigata, Saxifraga aizoon, Laserpitium latifolium* u. a.) in Gesellschaft pontisch-pannonischer Typen zu erhalten vermochte.

Aus all dem ist zu ersehen, dass für das Studium eurytoper Lebermoose nicht allein die Art und Weise der Sporen- und

IX.

Zur Theorie der Teilbarkeit in algebraischen Zahlkörpern.

Von **K. Rychlík.**

Vorgelegt am 12. Dezember 1923.

Das Ziel des vorliegenden Aufsatzes ist zu zeigen, daß in jedem algebraischen Zahlkörper ein größter gemeinsamer Teiler existiert, wenn man die Ganzzahligkeit in Bezug auf eine endliche Menge P von natürlichen Primzahlen betrachtet. In einem Körper von endlichem Grade gibt es dann nur endlich viele von einander verschiedene Primzahlen in Bezug auf P, und es gilt der Satz von der wesentlich eindeutigen Zerlegung in Primfaktoren.

Um die Teilbarkeitsgesetze für die algebraischen Zahlen bequem ausdrücken zu können, führe ich, ähnlich wie Herr Hensel, den Begriff der Divisoren ein. Aber während Herr Hensel, von einem algebraischen Zahlkörper endlichen Grades ausgehend, die Primdivisoren zum Ausgangspunkte nimmt, sodaß die Divisoren nach seiner Definition von dem Ausgangskörper abhängen und eine neue Definition nötig wäre, um die Divisoren verschiedener Körper vergleichen zu können, definiere ich die Divisoren auf solche Weise, daß der Begriff des Divisors, ebenso wie derjenige der Ganzzahligkeit, unabhängig ist vom Körper endlichen Grades, dem die betrachteten Zahlen entnommen wurden. Darin besteht auch der Vorteil der folgenden Theorie der Divisoren gegenüber der herkömmlichen Idealtheorie.

Ich zeige auch das Verhältnis beider Theorien zueinander.

Endlich beweise ich für den quadratischen Zahlkörper ganz elementar den Satz vom größten gemeinsamen Teiler

in Bezug auf eine endliche Menge von natürlichen Primzahlen und betrachte die Zerlegung der natürlichen Primzahlen.

Meine Arbeit entwickelt die Gedanken, welche in der fast vergessenen Abhandlung von Zolotareff: »Sur la théorie des nombres complexes«, Journal de Liouville, (3), 6, 1880 p. 51, 129 und in derjenigen von Sochocki: »Zasada najwiekszego wzpólnego dzielnika«, Prace mat. fiz. 4, 1893 enthalten sind.

Meine Abhandlung »Zur Theorie der Teilbarkeit« (Diese Sitzungsberichte, II. Kl., 1922/23, V.) werde ich mit T. zitieren.

§ 1. Im folgenden werden wir endliche und unendliche Mengen von von einander verschiedenen natürlichen Primzahlen betrachten. Die zugehörige Allmenge, welche alle Primzahlen enthält, bezeichnen wir mit $\bigvee$, die Nullmenge, welche keine Primzahl enthält, mit $\bigwedge$. Sind P, Q zwei Mengen von Primzahlen, so werden wir ihre »logische Summe«, (Menge aller Primzahlen, die mindestens einer der Mengen P, Q angehören), mit $P \cup Q$, ihr »logisches Produkt«, (Menge aller Primzahlen, die beiden Mengen P, Q zugleich angehören), mit $P \cap Q$ bezeichnen. $\bar{P}$ wird das Komplement von P in Bezug auf $\bigvee$ bezeichnen ($\bar{P}$ ist die Menge aller Primzahlen, die in P nicht vorkommen). Ist die Menge P nicht leer und besteht sie aus den Primzahlen p_1, p_2, , so werden wir schreiben: $P = \{p_1, p_2, \quad .\}$.

Ist $P \neq \bigwedge$, so werde ich sagen, daß die Zahlen von der Form $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \quad p_m^{km}$, wo p_1, p_2, p_m Primzahlen aus P und k_1, k_2, . , k_m ganze rationale Zahlen bedeuten, in P oder durch die Primzahlen aus P darstellbar sind. Ist $P = \bigvee$, so ist in $\bigvee$ jede positive ganze rationale Zahl darstellbar. Als durch $\bigwedge$ darstellbar werden wir nur 1 betrachten.

Jede rationale von 0 verschiedene Zahl a kann in der Form $a = a_1 \cdot a_2 \cdot sgn\, a$ dargestellt werden, wo a_1 in P und a_2 in $\bar{P}$ darstellbar sind. Wir werden a_1 den Absolutwert von a i. B. a. P (in Bezug auf P) nennen und mit $|a|_P$ bezeichnen. Dann ist a_2 der Absolutwert von a i. B. a. $\bar{P}$, d. h. $a_2 = |a|_{\bar{P}}$. Es ist also $a = sgn\, a \; |a|_P \; |a|_{\bar{P}}$. Dies gilt auch für $a = 0$, wenn wir $|0|_P = 0$ setzen. Im Falle, daß $P = \bigvee$

ist, erhält man den Absolutwert im gewöhnlichen Sinne $|a|_\vee = |a|$. Für $\wedge$ ist $|a|_\wedge = 1$, wenn $a \neq 0$ ist, $|0|_\wedge = 0$.

Über den Absolutwert der rationalen Zahlen i. B. a. P kann man leicht die folgenden Sätze beweisen:

1. *Es ist* $|a|_P = 0$ *dann und nur dann, wenn* $a = 0$ *ist; für* $a \neq 0$ *ist* $|a|_P > 0$.

2. $|ab|_P = |a|_P \cdot |b|_P$; $\left|\frac{a}{b}\right|_P = \frac{|a|_P}{|b|_P}$, *wenn* $b \neq 0$ *ist.*

Für die aus einer einzigen Primzahl p bestehende Menge $\{p\}$ bezeichnen wir den Absolutwert i. B. a. p mit $|a|_p$. Ist $a \neq 0$, so ist $|a|_p = p^k$; die rationale ganze Zahl k werden wir Ordnung von a i. B. a. p nennen; als Ordnung von 0 i. B. a. p werden wir ∞ betrachten.

3. *Besteht* P *aus endlich vielen Primzahlen* $p, q, \ldots r$, *dann ist* $|a|_P = |a|_p \; |a|_q \ldots |a|_r$.

§ 2. Eine rationale Zahl a werden wir ganz i. B. a. P (in Bezug auf P) nennen, wenn $|a|_P$ ganz i. g. S. (im gewöhnlichen Sinne) ist.

Eine algebraische Zahl α ist ganz i. B. a. P, wenn sie einer Gleichung von der Gestalt

$$(1) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

genügt mit rationalen i. B. a. P ganzen Koeffizienten.

Aus den eingeführten zwei Definitionen folgt unmittelbar, daß eine rationale, (algebraische) Zahl, wenn sie ganz ist i. g. S. (im gewöhnlichen Sinne), dieselbe auch i. B. a. P ganz ist.

Ist P *die Menge aller natürlichen Primzahlen,* $P = \vee$, *so sind die i. B. a.* $\vee$ *ganzen rationalen (algebraischen) Zahlen ganze Zahlen i. g. S.*

Im Falle $P = \wedge$ *sind alle rationalen (algebraischen) Zahlen i. B. a.* $\wedge$ *ganz.*

Ist P eine endliche nicht leere Menge, so können die eingeführten Begriffe leicht auf ähnliche Begriffe des Herrn Hensel*) zurückgeführt werden. Es sei g eine beliebige ganze Zahl, die durch alle Primzahlen aus P teilbar ist. Dann ist eine Zahl dann und nur dann ganz i. B. a. P, wenn sie »im

*) Hensel, Zahlentheorie, 1913.

Bereiche von g«, »mod g«, »i. B. a. g« ganz ist. Und ähnlich bei den weiteren Begriffen.

Eine i. B. a. P ganze rationale Zahl kann in der Form eines Bruches dargestellt werden, dessen Zähler eine i. g. S. ganze Zahl und dessen Nenner eine in $\bar{P}$ darstellbare ganze Zahl ist.

Für die ganzen algebraischen Zahlen gilt ein ganz ähnlicher Satz:

Eine algebraische Zahl α ist dann und nur dann ganz i. B. a. P, wenn sie in der Form $\alpha = \beta/b$ darstellbar ist, wo β eine i. g. S. ganze algebraische Zahl bedeutet und b eine rationale ganze in $\bar{P}$ darstellbare Zahl ist.

Es ist ersichtlich, daß die Gleichung, der eine algebraische i. B. a. P ganze Zahl genügt, in der Gestalt

$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \quad + b_n = 0 \tag{2}$$

geschrieben werden kann, wo die Koeffizienten ganze rationalen Zahlen sind und b_0 in $\bar{P}$ darstellbar, also eine Einheit i. B. a. P ist.

Ist α ganz i. B. a. P, genügt es also einer Gleichung von der Gestalt (2), wo die Koeffizienten ganz rational sind und b_0 in $\bar{P}$ darstellbar ist, so ist $\beta = b_0\,\alpha$ Wurzel der Gleichung

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_0 b_2 y^{n-2} + \quad + b_0{}^{n-1} b_n = 0.$$

Es ist also β ganz i. g. S., d. h. $\alpha = \beta/b_0$, wo b_0 rational ganz und in $\bar{P}$ darstellbar ist.

Umgekehrt, sei $\alpha = \beta/b$, wo β eine i. g. S. ganze algebraische und b eine ganze rationale in $\bar{P}$ darstellbare Zahl ist. β ist Wurzel einer Gleichung von der Gestalt (1) mit rationalen ganzen Koeffizienten; $\alpha = \beta/b$ genügt also der Gleichung

$$y^n + \frac{a_1}{b} y^{n-1} + \frac{a_2}{b^2} y^{n-2} + \quad + \frac{a_n}{b^n} = 0$$

Ihre Koeffizienten sind aber rationale i. B. a. P ganze Zahlen.

Es ist einleuchtend, daß die rationalen i. B. a. P ganzen Zahlen auch algebraische i. B. a. P ganze Zahlen sind. Es gilt aber auch der Satz:

Eine i. B. a. P ganze algebraische Zahl, die zugleich rational ist, ist eine i. B. a. P ganze rationale Zahl.

Ist α eine i. B. a. P ganze algebraische Zahl, so kann sie in der Form $\bar{\alpha}/a$ dargestellt werden, wo $\bar{\alpha}$ algebraisch ganz (i. g. S.) und a rational ganz in $\bar{P}$ darstellbar ist. Ist $\bar{\alpha}$ rational, so ist dann auch $\bar{\alpha} = a\alpha$ rational. α ist also rational ganz und $\alpha = \bar{\alpha}\, a$ rational ganz i. B. a. P, w. z. b. w.

Sind α, β i. B. a. P ganze algebraische Zahlen, dann sind auch $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ algebraisch ganz i. B. a. P. Die i. B. a. P ganzen algebraischen Zahlen bilden also einen Integritätsbereich.

α, β als i. B. a. P ganze algebraische Zahlen können in der Form $\alpha = \bar{\alpha}/a$, $\beta = \bar{\beta}/b$ dargestellt werden, wo $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ algebraisch ganz i. g. S. sind und a, b rational ganz in $\bar{P}$ darstellbar. Es ist also $\alpha \pm \beta = \frac{\bar{\alpha} b \pm \bar{\beta} a}{ab}$, $\alpha\beta = \frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{ab}$. Dabei sind die Zähler algebraisch ganz i. g. S. und die Nenner sind rational ganz in $\bar{P}$ darstellbar. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Genügt γ der Gleichung $x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \quad + \alpha_n = 0$, deren Koeffizienten i. B. a. P ganze algebraische Zahlen sind, so ist γ eine i. B. a. P ganze algebraische Zahl.

Da α_1, α_2, , α_n algebraische i. B. a. P ganze Zahlen sind, so können sie in der Form $\alpha_1 = \beta_1/a$, $\alpha_2 = \beta_2/a$, , $\alpha_n = \beta_n/a$ dargestellt werden, wo β_1, β_2, , β_n algebraisch ganz (i. g. S.) und a ganz und in $\bar{P}$ darstellbar ist. $\gamma a = \delta$ genügt der Gleichung $y^n + \beta_1 a y^{n-1} + \beta_2 a^2 y^{n-2} + \quad . \quad + \beta_n a^n = 0$, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen (i. g. S.) sind. Es ist also δ ganz (i. g. S.) und $\gamma = \delta/a$ ganz i. B. a. P.

Eine algebraische Zahl α ist dann und nur dann ganz i. B. a. P, wenn die Gleichung niedrigsten Grades von der Form (1) mit rationalen Koeffizienten i. B. a. P ganze Koeffizienten hat.

Daß diese Bedingung genügt, ist einleuchtend. Sie ist aber auch notwendig. Ist α ganz i. B. a. P, so ist $\alpha = \beta/b$, wo β eine i. g. S. ganze algebraische Zahl bedeutet und b in $\bar{P}$ darstellbar ist. Es sei $y^n + b_1 y^{n-1} + \quad + b_n = 0$ die Gleichung des niedrigsten Grades mit rationalen Koeffizienten, der β genügt; ihre Koeffizienten sind ganz i. B. a. P. α ist also Wurzel der Gleichung $x^n + \frac{b_1}{b} x^{n-1} + \frac{b_2}{b^2} x^{n-2} + \quad + \frac{b_n}{b^n} = 0$.

Das ist aber auch die Gleichung niedrigsten Grades mit rationalen Koeffizienten, der α genügt. Sie ist von der Form (1) und ihre Koeffizienten sind ganz i. B. a. P.

Ist P nicht leer, so ist eine algebraische Zahl α dann und nur dann ganz i. B. a. P, wenn sie ganz i. B. a. jede Primzahl aus P ist.

Ist α ganz i. B. a. P, so genügt sie einer Gleichung von der Form (1) mit rationalen i. B. a. P ganzen Koeffizienten. Die letzteren sind dann auch i. B. a. jede Primzahl aus P ganz. Also ist α ganz i. B. a. jede Primzahl aus P. Umgekekrt, wissen wir, dass α i. B. a. jede Primzahl aus P ganz ist, so muss die Gleichung niedrigsten Grades mit rationalen Koeffizienten i. B. a. jede Primzahl aus P ganze Koeffizienten haben. Die Koeffizienten dieser Gleichung werden also auch i. B. a. P ganz sein, sodaß α i. B. a. P ganz sein wird.

§ 3. Die i. B. a. P ganzen algebraischen Zahlen bilden einen Integritätsbereich, aus dem der Körper aller algebraischen Zahlen durch Quotientenbildung entsteht. Jede algebraische Zahl kann nämlich als ein Quotient von zwei i. g. S. ganzen algebraischen Zahlen, also umsomehr als ein Quotient von zwei i. B. a. P ganzen algebraischen Zahlen dargestellt werden.

Nur für $P = \Lambda$ ist der Integritätsbereich der B. a. Λ ganzen Zahlen identisch mit dem Körper aller algebraischen Zahlen. Auf der Grundlage des Integritätsbereiches der i. B. a. P ganzen algebraischen Zahlen können wir weiter (T. § 15) alle mit der Teilbarkeit zusammenhängenden Begriffe definieren; wir werden sie durch den Zusatz »i. B. a. P« (in Bezug auf P) von denen »i. g. S.« (im gewöhnlichen Sinne) unterscheiden.

Es gilt endlich der Satz:

Eine algebraische Zahl $\alpha \neq 0$ ist nur in Bezug auf eine endliche Anzahl von Primzahlen eine Nichteinheit.

α genügt einer Gleichung von der Form (2) mit rationalen i. g. S. ganzen Koeffizienten. Daraus folgt unmittelbar, daß α i. B. a. alle Primzahlen, die weder in b_0 noch in b_n aufgehen, eine Einheit ist. Nur i. B. a. die Primzahlen, die in b_0 oder b_n aufgehen, kann α eine Nichteinheit sein.

§ 4. Jede algebraische Zahl α kann in der Form eines Bruches $\alpha = \beta/b$ dargestellt werden, wo β algebraisch ganz i. g. S. und b rational ganz positiv ist. Es ist $b = |b|_P \cdot |b|_{\overline{P}}|$. Setzen wir $\bar{\alpha} = \beta/|b|_{\overline{P}}$. Da $|b|_{\overline{P}}$ eine Einheit i. B. a. P ist, so ist $\bar{\alpha}$ ganz i. B. a. P. Es ist also $\alpha = \bar{\alpha}/|b|_P$ und es gilt der Satz:

1. Jede algebraische Zahl kann als ein Bruch dargestellt werden, dessen Zähler i. B. a. P ganz und dessen Nenner ganz und in P darstellbar ist.

Setzen wir dagegen $\alpha^* = \beta/|b|_P$, dann ist α^* ganz i. B. a. $\overline{P}$ und $\alpha = \alpha^*/|b|_{\overline{P}}$, $\alpha \sim \alpha^*$ i. B. a. P. Daraus folgt der Satz:

2. Jede algebraische Zahl α kann als ein Bruch dargestellt werden, dessen Zähler α^* i. B. a. $\overline{P}$ ganz und dessen Nenner in $\overline{P}$ darstellbar ist, sodaß $\alpha \sim \alpha^*$ i. B. a. P gilt. Ist α ganz i. B. a. P, so ist α^* ganz i. g. S. (§ 2).

Es ist nämlich $\alpha^* = \alpha |b|_{\overline{P}}$, wo $|b|_{\overline{P}}$ ganz i. g. S. ist. α^* ist also ganz i B. a. $\overline{P}$ und auch i. B. a. P, *also ganz i. g. S.*

3. Für jede algebraische Zahl $\alpha \neq 0$ kann man eine ganze in P darstellbare Zahl M bestimmen, sodaß M/α ganz i. B. a. P ist.

Das folgt unmittelbar aus dem Satze 1., wenn man ihn auf $1/\alpha$ anwendet.

§ 5. Wir werden jetzt einen Körper K von endlichem Grade n betrachten. Ist eine Zahl α aus K ganz i. B. a. P, so sind auch die konjugierten algebraischen Zahlen ganz i. B. a. P. Also ist die Norm von α, $N\alpha$, eine rationale i. B. a. P ganze Zahl. Ebenso, wenn ε aus K eine Einheit i. B. a. P ist, so sind es auch die konjugierten Zahlen. Es ist also $N\varepsilon$ eine rationale Einheit i. B. a. P, d. h. es ist $|N\varepsilon|_P = 1$. Auch die Umkehrung dieser Behauptung gilt: *Eine i. B. a. P ganze Zahl aus K ist eine Einheit i. B. a. P, wenn ihre Norm eine rationale Einheit i. B. a. P ist.* Ist $\alpha \sim \beta$ i. B. a. P, so gilt eine ähnliche Beziehung für die assoziierten Zahlen. Es ist also auch $N\alpha \sim N\beta$ i. B. a. P, d. h. $|N\alpha|_P = |N\beta|_P$.

§ 6. Es sei zuerst eine Ergänzung der Betrachtungen in § 15 und § 16 aus T erwähnt.

K sei ein algebraischer Zahlkörper, der aus dem Inte-

gritätsbereiche I durch Quotientenbildung entsteht. Ein Ideal aus K wird die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ der Elemente aus K genannt, welche folgende Eigenschaften besitzen: 1) gehören a und b in $\mathfrak{A}$, so gehört hierein auch $a+b$; 2) gehört a in $\mathfrak{A}$, so gehört hierein auch ax, wo x ein ganzes Element aus K bedeutet; 3) es existiert ein ganzes Element g aus K, sodaß alle Elemente ag, wo a ein Element aus $\mathfrak{A}$ ist, ganz sind. Es ist ersichtlich, daß die Elemente von der Form $ax+by+\quad+cz$, wo x, y, z ganze Elemente aus K bedeuten, ein Ideal aus K bilden, wenn $a, b, \ldots c$ Elemente aus K sind. Wir werden es endlichgliedrig nennen und mit $\{a, b, \ldots c\}$ bezeichnen. $\{a\}$ werden wir ein Hauptideal aus K nennen. Dabei ist a wesentlich eindeutig bestimmt, d. h. es ist $\{a\}=\{b\}$ dann und nur dann, wenn $a \sim b$ gilt.

Setzen wir jetzt voraus, daß für K ein Maß existiert, so gilt der Satz:

Jedes Ideal $\mathfrak{A}$ aus K ist ein Hauptideal aus K.

Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog dem des Satzes in T § 16. Der letztere Satz ist ein Spezialfall des jetzt angeführten für endlichgliedrige Ideale. Sind alle Elemente aus $\mathfrak{A}$ gleich 0, so ist $\mathfrak{A}=\{0\}$. Wir setzen also voraus, es sei $\mathfrak{A} \neq \{0\}$. Sei d ein Element aus $\mathfrak{A}$, für welches Md am kleinsten ist, so ist $\mathfrak{A}=\{d\}$.

Ist K ein algebraischer Zahlkörper, I der Integritätsbereich der i. B. a. P ganzen Zahlen aus K, so werden wir ein Ideal aus K als ein Ideal i. B. a. P bezeichnen. Ein Hauptideal i. B. a. P werden wir mit $\{\alpha\}_P$, ein endlichgliedriges Ideal mit $\{\alpha, \beta, \quad \gamma\}_P$ bezeichnen.

Beweisen wir jetzt, daß, *wenn K den Körper der rationalen Zahlen, I den Integritätsbereich der i. B. a. P (P nicht leer) ganzen Zahlen bedeutet, $|a|_P$ als Maß von a gewählt werden kann.* M1, M2 sind dann sicher erfüllt. Es genügt also M3 zu beweisen.

a stellen wir in der Form eines reduzierten Bruches dar, $a=a'/a''$. Dann ist $a''|_P$ sicher nicht ganz i. g. S. Es kann also eine ganze rationale Zahl g bestimmt werden, so daß $0<\left|\frac{a'}{|a''|_P}-g\right|<1$ gilt, also, da $0<|a'-g|a''|_P|_P \leqq |a'-g$

$|a''|_P|$ ist, auch $0<|ka+l|_P<1$ gilt, wenn $k=|a''|_P$, $l=-g$ gesetzt wird.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein $\neq\{0\}$ Ideal i. B. a. P aus dem Körper der rationalen Zahlen, also $\mathfrak{A}=\{d\}$. Ist a ein Element aus $\mathfrak{A}$, so ist $|d|_P\leqq|a|_P$. b und $|b|_P$ liegen zugleich in $\mathfrak{A}$. Wählen wir also $d=|d|_P$. Ist dann b in P darstellbar und liegt b in $\mathfrak{A}$, so ist $d\leqq b$ d ist also die kleinste unter allen in P darstellbaren Zahlen aus $\mathfrak{A}$. Es gilt also der Satz:

Ist $\mathfrak{A}$ ein $\neq\{0\}$ Ideal i. B. a. P aus dem Körper der rationalen Zahlen, so ist $\mathfrak{A}=\{d\}$, wo d die kleinste in P darstellbare Zahl aus $\mathfrak{A}$ ist.

Als Zusatz zum vorigen Satze führen wir noch an:

Alle durch eine algebraische Zahl $\alpha\neq 0$ i. B. a. P teilbaren rationalen Zahlen bilden ein Hauptideal i. B. a. P, $\{\alpha\}_P$. Für α kann die kleinste in P darstellbare, durch α i. B. a. P teilbare Zahl gewählt werden.

Es könnte auch leicht gezeigt werden, daß für die Körper im Beispiel II § 16 T. als Maß $|N\alpha|_P$ gewählt werden kann, wenn I den Integritätsbereich der i. B. a. P (P nicht leer) ganzen Zahlen aus K bedeutet.

In den nächsten Paragraphen werden wir zeigen, daß $|N\alpha|_P$ als Maß eines Elementes α aus K gewählt werden kann, wenn K einen algebraischen Zahlkörper endlichen Grades und I den Integritätsbereich der i. B. a. P ganzen Zahlen aus K bedeutet. Es genügt, zu beweisen, daß $|N\alpha|_P$ die Eigenschaft M3 besitzt, da M1, M2 offenbar erfüllt sind.

§ 7. *In diesem § soll α eine i. B. a. p ganze algebraische Zahl $\neq 0$ und ε eine Einheit i. B. a. p bedeuten.*

$\beta=-1+p\alpha$ ist eine Einheit i. B. a. p.

Genügt α der Gleichung

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\quad\quad+a_n=0$$

mit rationalen i. B. a. p ganzen Koeffizienten, so ist β Wurzel der Gleichung $f\left(\frac{1+y}{p}\right)=0$, die man leicht auf die Form $y^n+b_1y^{n-1}+\ .\ .+b_n=0$ bringen kann, wobei die Koeffizienten b_1, b_2, b_n rational i. B. a. p ganz sind und $b_n=1+a_1p+a_2p^2+\quad\quad+a_np^n$ ist. b_n ist aber eine rationale

Einheit i. B. a. p, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Ebenso *ist* $\varepsilon + p^k \alpha$ *eine Einheit i. B. a.* p, *wenn* k *eine rationale ganze positive Zahl ist.*

Es ist nämlich $\varepsilon + p^k \alpha = -\varepsilon (-1 + p\bar{\alpha})$, wo $\bar{\alpha} = -\alpha p^{k-1} \varepsilon$ ganz i. B. a. p ist.

Aber $\varepsilon + p^k \alpha$ *ist* auch *eine Einheit i. B. a.* p *in dem Falle, daß* k *eine rationale positive Zahl ist.*

Da $\varepsilon + p^k \alpha = -\varepsilon (-1 + p^k \bar{\alpha})$ ist, wo $\bar{\alpha}$ und $\alpha = -\alpha/\varepsilon$ zugleich ganz sind, so genügt es den Beweis für die Zahl $-1 + p^k \alpha$ zu führen. Es ist $k = s/r$, wo r, s rationale ganze positive Zahlen sind. Das Produkt

$$(p^{\frac{s}{r}} \alpha - \varepsilon_1)\ (p^{\frac{s}{r}} \alpha - \varepsilon_2) \quad \ldots \quad (p^{\frac{s}{r}} \alpha - \varepsilon_r) = p^s \alpha^r - 1$$

ist nach dem vorigen Satze eine Einheit i. B. a. p, wenn $\varepsilon_1 = 1$, ε_2, $\ldots$ ε_r die Wurzeln der Gleichung $x^r - 1 = 0$ (also Einheiten) sind. Es ist also $p^{\frac{s}{r}} \alpha - 1$, als eine i. B. a. p ganze Zahl und Teiler i. B. a. p einer Einheit i. B. a. p, auch eine Einheit i. B. a. p..

Es sei $\alpha \neq 0$ *Wurzel einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten* (1) $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. k_l *sei die Ordnung von* a_l *i. B. a.* p. Dann *setzen wir* $d_0 = Max \left(-\frac{k_1}{1}, -\frac{k_2}{2}, -\frac{k_3}{3}, \ldots, -\frac{k_n}{n}\right)$. Da $\alpha \neq 0$ ist, so ist wenigstens einer der Koeffizienten a_1, a_2, $\ldots$ a_n verschieden von 0, also d_0 endlich (und wir können aus der Klammer alle $-\infty$ auslassen). *Bedeutet dann* d *eine rationale Zahl* $\geqq d_0$, *so ist* αp^d *ganz i. B. a.* p.

Setzen wir $y = xp^d$, sodaß $x = yp^{-d}$ ist. Wir sehen, daß αp^d der Gleichung (2) $y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n = 0$ genügt, wo $b_l = a_l p^{ld}$ ist. Es ist $a_l \sim p^{k_l}$ i. B. a. p, also $b_l \sim p^{k_l + ld}$ i. B. a. p. Für $a_l = 0$ ist auch $b_l = 0$. Ist für alle l, für welche $a_l \neq 0$ ist, $k_l + ld \geqq 0$, d. h. (3) $d \geqq -k_l/l$, so sind alle Koeffizienten der Gleichung (2) ganz i. B. a. p (rational, wenn d ganz, algebraisch, wenn d gebrochen ist), sodaß ihre Wurzel αp^d algebraisch ganz i. B. a. p ist. Die Bedingungen (3) sind erfüllt, wenn $d \geqq d_0$ ist.

§ 8. 1. *Wir betrachten jetzt einen algebraischen Körper* K

endlichen Grades n und eine Zahl α dieses Körpers. α genügt der Gleichung mit rationalen Koeffizienten $f(x) = N(x-\alpha) = 0$. *Sei* $f(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^{n-l}$, *wo* $a_0 = 1$ *ist. Die Ordnung von* a_l *i. B. a. p sei* k_l, *sodaß* $k_0 = 0$ *ist. Es seien r, s rationale ganze Zahlen,* $r > 0$. *Bilden wir dann die Reihe* (1) $0, k_1 r + s, k_2 r + 2s, \ldots, k_n r + ns$, *wobei alle* ∞ *weggelassen werden dürfen, und setzen wir voraus, in dieser Reihe sei eine einzige kleinste Zahl m, so ist* $|N(1-e\alpha^r p^s)|_p = p^m$, *wenn e eine beliebige rationale Einheit i. B. a. p bedeutet.*

Die mit α (in Bezug auf K) konjugierten algebraischen Zahlen seien $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Bezeichnen wir mit $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_r$ die Wurzeln der Gleichung $x^r - 1 = 0$, so ist

$$(2)\quad N\left(e\alpha^r p^s - 1\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(e\alpha_i^r p^s - 1\right) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{r}\left(e^{\frac{1}{r}} p^{\frac{s}{r}} \alpha_i - \varepsilon_j\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{r}\prod_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{r}} \boldsymbol{p}^{\frac{s}{r}} \alpha_i - \varepsilon_j\right).$$

Es ist aber

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_j - e^{\frac{1}{r}} p^{\frac{s}{r}} \alpha_i\right) = p^{\frac{sn}{r}} e^{\frac{n}{r}} \prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\frac{1}{r}} p^{-\frac{s}{r}} \varepsilon_j - \alpha_i\right) =$$

$$= p^{\frac{sn}{r}} e^{\frac{n}{r}} f\left(e^{-\frac{1}{r}} p^{-\frac{s}{r}} \varepsilon_j\right) = \sum_{l=0}^{n} \beta_l,$$

wenn $\beta_l = \varepsilon_j^{n-l} e^{-\frac{n-l}{r}} a_l p^{\frac{sl}{r}}$ gesetzt wird. Wenn $a_l = 0$ ist, so ist auch $\beta_l = 0$. Und für alle $a_l \neq 0$ ist

$$\beta_l \sim a_l p^{\frac{ls}{r}} \sim p^{k_l + \frac{ls}{r}} \sim p^{\frac{k_l r + ls}{r}} \text{ i. B. a. } p.$$

Ist in der Reihe (1) eine einzige kleinste Zahl m, so ist unter den von 0 verschiedenen Zahlen $\beta^l p^{-\frac{m}{r}}$ eine einzige Einheit i. B. a. p, alle anderen sind durch eine Potenz von p mit einem positiven Exponenten teilbar. Nach § 7 ist also

$$\sum_{l=0}^{n} \beta_l p^{-\frac{m}{r}} = p^{-\frac{m}{r}} \sum_{l=0}^{n} \beta_l$$

eine Einheit i. B. a. p, d. h. es ist $\prod_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_j - e^{\frac{1}{r}} p^{\frac{-}{r}} \alpha_i\right) \sim p^{\frac{m}{r}}$ i. B. a. p. Aus (2) folgt aber, daß wirklich $N(1 - e\alpha^r p^s) \sim p^m$ i. B. a. p d. h. $|N(1 - e\alpha^r p^s)|_p = p^m$ ist, w. z. b. w.

2. *Setzen wir weiter voraus, daß α nicht ganz ist i. B. a. p, so können wir zeigen, daß man $r > 1$, $s > 0$ so wählen kann, daß a) in der Reihe* (1) *wirklich ein einziges kleinstes Glied vorkommt und negativ ist, und daß b) $\alpha^{r-1} p^s$ ganz ist i. B. a. p. Dann wird* (nach dem vorigen Satze) *bei beliebiger rationaler Einheit e die Ungleichung* (3) $0 < |N(1 - e\alpha^r p^s)|_p < 1$ *gelten.*

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Bedingung b). $\alpha^{r-1} p^s$ ist bei $r > 1$ dann und nur dann ganz i. B. a. p, wenn dasselbe von $\alpha p^{\frac{s}{r-1}}$ gilt. Wir bestimmen also

$$d_0 = Max\left(-k_1, -\frac{k_2}{2}, \ldots, -\frac{k_n}{n}\right).$$

Da α nicht ganz ist i. B. a. p, so ist wenigtens eine der Zahlen k_1, $k_2, \ldots, k_n$ negativ. Es ist also wenigstens eine Zahl der Reihe (4) $-\frac{k_1}{1}, -\frac{k_2}{2}, \ldots, -\frac{k_n}{n}$ positiv, sodaß auch d_0 positiv ist.

Setzen wir $d_0 = d'/d''$, wo d', d'' ganze rationale positive Zahlen bedeuten. Es ist dann $\alpha p^{\frac{s}{r-1}}$ gewiss ganz i. B. a. p, wenn $\frac{s}{r-1} = d_0 = \frac{d'}{d''}$, d. h. wenn $s = d' . t$, $r - 1 = d'' . t$ ist, wo t eine beliebige rationale ganze positive Zahl bedeutet. t werden wir so zu bestimmen suchen, daß die Bedingung a) erfüllt ist. Nehmen wir an, daß d_0 für die Brüche

$$-\frac{k_h}{h} = -\frac{k_i}{i} = \cdots = -\frac{k_j}{j}$$

aus der Reihe (4) und nur für diese erreicht wird, wo wir $h < i < \ldots < j$ voraussetzen werden. Die Zahlen $k_h, k_i, \ldots, k_j$ sind dann gewiß negativ und es ist $k_h > k_i > \ldots > k_j$, sodaß k_j die kleinste unter diesen Zahlen ist. Aus der Definition von d_0 folgt, daß $d_0 \geqq -k_l/l$ für $l = 1, 2, \ldots, n$ ist und die Gleichheit nur für $l = h, i, \ldots, j$ gilt. Es ist also (5) $ld_0 + k_l \geqq 0$, oder, was dasselbe ist, $ld' + k_l d'' \geqq 0$ für $l = 0, 1, 2, \ldots, n$ und die

Gleichheit gilt außer für $l=h,i,\ldots,j$ nur für $l=0$. Für andere Werte von l, falls solche existieren, ist

(6) $$ld'+k_l d''\geqq 1,$$

da es sich um ganze rationale positive Zahlen handelt. Es ist (7) $k_l r+ls=(d'l+d''k_l)t+k$ Aus (5) folgt, daß um so mehr $nd_0+k_l\geqq 0$ ist. Wir wählen $t\geqq nd_0$, sodaß (8) $t+k_l\geqq 0$ ist. Dann ist die Bedingung *a)* sicher erfüllt, wie aus der folgenden Überlegung folgt. Für $l=h,i,\ldots,j$ ist nach (7): $k_l r+ls=k_l$. Diese Zahlen sind negativ, untereinander verschieden und die kleinste ist k_j. Das ist aber auch die überhaupt kleinste Zahl der Reihe (1). Die anderen Glieder dieser Reihe sind nämlich $\geqq 0$. Für $l=0$ ist $k_l r+ls=0$ und für die übrigen l, falls solche existieren, gilt (6), sodaß nach (7) und (8) $k_l r+ls\geqq t+k_l\geqq 0$ ist. Damit ist der behauptete Satz in vollem Umfange bewiesen.

Setzen wir in (2) $\varkappa=-e\alpha^{r-1}p^s$, so sehen wir, daß der Satz gilt:

3. *Ist α eine i. B. a. p nicht ganze Zahl aus K, so kann man eine i. B. a. p ganze Zahl $\varkappa$ aus K finden, sodaß* (9) $0<|N(\varkappa\alpha+1)|_p<1$ ist. Setzen wir aber $\varkappa_0=-\alpha^{r-1}p$, so sehen wir, daß allgemeiner (10) $0<|N(e\varkappa_0\alpha+1)|_p<1$ ist, wenn e eine beliebige rationale Einheit i. B. a. p bedeutet.

Die Freiheit in der Wahl von e können wir zuerst dazu benutzen, daß wir im S. 3 $\varkappa$ *als eine i. g. S. ganze Zahl aus K wählen.* Es genügt, e als eine ganze rationale durch p nicht teilbare Zahl so zu bestimmen, daß $\varkappa=e\varkappa_0$ ganz i. B. a. die von p verschiedenen Primzahlen ist, also auch ganz i. g. S.

Es gilt aber allgemeiner der Satz:

4. *Es sei P eine nicht leere endliche Menge von natürlichen Primzahlen. Die Zahl α aus K sei nicht ganz i. B. a. P. Dann kann man eine i. B. a. P ganze Zahl $\varkappa$ aus K bestimmen (die sogar als i. g. S. ganze Zahl gewählt werden kann), sodaß* (11) $0<|N(\varkappa\alpha+1)|_P<1$ ist.

Enthält P eine einzige Primzahl, so haben wir den Satz schon bewiesen. Enthält P mehrere Primzahlen, so gibt es unter ihnen eine, p, in Bezug auf welche α nicht ganz ist. Sei Q die Menge aller von p verschiedenen Primzahlen aus P, e_0 ihr Produkt. Wir bestimmen die durch p nicht teilbaren ganzen rationalen Zahlen e_1, e_2, sodaß $e_1\alpha$ und $e_2\varkappa$ ganz

i. B. a. die von p verschiedenen Primzahlen sind. Dann ist $e = e_0\, e_1\, e_2$ eine Einheit i. B. a. p. Setzen wir $\varkappa = e\varkappa_0$. Dann ist $\varkappa$ ganz i. g. S. und es gilt (10). Ist aber q eine Primzahl aus Q, so ist $\alpha\varkappa = e_0 . e_1\alpha . e_2\varkappa_0$ durch q i. B. a. q teilbar; es ist also $\varkappa\alpha + 1$ eine Einheit i. B. a. q (§ 7), d. h. $| N(\varkappa\alpha + 1) |_q = 1$. Es gilt also nach § 1 S. 3 wirklich (11).

Der Satz 4. beweist, daß $| N\alpha |_P$ wirklich ein Maß darstellt, wenn K ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades und I der Integritätsbereich der i. B. a. P ganzen Zahlen aus K ist (P endlich und nicht leer).

§ 9. Ist in einem algebraischen Zahlkörper K, der aus dem Integritätsbereiche I der i. B. a. P ganzen Zahlen entsteht, das Axiom A. erfüllt und ist δ der g. g. T. i. B. a. P »in K« (P endlich oder unendlich, aber nicht leer) der Elemente $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ aus K, so ist δ auch der g. g. T. i. B. a. P. »im Körper aller algebraischen Zahlen« derselben Elemente $\beta, \ldots \gamma$. Es ist nämlich $\delta = \alpha\mu + \beta\nu + \ldots + \gamma\varrho$. wo $\mu, \nu, \ldots \varrho$ i. B. a. P ganze Elemente aus K bedeuten. Sind also $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ durch eine beliebige algebraische Zahl $\varkappa$ i. B. a. P teilbar, so ist auch δ durch $\varkappa$ i. B. a. P teilbar. Wir werden δ kurz den »g. g. T. i. B. a. P« nennen. Aehnliche Bedeutung wird »teilerfremd i. B. a. P« haben. Wir haben, also den Satz:

Ist K ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades und ist P eine endliche nicht leere Menge von natürlichen Primzahlen, so haben die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ aus K (in endlicher Anzahl) einen g. g. T. i. B. a. P, δ. δ kann als eine Zahl aus K gewählt werden.

Dieser Satz gilt aber auch, *wenn K nicht von endlichem Grade ist.* Est genügt $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ in einem Unterkörper von K von endlichen Grade zu betrachten.

§ 10. Ist K von endlichem Grade und P endlich, aber nicht leer, so ist auch das Axiom E. erfüllt, sodaß also jede i. B. a. P ganze $\neq 0$ Nichteinheit i. B. a. P wesentlich eindeutig in Primzahlen i. B. a. P aus K zerlegt werden kann.

Beweisen wir noch, daß es *in K nur endlich viele wesentlich von einander i. B. a. P verschiedene Primzahlen i. B. a. P gibt.*

Sei π eine Primzahl i. B. a. P aus K. Betrachten wir das Ideal i. B. a. P der durch π i. B. a. P teilbaren rationalen Zahlen. Es ist ein Hauptideal $\{p\}_P$. Für p können wir die kleinste in P darstellbare durch π i. B. a. P teilbare Zahl setzen. Es ist leicht zu zeigen, daß p eine Primzahl aus P ist. p ist nämlich gewiß ganz und >1, und wäre $p=p'\,p''$, wo p', p'' ganze rationale >1, also auch in P darstellbare ganze $\neq 1$ Zahlen sind, dann müßte wenigstens eine der Zahlen p', p'' durch π i. B. a. P teilbar sein. Diese Zahl wäre dann $<p$, entgegen den über p gemachten Voraussetzungen. Da die Primzahlen aus P im Körper der rationalen Zahlen zu einander teilerfremd sind, so sind sie auch in K i. B. a. P teilerfremd. Es ist also π i. B. a. P Teiler keiner anderen Primzahl aus P Sei $p=\pi\varkappa$, wo $\varkappa$ ganz i. B. a. P ist. Dann ist $|Np|_P=p^n=|N\pi|_P.|N\varkappa|_P$. Es ist also $|N\pi|_P$, als Teiler von p^n, $=p^f$, wo f eine ganze rationale Zahl ist, und $0<f\leqq n$ gilt. Man bekommt also die Primzahlen i. B. a. P aus K durch Zerlegung der natürlichen Primzahlen aus P in Primfaktoren i. B. a. P aus K. Ist also P endlich, so gibt es nur endlich viele wesentlich von einander i. B a. P verschiedene Primzahlen i. B. a. P aus K. Sind π_1, π_2, $\ldots$, π_g alle wesentlich von einander i. B. a. P verschiedenen Primzahlen i. B. a. P aus K, die Teiler i. B. a. P der rationalen Primzahl p aus P sind, dann ist 1) $p\sim\pi_1^{l_1}\,\pi_2^{l_2}\ldots\pi_g^{l_g}$ i. B. a. P mit ganzen rationalen Exponenten $e_1, e_2, \ldots, e_g$. Ist $|N\pi_i|_P=p^{f_i}$, $(i=1, 2, \ldots, g)$, dann erhält man, wenn man beiderseits den Absolutwert der Norm i. B. a. P bildet, $n=e_1 f_1+e_2 f_2+\cdots+e_g f_g$. e_i wird Ordnung und f_i Grad von π_i genannt. Es ist weiter (aus 1) ersichtlich, daß $\pi_i\sim 1$ i. B. auf jede von p verschiedene Primzahl aus P ist.

§ 11. Wir werden noch die folgende Aufgabe lösen.

Es sei P eine endliche Menge von rationalen Primzahlen $P=\{p, q, \ldots r\}$ und es seien von Null verschiedene Zahlen $\alpha_p, \alpha_q, \ldots \alpha_r$ aus einem algebraischen Zahlkörper K vorgelegt. Man soll eine algebraische Zahl α bestimmen, für die (1) $\alpha\sim\alpha_p$ i. B. a. p, $\alpha\sim\alpha_q$ i. B. a. $q, \ldots$, $\alpha\sim\alpha_r$ i. B. a. r gilt. Wir werden sehen, daß die Aufgabe lösbar ist und zwar wesentlich eindeutig i. B. a. P. α kann als eine Zahl aus K bestimmt werden.

Wir bestimmen ganze in P darstellbare Zahlen K, L, M durch die Bedingungen:

$|K|_p = 1$, $|K|_q \alpha_p/\alpha_q$ ganz i. B. a. q, . $|K|_r \alpha_p/\alpha_r$ ganz i. B. a. r.
$|L|_p \alpha_q/\alpha_p$ ganz i. B. a. p, $|L|_q = 1$, $|L|_r \alpha_q/\alpha_r$ ganz i B. a. r.

$|M|_p \alpha_r/\alpha_p$ ganz i. B. a. p, $|M|_q \alpha_r/\alpha_q$ ganz i. B. a. q, . . $|M|_r = 1$.

Es ist $K = |K|_p |K|_q \ldots |K|_r$ und ähnlich für L, und M. Dann genügt der g. g. T. i. B. a. P $(K\alpha_p, L\alpha_q, \ldots M\alpha_r) \sim \alpha^*$ i. B. a. P den Bedingungen (1). Es ist nämlich $\alpha^* \sim \alpha_p \left(K, L\frac{\alpha_q}{\alpha_p}, \quad M\frac{\alpha_r}{\alpha_p}\right)$ i. B. a. p, also $\sim \alpha_p$ i. B. a. p. Ähnlich ist $\alpha^* \sim \alpha_q$ i. B. a. q, , $\alpha^* \sim \alpha_r$ i. B. a. r. α kann wirklich als eine Zahl aus K bestimmt werden. Für jede Zahl α, die den Bedingungen (1) genügt, gilt dann $\alpha \sim \alpha^*$ i. B. a. P. Es ist nämlich $\alpha^* \sim \alpha_p$, $\alpha \sim \alpha_p$ i. B. a. p, also $\alpha \sim \alpha^*$ i. B. a. p und ebenso $\alpha \sim \alpha^*$ i. B. a. q, . . r, d. h. auch $\alpha \sim \alpha^*$ i. B. a. P.

§ 12. Betrachten wir Systeme, α; P, welche aus einer algebraischen Zahl α und einer (auch leeren) Menge P von natürlichen Primzahlen bestehen. Sei zuerst $\alpha \neq 0$. Eine algebraische Zahl A_p werden wir eine Komponente i. B. a. p des Systems α; P nennen, wenn $A_p \sim \alpha$ i. B. a. p gilt, falls p eine Primzahl aus P ist; falls dagegen p nicht in P vorkommt, bedeutet A_p eine Einheit i. B. a. p, d. h. $A_p \sim 1$ i. B. a. p. Ist also P leer, so ist $A_p \sim 1$ i. B. a. p für jedes p. Als Komponenten von 0; P werden wir 0 betrachten. A_p ist wesentlich eindeutig i. B. a. p bestimmt. Es sei ein weiteres System β; Q vorgelegt und B_p seine Komponente i. B a. p. Das System α; P ist assoziiert mit dem Systeme β; Q, α; $P \sim \beta$; Q, wenn $A_p \sim B_p$ i. B. a. p für jede natürliche Primzahl p gilt. Es kann leicht bewiesen werden, daß die Relation »assoziiert mit« für die betrachteten Systeme reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Es ist möglich, neue Elemente, Divisoren, einzuführen, die den Klassen der miteinander assoziierten Elemente zugeordnet sind, indem wir diese neuen Elemente als gleich betrachten, wenn die Systeme, denen sie zugeordnet sind, assoziiert sind. Den dem Systeme α; P zugeordneten Divisor bezeichnen wir $(\alpha)_P$. Es ist also $(\alpha)_P = (\beta)_Q$, wenn $A_p \sim B_p$ i. B. a. p für jedes

p gilt. Die Zahl A_p, welche wesentlich eindeutig i B. a. p bestimmt ist, werden wir auch Zahlenkomponente des Divisors $(\alpha)_P$ i. B. a. p nennen.

Betrachten wir einen algebraischen Zahlkörper K. Einen Divisor $\mathfrak{A}$, welcher in der Form $(\alpha)_P$ dargestellt werden kann, wo α eine Zahl aus K ist, werden wir als Divisor dieses Körpers bezeichnen. Für die Zahlkomponenten eines solchen Divisors kann man Zahlen aus K wählen.

Jetzt werden wir uns mit der Frage nach der Gleichheit zweier Divisoren beschäftigen.

Zuerst ist ersichtlich, daß alle Divisoren $(0)_P$ einander gleich sind. Diesen gemeinsamen Wert werden wir (0) bezeichnen. Ist $\alpha \neq 0$, so ist gewiss $(\alpha)_P \neq (0)$.

Weiter ist leicht zu sehen, daß $(\alpha)_P = (\beta)_P$ dann und nur dann gilt, wenn $\alpha \sim \beta$ i. B. a. P ist.

Allgemeiner gilt der Satz:

Sind $(\alpha)_P$, $(\beta)_Q$ *von* (0) *verschieden, so ist* $(\alpha)_P = (\beta)_Q$ *dann und nur dann, wenn* $\alpha \sim \beta$ *i. B. a.* $P \cap Q$, $\alpha \sim 1$ *i. B. a.* $P \cap \bar{Q}$, $\beta \sim 1$ *i. B. a.* $\bar{P} \cap Q$ *gilt.*

Seien A_p, B_p die Zahlenkomponenten der Divisoren $(\alpha)_P$, bzw. $(\beta)_Q$ i. B. a. p. Es ist $(\alpha)_P = (\beta)_Q$ dann und nur dann, wenn $A_p \sim B_p$ i. B. a. p für jede natürliche Primzahl p gilt. Es ist aber $A_p \sim \alpha$ i. B. a. p aus P, ~ 1 i. B. a. p aus $\bar{P}$; $B_p \sim \beta$ i. B. a. p aus Q, ~ 1 i. B. a. p aus $\bar{Q}$. Jede rationale Primzahl ist in einer der 4 Mengen $P \cap Q$, $P \cap \bar{Q}$, $\bar{P} \cap Q$, $\bar{P} \cap \bar{Q}$ enthalten. Ist

p aus $P \cap Q$, so ist $A_p \sim \alpha$, $B_p \sim \beta$, also $A_p \sim B_p$, wenn $\alpha \sim \beta$ i. B. a. p ist,

p aus $P \cap \bar{Q}$, so ist $A_p \sim \alpha$, $B_p \sim 1$, also $A_p \sim B_p$, wenn $\alpha \sim 1$ i. B. a. p ist,

p aus $\bar{P} \cap Q$, so ist $A_p \sim 1$, $B_p \sim \beta$, also $A_p \sim B_p$, wenn $\beta \sim 1$ i. B. a, p ist,

und endlich, ist

p aus $\bar{P} \cap \bar{Q}$, so ist $A_p \sim B_p \sim 1$ i. B. a. p. Daraus ist zu schließen, daß $(\alpha)_P = (\beta)_Q$ dann und nur dann gilt, wenn $\alpha \sim \beta$ i. B. a. $P \cap Q$, $\alpha \sim 1$ i. B. a. $P \cap \bar{Q}$, $\beta \sim 1$ i. B. a. $\bar{P} \cap Q$ gilt.

Es ist, wenn Q *alle Primzahlen aus* P *enthält,* $P \cap Q = P$

$P \cap \bar{Q}$ *leer, also* $(\alpha)_P = (\beta)_Q$, *wenn* $\beta \sim \alpha$ *i. B. a.* P, $\beta \sim 1$ *i. B. a.* $\bar{P} \cap Q$ *gilt.*

Jeder Divisor kann in der Form $(\alpha)_R$ *dargestellt werden, wo* R *endlich viele Primzahlen enthält.*

Für $(0)_P$ ist diese Behauptung evident. Betrachten wir also weiter $(\alpha)_P$ mit $\alpha \neq 0$. Es ist dann nur für endlich viele natürliche Primzahlen α nicht ~ 1. Bezeichnen wir diese endliche Menge Q. Sei $R = P \cap Q$. Dann ist auch R endlich und es ist $(\alpha)_P = (\alpha)_R$.

§ 13. Betrachten wir einen Divisor $(\alpha)_R (\alpha \neq 0)$, wo R alle und nur die rationalen Primzahlen enthält, in Bezug auf welche α keine Einheit ist; R ist also endlich. Wir werden einen solchen Divisor einfach mit (α) bezeichnen und ihn einen Hauptdivisor nennen. Es ist leicht einzusehen, daß $(\alpha)_P = (\alpha)$ ist, wenn die Menge P die Menge R enthält. Es ist z. B. $(1)_P = (1)_\wedge = (1)$ für jede beliebige Primzahlmenge P. Für die Komponente A_p des Divisors (α) gilt $A_p \sim \alpha$ i. B. a. p für jedes p. Es ist leicht einzusehen, daß $(\alpha) = (\beta)$ dann und nur dann ist, wenn $\alpha \sim \beta$ gilt. Dies gilt auch für (0).

Ein Divisor von der Form (α), wo α eine Zahl aus K bedeutet, wird ein Hauptdivisor des Körpers K genannt. *Für den Körper der rationalen Zahlen sind alle Divisoren Hauptdivisoren.* Es ist nämlich $(a)_P = (|a|_P)$.

§ 14. *Im weiteren werden wir bei der Darstellung eines Divisors in der Form* $(\alpha)_P$ *die Primzahlmenge* P *immer als endlich betrachten.*

Zu einem beliebigen Divisor $(\alpha)_P$ aus K und zu einer beliebigen Primzahlmenge Q, welche P enthält, kann man eine Zahl β aus K so bestimmen, daß $(\beta)_Q = (\alpha)_P$ ist. Ist $\alpha = 0$, so ist $(\alpha)_P = (0)$ und auch $(\beta)_Q = (0)$. Für $\alpha \neq 0$ genügt es β in K so zu wählen, daß $\beta \sim \alpha$ i. B. a. P, $\beta \sim 1$ i. B. a. $\bar{P} \cap Q$ gilt, was nach § 11 möglich ist. Weiter ist leicht zu sehen, daß α in $(\alpha)_P$ ganz i. B. a. $\bar{P}$ gewählt werden kann (§ 4. S. 2).

Ist eine endliche Menge von Divisoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *aus* K *vorgelegt, so kann man sie in der Form darstellen:* $\mathfrak{a} = (\alpha^*)_S$, $\mathfrak{b} = (\beta^*)_S$, $\mathfrak{c} = (\gamma^*)_S$, *wo* α^*, β^*, γ^* *Zahlen aus* K *sind.*

Beim Beweise können wir uns auf den Fall, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \neq (0)$ sind, beschränken. Ist

$$\mathfrak{a} = (\alpha)_P, \quad \mathfrak{b} = (\beta)_Q, \qquad \mathfrak{c} = (\gamma)_R,$$

so genügt es für S eine beliebige Primzahlmenge zu wählen, welche P, Q, R enthält. Dann müssen α^*, β^*, γ^* folgende Bedingungen erfüllen:

$$\alpha^* \sim \alpha \text{ i. B. a. } P, \ \alpha^* \sim 1 \text{ i. B. a. } \bar{P} \sim S$$
$$\beta^* \sim \beta \text{ i. B. a. } Q, \ \beta^* \sim 1 \text{ i. B. a. } \bar{Q} \sim S$$
$$\gamma^* \sim \gamma \text{ i. B. a. } R, \ \gamma^* \sim 1 \text{ i. B. a. } \bar{R} \sim S.$$

Es ist aber immer möglich solche Zahlen im Körper K zu bestimmen.

Wir lösen noch die folgende Aufgabe:

Es sind die $\neq 0$ Zahlen A_p, A_q, A_r aus einem algebraischen Zahlkörper K vorgelegt. Suchen wir einen Divisor $\mathfrak{a}$ aus K, für dessen Zahlenkomponenten $A_p \sim \bar{A}_p$ i. B. a. p, $A_q \sim \bar{A}_q$ i. B. a. q, ., $A_r \sim \bar{A}_r$ i. B. a. r gilt und dessen andere Zahlenkomponenten Einheiten i. B. a. die entsprechenden Primzahlen sind. Existiert ein diesen Bedingungen genügender Divisor, so ist er eindeutig bestimmt. Ein solcher Divisor ist aber leicht zu finden. Bestimmen wir eine algebraische Zahl α aus K, sodaß $\alpha \sim \bar{A}_p$ i. B. a. p, $\alpha \sim \bar{A}_q$ i. B. a. q, $\alpha \sim \bar{A}_r$ i B. a. r gilt (§ 11) und setzen wir $P = \{p, q, r\}$. Dann ist $\mathfrak{a} = (\alpha)_P$ der gesuchte Divisor.

§ 15. Betrachten wir einen Divisor $\mathfrak{a}$. Sei A_p seine Zahlenkomponente i. B. a. p. A_p ist eindeutig i. B. a. p bestimmt; der Divisor $\mathfrak{a}_p = (A_p)_p$ ist also eindeutig bestimmt. Wir werden $\mathfrak{a}_p$ die Divisorenkomponente von $\mathfrak{a}$ i. B. a. p nennen. Ist $\mathfrak{a} = (0)$, so ist $\mathfrak{a}_p = (0)$; ist $\mathfrak{a} \neq (0)$, so sind nur endlich viele von diesen Komponenten $\neq (1)$. Bedeutet $\mathfrak{b}_p$ die Divisorenkomponente von $\mathfrak{b}$ i. B. a. p, so *ist* $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{b}_p$ *für jedes* p *gilt.* Ist $\mathfrak{a}$ ein Divisor aus K, so sind seine Divisorenkomponenten ebenfalls Divisoren aus K.

§ 16. Betrachten wir zwei Divisoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ mit den Zahlenkomponenten A_p, bezw. B_p. Diese Zahlen sind eindeutig i. B. a. p bestimmt. Dasselbe gilt auch von dem Produkte $A_p B_p$, und dem Quotienten A_p/B_p, wenn $\mathfrak{b} \neq (0)$ ist. Es ist entweder $A_p B_p$, $A_p/B_p = 0$ für alle p oder es gilt, daß nur für endlich viele p $A_p B_p$, A_p/B_p keine Einheiten i. B. a. p sind. Die

Zahlen $A_p B_p$, A_p/B_p sind also Zahlenkomponenten von zwei Divisoren, die wir das Produkt bezw. den Quotienten der Divisoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nennen und mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bezw. $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ bezeichnen werden. Ist $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}$, so ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1/\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{b} \neq (0))$ gilt. Es gilt das kommutative und assoziative Gesetz und die Gleichung $\mathfrak{b}\mathfrak{v} = \mathfrak{a}$ für $\mathfrak{b} \neq (0)$ besitzt eine einzige Lösung, $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. Es ist $\mathfrak{a}(0) = (0)$, $\mathfrak{a}(1) = \mathfrak{a}/(1) = \mathfrak{a}$. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Divisoren aus einem Körper K, so können ihre Komponenten in K gewählt werden. Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ $(\mathfrak{b} \neq (0)$ wieder Divisoren aus K sind. Sind $\mathfrak{a}_p, \mathfrak{b}_p$ die Divisorenkomponenten i. B. a. p der Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist die entsprechende Komponente des Produktes $\mathfrak{a}_p\,\mathfrak{b}_p$ und des Quotienten $\mathfrak{a}_p/\mathfrak{b}_p$ $(\mathfrak{b} \neq (0))$.

Weiter gilt der Satz:

Sind $\mathfrak{a}_p$, $\mathfrak{a}_q$, $\mathfrak{a}_r$ *die Divisorenkomponenten von* $\mathfrak{a} \neq (0)$ *und sind alle anderen Divisorenkomponenten von* $\mathfrak{a}$ *gleich* (1), *so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_p\,\mathfrak{a}_q \ldots \mathfrak{a}_r$.

Es ist $\mathfrak{a}_p = (A_p)_p$, $\mathfrak{a}_q = (A_q)_q$, $\ldots$ $\mathfrak{a}_r = (A_r)_r$. Für jede andere Zahlenkomponente A_s von $\mathfrak{a}$ gilt $A_s \sim 1$ i. B. a. s. Welche sind die Zahlenkomponenten von $\mathfrak{a}_p$, $\mathfrak{a}_q$, $\ldots$ $\mathfrak{a}_r$? Bezeichnen wir sie mit $A_{p,s}$, $A_{q,s}$, $\ldots$ $A_{r,s}$, dann ist

$A_{p,p} \sim A_p$ i. B. a. p, $A_{p,s} \sim 1$ i. B. a. s für $s \neq p$;
$A_{q,q} \sim A_q$ i. B. a. q, $A_{q,s} \sim 1$ i. B. a. s für $s \neq q$;

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{r,r} \sim A_r$ i. B. a. r, $A_{r,s} \sim 1$ i. B. a. s für $s \neq r$;

daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Wir können auch $\mathfrak{a} = \prod_p \mathfrak{a}_p$ schreiben, wo das Produkt über alle natürliche Primzahlen p zu erstrecken ist. Es ist nämlich nur für endlich viele p: $\mathfrak{a}_p \neq (1)$.

Die Divisoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ können wir in der Form $\mathfrak{a} = (\alpha)_P$, $\mathfrak{b} = (\beta)_P$ darstellen. Dann ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha\beta)_P$; $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = (\alpha/\beta)_P$ für $\mathfrak{b} \neq (0)$.

Es kann leicht bewiesen werden, daß $(\alpha)(\beta) = (\alpha\beta)$, $(\alpha)/(\beta) = (\alpha/\beta)$ $(\beta \neq 0)$ ist. Für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ bei den Produkten ist die Behauptung einleuchtend. Sei also $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Sei P eine Menge, welche alle Primzahlen enthält, in Bezug auf welche α und β keine Einheiten sind. Dann ist $(\alpha) = (\alpha)_P$

$(\beta)=(\beta)_P$, $(\alpha)\,(\beta)=(\alpha\beta)_P=(\alpha\beta)$, $(\alpha)/(\beta)=(\alpha/\beta)_P=(\alpha/\beta)$, da für jede Primzahl p aus $\bar{P}$ $\alpha\sim 1$, $\beta\sim 1$ also $\alpha\beta\sim 1$, $\alpha/\beta\sim 1$ i. B. a. p ist.

Das Produkt und der Quotient von zwei Hauptdivisoren aus K ist wieder ein Hauptdivisor aus K.

§ 17. Ist für jedes p die Zahlenkomponente $\mathfrak{A}_p$ des Divisors $\mathfrak{a}$ ganz, so werden wir diesen Divisor als ganz bezeichnen. Es ist einleuchtend, daß alle Divisorenkomponenten $\mathfrak{a}_p$ eines ganzen Divisors ganz sind. Ist $\mathfrak{a}=(\alpha)_P$, so ist $\mathfrak{a}$ dann und nur dann ganz, wenn α ganz i. B. a. P ist. Für α kann eine i. g. S. ganze Zahl gewählt werden. Ein beliebiger Divisor kann als ein Quotient von zwei ganzen Divisoren dargestellt werden; als Nenner kann ein ganzer rationaler Divisor (ein Hauptdivisor) gewählt werden. Ein Hauptdivisor (α) ist dann und nur dann ganz, wenn α eine ganze algebraische Zahl ist.

Ein Divisor $\mathfrak{a}$ ist durch einen Divisor $\mathfrak{b}$ teilbar, wenn ein ganzer Divisor $\mathfrak{c}$ existiert, so daß $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist, d. h. für $\mathfrak{b}\neq(0)$, wenn $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ ganz ist.

Der Divisor $\mathfrak{a}$ ist durch den Divisor $\mathfrak{b}$ dann und nur dann teilbar, wenn jede Zahlen-, (Divisoren-)komponente von $\mathfrak{a}$ durch die entsprechende von $\mathfrak{b}$ teilbar ist. Ist $\mathfrak{a}=(\alpha)_P$, $\mathfrak{b}=(\beta)_P$, so ist $\mathfrak{a}$ dann und nur dann teilbar durch $\mathfrak{b}$, wenn α durch β i. B. a. P teilbar ist.

Es kann leicht bewiesen werden, daß ein Divisor $\mathfrak{e}$ und sein reziproker Wert $1/\mathfrak{e}$ nur dann ganz sind, wenn $\mathfrak{e}=(1)$ ist. Ein Divisor $\mathfrak{a}$ ist teilbar durch den Divisor $\mathfrak{b}$ und zugleich $\mathfrak{b}$ teilbar durch $\mathfrak{a}$ nur dann, wenn $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ ist.

Weiter ist leicht zu sehen, daß (α) durch (β) dann und nur dann teilbar ist, wenn α durch β teilbar ist.

Wir werden sagen, daß eine Zahl α durch einen Divisor $\mathfrak{b}=(\mathfrak{b})_Q$ teilbar ist, wenn (α) durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist. Es ist ersichtlich, daß dies nur dann stattfindet, wenn α durch B_p i. B. a. p teilbar ist für alle p, oder wenn α durch $\mathfrak{b}_p$ teilbar ist für alle p, oder endlich, wenn α durch β i. B. a. Q teilbar und α ganz i. B. a. $\bar{Q}$ ist. Es gelten dann die Sätze:

Ist α und β teilbar durch $\mathfrak{d}$, so ist $\alpha\pm\beta$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar.

Ist α teilbar durch $\mathfrak{d}$, $\varkappa$ ganz, so ist $\alpha\varkappa$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar.

Endlich könnten wir einen Divisor $\mathfrak{a}$ als teilbar durch die Zahl β dann erklären, wenn $\mathfrak{a}$ durch (β) teilbar ist.

§ 18. *Ist* $\mathfrak{a}=(\alpha)_P, \alpha \neq 0$, *so ist die kleinste in P darstellbare durch* α *i. B. a. P teilbare Zahl m auch die kleinste durch* $\mathfrak{a}$ *teilbare rationale positive Zahl und umgekehrt. Jede rationale Zahl, die durch* $\mathfrak{a}$ *teilbar ist, ist auch durch m teilbar.*

Ist M eine durch $\mathfrak{a}$ teilbare rationale positive Zahl, dann ist $M=|M|_P . |M|_{\bar{P}}$. M ist durch $\mathfrak{a}$ dann und nur dann teilbar, wenn $|M|_P$ durch α i. B. a. P teilbar und $|M|_{\bar{P}}$ ganz ist. Daraus erhellt unmittelbar die Behauptung.

§ 19. *Es seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$ *Divisoren aus einem algebraischen Zahlkörper K. Dann existiert ein einziger Divisor* $\mathfrak{d}$ *aus K, der g. g. T. der Divisoren* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}=(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c})$, *der folgende Eigenschaften besitzt:*

1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$ *sind durch* $\mathfrak{d}$ *teilbar.*

2) *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$ *durch einen Divisor* $\mathfrak{k}$ *teilbar, so ist* $\mathfrak{d}$ *durch* $\mathfrak{k}$ *teilbar.*

Zuerst ist leicht zu sehen, dass ein Divisor mit den Eigenschaften 1), 2), wenn er existiert, eindeutig bestimmt ist. Setzen wir voraus, auch der Divisor $\mathfrak{d}'$ habe die Eigenschaften 1), 2). In 2) setzen wir $\mathfrak{k}=\mathfrak{d}$; es ist also $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{d}'$ teilbar. Vertauschen wir die Rollen von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$, so sehen wir, daß auch $\mathfrak{d}'$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar ist. Es ist also wirklich $\mathfrak{d}=\mathfrak{d}'$.

$\Delta_p, B_p, \ldots \Gamma_p$ seien die Zahlenkomponenten der Divisoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$, die im Körper K gewählt werden können. Es sei Δ_p der g. g. T. i. B. a. p der Zahlen $A_p, B_p, \ldots \Gamma_p$. Δ_p kann wesentlich eindeutig i. B. a. p in K bestimmt werden und es ist entweder $\Delta_p=0$ für alle p oder ist nur für endlich viele p Δ_p keine Einheit i. B. a. p. Wir bestimmen nun den Divisor $\mathfrak{d}$ aus K mit den Zahlenkomponenten Δ_p. Es ist zuerst einleuchtend, daß $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ teilbar sind. Ist weiter $\mathfrak{k}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$ und K_p die Zahlenkomponente von $\mathfrak{k}$ i. B. a. p., dann ist Δ_p teilbar durch K_p für alle p also teilbar durch $\mathfrak{k}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir schreiben die Divisoren in der Form $\mathfrak{a}=(\alpha)_P$, $\mathfrak{b}=(\beta)_P, \ldots \mathfrak{c}=(\gamma)_P$. Ist δ der g. g. T. der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ i. B. a. P, so ist, wie leicht zu sehen, $\mathfrak{d}=(\delta)_P$. Ist endlich

$\mathfrak{a} = \prod_p \mathfrak{a}_p$, $\mathfrak{b} = \prod_p \mathfrak{b}_p, \ldots \mathfrak{c} = \prod_p \mathfrak{c}_p$, dann ist $\mathfrak{d}_p = (\mathfrak{a}_p, \mathfrak{b}_p, \ldots \mathfrak{c}_p)$ und $\mathfrak{d} = \prod_p \mathfrak{d}_p$.

Ist (1) der g. g. T. der Divisoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$, so werden wir die Divisoren teilerfremd nennen.

Den Divisor $\mathfrak{d}$, den g. g. T. der Hauptdivisoren (α), $(\beta), \ldots (\gamma)$ aus K, werden wir auch g. g. T. der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ nennen, $\mathfrak{d}$ kann in K gewählt werden.

§ 20. Jeder Divisor $\mathfrak{a} \neq (0)$ aus K kann in der Form $(\alpha)_P$ dargestellt werden, wo α eine i. B. a $\bar{P}$ ganze Zahl aus K ist. (§ 14). Ist M eine beliebige in P darstellbare durch α i. B. a. P teilbare Zahl, so ist $\mathfrak{a}$ der g. g. T. der Zahlen α, M; $\mathfrak{a} = (\alpha, M)$. Es ist nämlich für eine Primzahl p aus $\bar{P}$, da α ganz i. B. a. p und $M \sim 1$ i. B. a. p ist, 1 der g. g. T. von α und M i. B. a. p. Weiter ist α der g. g. T. i. B. a. P von α und M, da M durch α teilbar ist i. B. a. P. Für M kann man die kleinste durch α i. B. a. P teilbare in P darstellbare Zahl wählen, die zugleich die kleinste rationale durch $\mathfrak{a}$ teilbare positive Zahl ist. (§ 18). *Jeder Divisor aus dem Körper K kann als der g. g. T. von Zahlen aus K dargestellt werden, speziell als der g. g. T. von zwei Zahlen, einer aus K und einer rationalen.*

Für diese Darstellung gelten die Sätze:

Ein Divisor $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2 \quad \alpha_a)$ ist dann und nur dann ganz, wenn alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \quad . \alpha_a$ ganz sind.

Ist $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_a)$, $\mathfrak{b} = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_b)$, so können wir leicht einsehen, daß

$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha_1 \beta_1, \alpha_1 \beta_2, \quad \alpha_1 \beta_b, \alpha_2 \beta_1, \ldots \alpha_2 \beta_b, \ldots \alpha_a \beta_1, \quad \alpha_a \beta_b)$,

$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b)$ ist.

Es genügt die Zahlenkomponenten beiderseits zu betrachten.

§ 21. *1. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c}$ teilerfremde Divisoren aus einem algebraischen Zahlkörper K, (also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$ ganz), dann kann man ganze Zahlen $\alpha^*, \beta^*, \quad \gamma^*$ aus K bestimmen, sodaß α^* durch $\mathfrak{a}$, β^* durch $\mathfrak{b}$, $\quad \gamma^*$ durch $\mathfrak{c}$ teilbar ist und $\alpha^* + \beta^* + \quad + \gamma^* = 1$ gilt.*

Wir können $\mathfrak{a} = (\alpha)_P$, $\mathfrak{b} = (\beta)_P$, $\quad \mathfrak{c} = (\gamma)_P$ setzen, wo $\alpha, \beta, \quad \gamma$ i. g. S. ganze Zahlen aus K sind. $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ sind dann teilerfremd i. B. a. P. Es existieren also i. B. a. P ganze

Zahlen $\mu, \nu, \ldots \varrho$ aus K, sodaß $\alpha\mu + \beta\nu + \ldots + \gamma\varrho = 1$ ist. Dann ist aber auch 1) $\alpha\mu_1 + \beta\nu_1 + \quad + \gamma\varrho_1 = E$, wo μ_1, ν_1, ϱ_1 i. g. S. ganze Zahlen aus K sind und E eine in $\overline{P}$ darstellbare ganze Zahl bedeutet. Wir setzen voraus, daß die ganze in P darstellbare Zahl M durch α i. B. a. P teilbar ist. Dann sind M und E teilerfremd i. g. S., also können wir zwei ganze rationale Zahlen M_1, E_1 so bestimmen, daß $EE_1 + MM_1 = 1$ ist. Multiplizieren wir 1) mit E_1 und addieren wir auf beiden Seiten MM_1, so erhalten wir $(\alpha E_1 \mu_1 + MM_1) + \beta E_1 \nu_1 + \ldots + \gamma E_1 \varrho_1 = 1$. Es ist aber $\alpha^* = \alpha E_1 \mu_1 + MM_1$ durch $\mathfrak{a}$, $\beta^* = \beta E_1 \nu_1$ durch $\mathfrak{b}, \ldots \gamma E_1 \varrho_1$ durch $\mathfrak{c}$ teilbar und $\alpha^* + \beta^* + \quad + \gamma^* = 1$, w. z. b. w.

2. *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c}$ *Divisoren aus* K *und ist* $\mathfrak{d} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{c})$, *so kann man jede durch* $\mathfrak{d}$ *teilbare Zahl* δ *aus* K *in der Form darstellen* $\delta = \alpha + \beta + \quad + \gamma$, *wo* α *eine durch* $\mathfrak{a}$, β *eine durch* $\mathfrak{b}, \ldots \gamma$ *eine durch* $\mathfrak{c}$ *teilbare Zahl aus* K *ist.*

Es ist $\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{d}, \mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{c} = \overline{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{d}$, wo $\overline{\mathfrak{a}}$, $\overline{\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{c}}$ teilerfremde Divisoren aus K sind. Wir können also die durch $\overline{\mathfrak{a}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{b}}$, $\ldots \overline{\mathfrak{c}}$ teilbaren Zahlen $\alpha^*, \beta^*, \ldots \gamma^*$ aus K so bestimmen, daß $\alpha^* + \beta^* + \ldots + \gamma^* = 1$ ist. Dann ist aber $\delta = \delta\alpha^* + \delta\beta^* + \ldots + \delta\gamma^*$, und daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Als speziellen Fall des vorigen Satzes erhält man den Satz:

3. *Ist* $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a)$, *so ist jede durch* $\mathfrak{a}$ *teilbare Zahl* α *in der Form darstellbar* $\alpha = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \ldots + \mu_a \alpha_a$, *wo* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_a$ *ganze Zahlen aus* K *sind.*

Haben die Hauptdivisoren (α), (β), $\ldots (\gamma)$ aus K den Divisor (1) zum g. g. T., d. h. ist $(\alpha, \beta, \ldots \gamma) = (1)$, so folgt aus dem Satze 1, daß man ganze Zahlen aus K, $\mu, \nu, \ldots \varrho$ so bestimmen kann, daß $\alpha\mu + \beta\nu + \ldots + \gamma\delta = 1$ gilt.

Wir werden noch den Satz beweisen:

4. *Sind* $(\alpha), (\beta), \ldots (\gamma)$ *Hauptdivisoren aus einem algebraischen Zahlkörper* K, *so sind sie dann und nur dann teilerfremd, wenn die Zahlen* $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ »*teilerfremd in* K« *sind.*

Wir betrachten jetzt die Definition: $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ sind »teilerfremd in K« wenn die Bedingungen erfüllt sind: 1) $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ sind ganz, 2) sind $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ durch $\varkappa$ aus K teilbar, so ist $1/\varkappa$ ganz. Setzen wir $\varkappa = 1/\lambda$, so kann statt 2) auch 2')

gesetzt werden: 2') sind $\alpha\lambda, \beta\lambda, \ldots \gamma\lambda$ ganz, so ist auch λ ganz.

Sind $(\alpha), (\beta), \ldots (\gamma)$ teilerfremd, so existieren ganze Zahlen $\mu, \nu, \ldots \varrho$ aus K, sodaß $\alpha\mu + \beta\nu + \ldots + \gamma\varrho = 1$ ist. Dann ist $\lambda = (\alpha\lambda)\mu + (\beta\lambda)\nu + \ldots + (\gamma\lambda)\varrho$, wenn λ eine beliebige Zahl aus K bedeutet. Aus der Ganzzahligkeit von $\alpha\lambda, \beta\lambda, \ldots \gamma\lambda$ folgt auch diejenige von λ, so daß $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ »teilerfremd in K« sind.

Setzen wir umgekehrt voraus, $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ seien »teilerfremd in K« und $(\alpha, \beta, \ldots \gamma) = \mathfrak{b}$, so ist, da $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ ganz sind, auch $\mathfrak{b}$ ganz. Ist $\mathfrak{b} = (\delta)_p$, so kann δ als eine i. B. a. P ganze Zahl aus K gewählt werden. $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ sind durch δ i. B. a. P teilbar. Bestimmen wir λ aus K durch die Bedingungen $\lambda \sim 1/\delta$ i. B. a. P, λ ganz i. B. a. $\overline{P}$, dann sind $\alpha\lambda, \beta\lambda, \ldots \gamma\lambda$ ganz, also auch λ ganz. Daraus folgt, dass δ eine Einheit i. B. a. P ist, d. h. $\mathfrak{b} = (1)$, w. z. b. w.

$(\alpha), (\beta), \ldots (\gamma)$ sind auch Hauptdivisoren aus dem Körper aller algebraischen Zahlen. Wenn $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ teilerfremd im Körper aller algebraischen Zahlen sind, so werden wir diese Zahlen kurz t e i l e r f r e m d nennen. *$\alpha, \beta, \ldots \gamma$ sind dann und nur dann teilerfremd, wenn $(\alpha), (\beta), \ldots (\gamma)$ teilerfremd sind.*

Weiter kann man den Satz aussprechen:

*5. Die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ aus einem algebraischen Zahlkörper K haben dann und nur dann den Hauptdivisor (δ) aus K zum g. g. T., venn sie δ zum »g. g. T. in K« haben.**)

§ 22. Wir betrachten jetzt einen algebraischen Zahlkörper K endlichen Grades. Es sei $\mathfrak{a} = (\alpha)_P$ ein Divisor aus K. Als Norm von $\mathfrak{a}$, in K, $N\mathfrak{a}$ werden wir $|N\mathfrak{a}|_P$ betrachten. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn A_p die Zahlenkomponente von $\mathfrak{a}$ i. B. a. p ist, $N\mathfrak{a} = \Pi |NA|_p$ gilt. Daraus folgt dann, daß, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist, $N\mathfrak{a} = N\mathfrak{b}$ gilt. Ist $\mathfrak{a}_p$ die Divisorenkomponente von $\mathfrak{a}$ i. B. a. p, so ist $N\mathfrak{a} = \Pi N\mathfrak{a}_p$. Es ist $N\mathfrak{a}$ eine rationale Zahl $\geqq 0$ und nur für $\mathfrak{a} = 0$ ist $N\mathfrak{a} = 0$. Ist $\mathfrak{a}$ ganz, so ist $N\mathfrak{a}$ rational ganz. Für die Norm gelten folgende Beziehungen:

*) Jeder Divisor aus K wird im Körper aller algebraischen Zahlen zum Hauptdivisor. $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ seien Zahlen aus K, $(\alpha, \beta, \ldots \gamma) = \mathfrak{b}$ ist ein Divisor aus K. Es ist $\mathfrak{b} = (\delta)$, wo δ eine algebraische Zahl aus einem Oberkörper L von K (von endlichem Grade über K) bedeutet. Es ist also $(\delta) = (\alpha, \beta, \ldots \gamma)$ Daraus folgt, dass

$$\delta = \alpha\mu + \beta\nu + \ldots + \gamma\varrho, \text{ wo } \mu, \nu \ldots \varrho$$

ganze algebraische Zahlen aus L sind. Im Körper aller algebraischen Zahlen gilt also nicht nur das Axiom G. g. T., sondern auch A.

$$N\mathfrak{a}\mathfrak{b} = N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b};\ N\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{b}}\ (\mathfrak{b} \neq (0)).$$

§ 23. Wir wollen jetzt einen algebraischen Zahlkörper K und den Integritätsbereich I der i. g. S. ganzen Zahlen aus K betrachten. Die $\neq 0$ Zahlen aus K bilden eine Gruppe G und die ganzen $\neq 0$ Zahlen aus K eine Halbgruppe H, aus der G durch Quotientenbildung entsteht. Alle $\neq 0$ Divisoren aus K bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}$ und die ganzen $\neq 0$ Divisoren eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$. In $\mathfrak{G}$ gilt Axiom G. g. T. Es ist aber leicht zu sehen, daß *in* $\mathfrak{G}$ *auch das Axiom E. gilt, wenn* K *von endlichem Grade ist.* Es kann bewiesen werden, daß, wenn $\mathfrak{a}$ ganz und $\neq (0)$ ist, $\mathfrak{a}$ entweder $= (1)$ oder als ein Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Divisoren darstellbar ist. Ist $\mathfrak{a}$ ganz und $N\mathfrak{a} = 1$, so ist $\mathfrak{a} = (1)$. Um zu zeigen, daß der Satz für $N\mathfrak{a} = m > 1$ gilt, werden wir seine Giltigkeit für $N\mathfrak{a} < m$ voraussetzen. Ist $\mathfrak{a}$ unzerlegbar, so ist die Behauptung evident. Ist aber $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \neq (1)$ sind, so ist $N\mathfrak{b}, N\mathfrak{c} < N\mathfrak{a}$, d. h. $< m$. Der ausgesprochene Satz gilt also für $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ also auch für $\mathfrak{a}$.

Ist also $\mathfrak{a}$ ganz, $\neq (0)$ und $\neq (1)$, und ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k$ und auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_l$, wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{q}_l$ Primdivisoren aus K sind, so ist $k = l$ und durch Umnumerierung kann erreicht werden, daß $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_2, \ldots \mathfrak{p}_k = \mathfrak{q}_k$ ist.

Ist π *eine Primzahl i. B. a.* p *aus* K, *so ist* $\mathfrak{p} = (\pi)_p$ *ein Primdivisor aus* K.

Es ist nämlich $\mathfrak{p}$ unzerlegbar. Wäre $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ganz und $\neq (1)$ wären, so müßte, wenn A_q, B_q, Π_q die Zahlenkomponenten von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}, \mathfrak{p}$ i. B. a. q bedeuten, $A_q B_q \sim 1$ i. B. a. $q \neq p$, $A_p B_p \sim \pi$ i. B. a. p gelten. Daraus würde $A_q \sim 1$, $B_q \sim 1$ i. B. a. $q \neq p$ folgen. Sollte $\mathfrak{a} \neq (1)$, $\mathfrak{b} \neq (1)$ sein, so dürften A_p, B_p keine Einheiten i. B. a. p sein, gegen die über π gemachte Voraussetzung.

Weiter ist einleuchtend, daß, wenn P eine endliche Menge von natürlichen Primzahlen bedeutet, und π eine Primzahl aus K i. B. a. P, $(\Pi)_p$ ein Primdivisor ist. Ist nämlich Π in der natürlichen Primzahl p i. B. a. P enthalten, dann ist $(\pi)_P = (\pi)_P$, da π eine Einheit i. B. a. jede von p verschiedene Primzahl aus P ist.

§ 24. Es sei K ein algebraischer Zahlkörper (endlichen oder unendlichen Grades). Wir werden jetzt endlichgliedrige Ideale i. B. a. die Menge aller natürlichen Primzahlen aus K betrachten. Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ Zahlen aus K bedeuten, so wird die Menge der Zahlen, welche auf mindestens eine Art in der Form $\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \ldots + \alpha_a \mu_a$ darstellbar sind, wo $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_a$ ganze Zahlen aus K sind, einfach ein Ideal heißen. Wir werden es mit $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a\}$ bezeichnen. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ ganz, so wird das Ideal ganz genannt.

Wir können eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Idealen aus K und den Divisoren aus K herstellen. Jedem Ideale $\mathfrak{A}$ aus K kann eindeutig ein Divisor $\mathfrak{a}$ aus K zugeordnet werden. Wir setzen $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a\}$, und $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a)$. Ist auch $\mathfrak{A} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b\}$, so setzen wir $\mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b)$. Wir werden beweisen, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \mu_{11} + \alpha_2 \mu_{12} + \ldots + \alpha_a \mu_{1a}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_b &= \alpha_1 \mu_{b1} + \alpha_2 \mu_{b2} + \ldots + \alpha_a \mu_{ba}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 \nu_{11} + \beta_2 \nu_{12} + \ldots + \beta_b \nu_{1b}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_a &= \beta_1 \nu_{a1} + \beta_2 \nu_{a2} + \ldots + \beta_b \nu_{ab}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei μ_{ij}, ν_{ij} ganze Zahlen aus K bedeuten. Es ist also jede der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar, also ist auch $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar. Aus ähnlichem Grunde ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar. Es ist also wirklich $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Umgekehrt kann jeder Divisor aus K als g. g. T. der Zahlen aus K dargestellt werden, $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a)$. Ordnen wir dem Divisor $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a\}$ zu und ist $\mathfrak{a} = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b)$ und $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b\}$, so werden wir zeigen, dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist. Jede der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$ ist durch $\mathfrak{a}$, den g. g. T. der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ teilbar. Es gelten also Gleichungen von der Form (1) (§ 21). Da $\mathfrak{a}$ auch der g. g. T. der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b$ ist und die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar sind, so gelten auch die Gleichungen (2). Daraus folgt aber unmittelbar, dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist.

Wir können jetzt den Satz beweisen:

Das Ideal $\mathfrak{A}$ enthält alle und nur die durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Zahlen aus K.

Wir setzen $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a)$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a$ Zahlen aus K sind. Alle Zahlen aus $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a\}$ sind durch $\mathfrak{a}$ teilbar, und umgekehrt, kann nach § 21 jede durch $\mathfrak{a}$ teilbare Zahl α aus K in der Form $\alpha = \mu_1 \alpha_1 + \ldots + \mu_a \alpha_a$ dargestellt werden, mit ganzen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_a$ aus K, sodaß α in $\mathfrak{A}$ gehört.

Es ist leicht zu sehen, daß einem ganzen Ideal $\mathfrak{A}$ ein ganzer Divisor $\mathfrak{a}$ entspricht und umgekehrt.

Entsprechen den Divisoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus K die Ideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ desselben Körpers, dann entspricht dem Produkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und dem g. g. T. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ der g. g. T. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Sei $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a)$, $\mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b)$, also
$\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a\}$, $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b)$.

Dann ist aber

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \ldots \alpha_1\beta_b, \alpha_2\beta_1, \ldots \alpha_2\beta_b, \ldots \alpha_a\beta_1, \ldots \alpha_a\beta_b),$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \{\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \ldots \alpha_1\beta_b, \alpha_2\beta_1, \ldots \alpha_2\beta_b, \ldots \alpha_a\beta_1, \ldots \alpha_a\beta_b\},$$
$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_a, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b),$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b\},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Die Sätze über den g. g. T. der Divisoren und über die Zerlegung in Primdivisoren haben ihr Analogon in den Sätzen über die ihnen entsprechenden Ideale.

Wir können leicht auch die Gleichheit für die Ideale aus verschiedenen Zahlkörpern definieren.

Ist $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a\}_{K_1}$ ein Ideal aus dem algebraischen Zahlkörper K_1,
$\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b\}_{K_2}$ „ „ „ „ „ „ K_2,
so werden wir dieselben als gleich betrachten, wenn die zugehörigen Divisoren gleich sind, d. h. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a) = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_b)$ gilt.

§ 25. Wir werden beweisen, daß die Norm eines ganzen $\neq \{0\}$ Ideals $\mathfrak{A}$ aus K gleich der Norm des zugehörigen Divisors $\mathfrak{a}$ ist, $N\mathfrak{A} = N\mathfrak{a}$. Dabei wird die Norm des ganzen Ideals als die Anzahl der Kongruenzklassen nach dem Ideal definiert.

Sei $\mathfrak{a} = (\alpha)_P$, wo α als ganze Zahl aus K vorausgesetzt werden kann, sodaß $N\mathfrak{a} = |N\alpha|_P$ ist. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sei eine Basis von $\mathfrak{A}$. Weiter sei $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ eine Basis der ganzen

Zahlen aus K. Dann sind $\alpha\omega_1, \alpha\omega_2, \ldots \alpha\omega_n$ Zahlen aus $\mathfrak{A}$, also

$$\alpha\omega_1 = b_{11}\,\alpha_1 + \ldots + b_{1n}\,\alpha_n$$

(1)

$$\alpha\omega_n = b_{n1}\,\alpha_1 + \quad + b_{nn}\,\alpha_n,$$

wo b_{ij} ganze rationale Zahlen bedeuten. Die Zahlen $\alpha_1/\alpha, \alpha_2/\alpha, \ldots \alpha_n/\alpha$ sind ganz i. B. a. P, sodaß eine in P darstellbare ganze Zahl E gefunden werden kann von der Art, daß $E\alpha_1/\alpha, E\alpha_2/\alpha, \ldots E\alpha_n/\alpha$ i. g. S. ganze Zahlen aus K sind.

Daraus folgt, daß

$$E\frac{\alpha_1}{\alpha} = a_{11}\,\omega_1 + \quad . + a_{1n}\,\omega_n\,,$$

(2)

$$E\frac{\alpha_n}{\alpha} = a_{n1}\,\omega_1 + \quad + a_{nn}\,\omega_n$$

ist mit ganzen rationalen a_{ij}. Aus (1) und (2) folgt, daß $E^n = |a_{ij}|\,.\,|b_{ij}|$ ist, d. h. daß $|b_{ij}|$ eine Einheit i. B. a. P ist. Es ist aber

$$\alpha_1 = c_{11}\,\omega_1 + \quad . + c_{1n}\,\omega_n$$

(3)

$$\alpha_n = c_{n1}\,\omega_1 + \quad . . + c_{nn}\,\omega_n\,,$$

und $N\,\mathfrak{A}$ ist gleich dem absoluten Werte der Determinante $|c_{ij}|$*). Aus (1) und (3) folgt

$$\alpha\,\omega_1 = d_{11}\,\omega_1 + \quad + d_{1n}\,\omega_n$$

(4)

$$\alpha\,\omega_n = d_{n1}\,\omega_1 + \quad . + d_{nn}\,\omega_n\,,$$

wo $|d_{ij}| = |b_{ij}|.|c_{ij}| = |b_{ij}|.\,N\,\mathfrak{A}$ ist. Aus (4) ist zu ersehen, daß α Wurzel einer Gleichung n-ten Grades ist, welche bei der höchsten Potenz der Unbekannten den Koeffizienten 1 und das Absolutglied $\pm|d_{ij}|$ besitzt. Daraus folgt $N\,\alpha = \pm|d_{ij}|$, d. h. $|N\,\alpha|_P = N\,\mathfrak{A}$, da der Absolutwert i. B. a. P von $|b_{ij}| = 1$ ist. Es ist also wirklich $N\,\mathfrak{a} = N\,\mathfrak{A}$, w. z. b. w.

§ 26. Ist $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Divisor und $\mathfrak{f} \neq (0)$ ein ganzer Divisor aus K, dann existiert eine durch $\mathfrak{a}$ teilbare Zahl δ von der Art, daß $\left(\frac{(\delta)}{\mathfrak{a}}, \mathfrak{f}\right) = (1)$ ist.

---

*) Vergl. z. B. Hecke, Th. d. alg. Zahlen. S. 93.

Es ist auch $\Delta\,(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = |c_{ik}|\;\Delta\,(\omega_1, \ldots \omega_n)$.

Aus (2) folgt, dass $|\Delta(\alpha_1 \ldots \alpha_n)|_P = |N\alpha|_P\,|\Delta\,(\omega_1, \ldots \omega_n)|_P$ ist, und da $|c_{ik}| = N\,\mathfrak{A}$, so ist $N\,\mathfrak{A} = |N\alpha|_P = N\mathfrak{a}$, w. z. b. w.

Wir können setzen $\mathfrak{a} = (\alpha)_P$, $\mathfrak{f} = (\varphi)_P$, wo α, φ Zahlen aus K bedeuten. Bestimmen wir δ durch die Bedingungen $\delta \sim \alpha$ i. B. a. P, δ ganz i. B. a. $\overline{P}$. δ kann als eine Zahl aus K bestimmt werden. Dann ist $(\delta) = (\alpha)_P (\delta)_Q$ wo $(\delta)_Q$ ein ganzer Divisor aus K ist. P und Q haben keine Primzahl gemeinsam. Es ist also wirklich $\left(\frac{(\delta)}{\mathfrak{a}}, \mathfrak{f}\right) = \left((\delta)_Q, (\varphi)_P\right) = (1)$.

§ 27. Wir betrachten jetzt einen quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{m})$, wo m eine quadratfreie ganze rationale Zahl bedeutet. Die Basis der ganzen Zahlen aus $R(\sqrt{m})$ ist 1, $\omega = \sqrt{m}$, oder 1, $\omega = \frac{1+\sqrt{m}}{2}$, je nach dem $m \equiv 2, 3$ bzw. $1 \pmod 4$ ist. Die Diskriminante ist $d = 4m$, bzw. $d = m$.

Den g. g. T. i. B. a. eine natürliche Primzahl p von zwei $\not\equiv 0$ verschiedenen Zahlen α, β in $R(\sqrt{m})$ kann man leicht bestimmen. Für die Primzahl p tritt nämlich wenigstens einer der folgenden drei Fälle zu:

1) β ist durch α teilbar i. B. a. p.
2) α ist durch β teilbar i. B. a. p.
3) es ist weder α durch β noch β durch α teilbar i. B. a. p.

Die Behauptung ist einleuchtend für die Fälle 1), 2); um sie für den Fall 3) zu beweisen, genügt es zu zeigen:

Ist weder α durch β, noch β durch α teilbar i. B. a. p, so sind α und β durch $\alpha + \beta$ teilbar i. B. a. p.

Betrachtet man α/β, so zeigt sich, daß weder dieser Quotient noch sein reziproker Wert ganz i. B. a. p sind. Daraus folgt, daß es keine rationale Zahl ist. Es ist also α/β Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Von den i. g. S. ganzen Zahlen a, b, c können wir voraussetzen, daß sie teilerfremd sind. Da α/β nicht ganz ist i. B. a. p, so ist a teilbar durch p. Da β/α nicht ganz ist i. B. a. p und der Gleichung $cx^2 + bx + a = 0$ genügt, ist c teilbar durch p. Da a, b, c teilerfremd sind, darf b nicht durch p teilbar sein: es ist eine Einheit i. B. a. p. Betrachten wir

den Quotienten $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\beta} / \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)$. Dieser ist Wurzel der Gleichung, die wir aus der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, der α/β genügt, dadurch erhalten, daß wir $x/(x+1) = u$, also $x = u/(1-u)$ setzen. Diese Gleichung ist also

$$(a - b + c)\, u^2 + (b - 2c)\, u + c = 0.$$

$a - b + c$ ist aber eine Einheit i. B. a. p, sodaß $\alpha/(\alpha+\beta)$ wirklich ganz i. B. a. p ist. Ähnlich ist $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1 / \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)$ Wurzel einer Gleichung, die wir aus derjenigen für α/β dadurch erhalten, daß wir $1/(x+1) = v$, d. h. $x = (1-v)/v$ setzen. Sie ist $(a-b+c)\, v^2 + (b-2c)\, v + a = 0$, sodaß auch $\beta/(\alpha+\beta)$ ganz ist i. B. a. p.

Den g. g. T. von α, β, i. B. a. eine endliche nicht leere Menge von natürlichen Primzahlen P kann man nach § 16 bestimmen. Aber auch die direkte Bestimmung ist leicht auszuführen. Wir unterscheiden für die Primzahlen aus P die früher angegebenen 3 Fälle (die nicht alle drei wirklich vorkommen müssen). Ist $\alpha \sim \beta$ i. B. a. p aus P, so genügt es p nur zu einem der Fälle 1), 2) zu rechnen. Setzen wir im Falle 1) $m_p = 1$, $n_p = p$, im Falle 2) $m_p = p$, $n_p = 1$, im Falle 3) $m_p = 1$, $n_p = 1$, $M = m_0 \Pi m_p$, $N = n_0 \Pi n_p$, wo m_0, n_0 beliebige durch $\overline{P}$ darstellbare Zahlen bedeuten und das Produktzeichen Π über alle Primzahlen p aus P zu erstrecken ist. Ist $\delta = M.\alpha + N.\beta \neq 0$, so ist diese Zahl der g. g. T. von α, β i. B. a. P. Wir können nämlich leicht zeigen, daß α und β durch δ teilbar sind i. B. a. P. Es ist im Falle 1) $\delta \sim \beta$ i. B. a. p im Falle 2) $\delta \sim \beta$ i. B. a. p; im Falle 3) folgt die Behauptung, daß α und β durch δ teilbar sind i. B. a. p aus dem vorigen Satze. Aber auch der Ausnahmefall, wo

$$M.\alpha + N.\beta = 0$$

ist, kann leicht erledigt werden. Dann ist α/β rational. Ist $\alpha/\beta = a/b$, wo a, b i. g. S. ganze rationale teilerfremde Zahlen sind, und ist $\alpha = \delta a$, $\beta = \delta b$, so ist δ der g. g. T. von α, β i. B. a. P. Es kann aber immer über m_0, n_0 so verfügt werden, daß $M.\alpha + N.\beta \neq 0$ ist. Endlich erwähne ich noch, daß $M.\alpha + N.\beta \neq 0$ ist, wenn es eine Primzahl p gibt, für welche der Fall 3) eintritt. Dann kann nämlich α/β nicht rational

sein. Durch passende Wahl von m_0, n_0 kann man erreichen, daß $M.\alpha$, $N.\beta$, also auch $M.\alpha + N.\beta$ ganz sind i. B. a. $\overline{P}$

§ 28. Bestimmen wir noch die Primzahlen i. B. a. p im quadratischen Zahlkörper.

Aus der Gleichung $e_1 f_1 + e_2 f_2 + \quad + e_g f_g = 2$ ist zu ersehen, daß folgende Fälle zu unterscheiden sind:

$g = 1$, $ef = 2$; 1. $e = 2$, $f = 1$; $p \sim \pi^2$ i. B. a. p, $|N\pi|_p = p$;
2. $e = 1$, $f = 2$; $p \sim \pi$ i. B. a. p, $|N\pi|_p = p^2$;
$g = 2$, $e_1 f_1 + e_2 f_2 = 2$; 3. $e_1 = 1$, $f_1 = 1$, $e_2 = 1$, $f_2 = 1$; $p \sim \pi_1 \pi_2$ i. B. a. p, $|N\pi_1|_p = |N\pi_2|_p = p$.

Im Falle 2. bleibt p eine Primzahl i. B. a. p im quadratischen Zahlkörper.

Ist π eine Primzahl i. B. a. p des quadratischen Zahlkörpers, so ist auch die konjugierte Zahl π' eine Primzahl i. B. a. p. Es ist $\pi \sim \pi'$ i. B. a. p im Falle 1., 2. Im Falle 3. ist $p \sim \pi_1 \pi_2$, $N\pi_1 \sim \pi_1 \pi'_1 \sim p$, $N\pi_2 \sim \pi_2 \pi'_2 \sim p$ i. B. a. p. Es ist also $\pi_2 \sim \pi'_1$, $\pi_1 \sim \pi'_2$ i. B. a. p. Wir werden setzen $\pi_1 \sim \pi$, $\pi_2 \sim \pi'$ i, B. a. p.

Wir können die wesentlich i. B. a. p von einander verschiedenen Primzahlen i. B. a. p unter der i. g. S. ganzen Zahlen aus $R(\sqrt{m})$ suchen. Sie können also in der Form $x + y\sqrt{m}$, $u + v\frac{1+\sqrt{m}}{2}$, je nachdem $m \equiv 2, 3$ oder $m \equiv 1 \pmod 4$ ist, mit ganzen rationalen Koeffizienten x, y bezw. u, v dargestellt werden. Ist p ungerade, so ist

$$u + \frac{v}{2} + \frac{v}{2}\sqrt{m} \sim 2u + v + v\sqrt{m}$$

i. B. a. p.

Ist also p ungerade, so können wir die wesentlich von einander i. B. a. p verschiedenen Primzahlen für alle p unter den Zahlen von der Form suchen $x + y\sqrt{m}$, wo x, y ganze rationale Zahlen sind. Sei also $\pi = x + y\sqrt{m}$. Wir erörtern zuerst den Fall $p \sim \pi^2$ i. B. a. p. Aus der Beziehung

$$\pi^2 = x^2 + my^2 + 2xy\sqrt{m} \sim p$$

i. B. a. p folgt, daß $x^2 + my^2$ und $2xy$ durch p teilbar sein müssen. Soll $2xy$ durch p teilbar sein, so muß x oder y durch p teilbar sein. Wäre y durch p teilbar, so würde aus dem

Umstande, dass x^2+my^2 durch p teilbar sein soll, die Teilbarkeit von x durch p folgen. Es wäre also π durch p teilbar, und es könnte nicht $\pi^2 \sim p$ i. B. a. p sein. Wir betrachten also den Fall, daß y nicht durch p teilbar, dagegen x durch p teilbar ist. Soll x^2+my^2 durch p teilbar sein, so muß m durch p teilbar sein. Und umgekehrt, ist m teilbar durch p, so ist $\pi=\sqrt{m}$, eine Primzahl i. B. a. p in $R(\sqrt{m})$, und es ist wirklich $\pi^2=m\sim p$, $N\pi=m\sim p$ i. B. a. p. Es gilt also der Satz:

Eine ungerade rationale Primzahl p zerfällt in $R(\sqrt{m})$ i. B. a. p in ein Quadrat einer Primzahl i. B. a. p dann und nur dann, wenn sie ein Teiler von m ist.

Setzen wir weiter voraus, p sei kein Teiler von m, und fragen wir, wann p in $R(\sqrt{m})$ in ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen i. B. a. p zerfällt, $p\sim\pi\pi'$ i. B. a. p, $\pi=x+y\sqrt{m}$, x, y rational ganz, $y\neq 0$, so ist aus der Beziehung $\pi\pi'=x^2-y^2m$ zu ersehen, daß $x^2-my^2\equiv 0$, $(x/y)^2-m\equiv 0 \pmod p$ sein muß, d. h. die Kongruenz $z^2-m \equiv 0 \pmod p$ muß lösbar sein. Umgekehrt, ist diese Kongruenz lösbar, so existiert eine Wurzel r von der Beschaffenheit, daß $r^2-m\not\equiv 0 \pmod{p^2}$ ist. Ist nämlich s eine Wurzel jener Kongruenz, sodaß $s^2-m\equiv 0 \pmod{p^2}$ ist, so erhalten wir, wenn wir $r=s+s'p$ setzen, $s=r-s'p$, $r^2-m-2s'p\equiv 0 \pmod{p^2}$, d. h. gewiß $r^2-m\equiv 0 \pmod p$; wenn s' nicht durch p teilbar ist, ist r^2-m nicht durch p^2 teilbar. Wenn wir $\pi=r+\sqrt{m}$, $\pi'=r-\sqrt{m}$ setzen, dann ist $\pi\pi'=r^2-m\equiv 0 \pmod p$, $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$, also wirklich $\pi\pi'\sim p$ i. B. a. p.

Eine rationale ungerade Primzahl p, die nicht in p aufgeht, zerfällt in $R(\sqrt{m})$ in ein Produkt von zwei nicht assoziierten Primzahlen i. B. a. p dann und nur dann, wenn die Kongruenz $z^2-m\equiv 0 \pmod p$ lösbar ist, d. h. wenn m ein quadratisches Rest mod p ist. Es bleibt also p eine Primzahl i. B. a. p in $R(\sqrt{m})$, wenn m ein quadratisches Nichtrest mod p ist.

Wir lenken jetzt unsere Aufmerksamkeit der Primzahl 2 zu Ist $m\equiv 2, 3 \pmod 4$, so ist die Basis der ganzen Zahlen (i. g. S.) aus $R(\sqrt{m})$ wieder $1, \sqrt{m}$. *Für $m\equiv 2 \pmod 4$ ist*

$\pi = \sqrt{m}, \pi' = -\sqrt{m} \sim \pi$, *d. h.* $\pi^2 \sim 2$ *i. B. a.* 2. *Für* $m \equiv 3$ (*mod* 4) *ist* $\pi = 1 + \sqrt{m}, \pi^2 \sim 2$ i. B. a. 2. Es ist nämlich $\pi\pi' = 1 - m \sim 2$ i. B. a. 2, $\pi - \pi' = 2\sqrt{m}$, d. h. $\frac{\pi}{\pi'} = 1 + \frac{2}{\pi'}\sqrt{m}$. Da $2/\pi', \sim \pi$ i. B. a. 2, ganz ist i. B. a. 2, so ist π/π' ganz i. B. a. 2 und eine Einheit i. B. a. 2, also $\pi \sim \pi'$ i. B. a. 2.

Ist $m \equiv 1 \pmod 4$, so wird die Basis der i. g. S. ganzen Zahlen aus $R(\sqrt{m})$ durch $1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m})$ dargestellt. Wir unterscheiden zwei Fälle $m \equiv 1$ und $5 \pmod 8$.

Für $m \equiv 1$ (*mod 8*), *d. h.* $m = 1 + 8m'$, *ist 2 assoziiert mit einem Produkt von zwei Primzahlen i. B. a. 2, die wesentlich von einander verschieden sind i. B. a. 2.* Wir können wählen $\pi = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{m}), \pi' = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{m})$. Dann ist $\pi\pi' = \frac{1}{4}(25 - m) = 6 - 2m' = 2[1 - 2(m' - 1)] \sim 2$ i. B. a. 2, $\pi - \pi' = \sqrt{m}, \frac{\pi}{\pi'} = 1 + \frac{\sqrt{m}}{\pi'}$. Da $\sqrt{m}$ eine Einheit i. B. a. 2 ist, so ist π/π' keine Einheit i. B. a. 2, sodaß gewiß π nicht $\sim \pi'$ i. B. a. 2 ist.

Für $m \equiv 5 \pmod 8$, *also* $m = 5 + 8m'$, *bleibt 2 eine Primzahl i. B. a. 2 in* $R(\sqrt{m})$. Für eine Primzahl π i. B. a. 2, $\pi = x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m})\, y$ muß $N\pi = (x + \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}my^2$ durch 2 teilbar sein, $x^2 + xy - \frac{1 - m}{4}y^2 \equiv 0 \pmod 2$ d. h. $x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod 2$ gelten. Diese Kongruenz kann nur durch $x \equiv 0, y \equiv 0 \pmod 2$ befriedigt werden. Es muß also π durch 2 teilbar sein, woraus folgt, daß in $R(\sqrt{m})$ 2 eine Primzahl i. B, a. 2 bleibt.

Wir sehen also, daß die Primzahlen zweiter Ordnung die Teiler der Diskriminante des Körpers $R(\sqrt{m})$ *sind.*

§ 29. Der quadratische Zahlkörper $K = R(\sqrt{-5})$.

Seine Basis ist $1, \sqrt{-5}$, Diskriminante -20. Die einzigen Primzahlen 2. Ordnung sind 2, 5. Es ist $(2) = (1 + \sqrt{-5})^2 = (1 - \sqrt{-5})^2$, $(5) = (\sqrt{-5})^2 = (\sqrt{-5})^2$. Weiter ist

$(3) = (1+\sqrt{-5})_3\,(1-\sqrt{-5})_3$, $(7) = (3+\sqrt{-5})_7\ \ (3-\sqrt{-5})_7$, 11 bleibt eine Primzahl in $R(\sqrt{-5})$. Es ist $6 = 2.3 = (1+\sqrt{-5})\,(1-\sqrt{-5})$. 2, 3, $1+\sqrt{-5}$, $1-\sqrt{-5}$ sind unzerlegbar im Integritätsbereiche I der ganzen Zahlen aus K. Es ist $(1+\sqrt{-5}) = (1+\sqrt{-5})_2\,(1+\sqrt{-5})_3$, $(1-\sqrt{-5}) = (1+\sqrt{-5})_2\,(1-\sqrt{-5})_3$. $(1+\sqrt{-5})_2$, $(1\pm\sqrt{-5})_3$ sind keine Haupdivisoren aus K; es ist aber $(1+\sqrt{-5})_2 = (\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{-5})_3 = (\sqrt{2-\sqrt{-5}})$, da $(1+\sqrt{-5})^2 = -2\,(2-\sqrt{-5})$ ist.

Ich bemerke noch: $1+\sqrt{-5}$, 3 sind zwar »teilerfremd in I«, aber trotzdem nicht teilerfremd. Es ist $(1+\sqrt{-5}\,,3) = (1+\sqrt{-5})_3$. Diese Zahlen sind nicht »teilerfremd in K,« da die Bedingung 2 (T. § 5 unten) (oder 2′ § 21. Satz 4) nicht erfüllt ist; z. B. für $\lambda = \frac{1-\sqrt{-5}}{3}$ sind

$$(1+\sqrt{-5})\ \frac{1-\sqrt{-5}}{3} = 2\ ,\ 3\ \frac{1-\sqrt{-5}}{3} = 1-\sqrt{-5}$$

zwar ganz, λ selbst aber nicht ganz.

Es gilt nicht für den »g. g. T. in I« der Satz 4 § 5 in T. Es ist $(1+\sqrt{-5}\,,3)_I \sim 1$

$$\big((1-\sqrt{-5})\ \ (1+\sqrt{-5})\ \ (1-\sqrt{-5})\ \ 3\big)_I \sim 3.$$

Resumé.

Sur la théorie de la divisibilité dans les corps algébriques numériques.

Soit P un ensemble de nombres premiers naturels. Si P n' est pas vide ($P \neq \Lambda$), je dirai que les nombres de la forme $p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, où $p_1, p_2, \ldots p_m$ sont de nombres premiers de P et $k_1, k_2, \ldots k_m$ de nombres rationnels entiers, sont représentables dans P. Si $P = V$ (V est l'ensemble de tous les nombres premier naturels) chaque nombre rationnel positif est représentable dans Λ. Si $P = \Lambda$ (Λ est l'ensemble vide), nous dirons que seulement le nombre 1 est représentable par Λ. Chaque nombre rationnel $a \neq 0$ peut être écrit en forme $a = a_1\, a_2$ sgn a, ou a_1 est représentable dans P et a_2 dans $\bar{P}$

($\bar{P}$ est l'ensemble de nombres premiers naturels qui ne sont pas contenus dans P). Nous poserons $a_1 = |a|_P$ et nommerons $|a|_P$ la valeur absolue de a p. r. à P (par rapport à P). Pour $a=0$ posons $|0|_P=0$. On a $|a|_\vee = |a|$; $|a|_\wedge = 1$ pour $a \neq 0$.

Un nombre rationnel a sera dit entier p. r. à P, si $|a|_P$ est entier au sens ordinaire du mot. Un nombre algébrique α est entier p. r. à P, s'il satisfait à l'équation de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ dont les coëfficients sont de nombres entiers p. r. à P. Les nombres algébriques rationnels p. r. à P constituent un domaine d'intégrité. Par la formation de quotients on obtient le corps de nombres algébriques rationnels. On peut définir la divisibilité et toutes les notions qui en dérivent. (Voir mon mémoire »Zur Theorie der Teilbarkeit«, ces Mémoirs II. cl., 1922/3, V).

On peut démontrer facilement que pour le corps de nombres rationnels, si l'on considère l'intégrité p. r. à P, ($P \neq \Lambda$), la valeur absolue p. r. à P, joue le rôle de la mésure. Si K est un corps algébrique numérique d'ordre fini et P un ensemble fini non vide, l'existence d'une mésure peut être aussi prouvé: on peut prendre $|N\alpha|_P$ comme mésure d'un élément α de K. Il en suit que dans un corps algébrique numérique K le p. g. c. d. (plus grand commun diviseur) existe, si on considère l'intégrité p. r. à un ensemble P fini. Si K est d'ordre fini, il existe dans K un nombre fini de nombres premiers algébriques p. r. à P essentiellement distincts et le théorème sur la décomposition essentiellement unique est valable.

Pour exprimer commodément les lois de divisibilité pour les nombres algébriques, j'introduis la notion de diviseurs. Ma définition a sur celle de M. Hensel l'avantage qu'elle est indépendente du corps dont on considère les nombres. Il en consiste aussi sa supériorité sur la théorie traditionnelle des idéaux. Je fais voir enfin le rapport mutuel de ces deux théories.

Pour le corps quadratique numérique je démontre d'une manière tout à fait élémentaire le théorème sur le p. g. c. d. p. r. à un ensemble fini de nombres premiers naturels et je considère la décomposition de nombres premiers naturels.

X.

Regenerace pohlavních orgánů u Rhynchelmis limosella Hoffm.

(Regeneration of the Reproductive Organs of Rhynchelmis limosella Hoffm.)

Napsal Dr. **Viktor Janda.**

Předloženo dne 14. prosince 1923.

(With english summary.)

Pracovní metoda a materiál.

Již od r. 1916 jsem se marně pokoušel dosíci u *Rhynchelmis* regenerace pohlavního ústrojí po odstranění celé přídy s 12—16 segmenty. Tehdejší své negativní nálezy jsem uvedl již dříve (1d). Úkolem mým bylo přesvědčiti se nejen o možnosti a rozsahu regenerace pohlavního aparátu tohoto druhu, nýbrž i vyšetřiti, jak dovede organismus *Rhynchelmis* využíti nepatrného prostoru regenerátu (který se v nejlepším případě skládá z pouhých 6—7 segmentů) k umístění tak složité soustavy orgánů, jako jest jeho rozplozovací ústrojí. Mimo to jsem chtěl zjistiti, objeví-li se u *Rhynchelmis* i za těchto, pro obnovu pohlavního okrsku nepříznivých okolností, mezi regenerovanými pohlavními orgány hyperplastické útvary, jaké se s překvapující pravidelností objevují v regenerátech přídy u *Criodrila* (*Criodrilus lacuum*), s nímž jsem již dříve konal podobné pokusy (1*b* 1*c* 1*d*). Dále bylo třeba zodpověděti otázku, zda jest regenerovaný pohlavní systém schopen normální činnosti a zdali se případné změny jeho stavby, vyvolané regenerací, dají dokázati i u potomstva operovaných zvířat.

R. 1919 v listopadu jsem operoval výše uvedeným způsobem 60 zvířat z labských tůněk v okolí Čelakovic. Z této

serie mi zbyli po roce pouze tři jedinci s dokonalými 6—7 člennými regeneráty, ale značně redukovaní. Jednoho z nich jsem 20./12. 1920 konservoval a na řezech u něho nalezl regenerované gonády pošinuté do předních segmentů. Na jedné straně těla byly tři a na druhé dvě. Z ostatních částí pohlavního ústrojí bylo lze rozeznati pouze prvé základy nálevek pohlavních vývodů. Ostatní dva jedince jsem ponechal na živu a občas revidoval, při čemž jsem shledal, že nedospěli pohlavně ani v zimních měsících r. 1920, ani v roce 1921 a že v září r. 1921 byli neobyčejně redukováni, dosahujíce pouze asi $3^1/_2$ cm délky a 0·9 mm tloušťky uprostřed těla. Přes to však byli velmi čilí.

Také v zimním období r. 1922 nedospěli pohlavně, ale od března počali opětně růsti a již v listopadu r. 1922 dosáhli délky asi 8 cm a tloušťky 2 mm. Teprve 4. března 1923, tedy po více než třech letech a třech měsících po operaci objevily se u nich první známky pohlavní dospělosti, zduření přídy a tu a tam prosvítající vaky chámové. Plného pohlavního rozvoje však tato zvířata přece ještě nedosáhla a v následujících týdnech zase známky pohlavnosti zanikly. Proto jsem je ponechal dále na živu doufaje, že příštím rokem dospějí úplně.

Kromě operovaných, pěstil jsem i několik normálních kontrolních zvířat, přibližně stejně velikých a z téhož naleziště ve stejnou dobu přinesených. Z nich jsem jeden exemplář choval odděleně od ostatních pro přesnější kontrolu a zjistil u něho:

I. pohlavní období v prosinci 1919.

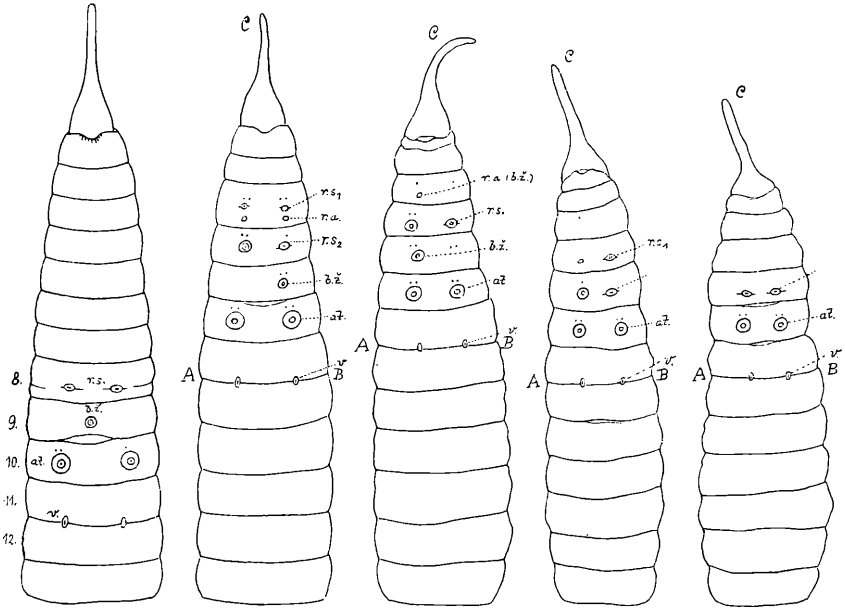
II. pohlavní období v prosinci 1920.

2./2. 1920 zanikání pohlavních znaků.
21./3 1920 úplné jich zmizení.
29./10. 1921 nápadnou redukci těla (vzhled mladého Lumbrikula), délka 3 cm, šířka sotva 1 mm.
V roce 1921 pohlavně vůbec nedospěl.
V březnu 1922 počátek nového vzrůstu.
5./11. 1922 první známky znovu počínající pohlavní dospělosti.

III. pohlavní období v březnu 1923 a vzrůst do normální velikosti.

Také ostatní zvířata prodělala celkem podobný vývoj.

Tato pozorování potvrzují údaje *Vejdovského a Mrázka*, že *Rhynchelmis* prodělává více pohlavních období. Jelikož



Obr. I. Přída normální, pohlavně dospělé Rhynchelmis s vnějšími otvory pohlavními (s břišní strany).

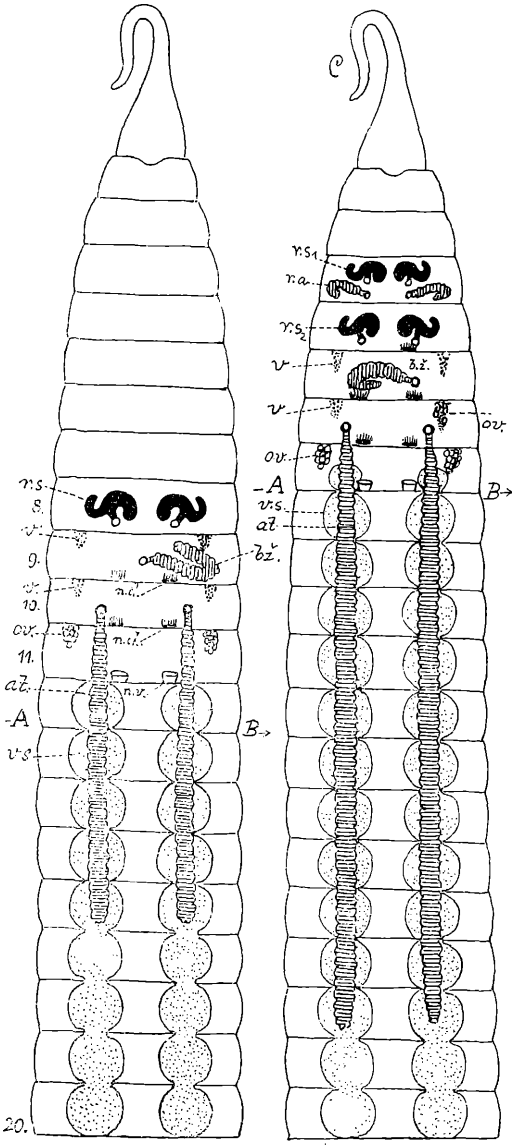
Obr. II.—V. Exempláře, jimž byla odříznuta celá přída s pohlavními ústroji a které znovu vytvořily regenerváty *ABC* s vnějšími pohlavními otvory. — *at.* = otvory atrií, *b. ž.* = otvor bílečné žlázy, *r. a.* = otvory zakrslých atrií, *r. s.* = ústí schránek chámových, *r. s*$_1$ a *r. s*$_2$ = ústí schránek chámových prvého a druhého páru, *v* = ústí vejcovodu. *ABC* = regenerovaná část těla, 8.—12. = 8.—12. segment.

jsem v roce 1919 použil k pokusům již dorostlých jedinců a udržel je na živu ještě v roce 1923, soudím, že život tohoto zvířete, předpokládáme-li, že k dosažení první pohlavní dospělosti potřebuje asi dvou roků, trvá déle šesti let.

I silná redukce těla, nemusí, jak uvedené nálezy dokazují, vésti nutně k smrti zvířete, nýbrž se může později opět dostavit období rychlého vzrůstu a nové pohlavní činnosti.

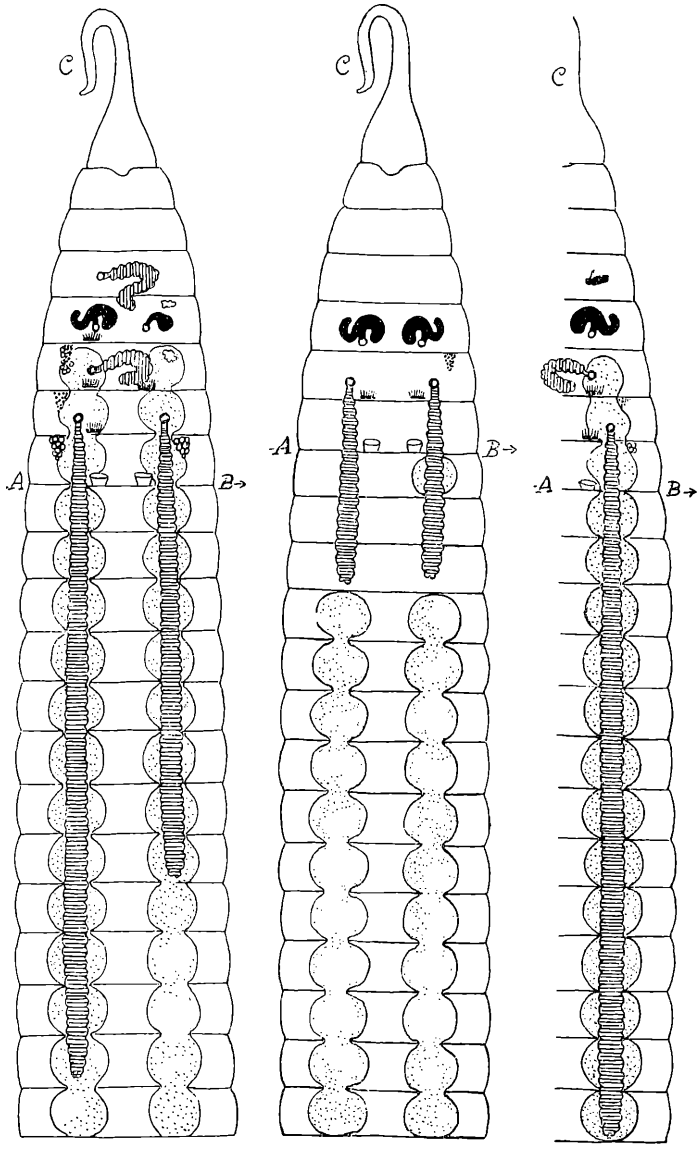
To platí r o operovaná, tak i pro normální zvířata. Pokud mohu souditi ze své dřívější pěstitelské prakse, n ebývá období redukce vždy tak snadno překoná- no jako v předešlých případech a zvíře v něm snáze podlehne nepříznivým životním podmínkám, než ve stavu p ného tělesného rozvoje.

V roce 1922 jsem se pokusil dosáhnouti lepších výsledků jednak tím, že jsem dobu operací přeložil v letní měsíce (červen, červenec, srpen) a provedl je nejen na starších zvířatech, nýbrž i na mláďatech vylíhlých nedávno z kokonů, jednak i tím, že jsem si opatřil materiál z jiného naleziště — tůněk a slepých ramen Dyje v okolí Podivína, Rakvic a Lednice na Moravě. V rybníku v parku lednickém jsem se přesvědčil, jak nepříznivé životní podmínky může snésti



VI. VII.

Obr. VI. Normální příd a pohlavně dospělé R h y n c h e l m i s s normálním pohlavním ústrojím. *AB* = výše, v níž byla příd a od ostatního těla odříznuta.



VIII. IX. X.

Obr. VII.—X. Přídy operovaných zvířat, jimž narostly regenerváty *ABC*, v nichž se znovu vytvořil pohlavní aparát. *at* = atrium, *b. ž.* = bílečná žláza, *n. ch.* = nálevky chámovodů, *n. v.* = nálevky vejcovodů, *ov* = vaječníky, *r. s* = schránky chámové (receptacula seminis) *r.* s_1 = schránky chámové prvého a *r.* s_2 druhého páru, *v* = varlata, *v. s.* = vaky chámové (vesiculae seminales). Chámovody nejsou zakresleny.

Rhynchelmis. Za velkého sucha byl totiž onen rybník téměř vyschlý a listí, jež pokrývalo silnou vrstvou jeho dno, bylo v nejvyšším stupni hnilobného rozkladu.

Operace jsem provedl podobně jako dříve prostým odříznutím 12—16 předních segmentů. Operovaná zvířata (asi 200 kusů) jsem rozdělil po dvou neb třech kusech do skleněných misek s čistou vodou, kterou jsem v prvých dnech obnovoval dvakrát denně a později do ní přisypal jemného písku, který se výborně osvědčil jakožto prostředek proti usazování plísní na ráně. Také vypraný mech (*Hypnum*) konal jakožto okysličovadlo dobré služby. Když se vytvořily zřetelné regenerační kužele, přenesl jsem operovaná zvířata do akvaria s bahnem navrstveným asi $1^1/_2$ *dm* vysoko, do něhož jsem nasázel různé vodní rostliny (*Sium*, *Sparganium*, *Glycera*, *Oenanthe*), v zimě též celer a nasel směs trávních semen. Bahno bylo vodou sotva zaplaveno a místy z ní i vyčnívalo. Akvarium bylo postaveno venku a tam ponecháno i v zimě za mrazu, takže mnohokráte úplně zamrzlo, což však zvířatům pranic neškodilo.

V letních měsících (o zimních viz moji práci citovanou sub. 1. d.) děje se obnova přídy i po ztrátě 12—16 segmentů, zvláště u mláďat, velice rychle. Tak na př. u čtyř z pěti mláďat, jimž byla 7. června odříznuta celá pohlavní krajina, objevil se již po 13 dnech velký regenerační kužel a u pátého čtyřčlenný regenerát s úplně vyvinutým bičíkem (proboscis). Mláďata právě z kokonů vylíhlá a operovaná v únoru 1921 (28./2.) měla po třech nedělích rány buď jen zacelené nebo zcela nepatrné regenerační pupeny. U některých zvířat získal jsem regeneráty až sedmičlenné. I při stejném počtu odříznutých segmentů a přibližně stejném stáří zvířat jsou však patrny velmi značné individuelní rozdíly v regenerační schopnosti, takže mezi jedinci s dokonale vyvinutými regeneráty nalezneme nezřídka i kusy s ranami pouze zacelenými, které patrných regenerátů vůbec nevytvoří.

Při revisi 15./11. 1922 jsem nalezl mezi operovanými jedinci, kteří činili většinou dojem normálních zvířat, pět dorostlých kusů s četnými prosvítajícími vaky chámovými a zduřelými přídami. Tato zvířata jsem od ostatních oddělil

a pozoroval zvláště, při čemž jsem zjistil, že za leden a únor dosáhla plné pohlavní dospělosti, spářila se a 4./3. 1923 snesla na *Fontinalis* první dva kokony zcela podobné normálním. V každém z nich bylo po čtyřech vajíčkách. V této době měly tyto exempláře přídu silně zduřelou a tělo téměř bílé od plných vaků chámových. Jest zajímavo, že *Rhynchelmis* z teplého Podyjí byly téměř v tutéž dobu pohlavně dospělé jako neoperovaná zvířata z Čelakovic, která byla od r. 1919 pěstována v zajetí jednak společně, jednak odděleně.

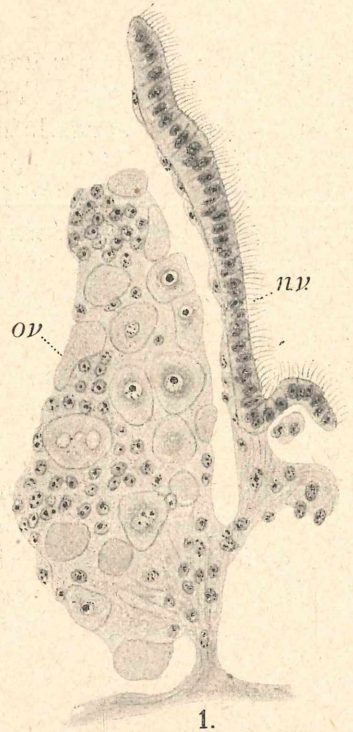
Dne 8./3. 1923 jsem nalezl mezi kořeny třetí starší kokon, v němž již byla malá embrya a konečně dne 20./3. byl snesen čtvrtý a poslední kokon s osmi vajíčky.

22./3. se vylíhlo mládě zcela normálního vzhledu a velmi čilé, které bylo as 18 mm dlouhé a 0·35 mm široké V následujících dnech opustilo kokony ještě dalších 14 mláďat. Tato mláďata rostla velmi rychle, takže již v červnu téhož roku dosáhla téměř dvojnásobné délky a šířky. Tím byl podán důkaz, že pohlavní systém byl v regenerátu nejen znovu vytvořen, nýbrž že jest i schopen normální funkce.

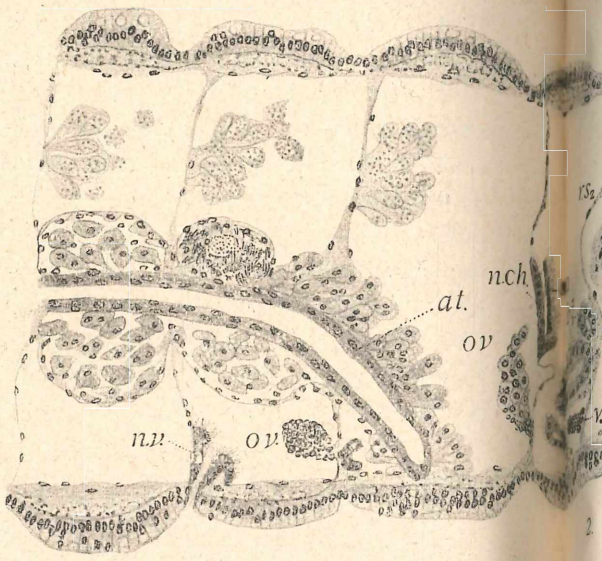
Dvě z těchto mláďat jsem v červnu konservoval a na preparátech z nich zhotovených zjistil, že jejich gonády (3 páry) ležely v týchž segmentech jako u zvířat normálních. Jest nasnadě, že i ostatní části jejich pohlavního aparátu, které se vyvinou teprve později, budou míti asi tutéž polohu a budou v témže počtu jako v normálním těle. Ostatní mláďata jsem přenesl do akvaria osázeného hojným rostlinstvem, k dalšímu chovu, bych mohl později rozhodnouti, zda se zrůdnosti pohlavního ústrojí, které jsem mezitím zjistil u jejich rodičů, objeví alespoň částečně také u nich.

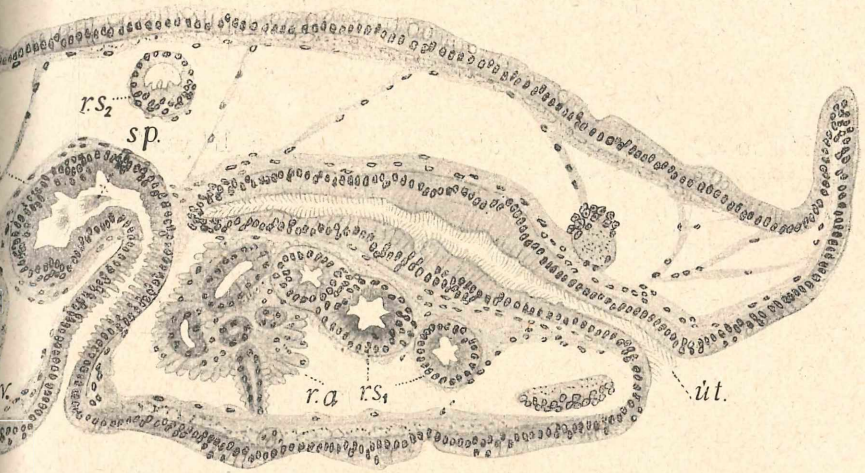
Když operované *Rhynchelmis* již žádných kokonů nesnášely, odřízl jsem čtyřem z nich regenerované přídy, které jsem rozložil v řezové serie, chtěje vyšetřiti stav regenerovaného pohlavního aparátu. Pátý exemplář jsem ponechal na živu pro studium vývoje a stavby gonád v letních měsících, poněvadž v době snášení kokonů jsou tyto orgány většinou rozpadlé.

Ze svých záznamů o době snášení kokonů normálními zvířaty v zajetí a líhnutí mláďat uvádím tato data:

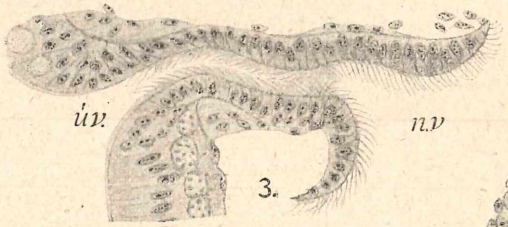


1.

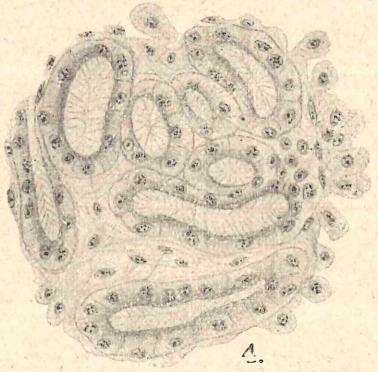




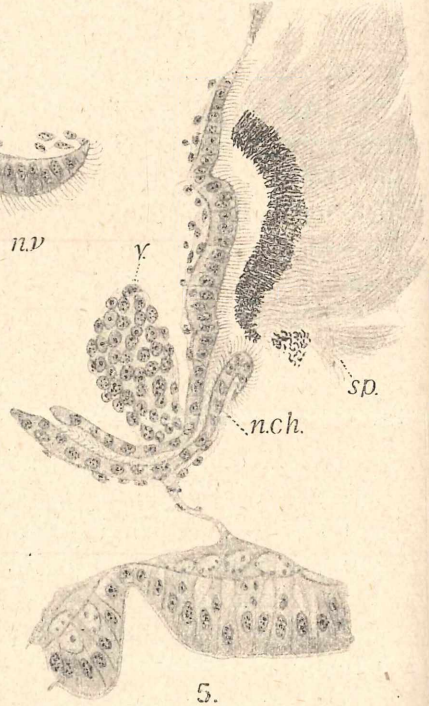
2.



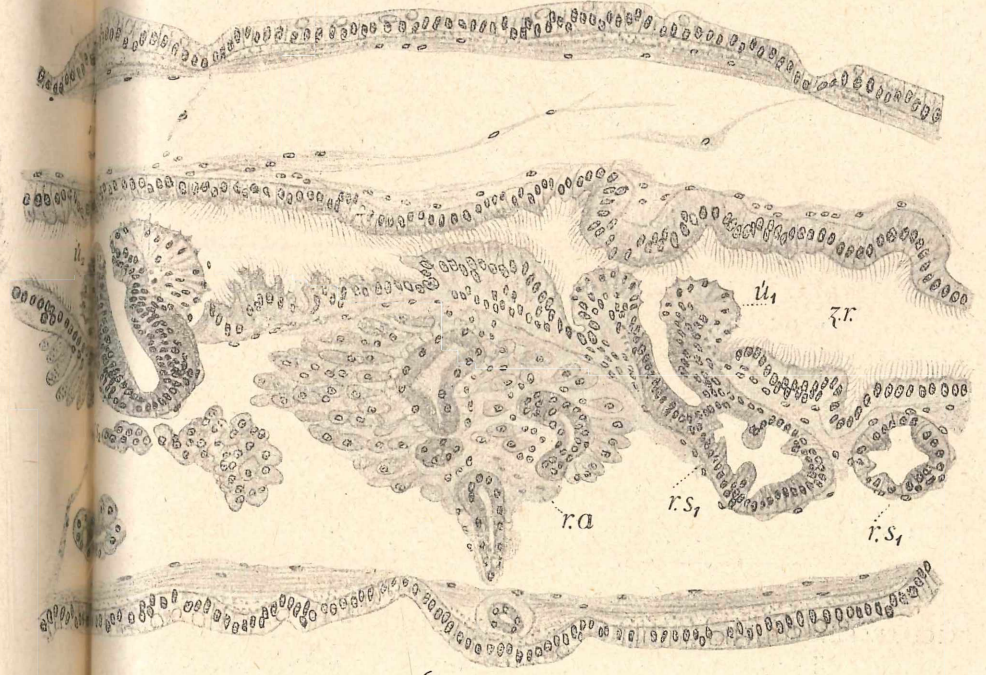
3.



4.



5.



6.

Výklad str. 18.

R. 1910	snášeny kokony	od 14./3. — 25./3.	Líhnutí počalo 6./4.
R. 1911		v lednu	7./2.
R. 1921		od 4./1. — 15./1.	2./2.
R. 1923		19./3. — 30./3.	8./4.

Mimo dříve uvedená naleziště sbíral jsem Rhynchelmis též u Nymburka, Pardubic a u Břeclavě.

Normální pohlavní ústrojí Rhynchelmis.

Dříve než přistoupím k pojednání o regenerovaném pohlavním systému *Rhynchelmis*, nutno říci několik slov o jeho poloze a stavbě v normálním těle. Popis a velmi instruktivní vyobrazení tohoto ústrojí podal již r. 1876 Vejdovský (4*a*) a jeho údaje, později jen nepatrně pozměněné, dovolují nám podati jeho úplný obraz. Ze schematických vyobrazení č. I a VI, která jsem sestavil a připojil k textu, vidno, že normální rozplozovací ústroje *Rhynchelmis* vyúsťují v 8. až 12. segmentu. Části jejich jsou: V 8. segmentu dvě schránky chámové (receptacula seminis), které se otevírají na povrch těla na břišní straně téhož segmentu dvěma souměrně uloženými otvory. Již Vejdovský pozoroval ve stěně těchto orgánů malou štěrbinu a později objevil Mrázek (3*a*), že vedle vnějšího ústí mají ještě ústí vnitřní, jímž se otvírají do zažívací roury, podobně jak to nalezl Beddard u rodu *Sutroa*. Poněvadž toto vnitřní ústí jest obdáno silnou vrstvou svěracích svalů, jest pravděpodobno, že může býti libovolně otevřeno neb uzavřeno. Nejsprávněji se zdá vystihovati význam tohoto zjevu výklad Mrázkův, že jest to jednoduché zařízení k vypouštění přebytečného spermatu ze schránek chámových do zažívacího ústrojí. Skutečně také nalezl Mrázek u pohlavně zralých exemplářů sperma i uvnitř zažívací roury, což i já mohu potvrditi. O této zvláštnosti se zmiňuji proto, že jsem ji nalezl také v regenerátech. (Viz níže.) V 9. segmentu leží orgán upomínající anatomickou stavbou na atrium, který považuje Vejdovský za »bílečnou žlázu« (Eiweissdrüse) a Michaelsen za »zakrslé atrium« (»Rudimentäres Atrium ohne dazugehörige Samenleiter«). Tento orgán vyúsťuje uprostřed 9. segmentu, v němž na dissepimentu 8/9 přirůstá první pár volných varlat, proti nimž leží, jak jsem zjistil, první

pár velmi dokonale vyvinutých vířivých nálevek*) předních chámovodů. Nálevky chámovodů jsou sice značně široké, sahajíce často až do hřbetní části dissepimentu, ale velmi ploché, takže jen nepatrně odstávají od jeho stěny. Ústí jejich má husté vířivé brvy. V 10. segmentu na dissepimentu 9/10 přirůstá druhý pár varlat s příslušnými protilehlými dvěma nálevkami zadních chámovodů. Na břišní straně 10. segmentu vyúsťují dvě rourovitá atria na velkých kruhovitých žlaznatých polštářích (♂ pory.) Do každého atria ústí dva chámovody téže strany těla. Každý z nich má podobu dlouhé roury, jejíž nálevkovité ústí bývá v době pohlavní zralosti téměř ucpáno spermatem.

Dle vyobrazení Vejdovského (4a tab. XXII, obr. 6.) sahají atria od 10. až do 13. segmentu, kdež končí slepě. Nalezl jsem je u normálních zvířat často tak prodloužena, že zaujímala 6, 7 ano i 9 segmentů, někdy však byla též kratší, takže se shodovala rozlohou s vyobrazením Vejdovského. Celkem kolísá délka těchto orgánů velmi značně, jak bude ještě později pověděno u regenerovaného pohlavního ústrojí. Atria jsou obalena žlazami, které Vejdovský pojmenoval »Prostata« a které sahají až k jejich ústí. Penis schází. Kolem ústí atrií jest uvnitř těla velký počet okrouhlých neb kyjovitých žlaz s hrubozrným hnědým obsahem (p. 351.), které vyúsťují na povrch těla kolem otvorů atrií a vylučují výměšek, který nejspíše při páření vytéká. V 11. segmentu přirůstá k dissepimentu 10/11 jeden pár vaječníků, proti nimž leží na rozhraní 11. a 12. segmentu dvě, od dissepimentu silně odstávající nálevky krátkých vejcovodů, které vyúsťují v intersegmentální rýze na dvou malých eliptičných vyvýšeninách (♀ pory).

Pohlavní otvory leží za břišními štětinami příslušných segmentů. Bělavě prosvítající vaky chámové (vesiculae seminales), považované dříve za varlata, táhnou se podle Vejdovského (4a p. 347.) po obou stranách břišního pásma od 13. až do 50. ano i 54. segmentu. Já jsem je nalezl až i v 9., 11. a 12. segmentu. Na jedné straně těla sahají často dále nazad než na druhé a mají podobu vakovitých orgánů, růžen-

*) Vejdovský kreslí chámovody bez nálevek.

covitě stažených septy. Spermatozoa jsou dlouhá, vláskovitá a mají hlavičky šroubovitě stočené.

Abych z vlastního názoru poznal stavbu normálních pohlavních orgánů *Rhynchelmis*, jakož i stupeň stálosti jejich polohy u různých individuí, vyšetřil jsem na řezech třicet normálních pohlavně dospělých zvířat a shledal, že se až na shora uvedené odchylky úplně shodují s popisem. Vnější pohlavní otvory se dají dobře pozorovati i na tvrzeném materiálu. Sešinutí polohy pohlavních otvorů na jiné segmenty, než jak uvedeno, jsem nepozoroval. Pouze ústí »bílečné žlázy« (rudim. atria), které často silně odstává od povrchu těla jako konický hrbol, neleží vždy uprostřed 9. segmentu, nýbrž bývá silně pošinuto k jedné straně.

Regenerované pohlavní ústrojí Rhynchelmis.

Poměry, které jsem u čtyř konservovaných jedinců s regenerovanými přídami zjistil, jsou tyto: Vzhled normální, proboscis dokonale vyvinutý, poloha samčích a samičích otvorů však jiná než u normálních zvířat.

Exemplář č. 1. (Obr. II a VII). Zevně zjištěno: Na 3. značně rozšířeném segmentu (nejspíše splynulině dvou segmentů) dva otvory schránek chámových a za nimi dvě malá ústí zakrslých atrií. Na 4. segmentu velmi dobře vyvinuté otvory druhého páru schránek chámových, na 5. segmentu jeden menší otvor »bílečné žlázy« (zakrslého atria) a na 6. segmentu dvě velká ústí atrií. Zajímavo jest neobyčejné pošinutí pohlavních otvorů směrem k hlavě, zvláště u schránek chámovych a zakrslých atrií až do 3. segmentu.

Na řezech nalezeny dvě dokonale vyvinuté schránky chámové nedaleko za zauzlinou mozkovou. Vedle vnějšího ústí těchto ústrojů bylo na řezech zachyceno velmi pěkně i jejich vnitřní ústí do zažívací roury. Histologické jeho podrobnosti se úplně shodují s těmi, které popsal Mrázek pro normální zvířata; rozdíl jest pouze ten, že zde bylo uskutečněno spojení obou tak různorodých orgánů na zcela jiném místě zažívacího traktu než v normálním těle (nedaleko za ústy). Drobnohledná stavba regenerovaných schránek chámových (podobně jako ostatních součástí regenerovaného

pohlavního ústrojí) se úplně shoduje s normální a také tvar a velikost regenerovaných schránek chámových jest u tohoto zvířete skoro táž jako normální. Hned za prvým párem schránek chámových leží v témže segmentu dvě zakrslá atria bez chámovodů, ale se zřetelnými vnějšími otvory. Tato atria jsou stočena a silně stlačena mezi prvým a druhým párem obou schránek (S. 8 a 9, obr. 2, 4 a 6). Ve 4. segmentu leží druhý, velmi dokonale vyvinutý pár schránek chámových, který jest podobně jako prvý spojen se zažívací rourou. V jeho dutině jsem nalezl chuchval zralého spermatu (S. 8 a 9, obr. 2, rs_2). Na septu 4/5 po pravé straně jest upevněna vířivá nálevka chámovodu, která pravděpodobně náleží k zakrslému atriu v segmentu pátém a otevírá se do dutiny čtvrtého segmentu. K dissepimentu 4/5 přirůstá první pár varlat. Na septu 5/6 jsou upevněny dvě dobře vyvinuté nálevky chámovodů s chumáči spermatu (S. 8 a 9, obr. 2 a 5, sp.). Na zadní straně tohoto septa leží druhý pár gonád, z nichž pravá jest vaječníkem (S. 8 a 9, obr. 1.) a levá varletem. V 6. segmentu vyúsťují mohutná atria stavbou úplně podobná normálním, která se neobyčejně prodloužila a prorostla až do 18 segmentu, takže zabírají 13. segmentů. Tato atria mají po dvou velmi dokonalých chámovodech, k nimž náleží dříve uvedené nálevky na dissepimentu 5/6 a dvě nálevky na septu 6/7. Také v nich byla hojnost spermatu. V segmentu 7. leží jeden pár vaječníků, proti nimž se otevírají dvě typicky vyvinuté nálevky krátkých vejcovodů, jejichž ústí na povrch těla se dá na řezech velmi pěkně sledovati (S. 8 a 9, obr. 3). Vaky chámové počínají v 7. segmentu. První z nich jsou malé. Stavba tohoto rozplozovacího ústrojí jest zajímavá nejen značným sešinutím jeho ložek směrem k přídě, nýbrž i zmnožením schránek chámových, zakrslých atrií a částečně i chámovodů, což velmi upomíná na případy, jaké nalezl Mrázek (3*b*) u neoperovaných, pohlavně dospělých jedinců *Lumbrikula* (*Lumbriculus variegatus*). Zmnožení gonád, jaké jsem pravidelně nalezl v regenerátech pohlavní krajiny *Criodrila* (1*b*, 1*c*, 1*d*) zde sice nenastalo, ale zato se místo pravého varlete v segmentu 6. vyvinul vaječník, což se často děje i v regenerátech *Criodrila*. Nutno ovšem podotknouti, že v době nejvyšší pohlavní činnosti, v níž byla zvířata konservována, jsou pohlavní žlázy

většinou rozpadlé, takže se nedají všude dobře dokázati. Mimo to jest asi i nepatrný počet regenerovaných segmentů na závadu značnějšímu zmnožení pohlavních žláz.

Ačkoliv byly vnější pohlavní otvory přešinuty na zcela jiné části těla než u normálních zvířat, přece se tento exemplář Rhynchelmis s druhými, podobně abnormálními zvířaty plodně spářil a snesl kokony. Zdá se, že zde při oplození hraje i chemotaxe spermatu důležitou úlohu. Jest podivuhodné, jak důmyslně zde řešil organismus *Rhynchelmis* úlohu, aby při tak malém počtu regenerovaných segmentů mohl do nich směstnati nejen celý svůj nově vytvořený pohlavní aparát, nýbrž mohl si při tom ještě dovoliti přepych hyperplasií.

Exemplář č. 2. (Obr. III a VIII). Otvor zakrslého atria na třetím segmentu jest sešinut poněkud k levé straně. Jeden pár vývodů schránek chámových na 4. segmentu, pravostranný menší. Na 5. segmentu dokonale vyvinuté a k levé straně pošinuté ústí zakrslého atria a na 6. segmentu dva rovněž dobře patrné otvory atrií, ústící na žlaznatých vyvýšeninách. Na rozhraní 7/8 segmentu párová ústí vejcovodů. — Na řezech nalezeno ve 3. segmentu rudimentérní atrium bez chámovodů a v segmentu 4. dvě schránky chámové, z nichž pravá jest vyvinuta slaběji. Na pravé straně téhož segmentu leží shluky buněk, které se zdají býti prvými základy atria. Podobná, více vyvinutá skupina buněk byla nalezena též v pravé polovině segmentu pátého. Na septu 4/5 na levé straně leží lichá nálevka, náležející nejspíše k zakrslému atriu v 5. segmentu. Na levé straně 5. segmentu jest k septu 4/5 přirostlý velký vaječník. V tomto segmentu jsou též první dva souměrně uložené vaky chámové. Na dissepimentu 5/6 přirůstají nálevky chámovodů, náležejících k atriím, která vyúsťují na 6. segmentu. Jedno zabírá 14 a druhé 10 segmentů. Na dissepimentu 6/7 jest pouze jedna nálevka chámovodu na levé straně. Pár vaječníků leží na septu 6/7 v 7. segmentu a proti nim dvě nálevky vejcovodů.

Exemplář č. 3. (Obr. IV a X.) Na 4. segmentu dva otvory schránek chámových, z nichž jest levý zakrnělý. Na 5. segmentu dvě ústí zakrslých atrií (pravé menší) a na 6. segmentu dva velké otvory atrií. Na intersegmentální rýze 7/8 vývody obou vejcovodů. — Pro nedokonalost řezové serie

mohl jsem vyšetřiti na preparátech z tohoto zvířete vnitřní stavbu pouze jedné poloviny těla. Shledal jsem, že ve 3. segmentu leží velmi zakrslá schránka chámová (vývodu jejího jsem nenašel) a ve 4. segmentu na pravé straně velká schránka chámová s vývodem a s chuchvalem spermatu uvnitř. V 5. segmentu bylo zakrslé atrium a na dissepimentu 5/6 a 6/7, nálevky chámovodů spojených s atriem, které ústí v 6. segmentu a sahá od 6. až do 20. segmentu zabírajíc 15 segmentů. Na septu 5/6 leží malá gonáda nezřetelného charakteru a na septu 6/7 zcela nepatrný zbytek rozpadlého vaječníku, proti němuž trčí nálevka vejcovodu. Poněvadž jsem našel při pozorování »in toto« vnější vývody pohlavních orgánů párově a souměrně uložené na segmentu 4., 5., 6. a 7/8 lze očekávati, že anatomické poměry druhé strany těla jsou obdobné. Vaky chámové počínají v segmentu pátém.

Nejjednodušší stavbu regenerovaných pohlavních orgánů jsem našel u exemplář e č. 4. (Obr. V a IX.) Zde jsem nalezl na povrchu těla pouze dva vývody schránek chámových na 4. segmentu, dva velké otvory atrií na segmentu pátém a dvě ústí vejcovodů na intersegmentální rýze 6/7. — Anatomickým vyšetřením souhlasně zjištěna přítomnost dvou dobře vyvinutých schránek chámových ve 4. segmentu, malá gonáda na pravé straně na septu 4/5 a malá atria vyúsťující v 5. segmentu, k nimž patří pouze po jediném chámovodu na každé straně. Atria jsou velmi krátká a zabírají necelých 5 segmentů, sahajíce z 5. do 9. segmentu. Zakrslé atrium (»bílečná žláza«) mezi nimi a schránkami chámu úplně schází. Vaječníky u tohoto jedince byly úplně rozpadlé a neznatelné, ač příslušné dva vejcovody na septu 6/7 byly dobře zachovány. Zakrslý vak chámový jsem nalezl na pravé straně již v segmentu 7. Řada normálně vyvinutých vaků chámových počíná až v segmentu desátém. V dutině tělesné jsem nalezl hojnost spermatu. Zmínky zasluhuje, že jsem sperma nalezl i v zažívací rouře operovaných i normálních zvířat, čímž by bylo podepřeno dříve uvedené mínění Mrázkovo o významu spojení schránek chámových se zažívací rourou, jak pro normální, tak i pro regenerovaný pohlavní systém *Rhynchelmis*.

Všeobecné poznámky.

Srovnáme-li právě vylíčené nálezy s poměry u *Criodrila*, jak jsem je dříve (1*b*, 1*c*, 1*d*) popsal, shledáme, že se i u *Rhynchelmis* zřetelně projevuje tendence k vytváření hyperplasií, byť i nebyla zde tak nápadná jako u předešlého druhu. Také není u *Rhynchelmis* zjevem všeobecným, neboť v regenerátu její pohlavní krajiny může dojíti nejen k zmnožení jednotlivých složek pohlavního ústrojí, nýbrž naopak i k značnému zjednodušení jeho stavby. Vůbec se zdá vysvítati již z těchto několika případů, které jsem dosud mohl prozkoumati, že u *Rhynchelmis* jest variabilita regenerovaných pohlavních orgánů asi podobného rázu jako u *Lumbrikula*, jak ji popsal Mrázek (3*b*, 3*c*) ve svých důkladných studiích na neoperovaných a z volné přírody přinesených pohlavně dospělých jedincích. Mohla by snad býti označena jakožto variabilita všesměrná, t. j. v nejrozmanitějších směrech kolísající na rozdíl od jednosměrné variability *Criodrilovy* směřující výhradně k hyperplasiím.

O nějakém význačnějším sešinutí obojetného pohlavního charakteru operovaných jedinců ve smyslu samičím, jak se o něm zmiňuje Mrázek u *Lumbrikula* (3*b*) a jak jsem jej nalezl u *Criodriodrila* (1*b*, 1*c*, 1*d*) (zmnožení vaječníků a vejcovodů na úkor varlat a samčích vývodů), nelze zde zatím mluviti. První náběhy k němu bylo by snad možno spatřovati v zastoupení varlete vaječníkem u exemplářů č. 1. a č. 2. (obr. VII a VIII.) Možná, že se toto sešinutí samčího charakteru gonád objeví ještě patrněji v dalším materiálu, který mám dosud na živu a který hodlám zpracovati v době příznivější pro vývoj gonád.

Pokud se týče otázky, z kterých částí těla zbylého po operaci se v regenerátu tvoří nové pohlavní žlázy, musím se omeziti pouze na uvedení několika možností: stavební materiál pro nové gonády mohl by se vytvořiti buď pouhou metaplasií buněk starých neporušených pletiv (z peritonea neb buněk u něho ležících), aneb z málo rozrůzněných a po těle roztroušených buněk embryonálního charakteru, které jsou obdařeny velikou vývojovou a tvůrčí schopností a podobají se »neoblastům«, které jsem již dříve (1*a*) nalezl u *Rhynchelmis* nejen v regenerátech zádě, nýbrž i v neporušených

segmentech středních a zadních oddílů těla. Konečně by zbývala ještě třetí možnost, že by se totiž mohly nové pohlavní žlázy tvořiti v regenerátu přídy oběma uvedenými způsoby zároveň. — Neoblasty lze v zadních segmentech snadno rozeznati od ostatních buněk nejen velikostí, nýbrž i celkovým vzhledem, jímž velmi upomínají na mladá vajíčka. Na přídě jsem dosud neoblastů nenalezl, nebo snad správněji řečeno, nedovedl jsem jich mezi ostatními buňkami rozeznati. Tím ovšem není vyloučena možnost mého druhého předpokladu.

Obtížné studium vzniku a vývoje všech složek pohlavního systému v regenerátu přídy *Rhynchelmis* ponechávám si pro pozdější dobu.

Dodatek.

15. července 1923 odřízl jsem 43 prostředně velikým a dorostlým exemplářům *Rhynchelmis* přineseným z okolí Břeclavě 11 a více předních segmentů. Při revisi 30./12. 1923 zbylo z nich na živu 27 kusů, z nichž mělo 19 velmi dokonalé 5, 6—7 členné regeneráty přídy s dlouhými bičíky. 17 z nich nejevilo dosud známek pohlavní dospělosti, dva exemplá ře však byly úplně pohlavně dospělé a měly zduřelé přídy i četné vaky chámové. 5 vytvořilo jen menší regeneráty o 2, 3—4 segmentech a 3 měly jen zacelené rány s malými regeneračními pupeny. Výsledky zpracování tohoto materiálu podám později.

Nemohu nevzpomenouti účinné podpory v mé práci, které se mi dostalo od p. p. univ. profesorů Dra. Fr. Vejdovského a předčasně zesnulého Dra Al. Mrázka. Opatření potřebného materiálu *Rhynchelmis* z Moravy bylo mi velmi usnadněno přátelskou obětavostí p. univ. prof. Dra J. Zavřela a kuratoriem zoologické stanice v Lednici, které mi umožnilo delší pobyt na této stanici. Všem vzdávám uctivý dík.

V Praze v listopadu 1923.

SEZNAM UŽITÉ LITERATURY:

1. Janda V.: *a*) Über die Regeneration des centr. Nervensystems und Mesoblasts bei Rhynchelmis. Sitzb. d. Kön, böhm. Ges. d. Wiss. 1902.
b) Die Regeneration der Geschlechtsorgane bei Criodrilus lacuum Hoffm. I. Teil. Arch f. Entw. Mech. d. Organ. Bd. 33. 1912.
c) Die Regeneration der Geschlechtsorgane bei Criodrilus lacuum Hoffm. II. Teil. Ibidem. Bd. 34. 1912. — (Ve výtahu i ve Věstn. Král. čes. spol. nauk v Praze 1912.)
d) Nové zprávy o regeneraci pohlavních orgánů Oligochaetů. Věstn. Král. čes. spol. nauk. v Praze 1918. Něm. výtah v Anat. Anzeiger. 50. Bd. No. 21/22, 1918.

2. Michaelsen W.: *a*) Oligochaeta, in: Tierreich. Lief. 10.
b) Süsswasserfauna Deutschlands: Oligochaeta Hft. 13.

3. Mrázek Al. *a*) Die Samentaschen von Rhynchelmis. Sitzb. d. Kön. böhm. Ges. d. Wiss. Jhg. 1900. No 35.
b) Die Geschlechtsverhältnisse und die Geschlechtsorgane von Lumbriculus variegatus. Gr. Zool. Jahrb. Vol. 23. Anat. Abt. 1906.
c) Beiträge zur Naturgeschichte von Lumbriculus. Sitzb. d. Kön. böhm. Ges. d. Wiss. Jhg. 1913.

4. Vejdovský Fr. *a*) Anatomische Studien an Rhynchelmis limosella Hoffm. Zeitschr. für wiss. Zool. Bd. 27. 1876.
b) System u. Morphologie der Oligochaeten Prag 1884.
c) Zrání, oplození a rýhování vajíčka. Jubil. spis Král. čes. spol. nauk. Praha 1887.
d) Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen Prag 1888 - 92.
e) Zum Problem der Vererbungsträger. Prag 1912.

VÝKLAD obr. 1—6, str. 8—9.

(Všechny obrázky byly kresleny kreslicím přístrojem Abbéovým.)

Obr. 1. Regenerovaný vaječník s nálevkou vejcovodu. Leitz. Oc. 5, obj. 3, tubus 190 mm (výše stolu.)

Obr. 2. Podélný vertik. řez regenerátem přídy a jedním starým segmentem. Leitz Oc. 1, obj. 3, tubus 150 mm. v. st.

Obr. 3. Regenerovaný vejcovod s vnějším ústím a nálevkou. Leitz Oc. 3, Obj. 3, tubus 190 mm (v. st.)

Obr. 4. V klubko svinuté zakrslé regenerované atrium, které bylo vtěsnáno mezi první a druhý pár regenerovaných schránek chámových. Leitz Oc. 5, obj. 3, tubus 156 mm. (v. st.)

Obr. 5. Počátek regenerovaného chámovodu s nálevkou, v níž jest zachycen mohutný chomáč zralého spermatu. Leitz Oc. 3, obj. 3, tubus 182 mm (v. st.)

Obr. 6. Podélný vertik. řez regenerovanými segmenty, v nichž vyúsťují schránky chámové prvého a druhého páru do zažívací roury. Leitz Oc. 3, obj. 3, tubus zatažen (v st.)

Značky.

at. — atrium.
b. ž = bílečná žláza Vejd. (rudim. atrium Michs.)
n. ch. = nálevka chámovodu.
n. v. = nálevka vejcovodu.
ov. = vaječník.
r. a. = zakrslé (rudimentérní) atrium.
r. s_1 = schránka chámová prvého páru.
r. s_2 = schránka chámová druhého páru.
sp. sperma.
$\left.\begin{matrix} ú_1 \\ ú_2 \end{matrix}\right\}$ = ústí schránek chámových 1. a 2. páru do zažívací roury.
út. = ústní otvor.
ú. v. = ústí vejcovodu.
z. r = zažívací roura.

Summary.

Regeneration of the Reproductive Organs of Rhynchelmis limosella Hoffm.

By Victor Janda.

It was as early as the year 1916 that I vainly tried, after cutting off the whole anterior part of the body containing 12 to 16 segments, to bring about a regeneration of the reproductive organs in *Rhynchelmis*. By these experiments I not only wished to convince myself of the existence and the degree of this regenerative ability but also intended — apart from other questions — to investigate whether and in

what manner the organism of *Rhynchelmis* is able to make use of the limited space of the regenerated part of the body (which, at the best, is composed of only 6 to 7 segments) for the creation of new reproductive organs, and whether, even there, similarly as in *Criodrilus*, in spite of these unfarourable circumstances, parts of the reproductive organs are developed in a greater number than normally (hyperplastic forms). My further task was to ascertain whether some eventual changes in the structure ot the regenerated reproductive system might appear even in the descendants of the animals operated upon.

In November 1919 I operated on 60 specimens in the manner described. Only three were left with perfect regenerated anterior parts containing six to seven joints.

I preserved one of them and discovered in its sections only three regenerated gonads with spermiducts and oviduct-funnel on one side of the body, and two on the other which were considerably displaced toward the head. The rest of the animals I let live constantly observing them. Not before the 4th of March, 1923, that is 3 years and 3 months after the operation the first symptoms of sexual maturity became visible in them. These signs however vanished in the following weeks, so that these animals even now are not entirely sexually developed. Therefore I continue to breed them, hoping they would become fully matured during the next year. For the purpose of observation I bred some normal specimens of about the same size and habitat simultaneously with those upon which I had operated. All these specimens were taken at the same time. From these normal specimens I isolated one for more exact observation and ascertained concerning it:

First sexual period in December 1919.
Second 1920.

February 2nd 1920: Decrease of signs of sexual maturity.

March 20th 1920: Complete disappearance of same.

October 29th 1921: A striking decrease of the body in size. Length 3 centimetres, breadth scarcely 1 millimetre)

In 1921: Sexually undeveloped.

November 5th 1922: First indications of reappearance of sexual maturiry.

Third sexual period — growth to normal size.

The other specimens also went through a similar process of development.

These observations prove the statements of VEJDOVSKÝ and MRÁZEK: that *Rhynchelmis* goes through several sexual periods.

The observations just recorded prove that the season of reduction need not always lead to the death of the animal, but that, on the contrary, there may follow a season of fast growth and intense sexual activity, although of course in the state of reduction the animals may easier succumb to unfavourable conditions of life than animals with fully developed bodies.

In 1922 I tried to gain better results by changing the time of operation to the summer months (June, July and August) and by performing it not only on grown specimens but also on young ones, which had recently crept out of the cocoon and which hat been taken from another locality (the environs of Lednice in Moravia.) I performed the operation, in a similar manner as before, by taking off 12 to 16 of their anterior segments. I transferred the mutilated animals into an aquarium filled with a bed of mud abundantly planted with hydrophytes and covered with only a thin layer of water. Although the aquarium was put up out-of-doors and was left there during the winter even in freezing weather, so that it froze over several times the animals were not harmed at all.

Concerning the development of the regenerated anterior part of the body, there are many individual differences between various animals, even if they are of the same age. At the examination on November 15th 1922 I found among the specimens operated upon five grown ones with numerous vesiculae seminales and swollen anterior parts of the body, which in the course of January and February became fully sexually mature, and on the 4th of March, 1923, they laid the first two cocoons on *Fontinalis* which were quite similar to normal ones. Each of them contained four eggs.

It is interesting to note that *Rhynchelmis* from the warm

south of Moravia became sexually mature at the same time as the normal animals from Čelakovice (Bohemia) which were kept in captivity from the year 1919. During the following days, till the 20th of March, two more cocoons were laid. In one of these I found several embryos; in the other, 8 eggs. The young ones which crept out soon after, and of which there were 15, were quite normal, very lively, and grew so rapidly, that as early as June of the same year they had increased nearly twice their length and breadth. By this the proof was established that the reproductive system had not only been regenerated but that it was capable of functioning normally. Two of these young ones I preserved and transferred the rest into an aquarium containing mud and water plants for further breeding, so that I could ascertain, whether the abnormalities in the reproductive systems of their parents would reappear in them. I preserved the regenerated anterior parts of four of the mutilated sexually mature animals with a view to microscopic examination; the fifth I let live for the purpose of studying the development and the structure of the gonads during the summer months. In the descendants (2 spec.) of the mutilated animals I found the gonads in the same number and in the same segments (in 9. 10. and 11. segm.) as in the normal adult specimens. Hence it is possible to conclude that even the other parts of the reproductive organs of the young will probably have a normal form and normal position.

The normal reproductive system of Rhynchelmis.

As early as 1876, this was thoroughly described by Vejdovský, whose statements later on were changed to a slight degree only. The diagrammatic illustration of this system is represented in engraving VI. Its parts are: 2 receptacula seminis in the cavity of the 8th segment on the ventral surface of which they have two rounded apertures (pores). Mrázek ascertained that these organs are in communication with the internal lumen of the alimentary canal, as, in a similar manner, Beddard discovered in the species Sutroa. According to the explanation of Mrázek here we have to deal with a simple arrangement for letting out the super-

fluous sperms from the receptacula seminis into the enteric canal. This fact I can corroborate. — Within the 9th segment, and opening on the ventral surface of it, there is situated an organ which in its structure somewhat resembles the atrium and which VEJDOVSKÝ marked out as albumen gland (»Eiweissdrüse«) and MICHAELSEN as rudimental atrium. (»Rudimentäres Atrium«). Two pairs of testes are attached to the septa between the 8th and 9th, and 9th and 10th segments, opposite which the first and the second pair of ciliated spermiduct-funnels are situated. On the ventral side of the 10th segment two tube-shaped atria open into two rounded apertures with somewhat tumid lips - the male reproductive apertures. On each side of the body two spermiducts open on a common atrium. According to VEJDOVSKÝ's illustration (4a plate XXII. Fig. 6.) the atria extend from the 10th to the 13th segment. In normal animals I found them often so lengthened that they took up 6, 7, and even nine segments. The penis is not developed. Two ovaries are attached to the septum between the 10th and 11th segment, The oviducts are a pair of short tubes, each with a wide. funnelshaped opening into the cavity of the 11th segment and open on the ventral surface between the segments 11 and 12 (female apertures). The vesiculae seminales extend on both sides of the ventral nerve cord from the 13th to the 50th and even to the 54th segment. I found them displaced towards the 9th, 11th, and 12th segment. In microscopic slides of 30 normal, sexually mature animals, excepting the lesser deviations above mentioned, I found the structure agreeing with the description. I did not observe any displacement of the pores to other segments. Only the porus of the rudimental atrium does not always lie in the midst of the segment, but tends to shift to one side.

The regenerated reproductive system of Rhynchelmis.

The number and position of the single parts of the regenerated reproductive system are shown by the text illustrations. Fig. II—V and fig. VII—X, to which we refer. The figures II—V and VII—X belong together. I take the liberty to call attention only to some peculiarities. In *specimen*

number 1, fig. II and VII the displacement of the first receptacula seminis and of the rudimental atria into the 3d segment (which is much elongated and seems like a union of two segments) is particularly striking. In both receptacula seminis also their internal opening into the enteric canal can be seen very well. In the cavity of one of the receptacula of the second pair I found a mass of fully ripe sperms. The rudimental atria are convoluted between both pairs of receptacula seminis and have no spermiducts. In the second pair of gonads there has developed an ovarium on the right side instead of a testicle. The atria are unusually lengthened and extend as far as the 18th segment. Both of them have two well developed spermiducts with funnels (rosettes) full of sperms on the septum between the segments 5/6 and 6/7. The vesiculae seminales begin at the seventh segment.

Although the external reproductive apertures were displaced to other parts as compared with normal animals yet this animal copulated with others and laid cocoons. It is wonderful how economically the organism solved the problem in spite of so small a number of regenerated segments of stowing within them its whole recreated reproductive system and indulging besides in the luxury of hyperplastic forms.

Specimen number 2. Fig. III and VIII. A peculiar ciliated funnel of the spermiduct on septum 4/5 (left side). This probably belongs to the rudimental atrium in the 5th segment. On the septum 4/5 there lies instead of a testicle a strong gonad with large oval cells. In this specimen the atria are much extended (as far as the 15th and 19th segment). On septum 6/7 there is only one rosette (ciliated funnel) of the spermiduct.

Specimen number 3. Fig. IV and X. Due to incompletness caused by the series of sections I was able to examine but one half of the body. The atrium is unusually long and extends to the 20th segment. On the septum 5/6 there is a little gonad of indeterminate character.

Specimen number 4. Fig. V and IX has the simplest regenerated apparatus. There are only two receptacula and only two spermiducts belonging to the atria, which are very short and extend into the ninth segment. The rudimental

atrium is entirely missing. In this specimen the gonads were for the most part crumbled and indistinct. There is an abortive vesicula seminalis on the right side, as far as the 7th segment. The rest of the vesiculae seminales begin with the 10th segment. Within the cavity of the body I found plenty of sperms. — It is worth mentioning, that I found sperms as well in the alimentary canals of the mutilated animals, as in those of the normal ones; hence the above mentioned opinion of MRÁZEK with respect to the purpose of the communication of the receptacula with the alimentary canal seems to be supported.

If we compare the relations described with those to be found in *Criodrilus lacuum*, as I formerly described them, we shall see, that in *Rhynchelmis* also there is revealed an obvious tendency to create hyperplastic forms, although this tendency is not so obvious as in the former one. For in *Rhynchelmis* there may be not only a multiplying of the several parts of the reproductive apparatus, but also, on the contrary, a considerable simplification in its organisation.

To sum up, the several cases I have observed up to the present, gave me the impression that the variability of the regenerated reproductive system in *Rhynchelmis* may be of a character similar to that MRÁZEK ascertained in normal sexually mature specimens of *Lumbriculus variegatus* just taken from their natural habitat. Any considerable shifting of the sexual character of mutilated specimens to the advantage of the female sex, as MRÁZEK mentiones them in *Lumbriculus* and as I found them in mutilated specimens of *Criodrilus lacuum*, is for the present quite out of the question. The first indication of this shifting perhaps might be observed in the appearance of ovaries instead of testicles in the specimen number 1 and 2, fig. VII and VIII. It is possible this may become more noticeable in the additional living specimens I now have at hand, and which I shall preserve at a time more favourable for the study of the gonads.

EXPLANATION OF THE FIGURES IN TEXT.

Fig. I—X. (p. 3—5.)

Fig. I. Ventral view of the normal anterior part of the body with genital apertures.

Fig. II—V. Ventral views of the regenerated anterior portions of the body with genital apertures. *at* = the male reproductive apertures, *bž* = the opening of the albumen gland Vejd. (rudimental atrium Mchs.), *r. a.* = the opening of the rudimental atrium, *r. s.* = the openings of the receptacula seminis, rs_1 and rs_2 = the openings of the receptacula seminis (first and second pair.). ABC = the regenerated portion of the body, 8—12 = 8 th and 12 th segment.

Fig. VI. The normal anterior portion of the body containing the reproductive organs.

Fig. VII—X. The anterior parts of the mutilated animals. *ABC* = the regenerated segments, *at* = atrium *b. ž.* = albumen gland *n. ch.* = ciliated funnels (rosettes), *n. v.* = oviducts *ov.* = ovaries, *r. s.* = receptacula seminis (first pair *r.* s_1 and second pair *r.* s_2) *v.* = anterior and posterior testes, *v. s.* = vesiculae seminales.

Fig. 1—6 (p. 8—9).

Fig. 1. The regenerated ovary with oviduct.
Fig. 2. Longitudinal vertical section through the regenerated anterior portion of the body.
Fig. 3. The regenerated oviduct.
Fig. 4. The regenerated rudimental atrium.
Fig. 5. The regenerated testis with ciliated funnel (rosette).
Fig. 6. Regenerated segments showing the openings of two receptacula seminis into the alimentary canal.

at. = atrium.
b. ž. = albumen gland Vejd. (rudimental atrium.) Mchs.
n. ch. = funnel-like opening of vas deferens. (rosette).
n. v. = funnel-shaped opening of oviduct.
ov. = ovary.
r. a. = rudimental atrium.
r. s_1 = receptaculum seminis (first pair).
r. s_2 = receptaculum seminis (second pair).
sp = sperms.
u_1, u_2 = openings of receptacula seminis into the enteric canal
ut. = mouth.
ú. v. = the female reproductive aperture.
v = testicle
z. r. = enteric canal.

XI.

Monografická studie o *Dianthus plumarius* (L.).

Dr. **Frant. A. Novák.**

Předloženo dne 22. prosince 1923.

Sledujeme-li botanickou literaturu, zejména starší, seznáme velmi záhy, že názvu *Dianthus plumarius* bylo užíváno a ještě dnes se mnohdy užívá pro velmi různé druhy hvozdíků ze sekce *Plumaria*. Tvůrcem názvu jest Linné (50)*); leč podle diagnosy neb dle udaného zeměpisného rozšíření jeho nestanovíme, kterou formu hvozdíka měl Linné před sebou, když označil ji názvem *Dianthus plumarius*. Podle uvedených však synonym, zejména pak dle Bauhinova *Caryophyllus flore tenuissime dissecto* (3, p. 209), jenž totožný jest s Clusiovým *Caryophylleus silvestris* V. *species tertia* (14, p. 284), představuje nám Linnéův *Dianthus plumarius* hvozdíky rostoucí u Mödlingu (*Dianthus Neilreichii* Hayek). Leč Linné v druhém vydání svých »Species plantarum« synonyma pro *Dianthus plumarius* pozměnil v tom smyslu, že vztahují se na hvozdíky ze skal Děvínských (u Bratislavy) a Hainburgských (*D. Lumnitzeri* Wiesb.). —

Hayek proto navrhoval (35), aby užíváno bylo názvu *D. plumarius* pouze pro hvozdíky ze skal Hainburgských a Děvínských, tedy pro Wiesbaurův *D. Lumnitzeri*; to by však působilo zmatek, jelikož až dosud byly názvem *D. plumarius* v prvé řadě označovány hvozdíky (ze sekce *Plumaria*) ze skal Alpských; proto podotýká Hayek později, že názvu *D. plumarius* možno použíti pouze jako kollektivního označení pro skalní formy z příbuzenstva *D. arenarius* L. a *D. serotinus* W. K. To však jest příliš široce řečeno, neboť tím bychom vlastně názvem *D. plumarius* označili téměř

*) Viz literaturu na str. 35.

všechny hvozdíky ze sekce *Plumaria* (pokud rostou v Evropě), kromě uvedených dvou.

V této práci na základě fylogenetického vývoje jednotlivých forem rodu *Dianthus*, jejich geografického rozšíření a jejich vzájemné souvislosti ve znacích morfologických, užito jest názvu *Dianthus plumarius* pro hvozdíky ze sekce *Plumaria*, rostoucí na vápencových skalách východních Alp (Horní a Dolní Rakousy, Štýrsko, Korutany a nejzápadnější část Chorvatska) a západních Karpat, sdružené právě kol zmíněných hvozdíků ze skal Mödlingských a Děvínských, tedy přibližně v užším smyslu Hermannově. (40).*)

Použijeme-li názvu *D. plumarius* v naznačeném rozsahu, musíme vyloučiti některá velmi často uváděná synonyma. *D. hortensis* Schrader (Ind. hort. Gött.), Willdenow (109, p. 409), Koch (45) etc. není žádným synonymem pro *D. plumarius*, jak mylně uvádí Gürke (82, p. 360), nýbrž představuje rostlinu zahradní, vzniklou pravděpodobně z hvozdíka

*) Descriptio: *Dianthus plumarius:* Perennis, caespitosus; caules teretes vel obtuse quadranguli, erecti, usque ad 25 cm (rarissime ad 35 cm) alti, geniculis 4—6 interstincti, internodiis rectis, plerumque uniflori. Folia linearia, 1—2·5 mm lata, in superiori $^1/_3$ apicem versus attenuata, 5—7 nervia, margine levia vel aspera vel minutissime acute serrata, glauca rarius viridia, turionum sterilium 30—70 mm longa, plana vel subcanaliculata, rosularia usque ad 50 mm longa, caulina foliis rosulariis breviora, rarius aequilonga vel longiora, erecta vel in 45° patentia, basi breviter vaginato coalita. Vaginae folii diametro aequilongae, nunquam longiores. Flores singulares, odorati Squamae calycinae 4, rarius 2, orbiculatae vel obovatae, rarius ovatae vel ellipticae, brevissime abruptim mucronatae vel subito breviter acuminatae (rarissime in cuspidem brevem, herbaceam squama triplo breviorem sensim acuminatae), herbaceae, ± anguste scarioso marginatae, calyce ter, quater vel quinquies breviores. Calyx circiter 20—30 mm longus, anguste cylindricus, ter vel usgue ad quinquies calycis diametro longior, basi obsolete striatus, apice attenuato, dentibus circa $^1/_5$ tubus aequantibus. Petala alba vel rosea; petalorum lamina obovata vel suborbiculata, 13—20 mm longa, antice usque ad terciam partem irregulariter tenuiterque lacerata (rarissime ultra medium pinnatifido-multipartita), area intermedia integra obovata vel suborbiculata, (rarissime oblonga), basi tenuiter puberula, in unguem angustum, ± longiorem ± sensim attenuata. Filamenta subulata, glabra; antherae candidae. Capsula matura calycem ± superans, rarius aequilonga. Semina rostellata, nigra, minutissime granulata.

pocházejícího ze skal od Budapešti a Csákváru (*D. serotinus f. dolomiticus*)[3]), náhodným neb umělým křížením s některým jiným druhem (snad s *D. gratianopolitanus* Vill.). — *D. hortensis* Kölreuter jest kulturou získaná forma od *D. caryophyllus* L. — *D. portensis* Libosch. jest naprosto pochybná forma, náležející spíše ku *D. arenarius* L. — *D. moschatus* Mayer (56), jejž omylem Gürke (82, p. 360) i Greabner (2, p. 417) uvádějí jako synonymum ku *D. plumarius* (zaznamenávajíce ku publikaci Mayerově nesprávně rok 1781), jest totožný s *D. bohemicus* J. Mayer (56), jak píše také již Tausch (98), a identický s *D. Mayeri* Presl (78), jež vesměs jsou pouze různými názvy nedostatečně známé specie ze Sibiře Gmelinem Mayerovi zaslané, Mayerem pěstované a pak popsané jako nový druh z Čech (63). —

Kromě ze zmíněného již území bývá *D. plumarius* často uváděn z mnoha jiných lokalit, a tu nutno upozorniti na velikou oblibu, jaké se těší *D. plumarius*, jako rostlina zahradní; pěstuje se velmi hojně od pradávných dob, a ze zahrad nezřídka přeběhne do volné přírody a zdivočí. Někteří autorové, neznajíce pravého původu těchto zdivočelých hvozdíků, popisovali i jejich zvláštní formy; Dumortier (22) popsal z Arden *D. plumarius* var. *arrectus*, jenž jest pouze zdivočelou zahradní formou. Sweet (96) dokonce popsal řadu uměle vypěstovaných zahradních forem (*heroicus, Cheeseanus, Houseanus, Uxbridgeanus, Aclandae, inclytus, Barrati, regalis* etc.). — *D. plumarius* zdivočuje, pokud má na blízku příhodnou lokalitu, velmi snadno, a bývá pak často obtížno zji-

[3]) *D. serotinus* f. *dolomiticus* (Syn.: *D. hortensis* Kit. [43, p. 531]; ? *D. regis Stephani* Rapaics [Term. Tud. Közl. LIV 1922. p. 291. sec. Gáyer Gy. in litt.]. Icones: Hegi [39, fig 594 a.]. Exsiccata: Fl. exsicc. Austro-Hung. No 3236.). Dense caespitosus; caules glauci, erecti, simplices vel saepius ex axillis supremis 1—3 pedunculos promentes; folia glauca; turionum sterilium patula vel suberecta, rigida; rosularia, patula; caulina erecta, infima internodiis longiora, media breviora, suprema in squamas decrescentia; vaginae folii diametro aequilongae; flores 1—4, solitarii, odorati; squamae calycinae 2—4; calyx glaucoviridis, dentibus lanceolatis, ca 4 mm longis; petala alba, non contigua. Ceterum cum descriptione Waldstein-Kitaibeli (10[illegible], p. 188) convenit. — Habitat in fissuris montium, in lapidosis, rarius etiam in pratis apricis montium dolomiticorum Hungariae centralis (Adlerberg, Pilis, Spissberg, Leopoldifeld etc.).

stiti, zda na určitém stanovišti jest původní neb druhotný. Lamarckovy (46) údaje o výskytu hvozdíka pernatého ve Francii týkají se rostlin zdivočelých (cf. 31 a 86). — Stejně ani v Belgii, ani v Německu, ani ve Švýcarsku nikde neroste *D. plumarius* divoce, a roste-li na tomto území někde, jako na př. v Ardenách (22), neb ve Střední Pfalzi (104) a t. d., jest rostlinou subspontánní.

Údaje Ledebourovy (47), Wittrockovy (111), Marschall-Biebersteinovy (55), Schmalghausenovy (90) a t. d. o výskytu druhu *D. plumarius* ve středním a jižním Rusku zakládají se na nesprávném ocenění původnosti v přírodě se vyskytujících individuí, jednak na zaměnění (resp. nesprávném určení) podobných druhů (na př. *D. arenarius* L.) za *D. plumarius*, jak možno přesvědčiti se v herbáři vydaném botanickým museem akademie věd v Petrohradě, kdež pod číslem 507 nachází se *D. arenarius* L. pod názvem *D. plumarius* L. od Kyjeva (tuto lokalitu uvádí též Ledebour). Totéž platí o hvozdíku sbíraném Lindmannem mezi Mitavou a Kangern, uloženém v herbáři přírodovědeckého spolku Rižského (cf. 48). Ascherson, Lehmann (49), Fedčenko a Flerov (24) a mnozí jiní stanovili s úplnou bezpečností, že *D. plumarius* v Rusku ani v Polsku nikde divoce neroste. — V krajinách pobaltských roste rovněž *D. plumarius* pouze subspontánně neb adventivně. — Tím ovšem i údaje Williamsovy (110, p. 391) o nejsevernější (»Prov. of Volhynia, in Russia«) a nejvýchodnější (»Along the river Ischin, in Siberia«) lokalitě druhu *D. plumarius* jsou nesprávné.

Chybné jsou také údaje Gürkeovy (82, p. 360), že totiž *D. plumarius* roste na Černé Hoře, v Rumunsku, v Přímoří, v Sev. Italii a Kraňsku. — Na Černé Hoře a nikde jinde na Balkánském poloostrově, na jih od Sávy a Dunaje neroste *D. plumarius* divoce. Pančič (73) sice uvádí zmíněný druh od Lukovsko Polje z Černé Hory, Velenovský (100) zmiňuje se o témž hvozdíku ze skal u Kistendylu v západním Bulharsku; ale v obou případech jedná se o formy druhu *D. Kitaibelii* (Janka). V novějších spisech také *D. plumarius* není uváděn ani ze zemí illyrských (5), ani ze zemí balkánských (1), ani z Orientu (7). Pouze

Stojanov a Stefanov (95) opakují údaje Velenovského.*) — Zprávy, že *D. plumarius* roste v Rumunsku, jsou nesprávny, týkají se subspecie hvozdíka Kitaibelova (*D. Kitaibelii* subsp. *spiculifolius*), rostoucí na vápencových skalách východních výběžků Karpat Sedmihradských. — Ani v Přímoří ani v Dalmacii *D. plumarius* neroste divoce; uvádějí-li někteří floristé (na př. Kitaibel) ze zmíněných zemí *D. plumarius*, tu týkají se jejich údaje jiných hvozdíků, nejčastěji druhů *D. bebius* Vis. (cf. 85.) a *D. monspessulanus L.* — Italský *D. plumarius* od Lago di Garda, jak jsem se mohl přesvědčiti v herbářích botanického ústavu university Karlovy v Praze (Billot: Flora Galliae et Germaniae exsiccata No. 3534) jest Sieberův *D. Sternbergii* s poněkud kratšími brakteami podkališními. — Pro Kraňsko a Salzburg jest *D. plumarius* velice pochybný; nejstaršími autory bývá uváděn, novějšími nikoliv (2, p. 417; 39, p. 339); sám jsem ze Salzburgu ani z Kraňska žádného hvozdíka pernatého neviděl. — V Tyrolsku rovněž neroste nikde *D. plumarius* divoce (cf. 34; 17; 39 etc.); ojedinělé údaje (cf. 52) týkají se některých forem druhu *D. monspessulanus L.* — V Čechách *D. plumarius* vůbec neroste; údaje Polákovy, Čelakovského a jiných autorů (76; 16; 39, p. 339), týkají se endemické variety hvozdíka písečného (*D. arenarius* var. *bohemicus* Novák; cf. 62. p. 23; 64; 65; 2, p. 417). V Haliči vyskytá se *D. plumarius* toliko na vápencových skalách výběžků západních Karpat ve varietě *praecox* (Kit.) — Ve Slezsku, odkudž uvádí jej Nyman (70), vůbec *D. plumarius* neroste (25; 91 etc.). —

Přehlédneme-li uvedené, vidíme, že *D. plumarius* roste poměrně na malém území bývalého Rakousko-Uherska, v severozápadním Chorvatsku, v Korutanech, ve Štýrsku, v Dolních a Horních Rakousích, v jižní Moravě, Slovensku a na pohraničí slovensko-polském.

Hranice jeho rozšíření na západě dosahuje skupiny Dachsteinské (do Tannengebirge již nezasahuje), probíhá pak směrem skoro západním po hranici posledních výběžků al-

*) Ani v nejnovějším vydání své flory (cf. 120) neupustili od nesprávného údaje druhů *D. plumarius* L. a *D. serotinus* W K. z Bulharska.

pinských prvků severních Alp vápencových až ku Weyeru, dále směrem východo-severovýchodním k Vídni; odtud obrací se k severovýchodu po západních výběžcích Malých a Bílých Karpat, (isolována jest lokalita na Pavlovských kopcích v již. Moravě), údolím Váhu až ku jeho soutoku s Turcem; pokračuje pak k východu po severních výběžcích vápencových středních Karpat (Malá Fatra, Oravská Magura, Choč) a Liptovských Alp, pak přestupuje do údolí Váhu, Vysoké Tatry vynechává, obrací se pak ku západním hranicím Belských Alp, sleduje tyto po jejich severním úbočí, vynechává pak Spišskou Maguru, sleduje západní a severní hranici Pěnin, v nichž dosahuje své nejsevernější lokality — Tri Korona — (49° 24′ 30″ sev. šíř.); dále směřuje údolím Popradu zpět směrem jihozápadním až ku městu Popradu, odkudž přestupuje do údolí Hernadu, u Spišských Vlachů zahýbá k jihu, sleduje pak k západu jižní hranici devonských vápenců; isolována zůstává nejvýchodnější jeho lokalita v Zadielské rokli u Torny (38° 30′ v. d. od Gr.). Zmíněnou hranici devonských vápenců provází pak až ku Dobšiné, pokračuje údolím Hronu až ku Báňské Bystrici, odtud směrem západním po severní hranici trachytového útvaru Slovenského Krušnohoří, do údolí Nitry a dále na západ do údolí Váhu ku Trenčanským Teplicím; odtud sleduje východní výběžky Bílých a Malých Karpat, od Děvínské Kobyly a východních svahů Hainburgských kopců pokračuje údolím Litavky k Vídeňskému Novému Městu a odtud po jižní hranici Severních Alp vápencových do údolí Enže ku skupině Dachsteinské. — Od tohoto severního arealu jest oddělen jižní areal, spojený se severním pouze jedinou isolovanou lokalitou u Neuhausu (35, p. 440) ve východním Štýrsku. — Jižní areal dosahuje na západě svojí hranicí až ku skupině Gmeinecku nad údolím Lieserbachským, jež jest nejzápadnější lokalitou (13° 26′ v. d. od Gr.) hvozdíka pernatého; odtud probíhá jeho jižní hranice údolím Drávy až ku Dolnímu Drauburgu, pak obrací se k jihu kol Slovinského Hradce ku Celje, směřuje k východu údolím řeky Saviny, podél úpatí Rohiče a skupiny Matzelské až ku pramenům řeky Solty, jejíž tok sleduje od severu k jihu, dále zahýbá se k Záhřebu, kdež dosahuje nejjižnější lokality na Zagrebačka Gora u Mar-

kuševce (45°55′ s. š.); od Záhřeba probíhá hranice arealu směrem severovýchodním na Kalnik, odtud k Varaždínu, dále údolím Drávy k Mariboru a odtud na sever k Lipnici do údolí Mury, jejíž tok sleduje až ku Sv. Martinu v Lungau, odkudž obrací se přímo ku skupině Gmeinecku.

Pohlížíme-li na všechny variety a formy hvozdíka pernatého jako na celek, pak v ý v o j o v é c e n t r u m jeho musíme hledati v jižních Alpách vápencových; v době předledové týž druh, z něhož vznikl *D. Kitaibelii*, šířil se z hor bosenských přes vysočinu západního Chorvatska do východní části Alp vápencových (cf. 66; 68), kdež přispůsoboval se znenáhla změněným podmínkám, šířil se pak po východních výběžcích Alpských až ku Malým Karpatům; tam proud jeho šíření se rozštěpil ve dva proudy, z nichž jeden ubíral se po severních Alpách vápencových k západu, druhý směrem severovýchodním přes Malé Karpaty do pohoří Slovenských až ke zlomu Košicko-prešovskému. Pásmo Lesních Karpat se svými mírně skloněnými, poměrně nízkými hřebeny, porostlými neproniknutelnými pralesy bukovými i svými předhořími, tvořenými jednak karpatským pískovcem, tak jako hlavní pásmo Lesních Karpat, jednak trachytem, byly nepřekročitelnou hranicí pro šířící se hvozdík. Proto také *Dianthus spiculifolius* (Schur), ač morfologicky se velice podobá hvozdíkům vápencových skal západního a severního Slovenska, nemůžeme přiřaditi ku *D. plumarius*, jelikož přímá spojitost fylogenetická mezi oběma jest nemožna. — V době diluvialní sestoupil *D. plumarius* s mnohými jinými horskými rostlinami z vyšších lokalit do nižších, osadil četné vápencové skály nízce položené, na př. Pavlovské kopce v jižní Moravě, Zadielskou rokli u Torny na Slovensku atd. V době poledové vystoupil opět do vyšších poloh, leč na mnohých lokalitách, které osadil za diluvia, zůstal s četnými jinými druhy horskými, představuje nám tak prvek praealpinský. —

S t ř e d i s k o r o z š í ř e n í není u *D. plumarius* jediné, nýbrž dnes můžeme sledovati střediska taková tři: jedno — jižní — ve východní části jižních Alp vápencových, zejména v sev. Štýrsku, druhé — střední — ve východní části severních Alp vápencových, zejména ve skupině Dachsteinské, a třetí — severní — v Belských Alpách a vápencových ho-

rách středních Karpat. — Těmto střediskům odpovídají jednotlivé variety hvozdíka pernatého; jižnímu centru — var. *Hoppei*, střednímu — var. *blandus*, severnímu — var. *praecox*. Ostatní variety (*praevertens*, *Neilreichii* a *Lumnitzeri*) jsou geograficky velmi úzce omezeny; představují nám více neb méně přechodné tvary.

Ráz stanoviště hvozdíka pernatého jest velmi význačný a jednotný; roste totiž *D. plumarius* téměř výhradně na skalách neb drolinách (velmi zřídka na skalnatých stráních — a to zase jen v blízkosti větších skal), výlučně vápencových, jen výminečně na konglomerátech s tmelem bohatým na sloučeniny vápenaté; při tom dává přednost svahům k jihu obráceným, na skalách k východu neb západu exponovaným jest řidším, na sklonech severních vzácný. Nadmořská výška zdá se, že není rozhodující, neboť nalézáme *D. plumarius* právě tak krásně vyvinutý ve výši 300 m n. m. (Děvín u Bratislavy), jako ve výši 2800 m n. m. (Dachstein). Ve vysokých polohách vystupuje *D. plumarius* jako komponent květeny alpinské, v nižších polohách nabývá zdánlivě rázu prvku dealpinského, leč pravým prvkem dealpinským není, vybíraje si svahy výslunné, k jihu obrácené; jest typickým prvkem praealpinským, rostoucím nejčastěji ve společnosti jiných praealpinů (na př. *Gentiana Clusii*, *Biscutella laevigata*, *Kernera saxatilis*, *Hippocrepis commosa*, *Leontodon incanus*, *Hieracium bupleuroides*, *Minuartia laricifolia*, *Teucrium montanum*, *Helianthemum canum* etc.), v porostech neuzavřených, vytvářeje často husté trsy.

Příbuzenské vztahy hvozdíka pernatého nejsou příliš složité. V přímé fylogenetické souvislosti jest se západní varietou balkánského druhu *D. Kitaibelii* (var. *petraeus*), kteréžto oba hvozdíky povstaly pravděpodobně ze společného druhu (cf. 66). V podobném příbuzenském poměru jest *D. plumarius* ku *D. monspessulanus* L., zejména ku jeho vysokohorské subspecii (subsp. *Sternbergii*), s níž na jihozápadě sousedí a jíž se v mnoha znacích tak podobá, že bývá s ní i zaměňován (rozdíly mezi oběma uvedeny budou u popisu var. *Hoppei*). Oba tyto typy, právě tak jako předchozí, jsou vikarisující, svými areály se vylučují, ale dotýkají a na místech styku vytváří přechodné formy. — Velikou morfologic-

kou podobnost můžeme pozorovati mezi *D. plumarius* a *D. gratianopolitanus* Vill. Dle Vierhappera (101) jde tato morfologická podobnost tak daleko, že často není ani možno na sušeném materialu, oba druhy bezpečně rozpoznati. Toho ostatně doklady nalezneme v herbářích velmi často; jako příklad uvádím toliko jeden z mnohých. Ad. Schröder ve své sbírce »Flora von Mähren« má ze skal zvaných »Pekárka« u Ivančic hvozdík sbíraný v květnu r. 1880, označený jako *D. plumarius* L., bližším ohledáním jsem však stanovil, že jedná se o *D. gratianopolitanus* Vill. Přesto však *D. gratianopolitanus* Vill. a *D. plumarius* nejsou v naprosto přímém fylogenetickém vztahu (cf. 66), jak míní Vierhapper (101); styk arealů obou druhů jest příkladem pseudovikarismu.

Mnohem více rozdílných znaků morfologických i oekologických nalezneme mezi *D. plumarius* a *D. arenarius* L. Prvý jest význačným druhem vápencových skal, kdežto *D. arenarius* L. roste vždy na písčinách, na písčité půdě v polostínu borů. Oproti typické formě hvozdíka písečného*) vyznačuje se *D. plumarius* vyšším vzrůstem, lodyhami o větším počtu kolének, listy delšími, měkčími a sivými (v případech, kdy má *D. plumarius* listy zelené, má pak květy růžové), petaly nezřídka růžovými, s čepelí vždy hruběji a mnohem mělčeji dřípenou; od východoněmecké a ruské formy hvozdíka píseč-

*) *D. arenarius* var. *suecicus* v. n. — Perennis, caespitosus. Caules erecti, teretes, usque ad 12 cm alti, geniculis 1—3 interstincti, uniflori. Folia linearia, usque ad 1 mm lata, 1—3 nervia, margine serrulata, apice acuta vel obtusiuscula, rigida, pallide viridia; turionum sterilium usque ad 25 mm longa, subcanaliculata vel plana, suberecta; rosularia usque ad 10 mm longa, patentia; caulina internodiis breviora (plerumque brevissima), stricta, acuta, appressa. Vaginae folii diametro breviores. Squamae calycinae 2—4, ovatae vel ellipticae, obtusae, muticae, margine membranaceae, 4—5 mm longae (exteriores breviores), calyce quater breviores. Calyx 18—22 mm longus, 3—4 mm latus, cylindricus, laevis, virens vel partim violaceus, dentibus ovato-lanceolatis obtusis, margine membranaceis, 5—7nerviis. Flores albi, odorati, »campos arenosos Scaniae noctu replent odore omnium fragrantissimo suavissimoque (Linné).« Petala non contigua; petalorum lamina obovata vel elliptica, 13—15 mm longa, 7—9 mm lata ultra medium pinnatifido-multipartita, area intermedia oblonga, basi albide pilosa, in unguem angustum calyce longiorem sensim attenuata. (Hab. in Suecia meridionali, Fennia et Rossia boerali).

ného (*D. arenarius* var. *borussicus* Vierh.) liší se *D. plumarius* lodyhami nejčastěji jednokvětými, listy sivými značně delšími, brakteami (právě tak jako od typické formy) ostřeji ukončenými, petaly nezřídka růžovými, značně hruběji a mělčeji dřípenými; od haličské formy *D. arenarius* var. *pseudoserotinus* (Blocki) liší se *D. plumarius* lodyhami nejčastěji jednokvětými, listy užšími a kratšími, brakteami ostřeji zakončenými, petaly značně hruběji a mělčeji dřípenými; od české variety hvozdíka písečného (*D. arenarius* var. *bohemicus* Novák, 62) odchyluje se *D. plumarius* vyšším vzrůstem, lodyhami silnějšími, listy delšími a širšími, kalichy kratšími a širšími, brakteami delšími, petaly s čepelí širší, mělčeji dřípenou; od všech forem a variet hvozdíka písečného liší se *D. plumarius* nejbezpečněji a nejkonstantněji svým výlučným výskytem na substratu bohatém na sloučeniny vápenaté.

Podobný poměr jako mezi *D. arenarius* a *D. plumarius* jest také mezi *D. serotinus* W. K. a *D. plumarius*; druhý liší se od prvého nižším vzrůstem, lodyhami nejčastěji jednokvětými, o značně menším počtu internodií a nenafouklých kolínek, listy užšími a měkčími, brakteami ostřeji zakončenými, kalichy užšími a poněkud delšími, petaly nezřídka růžovými, se střední nedřípenou částí čepele okrouhlou neb vejčitou (resp. obvejčitou). Kromě toho roste *D. serotinus* W. K. převážnou většinou na píscích, v útvarech pannonských psammofytů. — Jak *D. serotinus* W. K., tak také *D. arenarius* L. jsou původu postglacialního, kdežto *D. plumarius* praeglacialního.

* *

Jak jsem již uvedl shrnuji pod názvem *D. plumarius* šest druhů, až dosud mnohými autory jako samostatné specie uváděných, a sice: *D. serrulatus* Schlosser et Vukotinovič, *D. Hoppei* Hayek, *D. blandus* Reichenbach, *D. Neilreichii* Hayek, *D. Lumnitzeri* Wiesbaur a *D. praecox* Kitaibel. — Srovnáváme-li vzájemně tyto hvozdíky, vidíme, že znaky, jimiž je autorové oddělují, jsou neustálené, měníce se často na individuích téže lokality; poněvadž pak všechny biologické znaky jsou všem šesti uvedeným hvozdíkům společny a morfologické rozdíly mezi jednotlivými uvedenými hvozdíky jsou pouze stupňovité a často tak nepatrné, že mnohdy jest velmi

nesnadno stanoviti, který z uvedených představuje nám určité individuum, pokládám proto všech šest uvedených hvozdíků, majících nesporně společný původ, za pouhé variety jediného druhu. — V následujícím chci se zmíniti o každé varietě zvlášť.

Dianthus plumarius var. **praevertens** (Williams pr. sp.).

Syn.: *D. serrulatus* Schlosser et Vukot. (88, 89).
D. praevertens Williams (110, p. 408).
D. hungaricus Schultz F. (Herb. normale No. 828 [1859]).

Popis tohoto hvozdíka nachází se v uvedeném (89) díle Schlosserově a Farkáš-Vukotinovićově. Až dosud sbírán byl toliko na vápencových skalách (jurský útvar) pohoří Kalniku (»in rupibus calcariis ad vetustam arcem Kalnik, et in cacumine montium rupiumque fissuris ibidem copiosissimus« Croatia occidentalis; lg. Schlosser HMB.*), jižně od Varaždína. —Jest velmi blízce příbuzný druhu *D. Kitaibelii* (Janka), s nímž jest v přímém fylogenetickém vztahu (66), jemuž se také zejména tvarem brakteí velmi podobá a s nímž byl i často zaměňován, od něhož (od *D. Kitaibelii* var. *petraeus*) se však liší listy na okraji drobounce ostře pilovitými, květy menšími, petaly na basi chloupkatými a zelenou skvrnou opatřenými. — V podobném příbuzenském postavení jako ku *D. Kitaibelii* jest *D. plumarius* var. *praevertens* také ku *D.* Hoppei*; od tohoto liší se podkališními brakteami široce elliptičnými neb vejčitými, kratičce a náhle mukronatně ukončenými, petaly menšími na basi chloupkatými a zelenavou skvrnou opatřenými. — Od dalmatského druhu *D. bebius* Vis. odlišuje se *D.* praevertens* kratšími listy, ostřeji pilovitými a týmiž znaky jako od *D.* Hoppei.* — Od všech ostatních variet hvozdíka pernatého liší se *D.* praevertens* petaly s malou zelenavou skvrnou na basi čepele.—

Schlosser a Farkáš-Vukotinović pojmenovali r. 1857 hvozdík ze skal Kalnika *D. serrulatus* (podle ostře pilovitých

*) HBP = Herbář Bubelův v Praze — majetek Klubu přírodovědeckého v Praze. — HMB = Herbarium Musei regni Bohemiae — v Praze. — HP = Herbář autorův. — HTM = Musejní herbář v Turč. Sv. Martinu. — HUB = Herbář botanického ústavu university Karlovy v Praze.

listů); ale již 18 let před tím použil téhož názvu Boissier (Voy. bot. Esp. II 1839. p. 84) k označení jednoho španělského hvozdíka (=*D. Broteri* Boiss. et Reut.), a ještě dříve před ním použil téhož názvu Brocchi pro jeden druh dalmatský (*D. Brocchianus* Vis.), a Desfontaines první stejným názvem označil severoafrický hvozdík *D. serrulatus* ve Flora Atlantica (I. 1798. p. 346). Proto Williams ve své monografii rodu Dianthus označil chorvatský hvozdík názvem *D. praevertens*. — Srovnáme-li tento hvozdík z Kalnika se všemi ostatními druhy, vidíme, že nejblíže stojí ku *D. plumarius*; jsa na hranici arealu hvozdíka pernatého, představuje nám přechodný tvar — původu nehybridního — mezi *D. Kitaibelii* a *D. plumarius*; svými znaky blíží se rozhodně více ku *D. plumarius* nežli ku *D. Kitaibelii*, svým výskytem i rozšířením nepřekročuje nikde údolí Sávy a Kupy. Nemůžeme tudíž jinak, nežli považovati *D. praevertens* Williams za varietu hvozdíka pernatého.—

Dianthus plumarius var. **Hoppei** (Portenschlag pro sp.).

Syn.: *D. Hoppei* Portenschlag (77), Hayek (37, p. 319).
D. plumarius Maly (53; 54, p. 218 p. p.).
D. plumarius subsp. *Hoppei* Hegi (39, p. 339).

Popis tohoto hvozdíka nachází se v uvedeném spise Hayekově (37, p. 319). Až dosud sbírán byl bezpečně na následujících lokalitách:

Štýrsko: Krebenze u St. Lambrecht (37), Lichtensteinberg (37), Hölzelkogel (37), Eppenstein (37), Oberweng u Judenburgu (37; lg. Ostermayer, 27. VII. 1883. HBP.), Friesingwand u St. Peter Freyenstein (27), Jungfernsprung u Göstingu u Štýrského Hradce (37, 113), Raabklamm u Gutenbergu, Weizklamm u Weiz, Donatiberg u Rohiče (37).

Korutany: Rabenstein u Wolfsbergu v údolí Labudnice (72)*, Hochosterwitz, 600 m n. m. (39, p. 339), Gmeineck (neb též Gemeineck) nedaleko jezera Millstatského (nejzápadnější lokalita) ve výši 1900-2400 m n. m. (39, p. 339).

Chorvatsko: v okolí Šestiny, Markuševace u Záhřebu,

*) Tuto lokalitu považoval Williams (110) za nejzápadnější pro *D. plumarius*; ve skutečnosti jest jí Gmeineck.

u Podbely, Ivance, Liepoglava v pohoří Ivančici u Záhřebu (89)*.

Areal této variety spadá v jedno s jižní částí arealu celého druhu *D. plumarius*, jak uvedena byla na str. 6—7, s vyjmutím Kalniku; nejzápadnější lokalitou této variety jest Gmeineck, nejjižnější Zagrebačka Gora u Markuševace, nejvýchodnější Liepoglava a nejsevernější u Judenburgu. —

D. plumarius var. *Hoppei* jest nejblíže příbuzným s var. *praevertens*, od níž liší se toliko brakteami akuminatně zakončenými a petaly většími, s čepelí okrouhlou, jemněji a pravidelněji dřípenou, růžovou. Ve stejném fylogenetickém příbuzenském vztahu jest var. *Hoppei* k var. *Neilreichii*, s níž má společný původ, jíž se velice podobá, takže často bývají obě variety zaměňovány, od níž se však liší listy nejčastěji trávozelenými a neojíněnými, brakteami podkališními užšími, kalichy užšími, petaly jemněji dřípenými, tmavěji růžovými o nehtech pouze tak dlouhých, jak jest kalich. Od var. *blandus* (Rchb.) liší se var. *Hoppei* nižším volněji trsnatým vzrůstem, listy přízemními (jež jsou na květonosných lodyhách kratší nežli listy lodyžní) i listy lodyžními rozestálými, lodyhou i listy zelenými, kalichem delším a užším (20 — 30 mm $\times 2^1/_2 - 3^1/_2$ mm), petaly tmavšími, hruběji dřípenými o nehtech tak dlouhých, jak jest kalich; kvete asi o 14 dní dříve; oba tyto hvozdíky jsou vikarisujícími varietami jediného druhu, které nemůžeme ani identifikovati ani povýšiti na samostatné druhy.— V analogickém příbuzenském vztahu jest *D. plumarius* var. *Hoppei* ku vysokohorskému hvozdíku *D. Sternbergii*, s nímž v mnoha znacích se shoduje, takže oba bývají navzájem zaměňovány; jsou to typy vikarisující, tvořící na styčné hranici svých arealů přechodné tvary; liší se však *D. plumarius* var. *Hoppei* od *D. monspessulanus* subsp. *Sternbergii* volně trsnatým vzrůstem průměrně poněkud vyšší lodyhou, užšími listy, zejména lodyžními, hlavně pak podkališními brakteami kratšími, vejčitými neb široce eliptičnými, kratičce mukronatně (vnější pár brakteí jest často zakončen kratičce akuminatně) ukončenými, nejvýš do $^1/_4$

*) Naprosto neoprávněná jest poznámka Graebnerova (2, p. 465), že z Chorvatska není až dosud znám žádný *D. plumarius*.

kalicha sahajícími (kdežto *D.* Sternbergii* má podkališní braktee kopinaté, z vejčité base protažené v zelený listovitý hrot, jenž svým koncem nezřídka přesahuje polovinu kalicha), dále pak petaly na basi čepele bíle chloupkatými (*D.* Sternbergii* má petaly červeně chloupkaté). Ale i v biologických znacích obou hvozdíků jest rozdíl: *D.* Hoppei* jest typem výslunných, teplých a dosti suchých skal vápencových, kdežto *D.* Sternbergii* vyžaduje substrat měkčí, humosnější, vlhčí, v létě zavlažovaný studenou ledovcovou vodou; prvý za normálních podmínek rozkvétá značně dříve, druhý později a ještě po prvních podzimních mrazech nalezneme jej často v květu.

Dianthus plumarius var. **blandus** Reichenbach (80, fig. 5030 *β*).

Syn:. *D. blandus* Reichenbach (79; 37, p. 320).
D. plumarius Auct. austriac. (64, partim; 114) non Linné.
D. plumarius b *blandus* Gürke (82, p. 360)*.
D. plumarius subsp. *blandus* Hegi (39, p. 339).

Podrobný popis této variety nalezneme u Hayeka (37, p. 320) a u Graebnera (2, p. 418). Až dosud byl sbírán na následujících lokalitách:

Horní Rakousy: v okolí Weyeru (HP), Hopfingu, (39, p. 339), Steyeru, na Steyerlingu, v Posterlucken, na Schracken, u Hinterstoder (39, p. 339), u Windisch-Garsten (lg. Oberleitner 29. VI. 1864 HMB. sub D. hungarico).

Štýrsko: na Dachsteinu, Thorsteinu, (Austria-Hütte, Feisterkaar etc.), u Schladminger Ramsau (35); na Sonnwendkogel u Gröbmingu (37), u vchodu do Gröbmingwinkel (114), Pass Stein u Mitterndorfu (37), u Oeblarn (35), v Gesäuse (114), etc.

Pro Salzburg jest pochybný. Z uvedeného vysvítá, že areal tohoto hvozdíka jest velmi malý; hranice jeho arealu sleduje od skupiny Dachsteinské tok Enže až ku Weyeru,

*) Gürke (82, p. 360) připojuje mezi synonyma této variety také *D. plumarius* b. *roseiflorus* Schur (93), jenž ale nemá s touto varietou nic společného, nýbrž náleží do okruhu forem sedmihradského hvozdíka *D*. spiculifolius* (Schur.)

kdež obrací se k západu po hranici posledních výběžků alpinské vegetace a mírným obloukem, směřujícím k jihozápadu, vrací se ke skupině Dachsteinské zpět. Největšího rozšíření dosahuje v pásmu klečovém na vápencových skalách k jihu obrácených; na Thorsteinu roste ve výši 2800 m n. m.; proudy vodními jest splavován do míst nižších.

D. plumarius var. *blandus* nejvíce se podobá jak morfologicky, tak také biologicky, varietě předchozí (*D. plumarius* var. *Hoppei*), od níž liší se hustšími trsy, listy i lodyhami, sivými lodyžními listy vzpřímenými, kalichy kratšími, petaty světlejšími, na basi čepele purpurovými chloupky posázenými; nehet petalů jest značně delší, často až o 5 mm, nežli kalich. Kromě toho *D.* blandus* kvete o 14 dní později, jelikož roste nejhojněji v pásmu kosodřeviny v sev. Alpách vápencových, kdežto *D.* Hoppei* vyskytá se nejhojněji v pásmu subalpinském v jižních Alpách vápencových. — Od hvozdíka Neilreichova (*D. plumarius* var. *Neilreichii*) liší se *D.* blandus* listy užšími vzpřímenými, brakteami podkališními vejčitými, akuminatně zakončenými, kalichy užšími, petaly tmavěji růžovými, jemněji dřípenými, a konečně pozdějším rozkvětem. Týmiž znaky a svým geografickým rozšířením liší se od ostatních variet hvozdíka pernatého. Od vysokohorského *D.* Sternbergii* liší se *D.* blandus* listy užšími, sivě modrozelenými, vzpřímenými, podkališními brakteami vejčitými krátce akuminatně zakončenými, čtyřikrát až pětkrát kratšími kalicha, petaty menšími, mělčeji dřípenými. *D.* blandus* jest velice podoben druhu *D. gratianopolitanus* Vill., od něhož liší se v prvé řadě kalichy užšími, od base ku cípům zúženými, bledě sivozelenými, květy vonnými, petaly bílými neb růžovými s čepelí mnohem hlouběji a jemněji dřípenou. Na základě morfologické podobnosti obou těchto hvozdíků vybudoval Vierhapper (101) theorii o příbuzenských vztazích jejich, v níž pokládá oba typy za vikarisující. Leč *D. gratianopolitanus* var. *incisus* nepředstavuje nám přechodný tvar mezi oběma předchozími hvozdíky, a styk jejich arealů na Moravě jest příkladem pseudovikarismu (66).

Dianthus plumarius var. **Neilreichii** (Hayek pro sp.).

Syn. *D. Neilreichii* Hayek 1908 (37, p. 319).
D. plumarius Linné (50, ed. I. 1753 p. 411), Neilreich (58), Beck (4, p. 375, excl. syn.) etc.
D. plumarius α saxatilis Neilreich (60, p. 807, p. p.).
Caryophyllus flore tenuissime dissecto Bauhin (3, p. 209).
Caryophylleus silvestris V. species tertia Clusius (14, p. 284).

Popis tohoto hvozdíka uvádí Graebner (2, p. 419). Až dosud sbírán byl pouze v Dolních Rakousích a ve vých. Štýrsku na lokalitách následujících:

Dolní Rakousy: u Mödlingu: Kalenderberg (58), Mödlinger Klause (4, p. 375), Brühl (108, p. 84; 58; etc.), Kleine Anninger (58; 4, p. 375); lokalita u Steyeru (35, p. 440) jest velice pochybná, pravděpodobně nenáleží tomuto hvozdíku, nýbrž varietě předchozí (*D. plumarius* var. *blandus*).

Štýrsko: Sotzka u Neuhausu (lg. Reichardt, sec. 35, p. 440).

D. plumarius var. *Neilreichii* má areal značně disjunktní; hlavní jeho středisko jsou severovýchodní výběžky severních Alp vápencových u Mödlingu nedaleko Vídně; od tohoto střediska úplně isolována jest lokalita štýrská u Neuhausu, ač jest otázka, není-li toto stanoviště pro uvedený hvozdík druhotné! — Hvozdík Neilreichův roste výhradně na vápencových strmých skalách k jihu obrácených, na nichž převládají prvky praealpinské; do vyšších poloh nevystupuje nejvýš do 500 m n. m.

V přímém příbuzenském vztahu jest *D.* Neilreichii* ku třem s ním vikarisujícím varietám — var. *Hoppei*, var. *blandus*, var. *Lumnitzeri*. Od prvého se liší listy širšími, sivými, vždy ojíněnými, podkališními brakteami okrouhlými kratičce mukronatně ukončenými, kalichy užšími, petaly světlejšími, hruběji dřípenými s nehty delšími nežli jest kalich, a konečně rázem svého stanoviště. Od severoalpské variety — var. *blandus*, liší se *D.* Neilreichii*, listy sterilních růžic kratšími, podkališními brakteami téměř okrouhlými, kratičce mukronatně ukončenými, kalichy poněkud kratšími a širšími petaty světlejšími, hruběji dřípenými a konečně dobou květní

(*D.* Neilreichii* kvete mnohem dříve, již v květnu) a povahou svého stanoviště. — Největší morfologickou podobnost jeví *D.* Neilreichii* s *D.* Lumnitzeri*; někteří botanikové je ani od sebe neoddělují (Wiesbaur, Neilreich, etc.); autor názvu druhého hvozdíka, Wiesbaur, u sušeného exempláře *D. Neilreichii* ze skal Mödlingských u Vídně, sbíraného 29. VIII. 1883 a uloženého v herbáři musea v Turčanském Sv. Martinu, poznamenává na etiketě, že tento hvozdík jest identický s jeho druhem *D. Lumnitzeri* ze skal na Děvíně. Liší se však *D.* Neilreichii* od *D.* Lumnitzeri* lodyhou vyšší, listy jak v růžicích, tak také na lodyze v 45° odstávajícími (nikoliv vzpřímenými), často poněkud širšími, měkčími, podkališními brakteami téměř okrouhlými, kratičce mukronatně zakončenými, se širokou suchomázdřitou obrubou, dále petaly poněkud většími, se širší čepelí v celých dvou předních třetinách obvodu hruběji dřípenou, náhle v nehet súženou; v rázu jejich lokalit se shodují. Liší se tedy oba hvozdíky do té míry, že nemůžeme je považovati za identické, ale nemají opět tolik rozdílných znaků, abychom mohli je odděliti jako samostatné druhy. —

Poměrně zřídka bývá zaměňován *D.* Neilreichii* s *D.* praecox*, již proto, že prvý omezen jest svým výskytem na Alpy, druhý na Karpaty; rozdíly obou uvedeny jsou níže. — Na východě sousedí *D.* Neilreichii* s arealem uherského hvozdíka *D. serotinus* W. K. — Borbás (10, p. 219) považuje oba hvozdíky za identické; leč rozdílných znaků morfologických i biologických jest mezi oběma hvozdíky tolik, že nejen není možno je identifikovati, nýbrž je nutno odděloväti je jako zcela různé druhy. *D.* Neilreichii* liší se od *D. serotinus* hlavně lodyhami nižšími, slabšími, slabě 4hrannými, 1—3květými, o daleko menším počtu internodií, kolénky nenápadnými a nenafouklými; listy měkčími, podkališními brakteami téměř okrouhlými, kratičce mukronatně ukončenými, petaly růžovými, hruběji dřípenými a širšími; dále pak svým výlučným výskytem na vápencových skalách a mnohem kratší a dřívější dobou květní (VI. VII.). *D. Neilreichii* jest původu praeglacialního, *D. serotinus* postglacialního (66).

Dianthus plumarius var. **Lumnitzeri** (Wiesbaur pro sp.).

Syn.: *D. Lumnitzeri* Wiesbaur Exsic. 1883. (108); Blocki (6), Hayek (38, p. 375, fig. 206a), Graebner (2, p. 421) etc.
D. plumarius Linné (50, ed. II. 1762. p. 589), Endlicher (23), Reuss (81, p. p.), Williams (110, p. 390, 474 p. p.) etc.
D. plumarius α saxatilis Neilreich (59, p. p. 60, p. p.).
D. virgineus Lumnitzer (51), non Linné.
D. virgineus var. *Lumnitzeri* Wiesbaur Exsic. 1882, (108, p. 85).
D. serotinus subsp. *Lumnitzeri* Hegi (39, p. 340, fig. 594, d, e).
D. arenarius Schultes (92, p. p.), Reuss (81, p. 64—65 p. p.).
Caryophylleus silvestris I. Clusius (14, p. 282).
Caryophylleus V. albo et laciniato flore Clusius (15).

Exsiccata: F. Schultz: Herbarium normale, nova ser., Cent 20. No. 1943.
Baenitzii Herbarium europaeum N° 4937 (Degen 1885).

Descriptio: *Dianthus plumarius* var. *Lumnitzeri*: Perennis, dense caespitosus, glaucus. Caules erecti, usque ad 20 cm alti, uniflori (rarius biflori), 2—5 geniculis interstincti, obtuse quadranguli. Folia anguste linearia, usque ad $1^1/_2$ mm lata et 35 mm longa, erecta, subcanaliculata, rigida, margine serrulata, glauca; turionum sterilium condensata, erecta, usque ad 35 mm longa, 3—5 nervia, anguste linearia, apice subito attenuata; rosularia foliis caulinis infimis breviora, erecta; caulina a basi apicem versus sensim attenuata, inferiora suberecta suprema brevissima, ad caulem appressa, basi breviter vaginato—coalita, geniculum vaginantia; vaginae folii diametro breviores. Flores odoratissimi. Squamae calycinae 4; exteriores ellipticae vel ovatae, acuminatae vel brevissime mucronatae, substriatae, margine angustissime membranaceae, ca 7 mm longae et 3—5 mm latae; interiores late ellipticae vel orbiculatae, breviter mucronatae vel abrupte acuminatae, substriatae, margine anguste scarioso—membranaceae, calyce appressae, ter quaterve breviores. Calyx anguste cylindricus,

(20—) 23—25 (—28) mm longus, 3—5 mm latus, apice attenuatus, dentibus laceolatis, obtusis. Petala alba, contigua (in forma typica); petalorum lamina obovata, usque ad 10 mm lata, antice usque ad 1/3 irregulariter digitato—lacerata, basi pilis candidis (in forma typica) adspersa, area integra elliptica vel obovata, in unguem angustum calyce longiorem sensim attenuata. — Floret V.—VI.

Diagnosu tuto uvedl jsem zde nejen proto, že téměř všechny dosavadní popisy jsou kusé a nesprávné, ale též z toho důvodu, že jedná se o hvozdík, rostoucí na půdě naší republiky.

Hvozdík Lumnitzerův byl až dosud bezpečně stanoven na následujících lokalitách:

Dolní Rakousy: Hainburgské kopce (Schlossberg, Hundsheimerberg, Braunsberg etc.);

Slovensko: Malé Karpaty: Děvín (81, p. 64), Děvínská Kobyla (67, p. 73), Vysoká (67, p. 72), Rachsturm Velký i Malý (67, p. 71), skály u Sološnice (67, p. 70), skály u Plaveckého Podhradí (67, p. 70), Blasenstein (67, p. 68) a Ostříž u Březové (115).

Areal hvozdíka Lumnitzerova jest omezen na pahorkatinu od Hainburgských Kopců až ku severním výběžkům Malých Karpat. Nejhojněji roste na zajímavých skalách mezozoického vápence po obou březích Dunaje, v místech t. zv. »Porta Hungarica«, na skalách Děvínských (jak na Děvíně samotném, tak také na Děvínské Kobyle) i na protilehlém břehu Dunajském, na skalách v okolí města Hainburgu, kdež zejména jest hojným na Schlossbergu (-○- 290), dále k jihozápadu na Hundsheimerbergu a k severovýchodu na Braunsbergu, který leží přímo proti Děvínu, a o němž zmiňuje se také již Lumnitzer (51, p. 176, n. 418). Druhý okrsek výskytu hvozdíka Lumnitzerova jest severní obvod vápencový v Malých Karpatech (67), kdež ale velmi často vyskytá se *D.* Lumnitzeri* v přechodných tvarech ku *D.* praecox*.

J. Barth zaslal koncem minulého století Dörflerovi do Vídně řadu exemplářů hvozdíka Lumnitzerova ze Sedmihrad od Mühlbachu; leč jak jsem se mohl přesvědčiti v herbářích

národního musea v Praze, ve sbírkách botanického ústavu university Karlovy v Praze, v herbáři v museu v Turč. Sv. Martinu atd., jsou Barthovy hvozdíky od Mühlbachu vesměs identické s *D. serotinus* var. *transsilvanicus**).

Ve zmíněných obvodech Malých Karpat a Hainburgských Kopců roste *D.* Lumnitzeri* výhradně na skalách vápencových; ač v okolí Děvína jsou značně rozsáhlé písčiny, přes to nikdy nikým nebylo pozorováno, že by *D.* Lumnitzeri* sestoupil s vápencových skal na písčinu. Zajímavo jest, že *D.* Lumnitzeri* roste nejen na svazích a stěnách k jihu obrácených, nýbrž i na skalách exponovaných k západu, východu i k severu, na nichž jest zvláště hojným.

O příbuzenských vztazích hvozdíka Lumnitzerova bylo psáno již velmi mnoho, leč názory autorů jsou velmi rozdílné, často protichůdné. Borbás (12) považuje Wiesbaurův *D. Lumnitzeri* za identický s hvozdíky ze skal u Mödlingu, dále za totožný s *D. serotinus* W. K., s *D. Hongaricus* Persoon a s *D. Pannonicus* Schultes, při čemž poslední dva

---

*) (= *D. serotinus* Schuller: Fl. Transsilv. exsicc.; Schur: Enum. p. 99. = *D. spiculifolius* Borbás Természetr. Füzetek 1889. XII. 1. p. 44.). Laxe caespitosus; caules teretes, erecti vel primum paulului declinati dein erecti, usque ad 20 cm alti, geniculis 5—7 interstincti, simplices, foliosi, 1—3 flori. Folia linearia, 1—2 mm lata, usque ad 50 mm longa, apice subito contracta, subglauca, margine serrulata; turionum sterilium 35—50 mm longa, $1^1/_2$—2 mm lata, patula vel suberecta, rosularia breviora, caulina media internodiis longiora, suprema internodiis breviora, erecta. Flores breviter pedunculati. Squamae calycinae late subrotundatae, margine scarioso-membranaceae, saepe purpurascentes, brevissime mucronatae; calyces dentibus brevibus rotundato-obtusis, altero latere saepe obscure purpurascentes. Petala rosea vel alba, non contigua; petalorum lamina obovata, 10—12 mm longa, antice ad medium tenuiter multifida, area intermedia oblonga, basi parce albide pilosa, in unquem angustum longitudine calycem aequantem ± sensim attenuata. — Habitat in Transsilvaniae collibus arenosis »Vereshegy« dictis prope Mühlbach (= Szászsebes), lg. Csáto HP, lg. Schuller HP, lg. Barth HMB etc. [apud Köhalom, Alsó Rákos, Brassó et Tömös incertus!]. — Varietas haec est forma transiens ad *D.* spiculifolium* (Schur). [cf. Frant. A. Novák: Notes on the Phylogenetial Developement of European Pinks of Section Fimbriatum, — Věstník Klubu přírodovědeckého v Praze Sv. IV 1914—20. č. 4. p. 5.]

názvy pokládá za pouhé obměny starého názvu *D. arenarius* Townson. Již r. 1886 Wiesbaur (108) důkladně probral veškery rozdílné znaky mezi *D.* Lumnitzeri* a *D.* Neilreichii*, z nichž patrno, že není možno hvozdíky Mödlingských skal a hvozdíky Děvínských útesů považovati za totožné, ač jsou si velmi blízce příbuzny; stejného názoru jako Wiesbaur jest také Beck (4, p. 374), Graebner (2, p. 421) a mn. j. — Neilreich s počátku, právě tak jako Endlicher (23), později též Williams (110, p. 474) a j., považoval hvozdík ze skal u Děvína za úplně totožný s hvozdíkem ze skal Mödlingských. Později však Neilreich poznal, že jsou mezi nimi rozdíly, jež ale nepovažoval za dostatečné k oddělení obou od sebe a spokojil se poznámkou (59), v níž označuje hvozdíky Mödlingských skal jako typický *D. plumarius α saxatilis*, hvozdíky Hainburgských skal jako přechodné tvary mezi *D. plumarius α saxatilis* a *D. plumarius β serotinus*. — Sám měl jsem k disposici dostatečný materiál, jak od Mödlingu, tak také od Děvína a Hainburgu a ze severního vápencového obvodu Malých Karpat, a stanovil jsem, že mnoho znaků, které Wiesbaur připisuje hvozdíkům ze skal Mödlingských, tyto vůbec nemají, že mnoho znaků, jichž Wiesbaur užívá ku oddělení hvozdíka od Děvína od hvozdíka Mödlingského, jest neustálených, velmi proměnlivých, takže jich nelze použíti ku vzájemnému rozlišení obou. Rozdíly mezi oběma hvozdíky jsou pouze stupňovité; *D.* Lumnitzeri* liší se od *D.* Neilreichii* průměrně nižším vzrůstem, lodyhami jednokvětými, listy vzpřímenými, užšími, pochvami listů průměrně kratšími, podkališními brakteami poněkud užšími, petaly průměrně menšími a kratšími, s čepelí jen v menší části vpředu dřípenou, užší, mnohem více klínovitou se střední nerozdřípenou částí podlouhlou. Oba hvozdíky jsou typy vikarisující, a jako u všech vikarisujících forem, i zde nalezneme tvary přechodné. — Na základě všech znaků morfologických, biologických i fytogeografických považuji uvedený hvozdík z Malých Karpat — Wiesbaurův *D. Lumnitzeri* — za varietu hvozdíka pernatého, rovnocennou ostatním varietám, přizpůsobenou podmínkám stanoviště, představující nám přechodný tvar mezi alpskými varietami hvozdíka pernatého a karpatskou jeho varietou (*D.* praecox*).

Od *D.* praecox*, jemuž jest *D.* Lumnitzeri* právě tak blízce příbuzný jako varietě Neilreichově, liší se hvozdík Lumnitzerův listy vzpřímenými, užšími, často kratšími, tužšími, lodyhami slabě čtyřhrannými, podkališními brakteami širšími a kratšími, kalichy značně užšími a delšími, zuby kališními poněkud tupějšími a delšími, petaly s nehty delšími nežli jest kalich. — Dle Wiesbaura (108, p. 166) jest rozdíl mezi *D.* Lumnitzeri* a *D.* praecox* daleko větší, leč nesmíme zapomínati, že Wiesbaur srovnával svůj *D. Lumnitzeri* pouze s hvozdíkem, který sám pěstoval, obdržev jej z bývalé botanické zahrady na Freinbergu u Lince, kamž se onen hvozdík dostal kýmsi z kterési vídeňské zahrady, a který Wiesbaurovi určil Duftschmied jako *D. Hongaricus* Persoon; takové srovnání ovšem nemůže býti směrodatné. — Zhora uvedené znaky, stanovené na základě živého materiálu z přírody, dokazují rozdílnost obou hvozdíků, současně však ukazují, že rozdíl mezi oběma jest pouze stupňovitý. Nezřídka nalezneme mezi oběma přechodní formy, tak zejména na severní hranici hvozdíka Lumnitzerova a na jižní hranici var. *praecox*. Oba hvozdíky jsou typickými vikarisujícími varietami druhu *D. plumarius*, vzniknuvšími téměř současně z jednoho druhu původního, jež svými arealy se sice vylučují, ale dotýkají a v místech styku tvoří přechodní tvary původu nehybridního.

Od *D.* praevertens*, *D.* Hoppei* a *D.* blandus* liší se *D.* Lumnitzeri* brakteami podkališními kratšími a poměrně širšími, petaly nejčastěji bílými, klínovitými, lodyhami nižšími, slabě čtyřhrannými a konečně geografickým rozšířením.

Jak bylo již uvedeno, považuje Borbás *D. *Lumnitzeri* za totožný s *D. serotinus* W. K. (12); o vzájemné příbuznosti těchto dvou hvozdíků zmiňuje se týž autor svým obvyklým způsobem následovně: »*D. Lumnitzeri* Degen, die species optima Blockiana, ist das Felsenexemplar des *D. serotinus* und unterscheidet sich von letzteren nur so viel, wie ein niedriger Mann von einem höher gewachsenen!« (8). — Neilreich (60) pokládá *D. serotinus* W. K. za pouhou varietu od *D. plumarius* L. — a hvozdíky ze skal Hainburgských a Děvínských za přechodnou formu mezi typickým *D. plumarius* var. *saxatilis* Neilr. a písečnou varietou *D.*

plumarius var. *serotinus* (W. K.) Neilr. — Vierhapper (102, p. 14. N° 3236) považuje *D.* Lumnitzeri* za časně kvetoucí skalní formu od *D. serotinus* W. K., jež znaky svými blíží se ku *D. plumarius* L. — Hegi (39, p. 340) uvádí *D.* Lumnitzeri* jako subspecii druhu *D. serotinus* W K. —

O příbuznosti hvozdíka Lumnitzerova s druhem *D. serotinus* W. K. není sice pochyby, ale o identitě neb o zvlášť tak blízké příbuznosti není ani řeči; ba naopak, srovnáme-li oba hvozdíky, nalezneme mnohem více znaků rozdílných nežli shodných. *D.* Lumnitzeri* liší se od *D. serotinus* W. K. (od všech jeho variet a forem) nižším, více trsnatým vzrůstem, lodyhami slabšími, mírně čtyřhrannými, o daleko menším počtu kolének, nenápadných, nenafouknutých, větším počtem sterilních růžic, listy často užšími a delšími podkališními brakteami poměrně užšími, nejčastěji zřetelně akuminatně ukončenými, kalichy po celé délce rovnoměrně a stejně širokými, petaly hruběji dřípenými, s čepelí širší atd. Kromě těchto morfologických znaků, možno zmíniti se o mnoha znacích biologických, jimiž se *D.* Lumnitzeri* liší od *D. serotinus* W. K., na př. v době květní, jež u hvozdíka Lumnitzerova jest mnohem kratší a počíná mnohem dříve. — *D.* Lumnitzeri* roste na vápencových skalách v blízkosti písčin; ale přes to nikdy neopustí své stanoviště, aby usídlil se na písčině. — Považují-li Borbás, Vierhapper, Hegi a někteří jiní *D.* Lumnitzeri* za pouhou skalní formu od *D. serotinus* W. K., činí tak neprávem, neboť nehledě ani ku řadě uvedených již rozdílných znaků morfologických i biologických, *D. serotinus* roste také na skalách, a sice dolomitických skalách u Ofen, na Adlersbergu, na Leopoldifelde, na Spissbergu, na Piliši atd., kdež všude zachovává si své specifické znaky.

O variabilitě hvozdíka Lumnitzerova zmiňuje se Gáyer (30, p. 57) a uvádí kromě jeho typické formy s petaly bílými s bílými chloupky na basi čepele, jež jest nejhojnější, také formu s květy gynodimorfickými (= *Caryophylleus silvestris V. species* II. Clusius, 14, p. 284), formu s petaly bílými a červenými chloupky (= *Caryophylleus silvestris V. species* II. *varietas* Clusius, 14, p. 284), formu s petaly růžovými, s chloupky na basi čepele rovněž růžo-

vými a konečně formu, kterou označuje názvem *D. Lumnitzeri* f. *eosinus* Gáyer, a jíž podrobně popisuje (30, p. 57). Prvá forma má velmi malou cenu systematickou, druhá, rostoucí na Děvíně, poukazuje (právě tak jako forma třetí) na souvislost hvozdíka Lumnitzerova s ostatními varietami hvozdíka pernatého, třetí, rostoucí na Hundsheimerbergu, představuje nám přechodní tvar mezi *D.* Lumnitzeri* a *D.* Neilreichii*, a konečně čtvrtá, vyskytající se na Rachsturmu a jinde v severním obvodu vápencovém v Malých Karpatech, jest přechodní formou mezi *D.* Lumnitzeri* a *D.* praecox*.

Zbývá zmíniti se ještě o jedné formě hvozdíka Lumnitzerova, jež habituelně se blíží velice hvozdíku Neilreichovu, ale v mnohých znacích svých poukazuje, že jest pouze formou hvozdíka Lumnitzerova. Jest to hvozdík ze skal Pavlovských a Mikulovských v jižní Moravě, jejž označil jsem jako *Dianthus plumarius* var. *Lumnitzeri* f. *Palaviensis* f. n. (cf. 18, p. 230) [= *D. plumarius* auct. Morav.]. A D.* Lumnitzeri forma typica foliis turionum sterilium et foliis rosulariis patulis, petalorum lamina obovata vel rotundata, usque ad 15 *mm* lata, antice (rarius etiam lateribus) irregulariter usque ad $^1/_3$ inciso-lacerata, basi pilis roseis adspersa, area intermedia integra obovata vel suborbiculata in unguem calyce longiorem abrupte contracta differt. — Habitat in montibus calcariis Palaviensibus in Moravia.

Na základě hustě trsnatého vzrůstu, čtyřhranné lodyhy, jež dosahuje nejvýše 20 *cm* výšky, při čemž nejčastěji jest jednokvětá, dále na základě tvaru, velikosti, barvy brakteí a konečně tupě ukončených cípů kališních přiřadil jsem tento Pavlovský a Mikulovský hvozdík ku *D.* Lumnitzeri*. Představuje nám jednak přechodný tvar mezi *D. Lumnitzeri* a *D. Neilreichii*, jednak relikt z doby ledové; jeho lokalita jest nejzápadnější stanoviště Lumnitzerova hvozdíka.

Dianthus plumarius var. **praecox** (Kitaibel pro sp.).

Syn.: *D. praecox* Kitaibel ap. Wildenow Enum. plant. hort. reg. Berol. Suppl. (1813) p. 24. sec. Graebner (2, p. 420).

D. praecox Schultes (116), Kitaibel (43, p. 532),

Borbás (10, p. 220), Vierhapper (102, no. 3235), Pax (74, II. Bd.), Graebner (2, p. 420) etc.

D. hungaricus Reichenbach (79), Haussknecht (33), A. Kerner (42), Sagorski et Schneider (87) et mult. aut. Hung. sed non Persoon [D. Hongaricus] (75).

D. plumarius Ullepitsch, Kmet et nonnul. aut. Slovenici in herb., sed non Linné (50).

D. plumarius β flore albo Maly (52).

D. plumarius α saxatilis Neilreich (61 [1866], p. 287 p. p.), Knapp (44).

D. plumarius β — Wahlenberg (105).

D. saxatilis Szontagh (97) non Persoon (75).

D. Tatrae Borbás (10, p. 220 et in sched. et in litt. sec. 102 p. 13).

D. serotinus b. *hungaricus* Williams (110, p. 409), Hegi (39, p. 340).

Podrobný popis tohoto hvozdíka uvádí Borbás (10, p. 220—221), Zapalowicz (112, p. 154) a Graebner (2, p. 419, 420), vyobrazení pak Reichenbach (80, fig. 5029) a Hayek (38, p. 385, fig. 213*d*). K popisu Borbásovu nutno však podotknouti, že *D.* praecox* mívá často lodyhu oblou a ne výhradně tupě čtyřhrannou, že zejména u jedinců nižších lokalit jsou listy tuhé, na okraji jemně pilovité a ne vždy hladké a chabé a konečně, že podkališní braktee nikdy nesahají až do poloviny kalicha, nýbrž jen do dolení $^1/_3$.

Až dosud sbírán byl *D.* praecox* pouze v západních a středních Karpatech, od Bílých Karpat počínaje až ku Košicko-Prešovskému zlomu. Jako příklad uvádím následující lokality: Podhradské Skály: Vršatec (42) a Chmelová u Puchova; Západopovážská vápencová hornatina: Tematín u Luka (61, 1870 p. 82), Maninská Soutěska, Sulovské Skály (74, II. p. 176), Patrikova Skála, Rájecké Teplice (74), Strečno (117) atd.; Velká Fatra: Blatnická dolina, Gaděrská dolina, Biala Skala, Tlsta, Hermanec (118) atd.; Malá Fatra: Fatranský Kriváň (21), Rozsudec (119; 97; 87, p. 80) atd.; Oravská Magura: Havranszko u Zazrivy (97), v okolí Dolního Kubína (61, 1866 p. 287) atd.; Babia Gora? (61, 1866 p. 287); Choč (97; 81; 61, 1866 p. 287;

105; 87, II. p. 80; etc.), skály u lázní Lučky (102, p. 13); Nízké Tatry: severní svahy Djumbiru, údolí Demenovky (33), Ohništje (61, 1866 p. 287; 87, p. 80), Baba u Lučivny (61, 1870 p. 83) atd.; Liptovské Alpy, velmi hojný (61, 1866 p. 287): Liptovský Hrádek (81, p. 65; 87, p. 80; 42), ve štěrku na březích Černého Dunajce, Litworova Mietusia (112), Koscieliská Dolina (42; 87, p. 80; 112), Krakow v Dolině Koscieliské (112), Suchá Dolina pod Bialou Skalou (112), Kominy (112), Konczysta Turnia (87, p. 80), Pisana (44; 87, p. 80), Twardy Uplaz (112), v okolí Červeného Průsmyku, Czerwony Wierch (44; 87, p. 80; 112), Mala Swinica (112), Kopa Kralova (87, p. 80), Nosal (87, p. 80), Giewont (112), Mala Laka (112) atd.; Belské Alpy: v údolí Javorinky (87, p. 80), Dlouhá Stěna u Podspady (87, p. 80), Nový (19, p. 165), Muráň (19, p. 165), Kopa (87, p. 80), Zamki (ibidem), Holubyho kotlina, Holica atd., po celých Belských Alpách hojný; Pěniny na skalách vápencových velmi hojný (112): Golica (102, n. 3235. II.), Tři Koruny (69), Sokolina (112) atd.; Slovenský Kras: Dobšina, Velký a Malý Sokol, Kysel, Suchá Bělá a ostatní Hrabušické rokle, Havraná Skála, Ztracená, Desna Skala a skály na Muráni u Tisovce, Hradová u Tisovce atd. Isolovaná je lokalita v Zadielské Rokline u Torny.

Hranice geografického jeho rozšíření probíhá od Vršatce a Podhradských skal údolím Váhu až ku jeho soutoku s Turcem, dále pak jak naznačeno na str. 6. ku Trenčanským Teplicím a zpět ku Vršatci. Nejsevernější jeho lokalitou jsou Tři Koruny v Pěninách, nejzápadnější jest Vršatec v Bílých Karpatech a nejjižnější a nejvýchodnější jeho lokalitou jest Zadielská Rokle u Torny. — Vertikální rozšíření jest v různých obvodech různé; v Belských Alpách vystupuje až do výše 2000 *m* n. m.; jako nejnižší lokalitu tohoto hvozdíka uvádí Györffy (32) »Lailand in d. Gegend der Villa Lersch gegen Sárberek auf Alluvium — 780 *m* (21. VII. 1915)«. Že zmíněná lokalita není nejnižší, mohl se Györffy přesvědčiti v díle Paxově (74, I. p. 132), kdež uvádí *D.* praecox* od Sulova z 370 *m* n. m.! V Zadielské rokli roste *D.* praecox* dokonce pouze ve výši 300 *m* n. m.!

D. praecox* vyskýtá se převážnou většinou na strmých

skalách vápencových, řidčeji na drolinách neb skalnatých stráních, vždy v porostu neuzavřeném; v Sulovských skalách roste na slepencích, jejichž tmel jest velmi bohatý na uhličitan vápenatý; ostatně roste výhradně na vápencích. Lokality jeho v severní části arealu jeho vyznačují se vesměs velikou insolací, jsou z největší části obráceny k jihu; na mnoha stanovištích jest tato jeho vybíravost velmi pěkně patrna; tak na př. na Babě u Lučivny nedaleko Popradu roste *D.* praecox* výhradně na svazích k jihu obrácených, ač edafické podmínky obou svahů jsou stejné a mnoho rostlin mají oba svahy společných. V jižní části jeho arealu nepozorujeme jeho vázanosti na svahy k jihu exponované, ač i zde dává jim přednost, ale někdy roste velmi dobře (na př. v Maninské Soutěsce) také na svazích k severu obrácených. — V nižších polohách roste *D.* praecox* pouze v oblasti praealpinů,*) do obvodu prvků ponticko-pannonských a teplomilných nezasahá. Ve vyšších polohách vystupuje *D.* praecox* do pásma alpinského, v pestré květeně vysokohorské uplatňuje se jako její komponent.**)

V mnoha květenách bývá uváděn *D.* praecox* pod názvem *D. hungaricus* Persoon. Již Borbás (10), později též Vierhapper (102), poukazovali k tomu, že Persoonův *D. Hongaricus* (75) představuje jednokvětou formu druhu *D. serotinus* W. K. Poněvadž pak jak originální diagnosa Persoonova *(D. Hongaricus)*, tak také uvedená synonyma *(D. arenarius* Towns.*)* nejsou jednoznačné, a vztahují se pravděpodobně na některé formy druhu *D. serotinus* W. K., nemůžeme názvu Persoonova použíti ku označení zmíněného našeho hvozdíka *(D.* praecox)*. Názory některých autorů (na př. Gáyer in lit.), že Persoon popisoval pod názvem *D.*

*) ve společnosti následujících druhů: *Minuartia laricifolia, Kernera saxatilis, Hippocrepis commosa, Gentiana Clusii, Leontodon incanus, Hieracium bupleuroides, Carduus canus, C. collinus, Draba aizoides, Primula auricula, Bellidiastrum, Scabiosa lucida*, atd.

**) roste mezi následujícími druhy: *Arabis alpina, Draba aizoides, Silene acaulis, Dryas octopetala, Sempervivum montanum, Saxifraga caesia, Meum mutellina, Chrysanthemum alpinum, Crepis Jacquinii, Veronica aphylla, V. alpina, Luzula spadicea* etc. někdy též *Leontopodium alpinum*. Schneider (87, I. p. 171—175) uvádí z Holubyho Doliny 314 druhů, které rostou společně s *D.* praecox*.

Hongaricus hvozdík z vápencových skal středních Karpat, jak prý patrno z herbáře Persoonova a ze Schultesovy »Oesterreichs Flora« (II. Aufl.), nejsou dostatečně podepřeny objektivním pozorováním. V každém případě musíme dáti přednost názvu jednoznačnému, v našem případě Kitaibelovu *D. praecox.* — Borbásův název *D. Tatrae* jest nejen pozdější, ale i v tom nesprávný, jelikož označuje názvem »Tatrae« hvozdík, který v Tatrách vůbec neroste.

O příbuzenských vztazích variety *D.* praecox* jsou ještě dnes názory nesjednocené; Sagorski (87, p. 81) a Borbás (11, p. 245) považují *D.* praecox* za horskou formu hvozdíka pernatého a výslovně se zmiňují, že »postavení *D.* praecox* ku *D. plumarius* jest podobné příbuzenskému postavení *D.* speciosus* Rchb. ku *D. superbus* L.« Tento názor není dosti oprávněn, jelikož *D.* speciosus* Rchb. jest zcela zřetelně typ horský, vzniklý z *D. superbus* L., a jejich arealy se také dle toho prostupují, odlišeny jsouce toliko vertikálně. *D.* praecox* naproti tomu svým arealem se vylučuje se všemi ostatními varietami a formami hvozdíka pernatého, a jeho lokality nalézají se jak v nízkých, tak také ve vysokých polohách (300 až 2000 *m* n. m.). — Williams (110, p. 409) považuje *D.* praecox* za pouhou varietu od *D. serotinus* W. K., lišící se toliko dvěma nepatrnými znaky: »kalichem ku konci zúženým«, což jest právě důležitý znak typického *D. serotinus* W. K., a pak »petaly, jichž čepele se v květu okraji dotýkají.« Z toho zřejmě patrno, že Williams *D.* praecox* vůbec neviděl, jinak by také nemohl uvésti jen tak kratičkou a k tomu ještě nesprávnou poznámku, ku objasnění hvozdíka *D. praecox.* Znaků rozdílných mezi *D.* praecox* a *D. serotinus* W. K. jest rozhodně více, nežli shodných.

Pax (74, II. p. 105) pokládá *D.* praecox* za pouhou výškovou formu od *D. serotinus* W K., při čemž tento považuje za typ starý, kdežto onen za typ mladý, nedávno vzniklý v západních Karpatech ve vyšších polohách. Naproti tomu nutno konstatovati, že *D.* praecox* jest původu praeglacialního, *D. serotinus* W. K. postglacialního, a že styk arealů obou hvozdíků jest nepravým vikarismem (cf. 66 et 68).

Srovnáme-li *D. serotinus* W. K. s *D.* praecox* ihned

zjistíme, že *D.* praecox* liší se od *D. serotinus* hustěji trsnatým vzrůstem, menší sivostí (alespoň od většiny forem druhu *D. serotinus*), lodyhami nižšími, tenšími, o mnohem menším počtu internodií, při čemž kolénka jsou nenápadná, nenafouklá; dále listy delšími, často i užšími, na okraji mnohem jemněji a kratšeji zoubkatými, někdy úplně hladkými, měkčími; podkališními brakteami pak podlouhlejšími, elliptičnými, často dosti dlouze akuminatně ukončenými (kdežto *D. serotinus* W. K. má je široce obvejčité až okrouhlé, kratičce mukronatně zakončené); dále kalichy kratšími a širšími, pouze 3 až 5 krát tak dlouhými jako širokými, po celé délce téměř stejně širokými, nezřídka s fialovým neb červenavým nádechem, květy často většími, petaly s čepelí obvejčitou, širší, vpředu mělčeji dřípenou (alespoň u většiny forem) se střední nerozdřípenou částí obvejčitou neb široce elliptičnou. — Ale i v lokalitách, na nichž uvedené dva hvozdíky rostou, jest veliký rozdíl; zatím co *D.* praecox* roste výhradně na skalách vápencových neb na uhličitan vápenatý bohatých, v útvarech rostlin alpinských neb praealpinských, vyskýtá se *D. serotinus* W. K. nejčastěji na písčinách, často na přesypech, na substratu velmi sterilním, v útvarech pannonských psammofytů. — *D. serotinus* W. K. v jedné formě (*f. dolomiticus* = *? D. regis Stephani* Rapaics Term. Tud. Közl. LIV p. 291 sec. Gáyer in lit.; cf. p. 3.) roste také na skalách, pak ale zachovává si všechny specifické znaky, a snadno jej od *D.* praecox* dle shora uvedeného odlišíme. — *D.* praecox* kvete velmi záhy, zejména v nižších polohách rozkvétá již v dubnu a koncem června jest již odkvetlý (v polohách vyšších rozkvétá přirozeně později, ale přes to jen výjimečně v studených letech, v nejvyšších polohách nalezneme ještě v září kvetoucí jedince); naproti tomu *D. serotinus* W. K. počíná rozkvétati v nížině Uherské (tedy na lokalitách jižnějších a o nadmořské výšce mnohem menší, nežli jest u nejnižších lokalit hvozdíka předchozího) teprve koncem července a kvete až do konce listopadu (106). — Z uvedeného srovnání*) jest zřetelně patrno,

*) Uvedené srovnání sestaveno jest na základě bohatého materialu a kritického studia veškeré přístupné literatury; ač snažil

že rozdílných znaků mezi oběma hvozdíky jest mnohem více nežli shodných, a že tudíž příbuznost obou hvozdíků není příliš veliká; k témuž závěru dojdeme, sledujeme-li rozlohu arealů obou druhů a rozšíření jednotlivých forem uvnitř arealů. Oba druhy se svými arealy sice stýkají, ale netvoří přechodných forem, poněvadž nevznikly původně z jednoho společného druhu. *D. serotinus* W. K. vznikl pravděpodobně v době poledové v Sedmihradsku (66), kdežto *D.* praecox* osadil své lokality před dobou ledovou, rozšířiv se z Alp přes Malé Karpaty do hor Slovenských.

Od *D. Kitaibelii* subsp. *spiculifolius* (Schur) liší se *D.* praecox* statnějším vzrůstem, lodyhami nezřídka slabě čtyřhrannými, listy delšími, teprve v hoření $^1/_4$ se sužujícími, zelenějšími, na okraji méně zoubkatými, nezřídka hladkými, květy většími, brakteami podkališními užšími a delšími, akuminatně zakončenými, petaly hruběji dřípenými, na basi čepele hustěji chloupkatými, dále pak zcela odchylným směrem progressivní variability, přechodnými, nehybridními formami ku *D.* Lumnitzeri*, neexistencí přechodných tvarů ku *D. serotinus* W. K. a svým geografickým rozšířením. Z toho plyne, že oba tyto hvozdíky nejsou si zvláště blízce příbuzny, že právem můžeme je odděliti od sebe a přičleniti je rozdílným druhům.

Od *D.* Hoppei* liší se *D.* praecox* značně kratšími kalichy, brakteami užšími a delšími, petaly nejčastěji bílými. V ostatních znacích morfologických i biologických se oba hvozdíky shodují. — Od *D.* blandus* liší se *D.* praecox* listy rozestálými, širšími, kratším kalichem, květy většími, petaly nejčastěji bílými, nehty tak dlouhými jako kalich, a pak geografickým rozšířením. — Od *D.* Neilreichii* odlišuje se *D.* praecox* menší sivostí, podkališními brakteami elliptičnými, akuminatně ukončenými, kratším a širším kalichem, petaly s čepelí poněkud užší jemněji dřípenou, se střední nerozdřípenou částí široce elliptičnou až obvejčitou a nehty tak dlouhými jako kalich.

D. praecox* jest nejblíže příbuzným hvozdíku Lumnitze-

jsem se vytknouti rozdíly pokud možno nejkratčeji a nejstručněji, nemohl jsem tak učiniti pouze pěti slovy jako Williams.

rovu, s nímž spojen jest také přechodnými tvary, jak od *D.* Lumnitzeri*, tak také ze strany *D.* praecox*. Liší se pak *D.* praecox* od *D.* Lumnitzeri* listy rozestálými, v sterilních růžicích delšími, měkčími, dále podkališními brakteami užšími a delšími, akuminatně zakončenými, kalichy poněkud kratšími a širšími, petaly o nehtech tak dlouhých, jak jest kalich. Na jedincích z jižnějších lokalit znaky rozdílné znenáhla mizí, zejména na jihozápadní hranici arealu vytváří *D.* praecox* formy (f. *simplex*), které se nesmírně podobají formám hvozdíka Lumnitzerova, rostoucím v severním vápencovém obvodu v Malých Karpatech; liší se pak jen v listech (*D.* praecox* má listy vždy rozestálé) a poněkud v podkališních brakteách. Čím jdeme dále k severu v arealu hvozdíka časného, tím s většími rozdíly mezi oběma hvozdíky se setkáváme. — Na základě stupňovitých rozdílů mezi *D.* praecox* a *D.* Lumnitzeri*, na základě jejich geografického rozšíření a na základě přechodných forem mezi oběma hvozdíky (*D.* Lumnitzeri* f. *eosinus* a *D.* praecox* f. *simplex*) považuji oba za velice blízce příbuzné, vzniklé z jednoho původního společného typu, za vikarisující variety hvozdíka pernatého.

Variabilita u *D.* praecox* jest dosti značná, vesměs však odvislá od oekologických poměrů stanoviště. Na lokalitách suchých, nízko položených, k jihu exponovaných, se značnou insolací, vytváří *D.* praecox* formy — *D. plumarius* var. *praecox* f. *simplex**) — nízké, jednokvěté, s listy užšími a tužšími, s květy bílými, kalichy zvlášť krátkými a širokými; to jsou právě přechodné tvary ku *D.* Lumnitzeri*. — Na místech vlhčích, ve stínu, neb na drolinách k severu obrácených a zastíněných nabývá *D.* praecox* vzrůstu volnějšího, delších listů, lodyh vícekvětých, s kalichy poněkud delšími. — Na lokalitách vysokohorských ztrácí *D.* praecox* význačnou sivost, nabývá barvy zelené, širších a delších listů, má lodyhy vícekvěté, každý z květů podepřen 2—4 brakteami dlouze akuminatně zakončenými, má kalichy delší a užší (ovšem nikdy ne tak úzké jako *D.* spiculifolius* neb

*) Formae caulibus humilioribus, unifloris, foliis angustioribus rigidisque, calycibus brevioribus latioribusque et petalis semper albis distinctae. Formae ad *D.* Lumnitzeri* vergentes.

D. blandus*), petaly jemněji a hlouběji dřípené, nezřídka růžové. — Popisovati tyto náhodné neb lokální formy, jak to činí Zapalowicz (112), jenž popisuje od *D.* praecox* sedm forem (f. *Koscieliskiensis*, f. *Sokolicensis*, f. *flexibilis*, f. *Kominensis*, f. *sublatifolius*, f. *Kotulanus*, f. *Golicensis*), nemá docela žádného významu, jelikož nejen že jsou všechny plynule spojeny přechodnými tvary, nejen že nejsou geograficky ohraničeny, nýbrž nejsou ve vytčených znacích konstantní ani u jediného trsu.

Zajímavější forma vyskytá se v Belských Alpách, kdež sbíral ji v srpnu 1882 Ullepitsch v Holubyho Dolině (Drechslerhäuschen) pod názvem *D. serotinus*, v srpnu 1888 J. Freyn na Suchém Vrchu (na vápencových skalách ve výši 1760 *m* n. m.) a u Zakopaného pod Vysokými Tatrami, v srpnu 1919 K. Domin na několika místech. Tato forma význačná hlavně toliko dvěma podlouhlými podkališními brakteami, petaly podlouhlými, velice hluboce dřípenými, upomínajícími na petaly druhu *D. arenarius*, představuje nám vlastně extrem vysokohorských forem, který svými odchylnými morfologickými znaky a geografickým rozšířením, omezeným na Belské Alpy, vyžaduje zvláštního označení.

Na počest našeho nejlepšího znatele květeny Slovenské, jenž získal si trvalé zásluhy o botanický prozkum nejen Belských Alp, ale celé republiky Československé, univ. prof. Dra Karla Domina, dovolil jsem si tento překrásný hvozdík označiti

Dianthus plumarius var. *praecox* f. *Dominii*.

Laxe caespitosus, viridis; caules primum declinati dein erecti, teretes, usque ad 25 *cm* alti, 1—3 flori. Folia patula, breviora et latiora quam in typo. Squamae calycinae duo, ellipticae, longe acuminatae (cum acumine 10 *mm* longae); calyx 18—20 *mm* longus, 4—5 *mm* latus, dentibus longioribus, acuminatis. Petala 32—40 *mm* longa, lamina elliptica, apice lateribusque usque ad $^1/_2$ (rarius ultra medium) irregulariter tenuissime pinnatifido-multipartita, area intermedia integra oblonga, basi parce pilosa, in unguem angustum calyce aequilongum sensim duplo attenuata. — Habitat in saxosis calcariis »Belské Alpy« dictis, alt. 1100—2000 m s. m.: Holubyho Dolina (Drechslerhäuschen) — lg. Ullepitsch, 2. VIII.

1882. in Bubelae herbario Pragae — sub. *D. serotino;* Suchý Vrch — lg. J. Freyn, 10. VIII. 1888. in Musei regni Bohemiae herbario Pragae — sub *D. plumario;* ad declivia calcaria apud Zakopané — lg. J. Freyn, in Velenovskýi herbario Pragae — sub *D. plumario;* in locis diversis — lg. K. Domin, 1919, 1920. in herbario proprio Pragae.

Jiných pozoruhodnějších forem jsem ani v přírodě ani v herbářích nesledoval.

Z uvedeného jest patrno, že *D. plumarius* (L.) jest druhem omezeným na vápencové obvody východních Alp a západních a středních Karpat, rozpadající se v šest variet, *praevertens — Hoppei — blandus — Neilreichii — Lumnitzeri — praecox*, z nichž vždy dvě sousední jsou typicky vikarisující. — Ku konci budiž uveden ještě klíč k určování jednotlivých variet a forem.

Clavis analytica:

1. Petalorum lamina basi immaculata . 2.
1.* Petalorum lamina basi cum macula viridi *D. plumarius* var. *praevertens.*
2. Planta viridis 3.
2.* Planta glauca 4.
3. Petala antice usque ad (primam) tertiam partem lacerata, squamae calycinae ovatae, breviter acuminatae *D. pl.* var. *Hoppei.*
3.* Petala ultra medium tenuissime lacerata, squamae calycinae ellipticae longe acuminatae *D. pl.* var. *praecox* f. *Dominii.*
4. Caules ± quadranguli, folia caulina erecta 5.
4.* Caules teretes, folia ± in 45° patentia 7.
5. Squamae calycinae late ellipticae vel rotundatae, calycis dentes obtuse acuminati, petalorum area intermedia integra oblonga 6.
5.* Squamae calycinae ovatae, calycis dentes acute acuminati, petalorum area intermedia integra rotundata *D. pl.* var. *blandus.*

6. Caules uniflori, petala non contigua, alba
D. pl. var. *Lumnitzeri.*

6.* Caules 2—3 flori, squamae calycinae acutiores, calyces rubri, petala contigua
D. pl. var. *Lumnitzeri* f. *eosinus.*

6.** Caules uniflori, calyces virides, petala contigua
D. pl. var. *Lumnitzeri* f. *Palaviensis.*

7. Squamae calycinae late ellipticae, acuminatae, petalorum ungues calycis longitudinem aequantes
D. pl. var. *praecox.*

7. Squamae calycinae rotundatae, brevissime mucronatae, petalorum ungues calycis longitudine longiores
D. pl. var. *Neilreichii.*

Následkem existence přechodných tvarů jest tento klíč pouze přibližný, a vede k cíli při určování typických variet a forem.

Summary.

A Monographical Study of Dianthus plumarius (L.).

By Dr. **Frant. A. Novák** (Prague).

Graebner (in Ascherson P.-P. Graebner: Synopsis der Mitteleuropaeischen Flora. Bd. V 2, Lief. 105.— 28. Febr. 1922.) reckons (pp. 409—438) 22 European Pinks of Section *Plumaria.* Of these *Dianthus graminifolius* Presl belongs to the Section *Caryophyllum* Ser., *D. gallicus* Pers. to the Section *Barbulatum* Williams; further *D. liliodorus* Panč., *D. Noëanus* Boiss., *D. spiculifolius* Schur, *D. integripetalus* Schur and *D. Simonkaianus* Péterfi belong to the species *Dianthus Kitaibelii* (Janka) Novák; *D. Valentinus* Willk. and *D. grandiflorus* Gürke belong to the species *Dianthus Broteri* Boiss.; *D. crinitus* Sm. does not grow at all in Europa. Final *D. Lumnitzeri* Wiesb. and *D. praecox* Kit. belong to the species *Dianthus plumarius,* concerning which opinions are divided.

*Dianthus plumarius**) grows today only in the North-

*) Description cf. p. 2. — *D. moschatus* Mayer = *D. petraeus* b. *bohemicus* Tausch, Williams = *D. petraeus* var. *Meyeri* Williams = *D. bohemicus* Mayer = *D. Mayeri* Presl (cf. Literature No. 64),

west Croatia, in Carinthia, in Stiria, in the Upper and Lower Austria, in Southern Moravia, in Western Slovakia and in the West part of the Slovakian-Polish frontier. — It does not grow in Rossia (MARSCHALL, BIEBERSTEIN, LEDEBOUR etc.), in Poland (LINDMANN), in Bohemia (POLÁK, ČELAKOVSKÝ etc. — cf. pp. 37—42. Literature, Nos. 62 and 64), in Silesia (NYMAN), in Tyrol (MALY), in Carniola (GÜRKE), in Northern Italy (GÜRKE), in the former Austrian-Littoral (KITAIBEL, GÜRKE etc.), in Roumania (GÜRKE), in Montenegro (PANČIĆ, GÜRKE etc.) and it grows nowhere in the Balkans**) (PANČIČ, VELENOVSKÝ, URUMOV, STOJANOV and STEFANOV etc.); cf. boundary of the area of *Dianthus plumarius* pp. 5—7.

Centrum evolutionis of *Dianthus plumarius* is to be found in the Southern Calcareous Alps (cf. Literature No. 66); *D. plumarius* has three centres of dissemination: the Eastern part of the Southern Calcareous Alps (*D. plumarius* var. *Hoppei*), the Northern Calcareous Alps (*D. plumarius* var. *blandus*) and the Carpathian Mountains as far as the line of fracture Košice-Prešov (Kassau-Eperjes) — (*D. plumarius* var. *praecox*). — *Dianthus plumarius* appears almost as a praealpine element.

Dianthus plumarius is most nearly related to the *D. Kitaibelii* (JANKA) NOVÁK and to the *D. hyssopifolius* (L.) HERMANN — genuine vicarism, — somewhat less to *D. gratianopolitanus* VILL. (pseudovicarism), but is phylogenetically far removed from *D. serotinus* W. K. and *D. arenarius* (L.) NOVÁK.

Dianthus plumarius is broken into six vicarious varieties (var. *praevertens*, var. *Hoppei*, var. *blandus*, var. *Neilreichii* var. *Lumnitzeri*, var. *praecox*), of which var. *praevertens* (WILLIAMS = *D. serrulatus* SCHLOSSER-FARKÁŠ-VUKOTINOVIĆ) grows on the Kalnik-Mountains in Croatia and is

further *D. portensis* LIBOSCH., *D. odoratus* VEST, *D. hortensis* KÖLREUTER, *D. hortensis* SCHRAD. = *D. plumarius* b. *hortensis* BORBÁS = *D. hungaricus β moschatus* RCHB., further *D. arrectus* DUMORTIER are not synonyms to *Dianthus plumarius* (L.) NOVÁK.

**) according to HAYEK's limitation of the borders of the Balkans (Prodromus Florae peninsulae Balcanicae. Fasc. I. 1924. — In Fedde: Rep. Spec. nov. regni veget. Beihefte, Bd. XXX. 1.).

not a bastard between *D. Kitaibelii* Janka and *D. plumarius* L. (cf. Graebner l. c. p. 465.), but a variety of *D. plumarius* (L.) Novák verging on the *D. Kitaibelii* var. *petraeus* (W. K.). — *D. plumarius* var. *Hoppei* (Portenschlag) grows in Southern Stiria, in Carinthia and in North-west Croatia (cf. pp. 12—13). — *D. plumarius* var. *blandus* Rchb. grows in Upper Austria and in Northeren Stiria. — *D. plumarius* var. *Neilreichii* (Hayek) grows at Mödling in Lower Austria (? at Neuhaus in Stiria). — *D. plumarius* var. *Lumnitzeri* (Wiesbaur) — (Description cf. p. 18) grows on the Hainburg-Mountains in Lower Austria and on the calcareous rocks of the Little Carpathian Mountains; its form f. *Palaviensis* (Description cf. p. 24) grows on the calcareous rocks of the Mikulovské Kopce and Pavlovské Kopce in Southern Moravia. —

D. plumarius var. *praecox* (Kitaibel) grows on the calcareous rocks of the Carpathian Mountains from the White Carpathian Mountains (from the Myjava river) to the Tyliczpass (or as far as the line offracture Košice-Prešov; cf. pp. 25—26). — *D. plumarius* var. *praecox* f. *Dominii* (Description cf. p. 32) grows in the Belské Alpy (the limestone-alps of Bela) in North Slovakia. — The forms of *D. plumarius* var. *praecox* described by Zapalowicz have no systematical value. —

D. plumarius var. *Neilreichii*, *D. plumarius* var. *Lumnitzeri* and *D. plumarius* var. *praecox* are different varieties of the same species and they are phylogenetically older than the *Dianthus serotinus* W. K. — a postglacial species — which is not so nearly related to the *Dianthus plumarius* as Borbás, Hegi etc. think.

POUŽITÁ LITERATURA.

1. Adamović L.: Die Vegetationsverhältnisse der Balkanländer umfassend Serbien, Altserbien, Bulgarien, Ostrumelien, Nordthrakien und Nordmacedonien. (1909.)
2. Ascherson P. — P. Graebner: Synopsis der mitteleuropaeischen Flora. Bd. V. 2. Lf. 105. (1922.)
3. Bauhin: Pinax theatri botanici. Lb. VI. Sect. II. p. 210. (1623.)
4. Beck von Mannagetta: Flora von Nieder-Oesterreich (1890 bis 1893).
5. — Vegetationsverhältnisse der illyrischen Länder begreifend Südkroatien, die Quarnero-Inseln, Dalmatien, Bosnien u. die Herzegovina, Montenegro, Nordalbanien, den Sandžak Novi Pazar und Serbien (1901).
6. Blocki Br.: Oesterreichische Botanische Zeitschrift. Jg. XXXV. (1885), p. 329.
7. Boissier Ed.: Flora orientalis sive Enumeratio plantarum in Oriente a Graecia et Aegypto ad Indiae fines hucusque observatarum. Vol. I. 1867.
8. Borbás Vinc.: Oesterr. Botan. Zeitschr. J. XXXVI. (1886), p. 37.
9. — A Lembergi egyetem Herbariumában levö Schur-féle Erdélyi Szegfüvekröl. Editio separata e Természetrajzi Füzetek. Vol. XII. Parte 1. (1889), p. 40—53.
10. — Hazai Szegfüveink mint kerti virágok. (Species Dianthorum Hungariae Hortos exornantes.) Editio separata e Természetrajzi Füzetek. Vol. XII. Parte 4, (1889), p. 211—224.
11. — Die Ungarische Nelken als Gartenpflanzen. Ibidem p. 243-247.
12. — Flora von Oesterreich-Ungarn III. West-, Nord- u. Mittel-Ungarn-Oesterr. Botan. Zeitschr. Jg. XLII. (1892), p. 287.
13. De Candolle, Aug. Pyr.: Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis. Pars I. (1824), p 363.
14. Clusius Car.: Rariorum plantarum historia. Lib. III. (1601), p. 282, 284.
15. — Rariorum aliquot stirpium per Pannoniam, Austriam et vicinas quasdam provincias observatarum Historia. (1583), p. 320.
16. Čelakovský Lad.: Analytická květena Čech, Moravy a Rak. Slezska. III. vyd. (1897), p. 339.
17. Dalla Torre, K. W. — L. Sarnthein: Flora der gefürsteten Grafschaft Tirol, des Landes Vorarlberg und des Fürstenthumes Liechtenstein. VI. Bd. 2. Teil. 1909, p. 205.
18. Domin K.: Botanický zájezd na Moravu v květnu 1921. — Věda Přírodní. Rč. II. (1921.), p. 229—230.
19. — Spišská Javorina a její okolí. — Věda Přírodní. Rč. III. (1922), p. 95, 165.

20. Domin K.: Choč na Slovensku. (Předběžná zpráva rostlinogeografická). — Věda Přírodní. Rč. III. (1922), p. 199.
21. — Fatranský Kriváň. (Příspěvek k poznání vegetačních poměrů Malé Fatry). Věda Přírodní. Rč. IV. (1923), p. 93.
22. Dumortier: Florula belgica, operis majoris Prodromus. (1827), n. 1353.
23. Endlicher Steph.: Flora Posoniensis. (1830), p. 436, no. 1425.
24. Fedčenko B. A. — A. F. Flerov: Flora evropejskoj Rossii. (1910).
25. Fiek Em.: Exkursions-Flora für Schlesien. (1889). p. 83—84.
26. Focke W. O.: Die Pflanzen-Mischlinge. 1881, p. 54.
27. Freyn J.: Zur Flora von Ober-Steiermark. — Oesterr. Botan. Zeitschr. Jg. XLVIII. (1898), p. 225.
28. Fritsch Karl: Exkursions-Flora für Oesterreich. (1902), p. 199.
29. — Exkursions-Flora für Oesterreich und die ehemals oesterreichischen Nachbargebiete. (1922), p. 114.
30. Gáyer Gy.: Supplementum florae Posoniensis. Magyar Botanikai Lapok. XVI. (1917), p. 38—76.
31. Grenier-Godron: Flore de France. Tome premier. (1848), p. 243.
32. Györffy: Kurze Bemerkungen zur Flora der Hohen Tatra. Magyar Bot. Lapok. XXI. (1922), p. 69.
33. Haussknecht C.: Einige Mitteilungen über die Flora der Central-Karpathen. — Oesterr. Botan. Zeitschr. Jg. XIV. (1864), p. 210, 211 etc.
34. Hausmann Fr.: Flora von Tirol. I. (1854), p. 112—119.
35. Hayek Aug.: Beiträge zur Flora von Steiermark. Oesterr. Bot. Zeitschr. Jg. LII. (1902), p. 440—441.
36. — Beiträge zur Flora von Steiermark. Ibidem Jg. LIII. (1903), p. 368.
37. — Flora von Steiermark. Spezieller Teil. Bd. I. (1908—1911), p. 319— 321.
38. — Die Pflanzendecke Oesterreich-Ungarns. Bd. I. (1916), p. 375, fig. 206.
39. Hegi G.: Illustrierte Flora von Mittel-Europa. Bd. III, p. 338 bis 340.
40. Hermann F.: Flora von Deutschland und Fennoskandinavien, sowie von Island und Spitzbergen. (1912), p. 176.
41. Hulják János: Adatok a magyar Északnyugati Felvidék Flórájához. — Mag. Bot. Lap. (1908), p. 241.
42. Kerner A.: Die Vegetations-Verhältnisse des mittleren und östlichen Ungarns und angrenzenden Siebenbürgens. — Oesterr. Botan. Zeitschr. XVIII. (1868), p. 126.
43. Kitaibel: Additamenta ad Floram Hungaricam. — Linnaea XXXII. (1863), p. 531—532.
44. Knapp J. A.: Die bisher bekannten Pflanzen Galiziens und der Bukovina. (1872), p. 343.

45. Koch D. G. D. J.: Synopsis florae Germanicae et Helveticae. Ed. II. Pars I. (1843), p. 107.
46. Lamarck: Encyclopédie méthodique. Botanique. Tome Quatrieme. p. 521.
47. Ledebour C. F.: Flora rossica. Vol. I. (1842), p. 285.
48. Lehmann Ed.: Flora von Polnisch-Livland. (1895), p. 365.
49. — Nachtrag zur Flora von Polnisch-Livland. (1896), p. 99.
50. Linné C.: Species plantarum. Ed. I. (1753), p. 411; Ed. II. (1762), p. 589.
51. Lumnitzer St.: Flora Posoniensis. (1791), p. 176.
52. Maly J. C.: Enumeratio plantarum phanerogam. imperii Austriaci. (1848), p. 304.
53. — Flora styriaca. (1838), p. 2.
54. — Flora von Steiermark. (1868), p. 218.
55. Marschall — Bieberstein: Flora Taurico-Caucasica I. (1808), p. 330.
56. Mayer Joh.: Abhandlungen der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften auf das Jahr 1787, p, 318.
57. Mönch Konr.: Methodus plantas horti botanici et agri Marburgensis a staminum situ describendi. (1794), p. 59.
58. Neilreich Aug.: Flora von Wien. (1846), p. 375.
59. — Flora von Wien. II. Bd. Nachträge. (1851), p. 284.
60. — Flora von Nieder-Oesterreich. (1859), p. 807.
61. — Aufzählung der in Ungarn und Slavonien beobachteten Gefässpflanzen. (1866); Nachträge u. Verbesserungen (1870).
62. Novák Frant. A.: Kritická studie o Dianthus arenarius L. a jemu příbuzných druzích, a o jeho stanovišti v Čechách. — Věstník král. české Společnosti Nauk v Praze. Tř. math.-přírodovědecká. Rč. 1915. Č. VIII.
63. — Mayerův Dianthus bohemicus. — Časopis Musea Král. Českého. Rč. XC. (1916), p. 138—140.
64. — Dianthus arenarius in Böhmen. — Oesterr. Botan. Zeitschr. Jg. 1915, p. 324.
65. — Přehled českých hvozdíků. — Čas. Musea Král. Českého Oddíl přírodovědný. Rč. XCV. (1921), p. 54—62.
66. — Příspěvek ku fylogenesi evropských hvozdíků. — (Notes on the Phylogenetical Developement of European Pinks of Section Fimbriatum.) — Sborník klubu přírodověd. v Praze. Sv. IV. 1914—1920. Č. 4. p. 23—29. (V Praze 1922.)
67. — Vápencové obvody v Malých Karpatech. — Preslia II. (1922). p. 67—80.
68. — Results of Essay on the Phylogenese of the Dianthus-Species of Section Fimbriatum. — Věstník I. Sjezdu čs. botaniků v Praze 1921. (Praha 1923), p. 67—68.
69. Nyárády E. Gy.: Nehány uj adat a Pieninek flórájához. — Mag. Bot. Lap. IX. 1910, p. 377.
70. Nyman C. Fr.: Conspectus Florae Europaeae. (1878—1882), p. 104.

71. Nyman C. Fr.: Consp. Florae Europaeae. Supplementum II. pars 1. (1889), p. 59.
72. Pacher D. — Jabornegg M.: Flora von Kärnten. I. Theil, 3. Abt. (1887), p. 200.
73. Pančić J.: Elenchus Plantarum vascularium, quas aestate a. 1873 in Crna Gora legit Dr. J. Pančić. Edidit Societas erudita Serbica. (1875), p. 11.
74. Pax F.: Grundzüge der Pflanzenverbreitung in den Karpathen. I. Bd. (1898), II. Bd. (1908).
75. Persoon: Synopsis plantarum. I. (1805), p. 494.
76. Polák K.: Nová pro květenu českou rostlina. — Vesmír. Roč. XXV. (1896), p. 227.
77. Portenschlag in J. N. Gebhard's Verzeichniss der von dem Jahre 1804 bis 1819 auf meinen botanischen Reisen durch und in der Steyermark selbst beobachteten etc.. . Pflanzen. (1821), p. 96.
78. Presl Kar. Boř.: Botanische Bemerkungen. (Prag 1844), p. 18.
79. Reichenbach Lud.: Flora germanica excursoria. (1830—1832), p. 807.
80. — Icones Florae Germanicae et Helveticae. VI. (1844), tab. 257.
81. Reuss Gust.: Května Slovenska. (1853), p. 64.
82. Richter K. — Gürke M.: Plantae Europaeae. Tomus II. Fasc. III. (1903).
83. Rohlena J.: Erster—fünfter Beitrag zur Flora von Montenegro. — Sitzungsber. d. königl. böhm. Ges d. Wissensch. II. Cl. Jg. 1902 N° 32 und 39, Jg. 1903 N° 17, Jg. 1904 N° 38, Jg. 1912 N° 1.
84. — Několik novinek z květeny černohorské. — Věstník král. čes. Spol. Nauk na rok 1920. Tř. II.
85. Rossi Ludw.: Die Plješivica und ihr Verbindungszug mit dem Velebit in botanischer Hinsicht. — Mag. Bot. Lapok. XII. 1913, p. 61 (1914).
86. Rouy G. et J. Foucaud: Flore de France. T. III. (1896).
87. Sagorski Ernst — Schneider Gustav: Flora der Centralkarpathen. II. Hälfte (1891).
88. Schlosser J. et L. Farkáš-Vukotinović: Syllabus florae Croaticae. (1857), p. 192.
89. — Flora croatica. (1869), p. 321.
90. Schmalghausen: Flora srednij i južnoj Rossii. I p. 129.
91. Schube Th.: Flora von Schlesien preussischen und oesterreichischen Anteils. (1904), p. 147.
92. Schultes A.: Flora austriaca. Ed. I. (1794), p. 203.
93. Schur J. Ferd.: Enumeratio plantarum Transsilvaniae. (1866), p. 98.
94. Scopoli: Flora carniolica. Ed. 2. Pars I. (1772), p. 300.

95. STOJANOV N. — B. STEFANOV: Liste des plantes croissant spontanément en Bulgarie. (1921), p. 65.
96. SWEET: Hortus Britanicus. Ed. II. (1830), p. 50.
97. SZONTAGH: Enumeratio plantarum phanerog. et cryptog. vasc. Com. Arvensis. — Verhandl. zool. botan. Gesellsch. Wien. (1863), p. 1089.
98. TAUSCH J. F.: Botanische Beobachtungen. — Flora XIII. (1830), No. 16, p. 246.
99. VELENOVSKÝ J.: Flora bulgarica. Supplementum I. (1898), p. 41.
100. — Nachträge zur Flora von Bulgarien. — Sitzungsber d. köng. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. II. Cl. Jg. 1903. N° 28, p. 2.
101. VIERHAPPER FR.: Zur systematischen Stellung des Dianthus caesius Sm. — Oesterr. botanische Zeitschr. Jg. 1901. N° 10—11.
102. — In Schaedis ad Floram exsiccatam Austro-Hungaricam IX. (C. Fritsch) 1902, p. 13—14. N° 3235—3236.
103. VISIANI ROB.: Flora dalmatica. (1842—1852). Suppl. I. (1872) Suppl. II. (1877—1878).
104. VOLLMANN F.: Flora von Bayern. (1914), p. 244.
105. WAHLENBERG: Flora Carpatorum principalium. (1814), p. 126.
106. WALDSTEIN R. et KITAIBEL P.: Descriptiones et Icones plantarum rariorum Hungariae (1802—1812).
107. WIESBAUR J.: Beiträge zur Flora von Presburg. — Verhandl. der Ver. für Natur- und Heilkunde zu Presburg. N. F I. (1870), p. 52.
108. — Prioritätszweifel über Dianthus Lumnitzeri u. Viola Wiesbauriana. — Botanisches Centralblatt. Jg. VII. Bd 26. (1886), p. 83—85, 116—119, 165—167.
109. WILLDENOW K. L.: Enumeratio plantarum horti regii botanici. Berolinensis (1809), p. 409; Supplementum (1813), p. 24.
110. WILLIAMS F N A Monograph of the genus Dianthus L. — Linnean Society's Journal-Botany, Vol. XXIX. 1893, p. 346—478.
111. WITTROCK — JOUEL: Catalogus plant. horto botan. Bergamio. (1891), p. 25.
112. ZAPALOWICZ: Conspectus florae Galiciae criticus III. (1911), p. 155—156.
113. MURR J.: Pflanzengeographische Studien aus Tirol. — Mag. Bot. Lapok. V. (1906), p. 267.
114. STROBL GABR.: Flora von Admont. Teil II.— XXXII. Jahresb K. k. Obergymn. Melk (Wien 1882), p. 44.
115. SLOBODA DAN.: Zur Flora des Neutraer Comitats. — Lotos, XI. (1861), p. 251.
116. SCHULTES J. A.: Oesterreichs Flora. Erster Teil. II. Auflage. (Wien 1814), p. 661.

117. Uechtritz R. v.: Botanische Exkursion in die Central-Karpathen. — Oesterr. Botan. Wochenblatt. Jg. VII. (1857), p. 377.
118. Márkus Alex.: Beiträge zur Kenntnis der Flora v. Neusohl. — Oesterr. Bot. Zeitschr. Jg. XV. (1865), p. 384.
119. Branczik K.: Der Roszudec in Ungarn. — Oesterr. Bot. Zeitschr. 1862, p. 322.
120. Stojanov N. i B. Stefanov: Flora na Balgarija. Čast I. (Pteridophyta — Rosaceae) 1924, p. 401.

XII.

Количественный состав двух изверженных горных пород.

П. Н. Чирвинский.
(Новочеркасск.)

(Předloženo dne 22. prosince 1923.)

I. Биотитовый перидотит из Холодной долины близ Гарцбурга в Германии.

Образец этой мелкозернистой породы был выписан от конторы Krantz в Бонне (шлифы по моей нумерации III. 71 a), b), c)). Образец вполне свежий. Порода эта залегает, как известно, линзами до $2^1/_2$ метра мощности, в норите Холодной долины (Kaltes Tal bei Harzburg im Harz).*)

H. Rosenbusch выделяет ее в особый тип, Glimmer-Peridotit и считает наиболее типично выраженным именно из этого месторождения, где притом же das Gestein ist von einer für seine Zusammensetzung geradezu überraschenden Frische.

Порода состоит главным образом из почти безцветного в шлифах оливина и ржавобурого биотита. В меньшем количестве встречаются большею частью неправильные зернышки бледно фиолетовой в шлифах шпинели (плеонаст) и в еще меньшем количестве титанистый железняк, а местами еще плагиоклаз.**) Генетически порода представляет собой один из крайнихъ (почти) безполевошпатовых членов габбро-норитового ряда, замещающих собою в норите Гарцбурга подобной же формы

*) Max Koch, Ueber Olivinfels aus dem Gabbrogebiet des Harzes, Zeitschr. d. deutsch. Geol. Gesel. 1889, No. XLI, 1 Heft, p. 163—165, H. Rosenbusch, Elemente der Gesteinslehre 1901, p. 169, 170, eгоже, Mikroskopische Physiographie 1907, p. 453, H. Hirschi, Beiträge zur Kenntnis der gesteinsbildenden Biotite, Ing. Diss. 1901, p. 24—26. Здѣсь дан анализ биотита этой породы.

**) По определению Hirschi Ab_2An_3.

участки гарцбургита. О ее химическом составе дает представление следующий анализ Hampe у Koch'a, описавшего эту породу под именем Olivinglimmerfels:

SiO_2	34,98
TiO_2	5,18
Al_2O_3	10,80
Fe_2O_3	1,42
FeO	21,33
CaO	0,43
MgO	19,30
K_2O	5,42
Na_2O	0,17
H_2O	1,28
	100,31

Уд. вес 3,276.

Мое определение дало цифру уд. веса больше, именно 3, 357 при 26° (с навеской 43,8281 грамма).

Картина даваемая моими шлифами производит впечатление, что почти все составные части породы кристаллизовались одновременно. Размеры зерен оливина и биотита обычно одного и того же порядка: обычно колеблются около 0,45—0,75 миллиметров в поперечнике. Изредка наблюдаются участки, где зерна оливина несколько крупнее и имеют тенденцию как бы сливаться в один сложный кристалл; однако ориентировка остается беспорядочная. Эти участки содержат менее биотита, но зато кое-где угловатые участки плагиоклаза. В этой форме мы можем видеть слабое стремление породы к порфировому сложению. В оливине были наблюдаемы включения биотита, шпинели и титанистого железняка. В одном шлифе замечен в ничтожном количестве пирротин и пирит (ни тот ни другой особо не учитывались количественно).

Размеры зерен шпинели обычно колеблются в пределах 0,15—0,30 мм. Если и приходится говорить об идиоморфизме кристаллов шпинели, то во всяком случае не с большим основанием, нежели об идиоморфизме оливина и биотита. Судя по форме сечений надо предполагать, что господствующею формою у шпинели является октаедр, иногда в двойниковых сростках. В виде включений в шпинели были наблюдаемы, хоть и редко, титанистый железняк, биотит и (один раз) плагиоклаз. В биотите

обычен титанистый железняк. Титанистый железняк образует мелкие зерна, обычно не превосходящие 0,1 мм. Встречается также в форме палочек. Приурочен почти исключительно к биотиту и, может быть, представляет местами продукт его распада. Плагиоклаз резко аллотриоморфен, обычно бывает зажат между

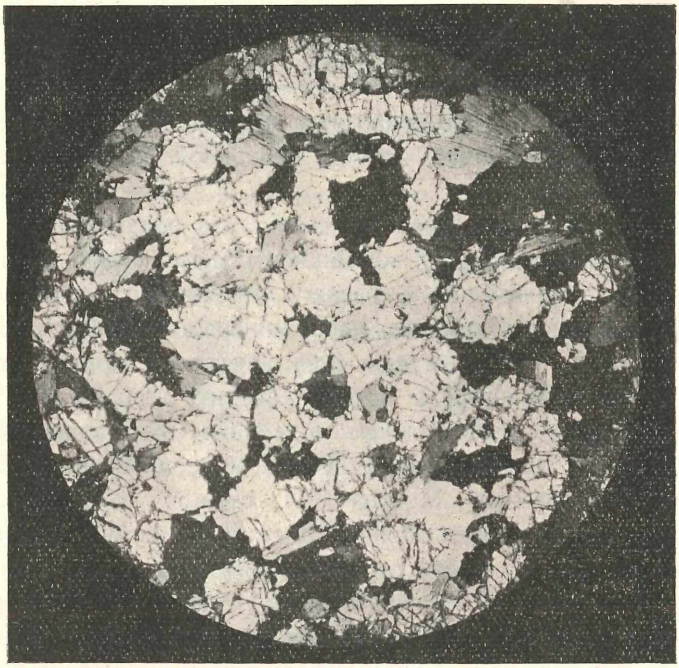


Рис. I. Шлиф III 71b). Обыкновенный свет. Увелич. 15 раз. Слюдяной перидотит из Холодной долины близ Гарцбурга. Видны: оливин, биотит, шпинель, титанистый железняк.

кристаллами оливина, частью биотита и шпинели. Весьма редко встречаются аллотриоморфные выделения ромбического пироксена. В одном месте усмотрена мирмекитового строения каемка из ромбического пироксена и плагиоклаза. На отполированных (и притом еще лучше смоченных водою) образцах этой породы виден очень красивый узор, обусловленный распределением двух главних составных частей породы—биотита и оливина. Узор этот, который можно бы передать толко рисунком, напоминает строение некоторых эвтектик и пожалуй больше всего структуру

полированных поверхностей мезосидерита Mincy (если взять во внимание соотношение между металлическим железом и каменистою частью этого метеорита).

Для количественного учета минералов по способу Розиваля с помощью окуляра Гиршвальда было изготовлено три шлифа под углами:

a/b 82°
a/c 90°
b/c 90°.

В таблицах 1, 2 и 3 приводятся средние величины об'емных процентов составляющих породу минералов, вычисленные для каждых 4 кв. мм.

Такого рода прием записи результатов, практикуемый мною и моими учениками, дает возможность легко судить о степени надежности окончательного среднего для каждого шлифа и о степени равномерности распределения минералов в породе. Не следует забывать, что минералы пластинчатые и притом определенно ориентированные в породе (биотит) должны при учете в шлифах давать значительные колебания (этот вопрос я разбирал в своей книге „Количественный минералогический состав гранитов и грейзенов", Москва 1911, стр. 56—57). Если этого нет, то значит биотит или образует достаточно изометричные кристалли или он не имеет параллельной ориентировки, как это напр. наблюдается во многих гнейсах.*) Из наших цифр можно видет, что колебание это во всяком случае невелико и не выходит за пределы колебаний в цифрах других минералов породы.

Начнем со шлифа III 71a. Общая его поверхност 2, 5 кв. сантиметра. Цифры сопоставлены в табл. 1.

Теперь перейдем к шлифу III 71c. Общая его поверхность около 3, 4 квад. см. Здесь имеются два псевдовкрапленника из скопившихся зерен оливина (своего рода шлиры). Из них больший достигает в длину почти 1, 5 см. и в поперечнике 0,4 см.

В таб. 4 цифры уд. в. даны теоретические кроме цифры биотита, которая была найдена для него из опыта Hirschi. Для оливина цифра уд. в. взята по следующим соображениям. Средний уд. в. из 15 определений для этого минерала, имеющихся

*) Однако я совершенно согласен с Hirschi, который говорит: Die Textur ist versteckt flaserig-könig.

в литературе и касающихся оливинов базальтов и их оливиновых бомб, равен 3,354. С другой стороны средний удельный вес оливина палласитов, имеющих очень близкий химический состав с оливином базальтов, равен 3,38. Я поетому и взял цифру промежуточную. Для вывода валового химического состава по цифрах последней колонки таб. 4 я беру состав минералов, показанный в таб. 5.

Таб. 1.

NN	Оливин	Биотит	Шпинель	Плагиоклаз	Ромбический пироксен	Ильменит
1	54,09	4,50	3,13	36,63	—	1,65
2	55,11	18,63	0,38	22,50	—	3,38
3	43,49	48,75	1,63	4,50	—	1,63
4	54,11	37,63	4,88	—	—	3,38
5	40,87	48,50	6,25	—	—	4,38
6	57,74	34,75	5,13	—	—	2,38
7	51,61	36,13	10,13	—	—	2,13
8	31,25	48,75	15,25	1,75	—	3,00
9	39,48	47,63	7,63	0,38		4,88
10	39,61	47,13	5,88	—	—	7,38
11	61,87	14,50	5,88	17,25	—	0,50
12	64,49	12,25	8,75	10,88	—	3,63
13	52,62	34,75	8,75	—	—	3,88
14	43,62	42,88	10,75	—	—	4,75
15	40,87	49,88	5,75	—	—	3,50
16	44,24	39,88	7,75	5,00	—	3,13
17	40,49	48,00	8,38	—	—	3,13
18	37,36	49,88	8,38	—	—	4,38
19	34,62	57,75	4,38	—	—	3,25
20	40,25	49,75	5,00	—	—	5,00
21	39,99	47,75	6,38	—	1,50	4,38
22	37,99	49,88	6,63	—	1,75	3,75
23	39,50	44,00	5,75	—	6,25	4,50
24	36,49	42,13	16,25	—	—	5,13
25	49,99	38,50	5,13	1,75	—	4,63
26	59,74	25,25	8,38	4,25	—	2,38
27	49,62	41,63	5,00	—	—	4,75
28	54,48	33,13	8,38	0,38	—	3,63

В таб. 5 состав оливина (a) вычислен мною как среднее из 26 анализов оливина базальтов (включая нефелиновые, лейцитовые и мелилитовые разности) и их оливиновых бомб. Оливин (b) представляет среднее из 10 оливинов безполевошпатовых глубинных пород (перидотитов, гарцбуритов, лерцолитов). Состав биотита отвечает биотиту слюдяного перидотита Холодной долины (анализ Hirschi). Шпинель — предположительный состав (теорети-

ческий). Плагиоклаз — мое среднее из 69 анализов плагиоклазов из различных габбро-норитовых пород мира. Ромбический пироксен — мое среднее для 10 ромбических пироксенов из пород габбро-норитового семейства разных мест земного шара. Титанистый

Таб. 2.

NN	Оливин	Биотит	Шпинель	Плагиоклаз	Ромбический пироксен	Ильменит
1	51,37	39,75	5,00	0,50	—	3,38
2	43,00	48,00	3,25	0,75	—	5,00
3	40,62	46,75	6,38	0,75	—	5,50
4	33,49	52,88	10,00	—	—	3,63
5	40,96	50,63	5,13	—	—	3,38
6	34,49	47,13	2,75	9,13	2,50	4,00
7	45,74	41,00	4,13	6,75	0,50	1,88
8	37,87	46,00	5,75	6,00	—	4,38
9	43,99	41,75	8,38	2,50	—	3,38
10	40,49	46,00	8,38	0,25	—	4,88
11	43.37	41,50	9,50	0,50	—	5,13
12	50,74	32,63	9,38	2,25	—	5,00
13	33,11	54.13	7,13	1,88	—	3,75
14	48,11	40,50	7,63	0,13	—	3,63
15	46,61	42,88	6,63	—	0,38	3,50
16	48,36	41,88	3,25	—	1,13	5,38
17	51,36	39,88	4,63	0,38	—	3,75
18	66,87	25,75	4,13	—	—	3,25
19	34,12	51,38	8,25	—	—	6,25
20	51,49	40,75	4,38	—	—	3,38
21	46,99	43,50	4,50	0,63	—	4,38
22	41,36	39,50	7,38	0,38	—	11,38
23	45,25	41,75	7,00	—	—	6,00
24	51,49	36,13	7,50	1,25	—	3,63
25	34,49	50,88	7,38	0,25	—	7,00
26	47,86	40,75	4,63	0,88	—	5,88
27	23,00	65,25	4,75	—	—	7,00
28	43,12	45,25	4,13	1,50	—	6,00
29	34,87	49,75	6,63	2,00	—	6,75
30	38,87	47,00	7,63	0,25	—	6,25
31	45,87	33,25	12,75	1,63	—	6,50
32	31,86	54,13	5,38	2,00	0,38	6,25
33	40,86	45,13	6,50	0,88	0,75	5,88

железняк-выведенное мною среднее из 10 анализов титанистых железняков габбро-норитовых пород.

По данным табл. 4 и 5 (для оливина взят состав его показанный под буквою a, как вычисленный из большего числа анализов, если бы взять его состав под буквою b), то разница все равно получилась бы ничтожная) валовой химический состав

слюдяного перидотита должен выразиться следующим образом (таб. 6).

Попробуем разобраться в полученных вычислением цифрах валового химического состава нашей породы.

Из сравнения с цифрами Hampe мы видим близкое совпадение в цифрах кремнекислоты, титановой кислоты и глинозема,

Таб. 3.

NN	Оливин	Биотит	Шпинель	Плагиоклаз	Ромбический пироксен	Ильменит
1	52,74	17,00	4,00	25,63	—	0,63
2	41,00	35,00	7,75	12,00	—	4,25
3	53,73	22,63	6,50	13,89	—	3,25
4	59,49	22,13	4,13	13,25	—	1,00
5	62,87	21,25	7,75	6,38	—	1,75
6	48,73	23,89	7,63	19,75	—	—
7	59,87	14,13	8,25	16,75	—	1,00
8	69,10	18,75	4,38	6,89	—	0,88
9	63,47	28,63	3,89	3,13	—	0,88
10	68,11	18,13	0,50	11,63	—	1,63
11	55,73	17,89	5,63	20,00	—	0,75
12	44,35	36,50	10,38	6,39	—	2,38
13	37,87	53,75	5,13	—	—	3,25
14	39,98	50,88	6,38	—	0,38	2,38
15	52,36	42,75	2,63	0,63	—	1,63
16	54,12	36,75	3,50	—	2,38	3,25
17	34,74	54,00	5,50	1,63	—	4,13
18	32,74	61,25	4,38	—	—	1,63
19	41,86	50,88	4,38	0,50	—	2,38
20	55,99	33,13	9,13	—	—	1,75
21	43,74	51,50	2,63	—	—	2,13
22	37,99	17,00	8,63	30,25	4,13	2,00
23	44,24	48,38	1,13	2,00	—	4,25
24	12,12	84,25	—	0,38	—	3,25
25	35,62	58,13	2,00	—	—	4,25
26	45,61	39,88	10,13	—	—	4,38
27	41,86	55,63	—	0,88	—	1,63
28	40,00	54,50	1,00	0,75	—	3,75
29	29,87	59,13	8,75	—	—	2.25
30	33,12	57,75	4,75	—	—	4,38
31	50,24	45,13	2,88	—	—	1,75

но значительное расхождение в цифрах для окиси и закиси железа с одной стороны и магнезии с другой стороны. Так как закиси железа у нас значительно меньше, а магнезии значительно больше, нежели у Hampe, то является подозрение, что дело сводится здесь к различию в соотношении оливина и био-

тита в породе или к составу оливина, который в действительности гораздо богаче закисью железа, нежели мы приняли при вычислении. Разберем обе эти возможности. Koch в своей работе не дает указаний, в каком количественном соотношении присутствуют оливин и биотит. В то же время Hirschi в исследованном им образце нашел по наблюдениям в шлифах (на глаз), что биотита больше, нежели оливина. По нашим измерениям, сведенным в таб. 4, такое преобладание было замечено лиш в одном шлифе III 718 и при том в очень славой степени (биотита 44,35%,

Таб. 4.

Названия минералов	Шлиф a	Шлиф b	Шлиф c	Среднее (об'ем %)	Уд. в.	Среднее (вес. %)
Оливин	46,23	42,79	46,56	45,20	3,370	46,70
Биотит	39,08	44,35	39,70	41,04	2,992	37,65
Шпинель	7,00	6,37	4,96	6,11	3,650	6,84
Плагиоклаз	3,76	1,31	6,21	3,76	2,720	3,13
Ромбический пироксен	0,34	0,17	0,22	0,24	3,336	0,25
Титанистый железняк	3,59	5,01	2,35	3,65	4,850	5,43
Суммы	100,00	100,00	100,00	100,00	3,262	100,00

оливина 42,79%). В целом же порода как по об'ему, так и тем более по весу содержит оливина бодьше, нежели биотита. Тем не менее, конечно, возможность более значительного содержания биотита в образце анализированом Hampe не исключается. Это должно повысить содержание в породе глинозема и окиси калия, почти не изменить общего содержания закиси и окиси железа и значительно понизить цифру для магнезии. Если для окисей калия и магнезия таким образом мы получаем результат благоприятный для такого толкования, то в цифрах для глинозема и окислов железа (считая $Fe_2O_3 + FeO$) мы этого не видим. Следовательно надо искать причины еще в чем то другом. Эта причина может, как уже сказано, заключаться в составе оливина в действительности гораздо более богатого закисью железа и более бедного магнезией, чем это допущено нами. Что же еще говорит в пользу гакого предположения? Двупреломление нашего оливина очень велико: около 0,045 вместо обычных 0,035. Знак его отрицательный. Эти свойства приближают его к гиалосидериту и фая-

Минералы	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MnO	CaO	MgO	NiO	K_2O	Na_2O	H_2O	сумма
Оливин(a)	40,73	—	0,21	—	12,11	0,03	0,10	46,51	0.09	—	—	0,13	99,91
Оливин(b)	40,33	0,49	0,56	0,61	9,50	0,19	0,12	47,00	0,03	0,08		0,54	99,45 0,10 Cr_2O_3)
Биотит	36,12	7,68	14,89	7,25	5,93	—	0,68	15,12	—	9,35	1,56	1,50	100,08
Шпинель	0,55	—	62,09	2,10	17,56	следы	0,16	15,61	—	—	—	—	100,69
Плагиоклаз	52,47	0,01	29,31	0,79	0,09	—	11,82	0,30	—	1,47	4,12	0,55	100,13 2,62 Cr_2O_3)
Ромбический пироксен	51,02	0,01	3,84	1,37	15,47	0,40	5,70	21,59	—	0,04	0,20	0,27	99,91
Титанистный железняк	—	44,24	0,11	22,31	30,56	0,03	0,25	1,89	—	—	—	—	99,49 0,10 Cr_2O_3)

литу (у гиалосидерита двупреломление 0,0408, у фаялита 0,050.)*) В фаялите и даже гиалосидерите содержание закиси железа значительно больше, как видно, напр. из следующих трех анализов гиалосидеритов:

Таб. 6.

Составные части	Оливин	Биотит	Шпинель	Плагиоклаз	Ромбический пироксен	Титанистый железняк	Порода
SiO_2	19,04	13,59	0,04	1,63	0,13	—	34,43
TiO_2	—	2,89	—	следы	следы	2,42	5,31
Al_2O_3	0,10	5,60	4,22	0.92	0,01	0,01	10,86
Cr_2O_3	—	—	0,18	—	—	следы	0,18
Fe_2O_3	—	2,73	0,14	0,02	—	1,22	4,11
FeO	5,66	2,23	1,19	следы	0,05	1,67	10,80
MnO	0,01	—	следы	—	следы	следы	0,01
CaO	0,05	0,25	0,01	0,37	0,01	0,01	0,70
MgO	21.74	5,69	1,06	0,01	0,05	0,10	28,65
NiO	0,04	—	—	—	—	—	0,04
K_2O		3,52	—	0,04		—	3,56
Na_2O	—	0,59	—	0,13	—	—	0,72
H_2O	0,06	5,56	—	0,01	—	—	0,63
Суммы	46,70	37,65	6,84	3,13	0,25	5,43	100,00

	SiO_2	FeO	MgO
Гиалосидерит Birch Lake, Minnesota	35,58	26,86	33,91
Гиалосидерит из вулкана Yate, Chile	38,47	24,83	37,62
Гиалосидерит из лимбургита Limburg, Kaiserstul	36,73	29,96	31,99
Среднее	36,93	27,22	34,51

В фаялитах содержание закиси железа от 56,05 до 68,73%. Соответственно повышается и цифра их уд. веса (может достигат 3,45). Последнее обстоятельство тоже дает бо́льшее приближение к цифре уд. веса полученного вычислением по моим данным и цифре найденной мною прямым опытом (цифру Hampe я считаю ниже действительной — надо думать, что он не кипятил воды после погружения в нее породы, отчего остался в трещинах воздух). Против допущения оливина такого состава говорят

*) H. Backlund. Über die Olivingruppe, Труды Геолог. Музея Имени Петра Великого, Акад. Наук, Петроград 1909, том. III, стр. 102—105.

болщая свежесть его, неизвестность гиалосидеритов или фаялитов в перидотитах и наконец то, что биотит нашего перидотита не может считаться разностью богатой железом, чего можно бы было ожидать при богатстве железом оливина. Все это вопросы, которые могут быть разрешены лишь рядом анализов над новим материалом.

Таб. 7.

NN	Ортоклаз	Плагиоклаз	Кварц	Биотит	Авгит	Роговая обманка	Магнетит	Апатит
1	2,25	62,75	4,50	16,00	9,50	5,00	—	—
2	0,38	69,48	11,00	4,50	10,13	3,88	—	0,63
3	0,75	74,61	6,50	1,13	12,13	4,88	—	—
4	5,88	60,84	2,00	15,00	13,75	2,13	—	0,38
5	8,00	67,62	6,13	6,75	5,00	6,50	—	—
6	7,50	44,25	—	39,75	8,50	—	—	—
7	31,63	38,61	—	5,63	20.13	—	—	1,00
8	14,38	50,98	0,63	12,13	20,88	—	—	1,00
9	10,25	64,73	7,88	1,38	12,13	3,13	—	0,50
10	28,75	64,86	0,38	—	2,88	0,88	—	2,25
11	34,63	38,61	—	5,63	20,13	—	—	1,00
12	14,38	50,98	0,63	12,13	20,88	—	—	1,00
13	10,25	64,73	7,88	1,38	12,13	3,13	—	0,50
14	28,75	64,86	0,38	—	2,88	0,88	—	2,25
15	8,50	65,23	2,50	12,13	9,13	1,38	—	1,13
16	9,10	67,76	1,75	0,50	3,63	16,13	—	1,13
17	15,00	59,87	—	9,25	9,50	4,25	—	2,13
18	7,75	60,82	—	17,68	3,00	9,75	0,50	0,50
19	10,50	69,62	—	3,50	5,00	11,38	—	—
20	3,13	40,48	—	43,75	4,13	7,88	0,63	—
21	4,00	73,12	—	3,25	2,88	14,75	—	2,00
22	15,75	63,12	2,00	0,63	—	16,00	—	2,50
23	18,50	55,61	3,75	3,38	13,13	2,00	—	3,63
24	26,13	60,73	0,13	—	11,25	0,38	—	1,38
25	22,25	45,62	—	—	28,63	—	—	3,50
26	27,63	49,49	—	6,50	13,88	—	—	2,50
27	17,13	49,74	0,25	7,00	25,00	—	—	0,88
28	16,75	53,61	0,63	13,13	14,13	—	—	1,75
29	6,13	65,99	2,75	4,00	14.00	5,50	—	1,63
30	4,00	46,37	9,00	—	32,00	8,63	—	—

Сделать таковые я лишен возможности и был бы рад, если моя настоящая работа даст повод их предпринять кому-либо другому, который параллельно произведет и для своего овразца количественный минералогический учет. Ест, впрочем, еще один, правда не очень надежный путь проверить наше предположение. Он заключается в следующем. Практически говоря в нашей породе имеется только один минерал, содержащий калий, именно

биотит. Состав этого биотита известен. Следовательно по анализу породы и выделенного из нее биотита мы можем вычислить количество в перидотите биотита. Я получил этим путем 58,01% по весу, т. е. значительно больше, чем дал микроскопицеский подсчет. Таким образом биотита будет несколько больше и по об'ему, нежели оливина, что уже отмечал Hirschi для своего образца. Далее пользуясь анализом того же биотита, а также

Таб. 8.

NN	Ортоклаз	Плагиоклаз	Кварц	Биотит	Авгит	Роговая обманка	Магнетит	Апатит
1	4,88	39,48	3,13	49,38	3,13	—	—	—
2	9,25	61,73	4,88	21,88	1,63	—	—	0,63
3	7,00	35,73	17,63	37,63	1,50	0,13	—	0,38
4	4,13	42,37	11,00	34,50	7,50	0,50	—	—
5	4,75	76,87	9,38	5,25	2,75	—	—	1,00
6	7,13	76,86	0,50	13,13	1,00	—	—	1,38
7	12,50	55,12	2,25	20,88	8,50		—	0,75
8	8,75	27,74	—	56,63	—	—	6,88	—
9	32,13	43,11	1,75	4,38	17,38	—	—	1,25
10	15,38	64,36	7,00	3,63	8,75	—	—	0,88
11	5,38	58,74	16,00	17,00	2,88	—	—	—
12	24,50	50,99	—	18,13	4,75	—	—	1,63
13	13,25	61,75	13,75	2,25	7,50	—	—	1,50
14	4,75	60,11	10,38	16,63	6,13	1,25	—	0,75
15	0,88	61,48	9,00	18,13	9,88	0,63	—	—
16	2,88	54,98	9,63	21,13	9,25	—	—	2,13
17	7,00	35,62	—	56,38	—	—	—	1,00
18	2,63	63,48	2,88	30,13	0,38	—	—	0,50
19	1,88	45,60	0,38	43,25	8,13	0,13	—	0,63
20	26,88	48,49	3,50	12,50	6,63	—	—	2,00
21	1,25	74,86	9,38	0,88	11,63	2,00	—	—
22	1,75	71,99	8,75	3,88	12,88	0,75	—	—
23	0,75	66,86	7,50	11,75	10,38	0,63	—	1,13
24	6,38	55,61	5,00	12,38	19,13	—	—	1,50

некоторыми цифрами полученными мною для содержания второстепенных минералов породы можно подсчитать, что оливина в породе должно быть по весу 38,02%. Состав его должен выражаться такими цифрами:

13,46	35,40	SiO_2
14,98	39,40	Mg O
9,58	25,20	Fe O
38,02	100,00	

Иначе говоря оливин здесь должен быть действительно гиалосидеритом. Странным здесь однако является то, что на второстепенные минералы при таком расчете остается всего 3,97%, в то время как на оливин и биотит приходится 96,03%, прежде

Таб. 9.

NN	Ортоклаз	Плагиоклаз	Кварц	Биотит	Авгит	Роговая обманка	Магнетит	Апатит
1	3,00	71,50	4,50	12,50	8,50	—	—	—
2	6,25	69,99	1,13	19,75	—	—	—	2,88
3	13,38	63,61	6,63	8,50	7,88	—	—	—
4	11,50	69,86	5,88	11,50	0,63	—	—	0,63
5	6,63	45,61	1,88	45,25	0,63	—	—	—
6	0,88	50,49	0,75	44,50	3,38	—	—	—
7	0,38	34,23	16,88	45,38	1,63	—	1,50	—
8	1,50	46,37	6,00	44,50	1,38	—	—	0,25
9	3,38	75,11	15,38	4,50	0,63	—	—	1,00
10	21,25	59,00	6,75	—	12,50	0,50	—	—
11	12,88	64,24	2,00	16,75	2,00	—	—	2,13
12	0,25	73,49	9,38	6,00	8,25	1,25	1,38	—
13	2,13	77,98	1,88	6,88	8,75	2,38	—	—
14	7,13	75,14	7,25	2,25	6,98	—	—	1,25
15	5,25	80,74	7,13	1,00	4,38	—	—	1,50
16	1,50	66,24	14,50	6,13	8,88	1,50	—	1,25
17	1,75	53,49	1,25	34,88	3,63	—	5,00	—
18	3,25	73,86	8,00	9,38	2,13	—	2,50	0,88
19	1,50	45,25	4,75	44,00	3,75	—	—	0,75
20	0,13	68,11	5,25	17,63	8,50	0,38	—	—
21	0,50	56,11	7,38	16,63	18,63	—	—	0,75
22	1,75	72,12	9,00	8,88	8,25	—	—	—
23	0,25	63,24	3,63	24,63	8,25	—	—	—
24	0,38	39,61	14,13	44,00	1,88	—	—	—
25	1,38	73,61	7,88	2,50	10,13	4,50	—	—
26	1,13	69,36	15,25	9,25	3,88	—	—	1,13
27	—	58,12	16,50	15,13	8,50	0,75	—	1,00
28	2,25	65,74	3,00	8,25	6,13	13,00	—	1,63
29	1,88	30,73	5,63	54,13	3,88	3,75	—	—
30	3,63	66,23	15,88	4,88	8,00	—	—	1,38
31	1,00	74,86	3,13	2,75	16,38	0,75	—	1,13
32	0,50	62,36	12,13	1,75	16,88	5,50	—	0,88
33	1,00	65,61	5,38	12,88	6,88	6,75	1,50	—
34	0,38	60,61	12,00	17,38	3,25	5,50	0,38	0,50
35	—	78,49	7,88	1,50	8,75	3,38	—	—

же мы имели 84,35% оливина и биотита 15,65% остальных минералов.

Состановлюсь в заключение несколько на вопросе о том, насколько вероятно считать биотитовый перидотит Холодной долины за продукт прямой магматической дифференциации. Со-

вершенно своеобразный химический и минералогический состав (особенно присутствие шпинели) говорит за то, что здесь имело место вплавление богатой глиноземом породы. Такое обяснение почти неизбежно после опытов плавления (J. Morozewicz 1897). Для случаев кристаллизации из магм корунда или шпинели подобного же мнения были А. Е. Лагорио, J. H. L. Vogt, J. H. Pratt (в частности Pratt останавливался на ге-

Таб. 10.

Названия минералов	Шлиф III 60a	Шлиф III 60b	Шлиф III 60c	Среднее	Уд. в.	Вес. %
Ортоклаз	13,77	8,59	3,43	8,60	2,59	7,95
Плагиоклаз	58,17	55,62	62,89	58,90	2,67	56,13
Кварц	2,36	6,40	7,60	5,45	2,65	5,16
Биотит	8,20	21,32	17,31	15,61	3,04	16,94
Авгит	12,01	6,74	6,40	8,38	3,37	10,08
Роговая обманка	4,28	0,25	1,42	1,98	3,19	2,26
Магнетит	0,04	0,29	0,35	0,23	5,20	0,42
Апатит	1,17	0,79	0,60	0,85	3,50	1,06
Суммы	100,00	100,00	100,00	100,00	2,80	100,00

незисе корундовых перидотитов) и др., а в более новое время A. Osann (1913)*), M. Weber (1911)**), O. H. Erdmannsdörffer (1911)***).

II. Биотитавгитовый сиенит из Unterhof, Schwarzwald.

Эта порода фигурирует под названием слюдяного сиенита в коллекции по Розенбушу, полученной в Кабинете Прикладной Геологии Донского Политехнического Института от фирмы др. Ф. Кранц. Особенно заметны в образце и в шлифах листочки биотита, достигающие 1—2 и даже 3 миллиметров. Остальная часть породы состоит из мелкозернистой смеси, главным образом из плагиоклаза (андезина), диопсидоподобного пироксена

*) A. Osann. Petrochemische Untersuchungen, I., 2. Abt. Heidelb. Akad. d. Wiss. Math. Nat. Kl. 1913, p. 25 und 29.

**) M. Weber. Metamorphe Fremdlinge in Erstarrungsgesteinen. Sitzb. k. bayr. Akad. d. Wiss. Math. Phys. Kl. Abh. 13, 1910.

***) O. H. Erdmannsdörffer. Die Einschlüsse des Brockenmassivs, Jahrb. geol. Landesanstalt 1911, II, p. 321.

(авгита), роговой обманки, ортоклаза и кварца. Плагиоклаз сильно серицитизирован и образует идиоморфные бруски, цементированные угловатыми участками кварца и сравнительно свежего ортоклаза. В длину сечения кристаллов плагиоклаза достигают обычно 0,3—0,4 и только в исключительных случаях 0,8—0,9 миллиметров. Того-же приблизительно размера и идиоморфные кристаллы почти безцветного авгита. Окрашенная

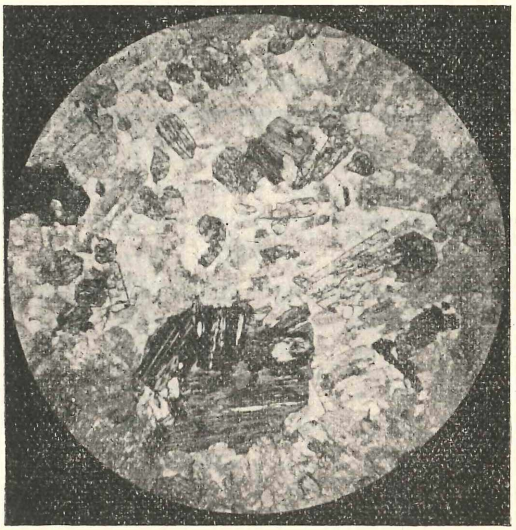


Рис. 2. Микроструктура биотитавгитового сиенита Unterhof, Schwarzwald. — Видны на фоне из полевых шпатов и кварца кристаллики главным образом биотита и авгита.

в слабый зеленоватый и буроватый оттенок роговая обманка встречается в очень небольшом количестве то в отдельных зернах, то в срощении с авгитом. Из акцессорных минералов следует еще назвать (титано) магнетит и апатит. Первый обыкновенно образует скелетного типа вростки в биотите. Общий вид структуры породы воспроизводит наш рисунок (рис. 2).

По моему породу следует считать ублюдочной (гибридной): ее мезостазис, состоящий из ортоклаза и кварца, представляет собою кристаллизационный остаток, который можно уподобить аплиту. Надо полагать, что более долгое пребывание породы на границе полного отвердевания повело бы к отщеплению этой магмы от магмы по существу габброидной.

Для исследования породы на количественный минералогический состав по способу Розиваля были сделаны три шлифа под углами: a/b = 87°, a/c = 89° и b/c = 89°. Шлиф III 60a. Общая поверхность 2,2 кв. сантиметра. Средние ддя каждых 4 кв. мм. (каждое есть среднее из 8 последовательных отсчетов) приведены в таб. 7. Ст. 11.

Шлиф III 60b. Общая поверхность его около 2,2 кв. см. Средние из каждых 8 последовательных отчетов для каждых 4 кв. мм. сопоставлены в таб. 8. Ст. 12.

Таб 11.

Составные части	Ортоклаз	Плагиоклаз	Кварц	Биотит	Авгит	Роговая обманка	Магнетит	Апатит	Валовой анализ
SiO_2	5,10	32,69	5,16	6,03	5,23	1,08	—	—	55,29
TiO_2	—	—	—	0,42	0,04	0,02	—	—	0,48
Al_2O_3	1,55	15,40	—	2,72	0,16	0,14	—	—	19,97
Fe_2O_3	0,03	—	—	1,19	0,63	0,15	0,29	—	2,29
FeO	следа	—	—	2,39	0,69	0,22	0,13	—	3,43
MnO	—	—	—	0,06	—	0,01	—	—	0,07
BaO	0,01	—	—	следа	—	—	—	—	0,01
CaO	0 08	4,16	—	0,13	1,98	0,27	—	0,57	7,19
MgO	0,01	—	—	1,72	1,13	0,30	—	—	3,16
K_2O	0,93	0,41	—	1,41	0,04	0,01	—	—	2,80
Na_2O	0,21	3,47	—	0,24	0,18	0,04	—	—	4,14
H_2O	0,03	—	—	0,61	—	0,02	—	—	0,66
F	—	—	—	0,02	—	—	—	0,04	0,06
P_2O_5	—	—	—	—	—	—	—	0,45	0,45
суммы	7,95	56,13	5,16	16,94	10,08	2,26	0,42	1,06	100,00

Шлиф III 60c. Общая поверхность около 3 кв. см. Средние для каждых 4 кв. мм. в таб. 9. Ст. 14.

Прямое определение уд. в. породы по способу гидростатического взвешивапия дало мне цифру очень близкую к цифре полученной вычислением, именно 2,806 при 20° С. Взятая навеска была достаточно велика (16,9317 грамма).

Для того, чтобы по количественному минералогическому составу иметь возможность вычислить количественный химический состав нашей породы, нужно знать состав отдельных входящицх в состав ее минералов. Это мною делается при таких условиях. Для ортоклаза я беру выведенное мною среднее для 18 анализов этого минерала из нормальных сиенитов, для плагиоклаза состав андезина из кварцевого диорита (Догначка,

Hintze, Bd. II. p. 1509, N 33), для биотита среднее из 12 относительно новых анализов этого минерала в гранитах, приведенное в моей книге о гранитах (стр. 536), для авгитасреднее из друх анализов диопсидоподобных пироксенов из гранитов, для роговой обманки среднее из 8 анализов этого минерала из нормалных сиенитов (это среднее приведено в Centralblatt f. Miner. etc. Jahrg. 1923, N 6, p. 164, здѣсь же дано и среднее для ортоклаза из сиенитов).

Я уже указывал, что наша магма могла бы далее подвергнуться дифференциации. Если даже оставить в стороне химическую дифференциацию, а остановиться только на физической, то кажется мы имеем право разделить нашу породу на две, из которых одна будет аплитовой и должна содержать

ортоклаза	7,95	или	60,64%
кварца	5,16		39,36%
	13,11		100,00%

а другая по перечислении на сто должна содержать по весу

плагиоклаза	64,60
биотита	19,50
авгита	11,60
роговой обманки	2,60
магнетита	0,48
апатита	1,22
	100,00

Химический состав такой породы будет:

SiO_2	51,72
TiO_2	0,55
Al_2O_3	21,20
Fe_2O_3	2,60
FeO	3,95
MnO	0,08
CaO	8,18
MgO	3,63
K_2O	2,15
Na_2O	4,52
H_2O	0,73
F	0,07
P_2O_5	0,52
	100,00

Résumé.

Composition quantitative de deux roches éruptives.

Par **P. N. Čirvinskij** à Novočerkassk (Russie).

I. Péridotite biotitique de la valée Kaltes Tal près Harzburg (Allemagne).

Cette roche, décrite par Max Koch, H. Rosenbusch et H. Hirschi (voir la note, p. 1 du texte russe), a été analysée par Hampe: les chiffres de l'analyse sont reproduits p. 2). Les éléments constitutifs de la roche sont l'olivine et la biotite; le pléonaste, l'ilménite et le plagioclase ($Ab_2 An_3$) sont des éléments accessoires. Densité 3·276 (Hampe), 3·357 (Čirvinskij). La structure est panallotriomorphe; sur surface polie, elle rappelle quelques météorites du groupe des mésosidérites, p. e. celle de Mincy.

L'auteur a mesuré les proportions quantitatives du volume des minéraux en cette roche par la méthode de Rosiwal. Les résultats sont donnés par les chiffres suivants.

Olivine 46·70, biotite 37·65, spinelle 6·84, plagioclase $Ab_2 An_3$ 3·13, pyroxène orthorhombique 0·25, ilménite 5·43.

La composition globale de cette roche, calculée selon ces données d'après des valeurs moyennes pour la composition de ses éléments constitutifs, est exprimée par les chiffres de la dernière colonne du tableau 6, p. 10. La différence entre les résultats obtenus par l'auteur et ceux de l'analyse de Hampe peut être expliquée par la composition différente de l'olivine dans les deux échantillons étudiés, celle de l'échantillon de l'auteur étant plus riche en FeO, ce qui est en accord avec sa double refraction négative et plus forte (0·045) que celles des olivines communes; en outre, il semble que l'échantillon de l'auteur est plus pauvre en biotite.

II. Syénite micacée d'Unterhof (Forêt Noire).

Les éléments constitutifs de cette roche sont: la biotite, l'andèsine, un pyroxène ressemblant au diopside, l'amphibole, l'orthose et le quartz. D'après la méthode de Rosiwal, l'auteur a trouvé pour les % de volume de ces minéraux les chiffres du tableau pp. 16. Les valeurs moyennes calculées

de ces résultats sont données pp. 17, et la composition minéralogique de la roche est exprimée par les chiffres suivants:

	Orthose	Andésine	Quartz	Biotite	Pyroxène	Amphibole	Magnétite	Apatite
en % du volume	8·60	58·90	5·45	15·61	8·38	1·98	0·23	0·85
» du poids	7·95	56·13	5·16	16·94	10·08	2·26	0·42	1·06

Poids spécifique: 2·802 calculé, 2·806 trouvé.

Le tableau 11 (p. 16) donne la composition globale de la roche, calculée d'après les résultats obtenus.

Dans les plaques minces, on voit que l'orthose et le quartz ont cristallisé à la fin du refroidissement de la roche et constituent une substance mesostatique, qui cimente les autres éléments de la roche; on peut les considérér comme un magma aplitique, séparé incomplètement du magma essentiellement gabbroïde. Si la différentiation de ces deux magmes avait été complète, il en serait résulté:

pour le magma leucocrate:		pour le magma mélanocrate:	
orthose	60·64% du poids	plagioclase	64·60
quartz	39·36	biotite	19·50
	100·00	pyroxène	11·60
		amphibole	2·60
		magnétite	0·48
		apatite	1·22
			100·00

La composition chimique de ce magma mélanocrate est calculée p. 17.

XIII.

Studie o halogenhydrazinech aromatických.

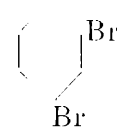
Část II.*) : 2.4-dibromfenylhydrazin a jeho cukerné deriváty.

Podávají **E. Votoček** a **Vítězslav Ettel.**

Předloženo dne 22. XII. 1923.

Práce tato jest dalším členem řady výzkumů, jejichž účelem jest zjistiti, do jaké míry jsou halogensubstituované hydraziny aromatické s to přispěti ke zdokonalení diagnosy monosaccharidů, jejich dělení od sebe, po případě kvantitativnému stanovení.

V následujícím podáváme zprávu o výsledcích, jakých jsme dosáhli použitím 2.4-dibromfenylhydrazinu



Připravili jsme z něho hydrazony i osazony nejobyčejnějších cukrů methodou obvyklou, t. j. buď v prostředí alkoholickém nebo v octově kyselém.

Hydrazon l-arabinosy: Ke 2 g cukru, rozpuštěného v několika kapkách vody, přidán za tepla nasycený roztok 3,5 g hydrazinu v alkoholu. Směs ztuhla již po několika minutách v hydrazon, jenž po odsátí, vykrytí etherem a překrystallování měl konstantní b. t. 161°. Tvoří světlobílé jehličky hedvábně lesklé, rozpustné snadno v methylalkoholu, acetonu, nesnadno v etheru a benzolu.

Analysa: nalezeno: 7,39% N, 39,96% Br
theorie vyžaduje: 7,04% N, 40,17% Br.

*) Část I. viz v Rozpravách České akademie roč. 1923 (E. Votoček a P. Jírů).

2. *Hydrazon xylosy.* — Připravován podobně jako derivát arabinosy, nevyloučil se však ihned, nýbrž teprve po 1hodinném varu směsi a odpaření alkoholu. Krystalluje nejsnáze z vroucího toluolu, co do rozpustnosti podobá se derivátu arabinosovému. Taje konstantně mezi 127—128°.

Rozbor: nalezeno 7,35% N, 40,03% Br
theorie žádá 7,04% N, 40,17% Br.

3. *Hydrazon rhamnosy.* — Připraven jako derivát xylosový. Tvoří krystally hedvábně lesklé, stálého b. t. 150° (z toluolu); rozpustností podobá se hydrazonu předešlému, avšak rozpouští se dosti snadno i ve vroucí vodě.

Rozbor: nalezeno 7,07% N, 38,49% Br
theorie žádá 6,80% N, 38,79% Br.

4. *Hydrazon glukosy.* — Byl sice připraven, ale nebyl analysován, ježto se z rozpouštědel vylučoval beztvarý a tudíž neskýtal záruky čistoty.

5. *Hydrazon mannosy* nevykrystalloval ani po delším stání reakční směsi.

6. *Hydrazon d-galaktosy* získán ve dvou formách podle toho, bylo-li pracováno o roztoku vodně-octovém, nebo alkoholickém. V prvém případě vylučovala se nažloutlá forma níže tající a rozpustnější (A), v druhém bezbarvá forma výše tající, tíže rozpustná (B).

Vylučování z vodně-octového roztoku: Ke 2 g galaktosy, rozpuštěné v několika kapkách vody, přidán roztok 2,9 g hydrazinu v 50 cm^3 30%ní kyseliny octové. Směs ztuhla v několika okamžicích a poskytla po odsátí a vykrytí etherem hydrazon b. t. 178°, pod drobnohledem složený z dlouhých sloupků.

Vylučování z roztoku alkoholického: Roztok 2 g galaktosy v nejmenším množství vody slabě zahřát s roztokem 2,9 g hydrazinu v alkoholu. Vyloučil se ihned hydrazon, jenž po promytí etherem měl b. t. 190°, po překrystallování ze zředěného alkoholu b. t. 191°. Pod drobnohledem jevil shluk jemných jehliček.

Při bližším zkoušení ukázalo se, že níže tající forma (A) jest monohydrátem hydrazonu o formule $C_{12}H_{16}N_2Br_2O_5 \cdot H_2O$, jenž sušením při 100° ztratí vodu (nalezená ztráta: 3,86% vody, theorie žádá 4,03% vody). Takto vysušený pre-

parát tál při 188° (čistá látka při 191°). Také ležením na vzduchu se voda jeho zvolna ztrácí.

Laskavostí prof. Dr. F. Slavíka prozkoumány byly obě formy po stránce krystallografické. Zde výsledek zkoumání toho:

»2.4-*dibromfenylhydrazon d-galaktosy, z octového prostředí, b. t. 178°*: Sloupečkovité, po příp. jehličkovité krystally, tu a tam uzavřeniny matečného louhu. Štěpnost nepozorována. Mezi skříženými nikoly zhášejí rovnoběžně, interferenční barva šedá, bělavá 1. řádu, velmi časté anomální barvy interferenční, modrá až fialová, při tom zhášení neúplné. Ráz délky pozorován citlivou violovou střídavě kladný a záporný. Z toho nutně následuje, že rovina os optických jest kolmá k délce krystallů. Vhodné kryst. jehličky zkoumány v konvergentním světle, jeví osní obrázek dvojosých krystallů, úhel optických os kolísá mezi 50—60°, optický ráz +, anomální barvy jeví se i v obrázku konoskopickém. Lom světelný γ jest velmi zblížen hodnotě 1,6621, i β o málo nižší. Opticky patří zkoumaná látka do soustavy kosočtverečné.

2.4-dibromfenylhydrazon d-galaktosy, z alkoholu, b. t. 191°: Pod mikroskopem jeví se jako aggregát velmi jemných jehliček, které mezi skříženými nikoly opět rovnoběžně zhášejí. Zkoumány citlivou violovou jeví vesměs ráz negativní. Lom světelný pro paprsek chvějící rovnoběžně k délce jehliček obnáší 1,663, pro směr kolmo k délce jest o něco vyšší. K výzkumu konoskopickému se tyto jehličky vůbec nehodí, a tak nelze rozhodnouti, zda přísluší krystallograficky do soustavy tetragonálné, kosočtverečné či hexagonálné.«

(*Poznámka*: Hydrát methylfenylhydrazonu d-galaktosy krystalluje rovněž v soustavě kosočtverečné, bezvodý methylfenylhydrazon v soustavě jednoklonné.)

Analysa látky A: nalezeno.	6,47% N; 36,16% Br
theorie pro $C_{12}H_{16}N_2Br_2O_5 . H_2O$	6,28% N; 35,86% Br
Analysa látky B: nalezeno	6,67% N; 37,13% Br
theorie pro $C_{12}H_{16}N_2Br_2O_5$	6,54% N; 37,34% Br

7. *Hydrazon fruktosy* připravován za těchže podmínek jako derivát glukosový (v prostředí alkoholickém). Vyloučil

se sice, ale nedal se dobře čistiti krystallisací, pročež nebyl analysován.

8. Hydrazony *maltosy* a *laktosy* nevylučovaly se ve formě tuhé.

Osazony: K jejich přípravě postupováno obvyklým způsobem, u většiny cukrů (arabinosy, xylosy, rhamnosy, galaktosy, laktosy a maltosy) však získán osazon mazovitý nebo špatně krystallující, takže bylo upuštěno od analysy příslušných preparátů. Vyjímku tvořily toliko glukosa a fruktosa, které poskytly osazon pěkný, snadno čistitelný.

Osazon glukosy skládal se z jehlic krásně žlutých, jež tály po promytí alkoholem a acetonem při 226°, po překrystallování z fenetolu při 230°. Jest téměř nerozpustný v nižších alkoholech, etheru, rozpustný za varu v anisolu a fenetolu, za chladu v pyridinu.

Analysa: nalezeno	8,56% N a 47,26% Br
theorie pro $C_{18}H_{18}N_4Br_4O_4$	8,31% N a 47,44% Br

Tentýž osazon získán i z fruktosy. Tál při 230° a poskytl při rozboru 8,66% N a 47,19% Br.

Z hořejšího bylo patrno, že 2.4-dibromfenylhydrazin mohl by míti význam toliko při identifikaci galaktosy a jejím dělení od jiných cukrů přes hydrazon. Abychom zjistili do jaké míry se galaktosa naším hydrazinem sráží, provedli jsme četnou řadu pokusů kvantitativných. Již při předběžných zkouškách ukázalo se, že nutno srážeti v prostředí octovém, nikoliv v alkoholickém, neboť v tomto se hydrazon galaktosy za chladu nevylučuje, při práci za tepla pak se s ním snadno srážejí i hydrazony cukrů jiných, což jest dělení na závadu. Hydrazin nutno přidávati ke koncentrovanému roztoku cukernému ve způsobě roztoku ve zředěné kyselině octové. Oba použité roztoky mají býti teplé, směs pak nemáme dále zahřívati, ježto by se tvořilo něco osazonu.

Stůj zde nyní řada pokusů, při kterých zjišťován vliv koncentrace galaktosy a hydrazinu na vylučování hydrazonu cukerného. Postupovali jsme při nich takto: K 0,1 g čisté galaktosy, rozpuštěné ve 3 kapkách vody, přidán teplý roztok hydrazinu v 50%ní kys. octové, načež směs ponechána 3 hodiny za obyčejné teploty. Vyloučený hydrazon sebrán na

tyglíku Goochově, promyt 30 cm³ 5%ní kyseliny octové (pouhé vody nebylo použito, ježto by se jí octan dibromfenylhydrazinu byl mohl hydrolysovati), načež sušeno 3 hodiny v sušárně vodní. Bod tání produktu určen na menším podílu, přehlaceném z 50%ního alkoholu. Tabulka prvá uvádí výsledky dosažené při koncentraci cukru asi 2%ní (0,1 g cukru a 5 cm³ roztoku hydrazinového), v tabulce druhé seřaděna jsou čísla získaná při koncentraci cukru rovné 4% (0,1 g cukru a 2,5 cm³ roztoku hydrazinového), v tabulce poslední nacházíme konečně výsledky získané při koncentraci 6%ní (0,1 g cukru a 1,6 cm³ roztoku hydrazinového).

Koncentrace galaktosy 2%

Pokus č.	galaktosa v g	hydrazin v g	Poměr cukru : hydrazinu	Výtěžek v g		b. t. nečistého hydrazonu	b. t. po přehlacení z 50% alk.
1	0,1	0,144	1:1 mol.	0,1446	60,8	176°	191°
2	0,1	0,216	1:1½ „	0,2127	89,4	176°	190°
3	0,1	0,288	1:2	0,2203	92,7	178°	190°
4	0,1	0,360	1:2½ „	0,233	98,0	176°	190°

Koncentrace galaktosy 4%

Pokus č.	galaktosa v g	hydrazin v g	Poměr cukru : hydrazinu	Výtěžek v g		b. t. nečistého hydrazonu	b. t. po přehlacení z 50% alk.
5	0,1	0,144	1:1 mol.	0,1815	76,4	176°	190°
6	0,1	0,216	1:1½ „	0,2292	96,4	176°	190°
7	0,1	0,288	1:2	0,2348	98,8	176°	190°
8	0,1	0 360	1:2½ „	0,2297	96,7	175°	190°

Koncentrace galaktosy 6%

Pokus č.	galaktosa v g	hydrazin v g	Poměr cukru : hydrazinu	Výtěžek v g		b. t. nečistého hydrazonu	b. t. po přehlacení z 50% alk.
9	0,1	0,144	1:1 mol.	0,194	81,6	175°	190°
10	0,1	0,216	1:1½ „	0,237	99,7	175°	190°
11	0,1	0,288	1:2	0,230	96,8	175°	190°

Z uvedených právě tabulek vysvítá, že vylučování galaktosy 2.5-dibromfenylhydrazinem jest skoro kvantitativné, děje-li se v roztoku obsahujícím aspoň 2% galaktosy, a je-li hydrazin v přebytku.

Po těchto zkušenostech provedli jsme ještě řadu pokusů dělicích, při nichž jsme sráželi galaktosu u přítomnosti cukrů jiných. Postupovali jsme jako při řadách předchozích: Směs cukru rozpuštěna v 5 kapkách vody, přidán k ní za tepla roztok hydrazinu v 5 cm³ 50%ní kys. octové, po tříhodinném ponechání za obyčejné teploty sfiltrováno, promyto 30 cm³ 5%ní kys. octové, sušeno 3 hodiny ve vodní sušárně, a bod tání stanoven po jednom přehlacení z 50%ního alkoholu.

Výsledky podává tabulka tato.

Pokus č.	galaktosa v g	0,1 g	2,4dibrom-fenylhydrazin	Poměr cukru k hydrazinu	konc. cukru %	Výtěžek v g	%	b. t.
1	0,1	l-arabinosy	0,288	1:1mol.	4	0,350	147	160°-170°*)
2	0,1	l-xylosy	0,288	1:1	4	0,224	94,3	190°
3	0,1	rhamnosy	0,288	1:1	4	0,226	95,1	190°
4	0,1	d-glukosy	0'288	1:1	4	0,2286	96,2	190°
5	0,1	d-fruktosy	0,288	1:1	4	0,235	98,9	190°
6	0,1	maltosy	0,288	1:1	4	0,228	95,9	190°
7	0,1	laktosy	0,288	1:1	4	0,227	95,5	190°
8	0,1	l-xylosy	0,432	1:1½ ,	4	0,232	97,6	190°
9	0,1	rhamnosy	0,432	1:1½ „	4	0,230	96,8	190°
10	0,1	d-glukosy	0,432	1:1½ „	4	0,234	98,5	190°
11	0,1	d-fruktosy	0,432	1:1½ „	4	0,242	101,8	190°

*) po překrystallování 180°.

Pokusy uvedené ukazují, že se galaktosa dá 2.4-dibromfenylhydrazinem oddělit velmi kvantitativně od xylosy, rhamnosy, glukosy, fruktosy, maltosy a laktosy. Naproti tomu strhuje se za řečených podmínek arabinosa ve způsobě svého hydrazonu, takže se pro tu kombinaci cukru náš hydrazin nehodí.

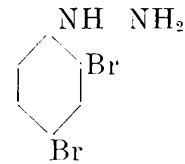
Z organické laboratoře na české vysoké škole technické v Praze.

Résumé.

Étude sur les hydrazines aromatiques halogénées II.: La dibromo-2.4-phénylhydrazine et ses dérivés sucrés.

E. Votoček et V. Ettel.

Le présent travail, portant sur l'hydrazine



fait partie d'une série de recherches ayant pour but d'établir l'applicabilité des hydrazines aromatiques halogénées dans la diagnose des sucres réducteurs, leur séparation et leur dosage dans des mélanges sucrés.

Nous décrivons les hydrazones suivantes: le dérivé d'arabinose (p. de f. 161°), de xylose (p. de f. 127—128°), de rhamnose (p. de f. 150°), de galactose (forme anhydre p. de f. 191°, forme monohydratée p. de f. 178°). Toutes ces hydrazones s'obtiennent aisément à l'état pur. Il n'en est pas de même de l'hydrazone de glucose, difficile à purifier, et de celles de mannose, de maltose et de lactose, qui ne se séparent pas du mélange réactionnel.

Parmi les osazones, la seule qui prenne facilement naissance et se purifie sans difficulté est celle de glucose (obtenue également avec le fructose). Cristallisée dans le phénétol bouillant, elle fond à 230°, et se distingue par son peu de solubilité dans les solvants habituels.

Avec le galactose, dont l'hydrazone se sépare avec beaucoup de facilité, nous avons effectué une série d'essais quantitatifs. Il en résulte que la précipitation de ce sucre à l'état de dibromo-2.4-phénylhydrazone devient presque quantitative lorsqu'on opère sur une solution aqueuse renfermant 2% au minimum de galactose, et avec un excès d'hydrazine (employée en solution dans de l'acide acétique à 50%)

Dans ces conditions, le galactose se laisse assez quantitativement séparer du xylose, du rhamnose, du glucose, du

fructose, du maltose, du lactose. La séparation d'avec l'arabinose ne réussit pas, ce dernier sucre étant entraîné dans le précipité sous forme de son hydrazone (peu soluble comme celle de galactose).

Laboratoire de chimie organique
de l'Ecole Polytechnique tchèque de Prague
(Tchécoslovaquie).

XIV

Zúrodnění u Gagea bohemica.

Napsal Dr. **B. Němec.**

1 strana obrázků.

Předloženo dne 22. VII. 1923.

Naše *Gagea bohemica* kvete zvláště v některých létech velmi bohatě, nikdy však nepřináší semen. Ale rozmnožuje se vegetativním způsobem vytvářejíc na některých jedincích při spodu mezi základními listy krátkou osu, která je posázena velikým množstvím cibulek ve spirálním pořádku. Mimo to i menší jedinci s tenkými lístky vytvořují rozmnožovací cibulky, takže obyčejně nalézáme vegetativní rostliny v hustých skupinách. Jsou to dle genetické terminologie k l o n y, t. j. skupiny rostlin vzniklých vegetativním rozdělením jediného jedince.

Avšak vedle toho *Gagea bohemica*, jak již bylo řečeno, nezřídka kvete, ale nikdy nenese semen. Zajímavo je, že jihoevropský druh *Gagea saxatilis*, druhu *G. bohemica* velmi morfologicky blízký, často kvete a normálně je plodný, takže některými autory za plodné plemeno druhu *G. bohemica* je považován.

Příčina neplodnosti *G. bohemica* je neznáma. Mohli bychom pomýšleti podle analogie s orsejem na seslabení plodnosti v korelaci s přítomností nebo vytvářením hlízek resp. pokud se týče Gagey, cibulek, jak dokázal pro orsej D o s t á l (1923). Měli bychom zde dále snad analogii s poměry u lilie, kde souvislost květonosné lodyhy s cibulí zabraňuje vytvoření zralých semen, ač se zde děje normální zúrodnění a semena se počínají normálně vyvíjeti.

Předpokladem ovšem je, že se u *G. bohemica* děje normální zúrodnění. Nebylo by totiž nemožno, že tu máme analogický případ, jako nedávno popsal pro penízek (*Lysi-*

machia numularia) Dahlgren (1922), u kterého nenastává mezi rostlinami téhož klonu zúrodnění, poněvadž je penízek samajalový a k normálnímu zúrodnění je třeba opylení pylem z jedinců jiného klonu.

Při výhradném rozmnožování vegetativním snadno se stane, že na jedné lokalitě máme jedince patřící k jedinému klonu a poněvadž jsou rostliny samojalové, nemůže i při bohatém opylení nastati zúrodnění a vývoj semen. Dahlgrenovi se podařilo opylením rostlin z jedné lokality pylem rostlin ze vzdálené jiné lokality docíliti normálního zúrodnění a vytvoření tobolek.

Koněčně třeba uvésti názor vyslovený Kernerem, že totiž je *G. bohemica* druhem stepním, u nás reliktním, a že jí scházejí u nás druhy hmyzu, které kdysi na stepích pyl u ní přenášely a tak zúrodnění způsobovaly. Místo semen vytvořuje nyní u nás *G. bohemica* pouze vegetativní cibulky.

Běželo mi především o to stanoviti, zdali ve přírodě se děje přenášení pylu čili nic. Ukázalo se, že i bez přičinění hmyzu pyl se specielním pohybem tyčinek může dostati na bliznu, ač v nevelkém množství. Je známo, že je vlastně poměrně málo entomofilních rostlin, u kterých by bylo zabráněno absolutně přesně, aby se i bez spoluúčasti zevních činitelů dostal pyl na bliznu. Děje se tak obyčejně v pozdním stadiu květení.

Vedle toho byly provedeny četné pokusy umělého sprašování ve sklenníčku mého ústavu na rostlinách z venku přinesených. První pokusy byly provedeny již před válkou s rostlinami, které mi přinesl z okolí Kouřimě Dr. J. Peklo. Již tenkráte jsem stanovil, že se na blizně vyvinuje hojně pylových láček, které normálně čnělkou prorůstají k semenníku. Přes to se nikdy nevytvořila žádná semena. Byly tedy semenníky fixovány po opylení ve Flemmingově tekutině a rozřezány v serie, jež obarveny safraninem-gentianou-oranží.

Shledal jsem, že na blizně pyl klíčí v normální pylové láčky a ty že prorůstají k vajíčkům, a že způsobují normální zúrodnění. Zúrodnění u *Gagey* jsem popsal již roku 1912 pro druh *G. lutea* a mohu již předem říci, že nálezy u *G bohemica.* se téměř úplně kryjí s mými starými nálezy u *G. lutea.*

Také u *G. bohemica* má embryonální vak normální stavbu,

jenom antipody nebývají vždycky diferencovány ve tři buňky. Vaječný aparát se skládá ze dvou buněk synergidálních a jedné větší vaječné. Obě pólová jádra se spolu sbližují asi v centru embryonálního vaku.

Pylová láčka přináší s sebou dvě jádra, vlastně dvě buňky samčí, z nichž jedno se přiloží k jádru endospermálnímu, které je ještě zaškrcené, takže lze na něm nyní zcela dobře rozeznati všecka tři jádra, z nichž jádro to vzniká (obr. 1 c, 4). Na příčném řezu embryonálním vakem (obr. 5) se lze přesvědčiti, že nejprve splynou spolu obě jádra pólová, do nichž se vtlačuje jádro samčí. Ve stejnou dobu se přikládá k jádru buňky vaječné druhé jádro samčí, zprvu značně menší, (obr. 1, 3) pak rychle se zvětšující a s vaječnou buňkou splývající. Ihned po splynutí tří jader v jedno jádro endospermalní se toto začne děliti. Nalézáme často endospermální jádro již rozdělené (obr. 2) kdežto jádro vaječné je dosud v klidu. V době, kdy je jádro endospermální již rozděleno ve čtyři, nalézá se jádro zúrodněné buňky vaječné ve stadiu spiremu (obr. 6). Zdali se jádro vaječné vskutku dělí normálním způsobem, nemohu udati, ježto jsem jako další stadia vývoje embrya viděl vaječnou buňku obsahující několik scvrklých jader, o jejichž původu nemohu ničeho říci. Není vyloučeno, že vznikla nepravidelným karyokinetickým dělením vaječného jádra, ač ani fragmentace jader vzniklých po první karyokinese není vyloučena.

Dalším stadiem byla již jen scvrklá vaječná buňka. Neviděl jsem nikdy vaječné buňky rozdělené ve dvé, takže lze souditi, že nejvýše po prvním rozdělení jaderném vaječná buňka degeneruje.

Vidíme tedy, že sice jsou vaječné buňky normálně zúrodňovány, že však nedojde k založení embrya, neboť nedochází nikdy k rozdělení vaječné buňky ve dvé. Ve všech mnou pozorovaných případech se dostavila po zúrodnění degenerace vaječné buňky. V nedostatku zúrodnění nemůže tedy spočívati příčina jalovosti druhu *G. bohemica*.

Roku 1922 se mi dostalo nového bohatého materiálu kvetoucí *G. bohemica* a sice jednak od Uhřiněvse laskavostí p. doc. Dra Schustlera, vedle toho také hojně materiálu z Moravy, sbíraného p. asistentem Suzou. Za tento materiál oběma pánům srdečně děkuji.

Znovu jsem se mohl přesvědčiti, že na bliznách pyl velmi dobře klíčí a sice jak pyl z rostlin téhož klonu, tak také pyl klonu jiného, za jaký můžeme považovati jistě příslušniky klonu z Moravy. Ale ať byly zúrodněny moravské rostliny pylem rostlin uhřiněveských, ať opačně byly opyleny uhřiněveské moravskými, anebo obojí svým vlastním pylem, neobjevila se semena a tobolky záhy po zúrodnění počaly žloutnouti a uvadati.

U Liliaceí je znám ještě jeden příklad, kde po normálním zúrodnění se nevyvíjejí semena. Týká se to bílé lilie. Její zúrodnění bylo mnohokráte zkoumáno, takže není pochyby, že tu buňka vaječná normálně je zúrodňována, přece však téměř nikdy se nevytvořují semena. Vývoj embrya jde sice trochu dále než u *G. bohemica*, ale k vytvoření zralého embrya ani zde nedochází.

Je to však jeden z nejstarších pokusů z oboru experimentální morfologie, že se na lodyze květonosné, od cibule odříznuté a do vody postavené, vyvinou zcela normální semena. Pokus tento byl popsán již Gessnerem. Jde tu o korelativní vliv cibule na vývoj semen a je-li tento zabraňující vliv přerušen, semena se normálně vyvíjejí. Bylo na snadě provésti podobný pokus také na *G. Bohemica*.

Byly proto odříznuty těsně nad cibulkou květonosné lodyhy po opylení anebo před ním a postaveny do epruvet do vody. Vedle toho byly do podobných epruvet postaveny celé květonosné rostliny a opyleny. V žádném případě však se neobjevil vliv isolace lodyhy květonosné od cibulky. Stejně brzo jako u intaktních rostlin počaly semenníky žloutnouti a vadnouti. Pokusy měly zcela negativní výsledek. Tyto pokusy byly provedeny již před válkou, po válce s četným novým materiálem opakovány, ale opět s výsledkem negativním.

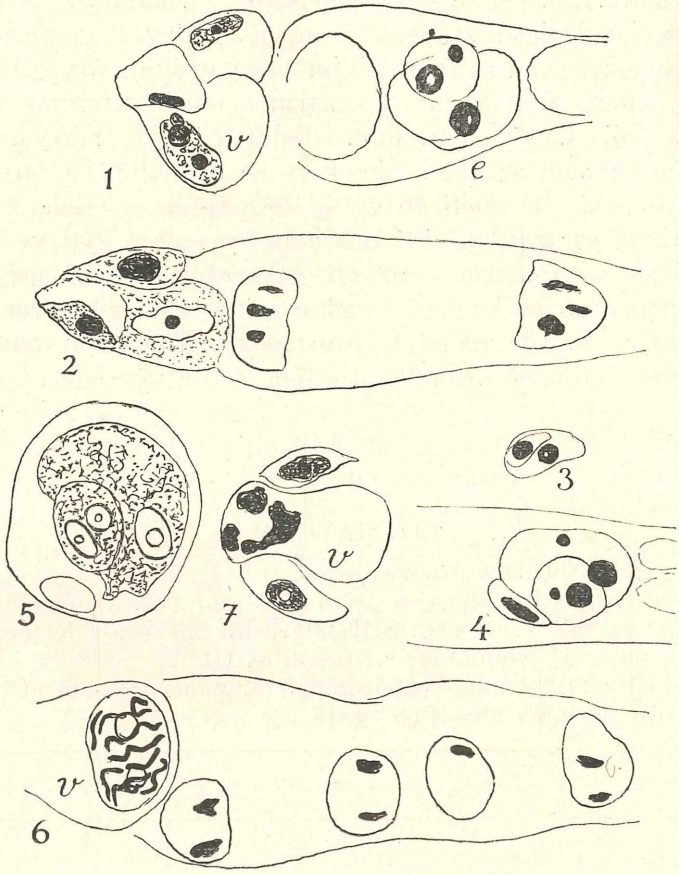
Lze tedy souditi, že to není zabraňovací vliv cibule, resp. látek v ní nahromaděných, dále také ne tvorba nových cibulek, jež by znemožňovaly normální vývoj semen po zúrodnění. Z té okolnosti, že se u *G. bohemica* děje po umělém opylení normální oplození, lze souditi, že by k vývoji semen nedošlo, ani kdyby zde bylo dosti hmyzu, který by pyl přenášel. Ostatně udávají květní biologie, že také u nás květy

G. bohemica jsou spoře navštěvovány hmyzem, ale není známo, zdali hmyz ten opravdu opylení způsobuje.

Domnívám se, že u *G. bohemica* je schopnost vytvářeti semena již dědičně ztracena a že je pohlavní rozplozování úplně nahraženo rozmnožováním vegetativním. Jinak řečeno, vývoj semen se zastavuje z vnitřních příčin, které se dostavují po zúrodnění na určitém stadiu vývoje embrya. Snad bychom tu měli analogii zjevu, že se u některých bastardů pyl sice počne vyvíjeti, že vývoj dospěje do určitého stadia, ale pak že se zastaví. Jiná analogie by mohla býti ve zjevu týkajícím se efemerního okvětí některých rostlin, jež hyne velmi záhy po rozkvětení a jehož odumření nelze zastaviti žádným z dosud známých prostředků. Také zde odumírá embryo z vnitřních příčin na určitém stadiu vývojovém.

LITERATURA.

Kerner: A 1891. Das Pflanzenleben.
Němec: B 1912. Zúrodnění u křivatce. Rozpr. Čes. Akademie XXI.
Dahlgren K. V.: O 1922. Selbststerilität innerhalb Klonen von Lysimachia Nummularia, Hereditas III.
Dostál R.: 1923. L'étude expérim. sur la tubérification et la stérilité de la Ficaire. Preslia, II.



Obr. 1. podélný řez embryonálním vakem G. bohemica. *v* vaječná buňka, k jejímuž jádru přiléhá malé jádro samčí, *e* embr. vak se třemi právě splývajícími jádry. — Obr. 2. Embr. vak G. bohemica, jádro samčí již splynulo s jádrem vaječným, jádro endospermální se již rozdělilo ve dvé.— Obr. 3. Jádro samičí s přiloženým jádrem samčím. — Obr 4. Jádro endospermální vznikající splynutím 3 jader. — Obr. 5. Příčný řez jádrem endospermálním, samčí jádro ještě zachovalo své hranice. — Obr. 6. Embr. vak se 4 jádry endospermálními, jádro vaječné buňky se spirémem. — Obr. 7. Vaječná buňka se 3 degenerujícími jádry.

Résumé.

Fecundation in Gagea bohemica.

By Dr. B. Němec.

Gagea bohemica Schult. (Ornithogallum bohemicum Zauchner) never in Central Europe produces capsules and seedlings. Kerner (Pflanzenleben, 1891) gives such an explanation of this fact: »Nun ist es überaus merkwürdig, daß die Steppenpflanze Gagea bohemica, deren Blüten ihrem Baue nach auf eine Kreuzung durch Vermittlung der Insekten berechnet sind, und in welchen eine Autogamie nicht zu stande kommt, an den erwähnten vereinzelten Standorten in Böhmen und Deutschland niemals Früchte und Samen zur Reife bringen. Unwillkürlich drängt sich der Gedanke auf, daß an diesem Fehlschlagen das Ausbleiben jener Steppeninsekten schuld sei, welche ehemals auch durch Böhmen und Deutschland verbreitet sein mochten. Sei dem wie ihm wolle, so viel ist Tatsache, daß an den Stöcken der Gagea bohemica, welche an den Standorten in der freien Natur in Böhmen und Deutschland Blüten entfalten, noch niemand Früchte ausreifen sah. Dagegen bilden sich an dem Stengel dieser Pflanze, zwischen den beiden Grundblättern kleine, zwiebelähnliche Knospen aus, welche nachträglich abfallen und als Ableger die Art erhalten und vermehren.«

Because in Gagea bohemica a very rich vegetative propagation occurs I thought the plant could be selfsteril and when all plants at a place are members of the same clone fruits can not be produced. Therefore I have studied if fecundation takes place after an artificial pollination with the pollen-grains from the same flower or from flowers of the same clone.

The structure of the embryo-sac in Gagea bohemica is the same as in Lilium (Mottier 1904) or in Gagea lutea (Němec 1912). The embryo-sac consists of seven cells, one of which is the egg-cell, two are synergids. The two polar nuclei from either end approach one another and meet in the centre of the emryo-sac.

Pollen-grains from the same flower or from the same clone germinate well on the stigma and I always have seen

many pollen-tubes in the channel of the style. Next stage is the entering of one male nucleus into the egg-cell, while the other passes into the cavity of the sac. Some cases of the fusion of the male nucleus with the egg-cell could be observed. Very often one of the synergids looks at this time shriveld and dead. In the centre of the sac-cavity the second male nucleus is fusing with the two polar nuclei. This triple fusion is unique.

The first division of the triple-fusion-nucleus preceeds that of the egg-cell and I have been able to follow two divisions. Meanwhile in the nucleus of the egg-cell which has resulted from the fusion of the male and female nuclei, distinct chromosomes of filamentous form appear.

This is the last stage I have observed. The fertilised egg-cell begins to disorganise, the nucleus undergoes sometimes a fragmentation. We see, though normal pollination takes place, mature seeds are not produced.

An explanation for the degeneration of the ovulae could be, that the production of fruits is prevented correlatively by the vegetative propagation. Long ago such case is known in Lilium candidum. This plant generelly dos not produce capsules, but when isolated from the bulb fruits can be produced without difficulty (K. Gessner).

Therefore I have after pollination isolated stems of Gageo bohemica and cultivated in water, but I never have obtained fruits. The gynoeceum withered and died as soon as in plants where the stem remained in connection with the bulbs. The same result was received after pollination of bohemian plants with the pollen from plants I have received from Moravia.

XV.

Classes de nouvelles solutions (de bifurcation) à période séculaire du problème général des trois corps.

Par **Wladimír Václav Heinrich** à Prague.

Présenté 20. X. 1922.

J'ai étudié récemment dans le Bulletin Astronomique*) les solutions du problème d'Hécube, en m'appuyant sur une théorie plus ancienne des courbes de résonnance**). Dans le dit mémoire j'ai cherché les solutions périodiques avoisinantes celles de la deuxième sorte de Poincaré, valables pour le problème restreint.

On suppose — on le sait bien — la planète troublante décrivant un cercle autour de la masse centrale, ce qui est toujours admissible, si la masse du planétoide est zéro. On connaît toute une foule de solutions pour ce problème simplifié de trois corps.

En partant de ces solutions, j'ai étudié le problème général de commensurabilités $\frac{p+q}{p}$ des mouvements moyens dans le cas qu'on ne fasse plus l'hypothèse que l'excentricité de l'orbite de la planète troublante soit zéro (p, q signifient des nombres entiers positifs). On parle alors du problème astéroïdique de trois corps. Tandisque G. W. Hill et d'autres auteurs, dans leurs recherches très detaillées n'ont réussi qu'à retrouver les solutions de le deuxième sorte de Poincaré — à période courte — c'est-à-dire des solutions extrêmement clair-semées jouissant de l'importante propriété caractéristique — la fi-

*) Bull. astron. Deuxième série Tome II fasc. 7. 1922 p. 425—458.

**) Astron. Nachr. Band 206 (1918) Band 207 (1918). Sitzungsber. d. böhm. Ges. d. Wiss. (1917) Časopis math. a fys. Prague 48 (1919). 50 (1921).

xité des périhélies des orbites — j'ai essayé, dans le mémoire précité de garder, aussi pour le cas du problème astéroïdique, la mobilité des apsides — bien admissible pour le problème restreint, j'ai pris pour le paramètre (analogue de la masse troublante) l'excentricité de l'orbite da la planète troublante et, me laissant guider par la marche des courbes de résonnance, péniblement tracée déjà auparavant,*) j'ai réussi à découvrir de nouvelles solutions séculaires que j'ai rangées en plusieurs classes et catégories. Je suis arrivé en somme au résultat suivant.

Pour chaque type de commensurabilité des mouvements moyens, il existe une multiple infinité de solutions à période séculaire qu'on peut diviser généralement en deux classes et trois catégories. Dans la solution originaire de la première sorte, le mouvement périodique n'était que synodique. Faisons, pour simplifier, l'hypothèse d'une conjonction, ou opposition symétrique au commencement du mouvement.

Les trois corps se retrouvent à la fin de la période sur la ligne des apsides, qui ne faisait que tourner d'un certain angle. Dans la solution séculaire, plusieurs révolutions complètes de la ligne des apsides elle même y seront comprises.

Nous distinguerons alors les solutions séculaires de la première classe, qui contiennent une seule révolution du périhélie, tandisque la deuxième classe sera formée par toutes les solutions dont la période totale compte plusieurs révolutions complètes du périhélie.

D'après la longueur de la periode — il sera avantageux de distinguer les solutions périodiques longuévales (semiséculaires) et séculaires à période courte et longue. Les solutions rangées d'après la durée de période se multiplient encore et donnent une nouvelle suite de tous les complexes (abzählbare unendliche Menge de Cantor). Nous allons essayer d'indiquer la multiplicité de l'infinité pour les solutions séculaires trouvées, c'est-à-dire le nombre de paramètres arbitraires figurant dans le choix des conditions initiales du mouvement.

Envisageons d'abord le problème restreint originaire qui nous servira de point de départ. Fixons le rapport des

*) voir la remarque **) pag. 1.

masses. La multiple infinité des solutions existant dans ce cas spécial admet deux paramètres.

1. L'anomalie moyenne de l'astéroide,
2. la différence des longueurs des périhélies,
3. l'excentricité de l'orbite de l'astéroide, (e),
4. le rapport des mouvements moyens (n/n').

Ces données étant liées par une relation bien connue*) on constatera en somme deux paramètres arbitraires $(n/n', e)$. (Sol. sym.)

Reprenons l'étude du cas du problème astéroïdique; on devra choisir la période totale du mouvement et il y aura encore un paramètre arbitraire, l'excentricité de l'ellipse de la planète troublante. C'est ainsi qu'en fixant le rapport des masses on parlera d'une triple infinité des solutions séculaires symétriques $(e, e', n/n')$ etc.

Pour mieux faire comprendre le caractère geométrique de la périodicité des solutions séculaires, nous en donnerons quelques exemples détaillés concernant les solutions longuévales qui nous semblent les plus instructives à ce point de vue. Prenons d'abord le cas du problème restreint. — Une solution périodique de la première sorte exige, d'après sa définition, les mêmes conditions de mouvement, c'est-à-dire les mêmes positions mutuelles et les mêmes vitesses des trois corps au commencement et à la fin d'une période. On pourra parler seulement d'une rotation d'un certain angle du système entier, c'est pourquoi la période, dans ce cas du problème restreint, ne sera qu'une période synodique.

Envisageons — pour fixer les idées — le cas du problème d'Hécube. Prenons une solution asymétrique et admettons en général que le périhélie de l'astéroïde montre une rotation séculaire. Au commencement du mouvement la planète troublante (Jupiter) décrivant un cercle sera posée dans la même direction que le périhélie de l'astéroïde, tandisque le planétoïde se trouve dans une direction fixe différente de la dernière. Dénotons les positions de la planète, de l'astéroïde, et du périhélie de l'astéroïde resp. au commencement et à la fin de la période synodique par $M_0', M_T', \Pi_0, \Pi_T, M_0, M_T$.

*) Rozpravy Čes. Ak. tř. II. 1923, sv. 21 p. 8 (III). Astr. Nachr. Bd. 192 (4604) p. 328 (III) 1912.

S'il ne s'agit que d'une rotation du système entier, on devra avoir:

$$M_T' SM_o' = \Pi_T S \Pi_o$$
$$M_T SM_o = \Pi_T S \Pi_o$$

S'il s'agit plus spécialement d'une conjonction ou oppositon symétrique (solution symétrique), les trois corps se retrouveront au commencement et à la fin de la période synodique sur une ligne droite qui aura, dans le deux cas, des directions différantes formant l'angle $\Pi_T S \Pi_o$.

Pendant une période synodique, le planétoïde fera plus (moins) de deux révolutions complètes, la planète plus (moins) d'une révolution complète selon le caractère mécanique du problème étudié qui mène à un sens direct ou retrograde du mouvement séculaire du périhélie.

Autrement dans le cas du problème astéroïdique. Ici nous ne pourrons parler que d'une période sidérale. Une période synodique ne réprésente cette fois aucune périodicité. Tandisqu' auparavant la planète troublante se retrouvant dans la direction du périhélie de l'astéroïde achevait la possibilité d'une période synodique en décrivant un cercle qui est partout symétrique relativement au centre — cette fois nous supposons, au lieu du cercle, l'ellipse d'une certaine excentricité — de sorte qu'après la rotation d'un certain angle la planète ne se retrouve plus au même point de son orbite elliptique. On ne peut plus parler d'une même position relative synodique, on le constate d'après le fait même que la planète troublante est posée sur un autre point de son ellipse fixe, c'est-à-dire à une autre distance qu'au commencement du mouvement. Nous devrons alors rechercher une période plus longue, la commensurabilité entre les mouvements moyens de l'astéroïde, de la planète et du périhélie du planetoïde. Nous devrons composer plusieurs rotations synodiques du système en une rotation sidérale, en recherchant quelles sont les conditions permettant que plusieurs angles de rotations partielles synodiques forment ensemble un ou plusieurs angles de 360°. D'après cela, il s'agira de la première classe de solutions séculaires.

D'après ce qui précède, on peut facilement trouver la démonstration des formules suivantes, dont nous nous borne-

rons à résumer ainsi l'ensemble. Dénotons les vitesses angulaires diurnes (mouvements moyens diurnes) resp. relativement à l'astéroïde, la planète et à la ligne des apsides du planétoïde (rotation séculaire pendant un jour moyen solaire) n_1, n', f, désignons la période synodique resp. sidérale (totale) T' et T; puis par $\tau' \mathfrak{Q}_1$ la durée d'une révolution de la planète troublante (Jupiter) et dénotons par p, q, r, s, l, $\bar{l}$ des nombres entiers positifs, p, q premiers entre eux. Nous aurons les éléments d'une solution de la première sorte du problème restreint, qui nous servent de point de départ, étant liés par la relation bien connue*):

$$pn_1 - (p+q)n' \pm qf = 0, \quad n_1 = n + h,$$

(h désignant la perturbation du mouvement moyen, dans le Bul. astr. l. c. nous avons dénoté par g.)

Pour les solutions séculaires de la première classe

$$f.T'r = 2\pi$$

$$T' = \frac{2\pi}{n_1 - n'} q$$

$$rp \pm 1 = \frac{n'}{|f|} = l$$

ainsi on doit fixer $r = 1, 2, 3$ et on aura

$$T = T'r = \tau' \mathfrak{Q}_1 (rp \pm 1) = \tau' \mathfrak{Q}_1 \frac{n'}{|f|}$$

et pour les solutions séculaires de la deuxième classe

$$f\,T'r = 2\pi s$$

$$\frac{\bar{l}}{s} = \frac{n'}{|f|} = \frac{pr \pm s}{s}$$

$$T = T'r = \tau' \mathfrak{Q}_1 (pr \pm s) = \tau' \mathfrak{Q}_1 s \frac{n'}{|f|}$$

Le signe positif resp. négatif, figurant dans nos formules signifie resp. le mouvement direct ou rétrograde de la ligne des apsides.

Passons, pour illustrer les explications, à quelques exemples. Nous les empruntons à la première table du mémoire précité**)

*) Astr. Nachr. Bd. 192 (4604) p. 327 (II) 1912.

**) Bull. astron. II. série tome I fase. 3. 1922.

1. Prenons le cas du type Hécube, solution séculaire (longuévale) à l'excentricité $e = 0{\cdot}007$, opposition symétrique $\zeta = \pi$, au commencement. Étudions d'abord le mouvement synodique (problème restreint, solution de la première sorte). La rotation du périhélie de l'astéroïde est directe. Le rapport de f/n' est $\frac{1}{n'} = \frac{1}{5}$. Pendant une période synodique, la planète fera une révolution complète plus un quart, l'astéroïde deux révolutions complètes plus un quart. Le périhélie tournera, pendant ce temps-là de l'angle de 90° dans le sens direct.

La rotation de la configuration initiale à la fin de la période synodique, sera exactement 90° dans le sens direct, de sorte que pour obtenir une rotation sidérale, on devra composer quatre périodes synodiques.

Le mouvement sidéral longuéval (problème astéroïdique) contiendra ainsi quatre périodes synodiques c'est-à-dire cinq révolutions de la planète troublante (Jupiter).

2) Prenons comme deuxième exemple le cas de l'orbite du type séculaire Hecube*) exentricité 0·001, conjonction symétrique. Étudions le mouvement synodique. La rotation séculaire du périhélie est rétrograde et égale au mouvement moyen de la planète troublante, $f/n' = 1$ Pendant une période synodique, la planète fera une demi-révolution en sens direct la ligne des apsides de l'astéroïde fera une demi-révolution en sens rétrograde, le planétoïde décrira une révolution et demie, de sorte que vers la fin de la période synodique les trois corps se retrouveront en conjonction symétrique sur la ligne des apsides, mais la dernière aura une direction exactement opposée à celle du commencement. Passons maintenant au cas du problème astéroïdique, la période totale sidérale sera nécessairement composée de deux périodes synodiques, sa durée comptera une seule révolution de la planète troublante (Jupiter). L'orbite périodique sera manifestement longuévale. Je vais appeler encore l'attention du lecteur sur un point délicat. On trouvera dans la table citée sous n le nombre $n = 893''4 = 3n'$, on serait enclin à croire alors qu'il

*) l. c. table I Bull. Astron.

s'agit d'un astéroïde du type Hestia $\left(\frac{3}{1}\right)$, mais il n'en est rien. On le constatera facilement en jetant un coup d'oeil sur la table du type Hestia, qui est donnée l. c. plus loin.

3) choisissons encore un exemple de la deuxième classe $n'/f = 3/2$, l'excentricité $e = 0.002$, $f = 199''42$, $p = 1$, $s = 2$, $r = 5$. Le mouvement synodique donnera le tableau suivant: à la fin de la période, la planète aura décrit l'angle 216° dans le sens direct, l'astéroïde décrira l'angle 360° + 216° dans le même sens, et la ligne des apsides de l'orbite de l'astéroïde tournera de l'angle 144° en sens inverse, c'est-à-dire rétrograde Les trois corps se retrouveront en conjonction symétrique sur la ligne des apsides, comme au commencement du mouvement. Pour composer une période sidérale, on devra exiger $144°.5 = 720 = 2.360$ cinq périodes synodiques, c'est-à-dire trois révolutions de la planète troublante (Jupiter). L'orbite sera manifestement longuévale, de la deuxième classe, la ligne des apsides ayant fait deux révolutions complètes en sens rétrograde.

§ 1. **Résumé du présent mémoire.**

C'est surtout K. Schwarzschild qui dans un important mémoire*) maintenait encore l'opinion que l'emploi de l'opération à la Delaunay ne serait pas admissible dans le cas de commensurabilité de mouvements moyens.

Or j'ai démontré dans le Bul. astron.**) que même pour le cas des commensurabilités de petits nombres on peut se servir de cette opération. J'en ai profité aussi dans ce qui suit:

Poursuivons maintenant l'objet du mémoire présent:

Je vais étendre pour le cas du problème général des trois corps les résultats mentionnés et valables jusqu'ici pour le problème astéroïdique. — Faisant cette fois jouer le rôle du paramètre à la masse troublante de l'astéroïde, je demontrerai qu'on peut aussi facilement constater pour le problème général l'existence des solutions séculaires de bifurcation analogues à celles du problème astérioïdique.

---

*) Astr. Nachr. Band 147 nro. 3522.

**) Bull. astron. II série, tome II l. c.

C'est ce qu'on peut résumer ainsi:

Dans le problème général des trois corps il existe pour chaque type de commensurabilité des mouvements moyens, une multiple infinité de solutions de bifurcation à période séculaire qu'on peut ranger généralement en cinq classes et trois catégories.

Nous nous servirons des coordonnées bien connues de Jacobi en rapportant le mouvement d'un de nos planètes au corps central, le mouvement du deuxième planète au centre de gravité de deux corps précédants. Nous étudierons les deux ellipses osculatrices correspodantes.

En parlant — pour abréger — d'un corps central et de deux planètes tournant autour de lui (c'est-à-dire sans respecter le centre de gravité pour le moment) on peut s'exprimer ainsi.

Classe première: Le périhélie d'un de nos planètes restera fixe, l'autre fait une révolution complète pendant une période totale du mouvement.

Classe deuxième: Le perihélie d'un de nos planètes restant fixe, la ligne des apsides de l'orbite du deuxième planète tourne plusieurs fois.

En dehors de ces deux classes qui correspondent et avoisinent les dites solutions séculaires du problème astéroïdique étudié auparavant*) une troisième classe d'un domaine énormément vaste commence à apparaître. Pour caractériser cette classe très étendue des mouvements séculaires, rappelons les solutions de la deuxième sorte de Poincaré existant dans le problème général des trois corps. Tandique dans le problème astéroïdique les auteurs anciens ne trouvèrent que des périhélies fixes, on pouvait dans le cas du problème général admettre des apsides mobiles, pourvu que les mouvements des apsides de toutes les deux planètes fussent les mêmes. Ici encore on parlait des solutions synodiques à période courte.

En partant d'une des dites classes des solutions séculaires du problème astéroïdique et faisant croître la masse de l'ancien astéroide, on trouvera les possibilités suivantes:

Classe troisième: La ligne des apsides de l'ancien planétoide fait plusieurs revolutions pendant une période

*) voir la remarque **) pag. 1.

du mouvement mais le périhélie de l'ancien planète commence à tourner. Cette rotation est contrebalancée par un nouvel accroissement du mouvement de la ligne des apsides de l'ancien astéroïde, de sorte qu'à la fin de la période les trois corps retrouvent leur mutuelle position synodique originaire.

La longueur de la période coïncide exactément avec la période séculaire totale du mouvement dans le problème astéroidique qui nous a servi de point de départ.

Voici les divers cas qui pourront se présenter en général.

I. $f=0$ (f signifie le mouvement séculaire rotatoire de la différence de longueurs de périhélies). Il s'agit de solutions de la deuxième sorte de Poincaré — les deux apsides formant un certain angle fixe tournent avec une vitesse séculaire commune. La période de ces solutions — on le sait bien — n'est pas séculaire, mais très courte. On pourra interpréter ce cas comme il suit: Les deux apsides, formant au commencement et vers la fin de la période séculaire le même angle fixe tournent avec la même vitesse dans des directions opposées.

II. f positif

a) les rotations séculaires des apsides sont toutes deux directes. Le périhélie π' (de l'ancien planète m') tournera lentement en comparaison avec le mouvement séculaire du périhélie π (de l'ancien planétoide) lequel exécutera pendant une période totale une rotation équivalente à l'angle décrit par π' plus un ou plusieurs angles des 360°.

b) cas analogue au précédant, la faible rotation de π' pourra être rétrograde, l'angle de 360° décrit par π c'est-à-dire la dernière de plusieurs révolutions de 360° sera diminuée de la rotation totale de π'.

c) d) la faible rotation de π sera directe *c)* ou rétrograde. *d)* Le périhélie π' jouira d'un mouvement rétrograde plus fort, de sorte qu'il rejoindra π avant une (*c*) ou après une (*d*) ou plusieurs rotations complètes de 360°.

III. f négatif.

a) b) Le périhélie π' sera animé d'un faible mouvement rotatoire direct (*a*) ou rétrograde (*b*) le périhélie π tourne plus vite dans le sens rétrograde pour pouvoir rejoindre π' avant ou après une ou plusieurs rotations de 360°.

c) d) La rotation séculaire du périhélie π sera relativement faible, directe *c)* ou rétrograde *d)* L'apside de π' tourne plus vite en sens direct, elle rejoindra l'apside π avant *d)* (ou après *c*)) avoir décrit l'angle de 360°, ou plusieurs fois 360°.

Mais ce n'est pas tout:

Jusqu'ici, en partant d'une solution quelconque séculaire, du problème astéroïdique, nous avons cherché les solutions avoisinantes, de la même période séculaire, pour le cas du problème général. En profitant du fait que dans le problème général des trois corps, le temps ne figure pas explicitement, on peut facilement faire tomber cette hypothèse en admettant une période quelconque. On arrivera à énoncer le resultat suivant:

Dans le problème général des trois corps, il existe, pour chaque type de commensurabilités des mouvements moyens, une multiple infinité de solutions à période séculaire, d'une période distincte de celle valable pour le problème astéroïdique correspondant — qui servait de point de départ. On peut les ranger en classes et catégories.

Classe quatrième: La ligne des apsides de l'ancien. planétoïde fait une révolution complète et tourne outre cela en général d'un certain angle. La ligne des apsides de l'autre planète tourne du même angle (moindre que 360°).

La période du mouvement sera (algébriquement) plus grande que la période séculaire de la solution séculaire astéroïdique qui servait de point de départ.

Classe cinquième: La ligne des apsides de l'ancien astéroïde fait plusieurs révolutions complètes et tourne, outre cela, en général d'un certain angle. La ligne des apsides

de l'autre planète tourne du même angle (moindre que 360°). La période du mouvement sera plus longue que celle de la solution séculaire astéroïdique originaire.

Les divers cas qui pourront se présenter dans la quatrième et cinquième classe seront analogues à ceux de I, II, III *a) b) c) d)* mentionnés à propos de la troisième classe. Il va sans dire qu' on pourra ranger nos cinq classes de solutions séculaires, trouvées en trois catégories, d'après la longueur de leur période totale.*) — On trouvera ainsi.

1. des solutions longuévales (semiséculaires) avec la période plus courte que cent années juliennes.

2. solutions séculaires à période courte, dont la longueur de période s'étend entre cent et mille années juliennes.

3. solutions séculaires à période longue, qui jouissent d'une durée extrême, de période, telle qu' on la retrouve dans la théorie de perturbations séculaires des planètes principales.

En concluant d'après les divers résultats mentionées plus haut nous allons maintenant rappeler — comme une sorte de motto — un fait remarquable, ayant rapport à toute l'étendue de nos solutions nouvelles, constatées d'une part dans le problème astéroïdique d'autre part dans le problème général des trois corps.

Envisageons la grande variété des formes des orbites trouvées. Elles sont, à elles toutes, caractérisées par des qualités diverses et souvent opposées l'une à l'autre. C'est pourquoi nous avons été obligé d'introduire les dites classes et catégories des mouvements recherchés.

Notons comme exemple — qu'un petit déplacement des éléments d'une orbite périodique du problème restreint mène, d'après la grandeur de l'accroissement, à des orbites séculaires des périodes (du périhélie) très différentes resp. extrêment écartées l'une de l'autre. Les qualités géométriques des mouvements correspondants sont naturellement très diverses.

Le même phenomène se produira pour un déplacement des solutions séculaires du problème astéroidique, qui conduira chaque fois à des solutions séculaires très diverses du problème général des trois corps.

*) Voir Bull. astron. 1922 tome II série 2° l. c.

Cependant c'était toujours le même groupe des solutions de première sorte du problème restreint — à courte période — qui nous servaient de point de départ pour le prolongement analytique. — Toutefois, les orbites dernières sont en général d'un caractère semblable, du moins en ce qui concerne deux solutions de première sorte qui diffèrent trop peu dans le choix des paramètres (élements) initiaux. On dirait que cette uniformité de solutions d'un problème plus simple (restreint) se disperse en une grande, une infinie variété des solutions du problème plus général de classes et de catégories bien différentes.

Et inversement: un petit changement, une petite simplification du problème plus général amène l'unification des classes diverses en une classe unique.

De là l'on peut conclure la grande complication des formes possibles qui se présentera dans le problème général de n-corps.

§ 2. Problème astéroïdique.

Nous partirons des équations du mouvement pour les éléments canoniques de Jacobi.*) Désignons à cet effet, selon l'habitude, par a, e, l, (M), π respectivement la demi-grande axe, l'excentricité, l'anomalie moyenne et la distance du noeud ascendant au périhélie, les mêmes lettres accentuées correspondent aux divers éléments de l'orbite de l'autre planète.

La planète avec les éléments accentués (Jupiter), de masse μ décrit une ellipse autour du corps central (soleil), désignons en outre le rayon vecteur de cette ellipse r'; n' le moyen mouvement diurne dans cette ellipse.

La planète avec les éléments non accentués décrira de même une ellipse osculatrice autour du centre de gravité instantané des autres deux corps. Désignons le mouvement moyen osculateur dans cette ellipse n, le rayon vecteur r.

Nous écrirons pour la masse de ce corps $\varepsilon \gtrless 0$, n'oubliant pas que dans la première approximation qui nous servira de

*) Charlier, Mechanik des Himmels I., pag. 280.

point de départ, nous serons obligés de faire dégénérer le problème général en posant simplement $\varepsilon = 0$.

Choisissons, pour l'unité de masse, la masse du corps central (soleil), pour l'unité de temps, le jour solaire moyen, pour l'unité de longueur, l'unité astronomique, désignons la constante de Gauss par k. Les équations du problème général dans un plan, dans la forme réduite de Jacobi, sont alors de la forme suivante.

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l} \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_1} \qquad L_1 = \beta\sqrt{a}, \quad l = n(t+\gamma) \equiv M$$

$$\frac{dG_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G_1} \qquad G_1 = \beta\sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2}, \quad g = \pi$$

$$\frac{dL_1'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l'} \quad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_1'} \qquad L_1' = \beta'\sqrt{a'}, \quad l' = n'(t+\gamma') \equiv M'$$

$$\frac{dG_1'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g'}, \quad \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G_1'} \qquad G_1' = \beta'\sqrt{a'}\ \sqrt{1-e'^2}, \quad g' = \pi'$$

$$\beta' = \frac{k\mu}{\sqrt{1+\mu}}, \quad \beta = k\varepsilon\sqrt{\frac{1+\mu}{1+\mu+\varepsilon}}$$

$$\varrho' = \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{\beta'^2}{k^2\mu} \qquad \varrho = \frac{\varepsilon(1+\mu)}{1+\mu+\varepsilon} = \frac{\beta^2}{k^2\varepsilon}$$

$$n' = \frac{k}{a'^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\mu}, \quad n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1+\mu+\varepsilon}{1+\mu}}$$

$$\frac{\beta'^2}{L_1'^2} = \frac{1}{a'}, \quad \frac{\beta'^2}{2\varrho'} = \frac{k^2\mu}{2}; \quad \frac{\beta^2}{L_1^2} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\beta^2}{2\varrho} = \frac{k^2\varepsilon}{2}$$

$$F = \frac{k^2\varepsilon}{2a} + \frac{k^2\mu}{2a'} + \frac{k^2\mu\varepsilon}{\Delta} + \frac{k^2\varepsilon}{R''} - \frac{k^2\varepsilon}{r} \qquad (2)$$

Si nous posons alors, pour les coordonées de nos deux planètes relativement au corps central et au centre de gravité de 1 et μ, x', y', x, y nous aurons.

$$r'^2 = x'^2 + y'^2, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Pour la distance mutuelle de deux planètes, on trouvera

$$\Delta^2 = \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^2 (x'^2+y'^2) + x^2 + y^2 - \frac{2}{1+\mu}(xx'+yy'),$$

et pour le rayon vecteur instantané du corps ε relativement au corps central.

$$R''^2 = \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2 (x'^2+y'^2) + x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{1+\mu}(xx'+yy').$$

En développant suivant les masses on trouvera facilement pour

$$F = \frac{k^2\varepsilon}{2a} + \frac{k^2\mu}{2a'} + \frac{k^2\mu\varepsilon}{R'} - \frac{k^2\varepsilon r'}{r^2}\mu\cos\vartheta + \tag{3}$$

$$+ k^2\mu^2\varepsilon\left\{\frac{r'^2}{2R'^3} - \frac{r^2}{2R'^3} + \frac{1}{2R'} - \frac{r'^2}{2r^3} + \frac{r'\cos\vartheta}{r^2} + \frac{3r'^2}{2r^3}\cos^2\vartheta\right\} +$$

$$R'^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta,\ \cos\vartheta = \frac{xx'}{rr'} + \frac{yy'}{rr'}.$$

La fonction F est généralement développable dans la forme suivante

$$F = \varepsilon\Phi_0 + \mu\Phi_0' + \varepsilon\mu\Phi + \varepsilon e'\mu R + \varepsilon^2\mu\Psi \tag{4}$$

$$\Phi_0 = \frac{k^2}{2a},\ \Phi_0' = \frac{k^2}{2a'},\ R_0 = \Phi_0 + \mu\Phi.$$

$$\Phi = \Phi_1 + \mu\Phi_2 + \mu^2\Phi_3 +$$

$$R = \Phi_{11} + \Phi_{21}\mu + \Phi_{31}\mu^2 + \Phi_{12}e' + \Phi_{22}\mu e' + \Phi_{32}\mu^2 e' + \tag{5}$$

$$\Psi = \Psi_1 + \varepsilon\Psi_2 + \varepsilon^2\Psi_3 +$$

$$R_1 = \Phi_{11} + \mu\Phi_{21} + \mu^2\Phi_{31} +$$

$$R_2 = \Phi_{12} + \mu\Phi_{22} + \mu^2\Phi_{32} +$$

$$R_3 = \Phi_{13} + \mu\Phi_{23} + \mu^2\Phi_{33} + .$$

Avant d'écrire la forme définitive des équations qui nous serviront de point de départ nous allons modifier les éléments canoniques.

Les éléments nonangulaires L, G, L', G', contiennent les facteurs β, β', par cela même ils seront divisible par resp ε, μ. On pourra facilement se débarrasser de ces facteurs superflus, ce qui rendra plus facile d'écrire la forme de la fonction caractéristique Hamiltonienne d'une manière plus simple.

En effet prenons par exemple les équations définissant le mouvement du corps non accentué de la masse ε. On constatera partout l'existence du facteur ε dans les éléments nonangulaires L, G, puis aussi dans la fonction F, bien entendu la partie qui restera après la dérivation partielle prescrite par le symbole des deuxièmes membres.

Ainsi ce facteur pourra être supprimé d'une part de deux côtés des équations, servant à déterminer les variables de position, d'autre part dans le numérateur et dénominateur des deuxièmes membres des équations pour l, g.

Il en sera de même pour les équations, donnant le mouvement de la deuxime planète accentuée (de la masse μ). Partout on supprimera encore le facteur μ.

$$\text{Posons } \beta = \varepsilon\gamma_1,\ \gamma_1 = k\sqrt{\frac{1+\mu}{1+\mu+\varepsilon}},$$

$$\beta' = \mu\gamma'_1,\ \gamma'_1 = \frac{k}{\sqrt{1+\mu}},$$

les éléments canoniques auront alors la forme

$$\begin{array}{llll} L=\gamma_1\sqrt{a}, & l=n(t+\gamma), & L'=\gamma_1\sqrt{a'} & l'=n'(t+\gamma'), \\ G=\gamma_1\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}, & g=\pi, & G'=\gamma'_1\sqrt{a'}\sqrt{1-e'^2} & g'=\pi'. \end{array} \tag{6}$$

Les équations du mouvement s'écrivent en définitive

$$\begin{array}{llll} \dfrac{dL}{dt}=\dfrac{\partial F'}{\partial l}, & \dfrac{dl}{dt}=-\dfrac{\partial F'}{\partial L}, \\ \dfrac{dG}{dt}=\dfrac{\partial F'}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt}=-\dfrac{\partial F'}{\partial G}, \\ \dfrac{dL'}{dt}=\dfrac{\partial F''}{\partial l'}, & \dfrac{dl'}{dt}=-\dfrac{\partial F''}{\partial L'}, \\ \dfrac{\partial G'}{dt}=\dfrac{\partial F''}{\partial g}, & \dfrac{dg'}{dt}=-\dfrac{\partial F''}{dG'}, \end{array} \tag{7}$$

La fonction y figurant aura cette fois une forme plus simple

$$F' = \Phi_0 + \mu\Phi + \mu e' R + \varepsilon\mu\Psi,\ F'' = \Phi'_0 + \varepsilon\Phi + \varepsilon e' R + \varepsilon^2\Psi \tag{8}$$

les symboles des fonctions du deuxième membre de cette définition conservent absolument le sens écrit plus haut.

Envisageons d'abord le cas particulier, où la planète non accentuée se réduit à un planétoïde de la masse nul $\varepsilon = 0$. C'est le cas bien connu du problème astéroïdique des trois corps. Les équations du mouvement du deuxième corps, planète accentuée, seront remplies par une solution triviale, composée de constantes, tandis que le mouvement du planétoïde sera donné par un système à deux degrés de liberté

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial(\Phi_0+\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial l},\quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial L},$$
$$\frac{dG}{dt}=\frac{\partial(\Phi_0+\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial g},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial(\mu\Phi+\mu e' \mathrm{R})}{\partial G}. \qquad (9)$$

La constante γ_1 se réduira à k de sorte que les coordonnées seront définies cette fois par

$$\gamma_1=k,\ \mathrm{L}=k\sqrt{a},\ G=k\sqrt{a}\sqrt{1-e^2},\ l=n(t+\gamma),\ g=\pi. \qquad (10)$$

Enfin on écrira immédiatement les équations du mouvement pour le problème restreint, dans lequel la planète troublante décrit un cercle. On posera dans ce cas $\varepsilon=0$, $e'=0$, les coordonnées étant définies par les équations dernières.

On peut — on le sait bien — réduire le système général (1), (7), à trois degrés de liberté seulement, en profitant de l'intégrale des aires (11). La fonction perturbatrice ne dépendant de π et π' qu'en forme de différence $\pi-\pi'$ on aura $\frac{\partial F}{\partial g}+\frac{\partial F}{\partial g'}=0$ ce qui donne l'intégral $G_1+G'_1=c=\varepsilon G+\mu G'$ (11)

Pour passer en même temps à un système des éléments plus utile dans la pratique, envisageons le changement canonique suivant des variables

$$\begin{array}{lll} y_1=M+\pi-\pi' & x_1=L & L=x_1 \\ y_2=-\pi+\pi' & x_2=L-G & G=x_1-x_2 \\ y_3=+M' & x_3=L' & L'=x_3 \\ y_4=+\pi' & \mu x_4=\varepsilon G+\mu G' & G'=x_4-\frac{\varepsilon}{\mu}(x_1-x_2) \end{array} \qquad (12)$$

on trouvera ensuite facilement

$$\varepsilon G+\mu G'=c \quad \text{ou bien} \quad \mu x_4=c.$$

On pourra au moyen de cette intégrale eliminer x_4 c'est-à-dire l'excentricité de la planète troublante. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe 4 en traitant le problème général.

On peut alors en somme se borner aux trois degrés de liberté, c'est-à-dire aux variables suivantes:

$$\begin{array}{ll} x_1=L & y_1=M+\pi-\pi' \\ x_2=L-G & y_2=-\pi+\pi' \\ x_3=L' & y_3=M' \end{array} \qquad (13)$$

Il faut intercaler une remarque relative à notre dernière substitution canonique. Au moyen de nos signes dénotant les diverses fonctions, on trouvera sans peine

$$\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial F'}{\partial G'}=\frac{\partial F''}{\partial G'} \qquad \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial F'}{\partial G}=\frac{\partial F''}{\partial G}\ , \text{ etc.}$$

Ainsi on sera autorisé à écrire pour les deuxièmes membres de nos équations de mouvement (7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F'}{\partial x_1}&=\frac{\partial F'}{\partial L}+\frac{\partial F'}{\partial G}-\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial F'}{\partial G'}=\frac{\partial F'}{\partial L}+\frac{\partial F'}{\partial G}-\frac{\partial F''}{\partial G'}\\
\frac{\partial F'}{\partial x_2}&=-\frac{\partial F'}{\partial G}+\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial F'}{\partial G'}=-\frac{\partial F'}{\partial G}+\frac{\partial F''}{\partial G'}\ ,\\
\frac{\partial F''}{\partial x_3}&=\frac{\partial F''}{\partial L'}\ ,\\
\frac{\partial F''}{\partial x_4}&=\frac{\partial F''}{\partial G'}\\
\frac{\partial^2 F'}{\partial x_1{}^2}&=\frac{\partial^2 F'}{\partial L^2}+2\frac{\partial^2 F'}{\partial L\partial G}-2\frac{\partial^2 F''}{\partial L\partial G'}+\frac{\partial^2 F'}{\partial G^2}-2\frac{\partial^2 F''}{\partial G\partial G'}+\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial^2 F''}{\partial G'^2}
\end{aligned} \qquad (14)$$

etc.

Le facteur μ ne figure dans le dénominateur qu'en apparence. La fonction F'' renferme le facteur ε, et on peut toujours supposer — sans restreindre la généralité $\varepsilon<\mu$.

On pourra exprimer ainsi toutes les dérivées partielles d'un degré quelconque, ce qui nous permettra, pour abréger — d'employer des expressions plus simples $\frac{\partial F'}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F''}{\partial x_4}$ etc. — quoique la signification des deuxièmes membres soit plus compliquée en général.

Il vaut mieux — dans le cas général qui nous occupe — ne pas introduire le système des axes tournant avec une vitesse égale à n', comme je l'ai fait dans le Bul. astron.,*) où j'ai traité plus spécialement le problème astéroïdique (voir aussi les formules (33), (34) et seq.). Supposons maintenant $e'=\varepsilon=0$.

Notre système se réduira aux équations différentielles du problème restreint, ce seront ensuite les solutions de première sorte bien connues qui nous serviront de point de départ.

Dans le mémoire précité, je me suis servi de l'artifice suivant. J'envisage la transformation de ces solutions de première sorte avec des périhélies mobiles au moyen des opé-

*) l. c.

rations de Delaunay qui ne sont en somme qu'une suite continue des variations exactes des constantes arbitraires.

Sans donner tous les détails ce que nous ferons dans — un mémoire ultérieur — des ces opérations, mentionnons seulement les caractéristiques principales du résultat, c'est-à-dire l'effet d'une transformation particulière.

Faisant l'hypothèse d'une commensurabilité des mouvements moyens dans notre problème dégénéré $e' = \varepsilon = 0$, l'argument critique sera de la forme:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p+q}{p}, \quad \Theta = -pM + (p+q)\,M' - (p+q)\,(\pi - \pi') =$$
$$= -p\,y_1 + q\,y_2 + M'(p+q)$$

La structure de l'argument montre

$$p\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = q\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

c'est-à-dire l'existence d'une intégrale première

$$q\,x_1 + p\,x_2 = k\sqrt{a}\,(p+q-p\sqrt{1-e^2}) = \sigma$$

σ étant une constante arbitraire. Notons expressément qu'on sera autorisé de changer le facteur β, pour $\varepsilon = 0$, en k de sorte que L, G seront réduits simplement à $L = k\sqrt{a}$, $G = k\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}$. Ainsi on sera amené à intégrer, au moyen des séries périodiques, les deux équations suivantes:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{\sigma e}\frac{\sqrt{1-e^2}}{p}(p+q-p\sqrt{1-e^2})\,\mu\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -p\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} + (p+q)\,n' + p\frac{2\sqrt{a}}{k}\,\mu\frac{\partial \Phi}{\partial a} -$$
$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sigma e}(p+q-p\sqrt{1-e^2})^2\,\mu\frac{\partial \Phi}{\partial e}$$

qui seront en général de l'un de ces deux types

$$\frac{de}{dt} = (u_0 + u_2 e^2 + u_4 e^4 + \ldots)\,\mu\,\sin\,\Theta$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = v_0 + v_2 e^2 + v_4 e^4 + \ldots\,(\frac{u_0}{e} + w_1 e + w_3 e^3 + \ldots.)\,\mu\cos\,\Theta$$

ou bien

$$\frac{de}{dt} = (u_0 + u_2 e^2 + \ldots.)\,e\,\mu\,\sin\,\Theta$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = v_0 + v_2 e^2 + v_4 e^4 + \ldots. + (u_0 + w_2 e^2 + w_4 e^4 + \ldots)\,\mu\,\cos\,\Theta$$

Après avoir trouvé les séries périodiques satisfaisant à ces équations*) différentielles

$$\begin{aligned} e &= e_0 + e_1 \cos \tau + e_2 \cos 2\tau + \ldots, \quad e_k = e_k(a, e, a', n', \sigma) \\ \Theta &= \tau + \Theta_1 \sin \tau + \Theta_2 \sin 2\tau + \ldots, \quad \Theta_k = \Theta_k(a, e, a', n', \sigma) \end{aligned} \tag{D}$$

nous mettrons e dans notre intégrale première, ce qui donnera une série périodique pour

$$a = a_0 + a_1 \cos \tau + a_2 \cos 2\tau + \ldots, \quad a_k = a_k(a, e, a', n', \sigma)$$

en dénotant la partie non périodique a_0. Puis l'on substituera a_0 au lieu de σ dans les expressions de a_k, e_k, Θ_k c'est-à-dire a, e, Θ. Au moyen de ces séries nous formerons ensuite les séries

$$\begin{aligned} k\sqrt{a} &= L = L_0 + L_1 \cos \tau + L_2 \cos 2\tau + \\ k\sqrt{a}\sqrt{1-e^2} &= G = G_0 + G_1 \cos \tau + G_2 \cos 2\tau + \ldots. \end{aligned}$$

Les divers L_m, G_m ne seront que des fonctions des éléments non angulaires

$$L_m = L_m(a_0, e_0, a', n'), \qquad G_m = G_m(a_0, e_0, a', n')$$

Au moyen des dernières séries on formera les expressions suivantes

$$\overline{L} = L_0 + \frac{1}{2}(L_1 \Theta_1 + L_2 \Theta_2 + \ldots) = \overline{L}(a_0, e_0, a', n')$$

$$\overline{G} = G_0 + \frac{1}{2}(G_1 \Theta_1 + G_2 \Theta_2 + \ldots.) = \overline{G}(a_0, e_0, a', n')$$

qui seront les nouvelles variables canoniques de positions, coordonnées aux variables canoniques angulaires

$$\overline{l} = n(t+\gamma) + (l), \qquad \overline{g} = g_0(t+\gamma) + (g),$$

les dernières étant les premiers termes c'est-à-dire les parties non périodiques dans les développement de

$$\begin{aligned} l &= n(t+\gamma) + (l) + l_1 \sin \tau + l_2 \sin 2\tau + \\ g &= g_0(t+\gamma) + (g) + g_1 \sin \tau + g_2 \sin 2\tau + \ldots. \end{aligned} \tag{D}$$

expressions qu'on trouvera facilement en substituant les résultats gagnés pour Θ dans le deuxième membre des équations canoniques du mouvement qui nous servait de point de départ.

En mettant les séries trouvées dans la fonction perturbatrice qui pendant toutes nos opérations était supposée

*) Delaunay: Théorie du mouvement de la Lune. Tisserand Mécanique céleste tome III. p. 205 et seq.

raccourcie, c'est-à-dire limitée, réduite à un seul terme périodique et au terme non périodique, on se convaincra au moyen de l'existence de l'intégral de Jacobi, que la partie entière envisagée sera réduite, par suite de notre transformation particulière, à une simple fonction des variables de position (non angulaires)

$$\frac{k^2}{2a} + \vartheta\,(a_0, e_0, a', n') = \overline{\Phi}_0 + \mu\,\overline{\Phi}$$

Inutile de mentionner que l'ordre de toutes nos expressions envisagées telles que L_m, Θ_m, G_m par rapport à la masse troublante μ sera généralement de l'ordre μ^m.

Une transformation particulière que nous avons formée jusqu'ici change les éléments canoniques originaires en éléments canoniques nouveaux, de sorte que le système canonique s'écrira

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \overline{L}\,(a, e, a', n'), & y'_1 &= \overline{l} + \overline{g} - \pi' \\ x'_2 &= \overline{L}\,(a, e, a', n') - \overline{G}\,(a, e, a', n'), & y'_2 &= -\overline{g} + \pi' \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Notons que les fonctions $\overline{L}$, $\overline{G}$ contiendront le facteur k. Supprimons les accents devenus inutiles en écrivant x_1 y_1 etc.

En voulant garder la continuité du cas dégénéré c'est-à-dire du problème astéroïdique (9) avec celui du cas des équations complètes (7) pour le problème général de trois corps — nous devons après le changement des variables canoniques mettre celles-ci aussi dans les autres deux équations pour x_3 et y_3 (resp. x_4, y_4) voir § 4. Ajoutons qu'il faut bien distinguer les transformations de Delaunay proposées par Tisserand*) pour le problème général de trois corps en cas qu'on veuille former les séries à la Lindstedt-Newcomb.

Notre transformation diffère bien de la dernière étant donné qu'on doit conserver la constance absolue des éléments a', e' de l'ellipse fixe de la planète troublante. C'est pourquoi nous avons mis ces éléments constants entre des paranthèses comme des arguments, partout où ils figurent en réalité.

Étudions maintenant l'effet des plusieurs transformations semblables. On se sert — on le sait bien — de la répétition d'une opération particulière pour se débarasser de tous les termes incommodes, c'est-à-dire périodiques.

*) Méc. cél. tome IV p. 457 et seq.

On se rappelera seulement que les variables changeront plusieurs fois. On devra mettre les éléments définitifs dans les équations complètes, c'est ce qu'on fera avec avantage à la fin en remontant dans la chaine des développements des éléments définis et en n'employant que les séries finales.

Au premier abord reprenons seulement les deux équations premières du problème dégénéré (astéroïdique). Nous allons démontrer l'existence des solutions séculaires. Après avoir complètement exécuté toutes les transformations nécessaires pour faire disparaître les termes critiques et plus généralement périodiques de la fonction perturbatrice, relative au problème restreint, nous sommes amenés aux équations canoniques de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu e' \frac{\partial \overline{R}}{\partial y_1} \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{k^4}{x_1^3} - \mu \frac{\partial \overline{\Phi}(a,e,a',n')}{\partial x_1} - \mu e' \frac{\partial \overline{R}}{\partial x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mu e' \frac{\partial \overline{R}}{\partial y_2} \qquad \frac{dy_2}{dt} = \quad - \mu \frac{\partial \overline{\Phi}(a,e,a',n')}{\partial x_2} - \mu e' \frac{\partial \overline{R}}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{L} = \overline{L}(a,e,a',n'), \qquad y_1 = \overline{l} + \overline{g} - \pi' \\ x_2 &= \overline{L} - \overline{G} = \overline{L}(a,e,a',n') - \overline{G}(a,e,a',n'), \; y_2 = -\overline{g} + \pi' \end{aligned} \tag{17}$$

Les fonctions $\overline{L}$, $\overline{G}$ seront toujours divisibles par le facteur k.*)

Nous tenons à remarquer expressément que nos éléments a, e, n, dont nous allons étudier les changements dans ce qui suit, ne coïncident nullement avec les anciennes lettres, (nous avons supprimé les accents) — les nouveaux éléments sont ceux appartenant à la dernière transformation (D) exécutée. Rappelons que la première étape du calcul donna — en prenant un des éléments non-angulaires quelconque

$$a = a_0 + A_1(a_0, e_0)\cos\tau + A_2(a_0, e_0)\cos 2\tau + \ldots.$$

la deuxième étape étudiait les changements périodiques de a_0, e_0:

$$a_0 = \overline{a}_0 + B_1(\overline{a}_0, \overline{e}_0)\cos\tau_1 + B_2(\overline{a}_0, \overline{e}_0)\cos 2\tau_1 +$$

Nos lettres non accentuées sont les constantes de la dernière étape, c'est pourquoi elles sont liées aux éléments L, G (plus exactement $\overline{\overline{L}}, \overline{\overline{G}}$) autrement que les éléments originaires pour lesquels nous avons posé

*) voir la page 16.

$$L = k\sqrt{a}, G = k\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}$$

La forme transformée de nos fonctions perturbatrices est mise en évidence par un trait au-dessus de la lettre correspondante, telle que $\bar{\Phi}(a, e, a', n')$, ou $\bar{R}$.

Supposons maintenant qu'on fasse dans nos équations du mouvement $e' = 0$. Dans ce cas on pourra facilement intégrer par de simples quadratures.

On trouvera de cette manière

$$x_1 = x_1^0 \ , \ x_2 = x_2^0 \ , \ y_1 = (n+h)\ t + y_1^0 \ , \ y_2 = -ft + y_2^0$$
$$y_1^0 = \pi - \pi' + M_0 \ , \quad y_2^0 = -\pi + \pi'$$
$$h = -\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad f = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \tag{18}$$

en dénotant resp. par h, f la perturbation du mouvement moyen dans la longitude $\lambda = M + \pi$, et la rotation séculaire (diurne) de la ligne des apsides, nous écrivons en même temps pour plus de clarté

$$g_0\gamma + (g) = \pi \ , n\gamma + (l) = M_0 \ , \lambda = M + \pi = n_1 t + M_0 + \pi \tag{18'}$$

Puis supposons que e' cesse d'être zéro et imaginons que dans une certaine solution les valeurs initiales des éléments soient

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \alpha_1 \quad y_1 = y_1^0 + \beta_1 \\ x_2 &= x_2^0 + \alpha_2 \ , \ y_2 = y_2^0 + \beta_2 \end{aligned} \tag{19}$$

les constantes α_i, β_i disparaissant avec l'excentricité de l'ellipse fixe de la planète troublante.

Supposons en outre que dans cette même solution les valeurs des éléments pour la fin de la période séculaire totale ou sidérale $t = T$ soient

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \alpha_1 + \varphi_1 \ , \ y_1 = y_1^0 + (n+h)\ T + \beta_1 + \psi_1 \\ x_2 &= x_2^0 + \alpha_2 + \varphi_2 \ , \ y_2 = y_2^0 - fT + \beta_2 + \psi_2 \end{aligned} \tag{19'}$$

Les déviations finales étant données par les équations différentielles (nous supprimons les traits, devenus inutiles)

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \mu e' \frac{\partial R}{\partial y_1} \quad n + h + \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{k^4}{x_1^3} - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \mu e' \frac{\partial R}{\partial x_1}$$
$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \mu e' \frac{\partial R}{\partial y_2} \ , \ -f + \frac{d\psi_2}{dt} = -\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \mu e' \frac{\partial R}{\partial x_2} \quad \Phi_0 = \frac{k^4}{2x_1^2},$$

on trouvera facilement par l'inversion

$$\psi_1 = -\alpha_1 \int_0^T dt \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \mu\Phi)}{\partial x_1^2} -$$

$$-\alpha_2 \int_0^T dt \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \mu\Phi)}{\partial x_1 \partial x_2} - \quad -e'\mu \int_0^T \frac{\partial R}{\partial x_1} dt \ ,$$

$$\psi_2 = -\alpha_1 \int_0^T dt \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \mu\Phi)}{\partial x_1 \partial x_2} -$$

$$-\alpha_2 \int_0^T dt \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \mu\Phi)}{\partial x_2^2} - \quad -e'\mu \int_0^T \frac{\partial R}{\partial x_2} dt$$

$$\varphi_1 = \alpha_1 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial y_1} + \alpha_2 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial x_2 \partial y_1} +$$

$$+\beta_1 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial y_1^2} + \beta_2 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial y_1 \partial y_2} + \quad +\mu e' \int_0^T \frac{\partial R}{\partial y_1} dt \ ,$$

$$\varphi_2 = \alpha_1 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial y_2} + \alpha_2 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial x_2 \partial y_2} +$$

$$+\beta_1 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial y_1 \partial y_2} + \beta_2 \mu e' \int_0^T dt \frac{\partial^2 R}{\partial y_2^2} + \quad +\mu e' \int_0^T \frac{\partial R}{\partial y_2} dt \ ,$$

Il s'agit de trouver une solution simple pourles quatre inconnues α_i, β_i en fonction de e'.

Inutile de mentionner que dans tous les arguments des termes trigonométriques les valeurs des mouvements moyens seront augmentées des rotations séculaires f, g trouvées ci-dessus.

Pour mieux faire comprendre ce qui suit, donnons ici la forme explicite de la partie critique de la fonction perturbatrice, non transformée, telle qu'elle a été calculée par Le Verrier

$$a'\frac{\Phi_1 + Re'}{k^2} = \tag{20}$$

$$= A_{00} + A_{20}^{00} e^2 + A_{40}^{00} e^4 + A_{02}^{00} e'^2 + A_{22}^{00} e^2 e'^2 + A_{04}^{00} e'^4 +$$

$$+ (A_{10}^{10} e + A_{30}^{10} e^3 + A_{12}^{10} e e'^2) \cos\zeta + (A_{20}^{20} e^2 + A_{22}^{20} e^2 e'^2 + A_{40}^{20} e^4) \times$$

$$\times \cos 2\zeta + A_{30}^{30} e^3 \cos 3\zeta + A_{40}^{40} e^4 \cos 4\zeta +$$

$$+ (A_{01}^{01} e' + A_{03}^{01} e'^3 + A_{21}^{01} e^2 e') \cos\zeta' +$$

$$+ (A_{02}^{02} e'^2 + A_{22}^{02} e^2 e'^2 + A_{04}^{02} e'^4) \cos 2\zeta' + A_{03}^{03} e'^3 \cos 3\zeta' +$$

$$+ A_{04}^{04} e'^4 \cos 4\zeta' + (A_{11}^{11} e e' + A_{13}^{11} e e'^3 + A_{31}^{11} e^3 e') \cos(\zeta + \zeta') +$$

$$+ A_{22}^{22} e^2 e'^2 \cos(2\zeta + 2\zeta') + (A_{11}^{-1+1} e e' + A_{13}^{-1+1} e e'^3 + A_{31}^{-1+1} e^3 e') \times$$

$$\times \cos(\zeta' - \zeta) + A_{22}^{-2+2} e^2 e'^2 \cos(2\zeta' - 2\zeta) + (A_{12}^{12} e e'^2 \cos(2\zeta' + \zeta) +$$

$$+ A_{12}^{-1+2} e e'^2 \cos(2\zeta' - \zeta) + A_{21}^{+2+1} e^2 e' \cos(\zeta' + 2\zeta) + A_{21}^{-2+1} e^2 e' \times$$

$$\times \cos(\zeta' - 2\zeta) + e e'^3 A_{13}^{13} \cos(3\zeta' + \zeta) + A_{13}^{-1+3} e e'^3 \cos(3\zeta' - \zeta) +$$

$$+ e^3 e' A_{31}^{31} \cos(\zeta' + 3\zeta) + A_{31}^{-3+1} e^3 e' \cos(\zeta' - 3\zeta)$$

Il faut poser pour le cas d' Hécube $\frac{p+1}{p}$ dans le développement dernier

$$\zeta = (p+1)\lambda' - p\lambda - \pi = (p+1) M' - p M + (p+1)(\pi' - \pi)$$
$$\zeta' = (p+1)\lambda' - p\lambda - \pi' = (p+1) M' - p M + p(\pi' - \pi)$$

Pour le cas d' Hestia $\frac{p+2}{p}$ on pose

$$2\zeta = (p+2)\lambda' - p\lambda - 2\pi = (p+2) M' - p M' + (p+2)(\pi' - \pi)$$
$$2\zeta' = (p+2)\lambda' - p\lambda - 2\pi' = (p+2) M' - p M + p(\pi' - \pi)$$

Mais le développement ne contient alors que des termes du degré pair.

Nons allons maintenant spécialiser pour le cas d' Hécube $\frac{p+1}{p}$ en exprimant les arguments critiques en longueurs moyennes de deux planètes:

Il sera

$$a'\frac{\Phi_1+Re'}{k^2}= \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{00}+A^{00}_{20}e^2+A^{00}_{40}e^4+A^{00}_{02}e'^2+A^{00}_{22}e^2e'^2+A^{00}_{04}e'^4+\\
&+\{A^{10}_{10}e+A^{10}_{30}e^3+A^{10}_{12}ee'^2\}\cos[(p+1)\lambda'-p\lambda-\pi]+\\
&+(A^{20}_{20}e^2+A^{20}_{40}e^4+A^{20}_{22}e^2e'^2)\times\\
&\times\cos[2(p+1)\lambda'-2p\lambda-2\pi]+A^{30}_{30}e^3\cos[3(p+1)\lambda'-3p\lambda-3\pi]+\\
&+A^{40}_{40}e^4\cos[4(p+1)\lambda'-4p\lambda-4\pi]+\\
&+(A^{01}_{01}e'+A^{01}_{03}e'^3+A^{01}_{21}e^2e')\times\\
&\times\cos[(p+1)\lambda'-p\lambda-\pi']+(A^{02}_{02}e'^2+A^{02}_{04}e'^4+A^{02}_{22}e^2e'^2)\times\\
&\times\cos[2(p+1)\lambda'-2p\lambda-2\pi']+\\
&+A^{03}_{03}e'^3\cos[3(p+1)\lambda'-3p\lambda-3\pi']+\\
&A^{04}_{04}e'^4\cos[4(p+1)\lambda'-4p\lambda-4\pi']+\\
&+(A^{11}_{11}ee'+A^{11}_{13}ee'^3+A^{11}_{31}e^3e')\times\\
&\times\cos[2(p+1)\lambda'-2p\lambda-\pi-\pi']+A^{22}_{22}e^2e'^2\times\\
&\times\cos[4(p+1)\lambda'-4p\lambda-2\pi-2\pi']+\\
&+(A^{-1+1}_{11}ee'+A^{-1+1}_{13}ee'^3+A^{-1+1}_{31}e^3e')\times\\
&\times\cos(\pi-\pi')+A^{-2+2}_{22}e^2e'^2\cos 2(\pi-\pi')+\\
&+A^{12}_{12}ee'^2\cos[3(p+1)\lambda'-3p\lambda-2\pi'-\pi]+\\
&+A^{-1+2}_{12}ee'^2\cos[(p+1)\lambda'-p\lambda+\pi-2\pi']+\\
&+A^{21}_{21}e^2e'\cos[3(p+1)\lambda'-3p\lambda-2\pi-\pi']+\\
&+A^{-2+1}_{21}e^2e'\cos[(p+1)\lambda'-p\lambda-2\pi+\pi']+\\
&+A^{13}_{13}ee'^3\cos[(4(p+1)\lambda'-4p\lambda-\pi-3\pi']+\\
&+A^{-1+3}_{13}ee'^3\cos[2(p+1)\lambda'-2p\lambda-3\pi'+\pi]+\\
&+A^{31}_{31}e^3e'\cos[4(p+1)\lambda'-4p\lambda-3\pi-\pi']+\\
&+A^{-3+1}_{31}e^3e'\cos[2(p+1)\lambda'-2p\lambda+\pi'-3\pi]
\end{aligned}$$

Donnons maintenant la spécialisation de notre développement général des termes critiques pour le cas d'Hestia $\frac{p+2}{p}$. On trouve:

$$a'\frac{\Phi_1+Re'}{k^2}= \tag{22}$$

$$=A_{00}+A_{20}^{00}e^2+A_{40}^{00}e^4+\ldots+A_{02}^{00}e'^2+A_{22}^{00}e^2e'^2+A_{04}^{00}e'^4+$$
$$+(A_{20}^{20}e^2+A_{40}^{21}e^4+A_{22}^{20}e^2e'^2)\cos[(p+2)\lambda'-p\lambda-2\pi]+$$
$$+A_{40}^{40}e^4\cos[2(p+2)\lambda'-2p\lambda-4\pi]+$$
$$+(A_{02}^{02}e'^2+A_{04}^{02}e'^4+A_{22}^{02}e^2e'^2)\cos[(p+2)\lambda'-p\lambda-2\pi']+$$
$$+A_{04}^{04}e'^4\cos[2(p+2)\lambda'-2p\lambda-4\pi']+$$
$$+(A_{11}^{11}ee'+A_{13}^{11}ee'^3+A_{31}^{11}e^3e')\cos[(p+2)\lambda'-p\lambda-\pi-\pi']+$$
$$+A_{22}^{22}e^2e'^2\cos[2(p+2)\lambda'-2p\lambda-2\pi-2\pi']+$$
$$+(A_{11}^{-1+1}ee'+A_{13}^{-1+1}ee'^3+A_{31}^{-1+1}e^3e')\cos(\pi-\pi')+$$
$$+A_{22}^{-2+2}e^2e'^2\cos 2(\pi-\pi')+$$
$$+A_{13}^{13}ee'^3\cos[2(p+2)\lambda'-2p\lambda-\pi-3\pi']+$$
$$+A_{13}^{-1+3}ee'^3\cos[(p+2)\lambda'-p\lambda+\pi-3\pi']+$$
$$+A_{31}^{-3+1}e^3e'\cos[-(p+2)\lambda'+p\lambda+3\pi-\pi']$$
$$+A_{31}^{31}e^3e'\cos[2(p+2)\lambda'-2p\lambda-3\pi-\pi']$$

Avant d'aller plus loin il faut étudier en détail le caractère des termes critiques contenues dans la fonction perturbatrice transformée $\bar{R}$. Les termes critiques renfermés dans cette fonction et constituant la soi-disante valeur moyenne de celle-ci, seront formés au moyen de rotations angulaires diurnes trouvées pour le cas $e'=0$,

$$y_1=(n+h)\,t+M_0+\pi-\pi' \qquad y_2=-f\,t-\pi+\pi'$$

S'il s'agit par exemple de la commensurabilité du type $\frac{p+q}{p}$ l'argument critique ζ de $\bar{R}$ sera de la forme suivante $q=1,2$

$$\Theta=\frac{\zeta}{2\zeta}=-py_1+qy_2+M'(p+q)=(p+q)\,n't-pnt-$$
$$-pht-qft+(p+q)\,M'_0-p\,M_0-(p+q)\,(\pi-\pi'),$$
$$m\,\Theta=\frac{m\zeta}{2\,m\zeta}=k_1\lambda+k_2\lambda'+k_3\pi+k_1ht+k_3ft \tag{23}$$
$$k_1=-mp\ ,\ k_2=m(p+q) \quad k_3=-mq\ ,\ M'=M'_0+n't\ ,$$
$$\lambda=M+\pi \quad \lambda'=\mathrm{M}'+\pi'.$$

Ainsi on voit que la période de ces arguments est précisément celle du mouvement périodique sidéral, appartenant

au problème astéroïdique ($e' \gtrless 0$). C'est pourquoi nous avons été obligés de chercher la durée totale de celle-ci, sa valeur figurant ainsi dans les calculs analytiques.

En général il y aura des arguments à longue période de quatre catégories:

1°) Les multiples de $\left.\begin{matrix}\zeta\\ 2\zeta\end{matrix}\right\} = (p+q)\,\lambda' - p\lambda - q\pi - pht - qft$
$= (p+q)\,n't - pnt - pht - qft -$
$- pM_0 + (p+q)\,M'_0 - (p+q)\,(\pi - \pi')$.

Rappelons que les arguments de cette catégorie figurent seulement dans la partie de la fonction caractéristique nouvelle, qui contient e', l'excentricité de l'orbite de la planète troublante. Par contre, la partie restante est entièrement indépendante de cet argument, étant transformée par l'effet de nos opérations faites jusqu'ici, en une fonction des variables a, e, nouvelles.

La condition principale de l'existence des solutions périodiques de la première sorte était une liaison de la forme

$$-\frac{d\zeta}{dt} = p\,(n+h) - (p+q)\,n' \pm qf = 0^*) \qquad (24)$$

Ainsi les arguments de la première catégorie donnant des multiples de $\begin{matrix}\zeta\\ 2\zeta\end{matrix}$ seront des constantes, d'ailleurs entièrement indépendantes du temps.

Il y aura aussi des arguments d'une deuxième catégorie, ce seront 2°) les multiples de

$$\left.\begin{matrix}\zeta'\\ 2\zeta'\end{matrix}\right\} = (p+g)\,\lambda' - p\lambda - q\pi' - pht = (p+q)\,n't - pnt - pht +$$
$$+ p\pi' - p\pi + (p+q)\,M_0' - pM_0. \qquad (25)$$

Ces derniers termes contiennent généralement le temps explicite, notre condition nécessaire des solutions de la première sorte n'annulant pas cette fois le coëfficient du temps.

Il y aura des arguments d'une troisième catégorie de la forme 3°) des multiples de $h_1\zeta + h_2\zeta'$, h_1, h_2 désignant des nombres entiers positifs ou négatifs.

4°) Il y aura enfin des termes d'une quatrième catégorie:

*) la lettre h est ici de la même signification que g dans le Bul. astron. l. c.

Pour démontrer l'existence de cette nouvelle catégorie des termes critiques envisageons le problème suivant:

Il s'agit d'annuler l'accroissement de l'argument composé des quatre quantités angulaires de la forme $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 + m_4 n_4 = 0$, où n_k désignent les nouvements moyens. La question principale est de déterminer tous les nombres entiers positifs ou négatifs m_k, qui satisfont à cette relation. Dans notre cas on aura $n_1 = n + h_1$, $n_2 = n'$, $n_3 = f$, $n_4 = \frac{d\pi'}{dt} = 0$

dénotons les longitudes moyennes $\lambda = M + \pi$, $\lambda' = M' + \pi'$ ensuite il s'agira de l'argument $m_1\lambda + m_2\lambda' + m_3\pi + m_4\pi' = m_1 M + m_2 M' + (m_1 + m_3)\pi + (m_2 + m_4)\pi'$ ou de l'accroissement $m_1 n_1 + m_2 n' + m_3 f = 0$. (26)

Rappelons qu'une qualité connue de la fonction perturbatrice sera toujours remplie. Il faut que la dite fonction ne dépende que de la différence angulaire $\pi - \pi'$, si l'on met, bien entendu, en évidence les anomalies moyennes. Or une proposition relative à notre développement exige

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0 \tag{27}$$

ce qui montre $m_1 + m_2 = -(m_3 + m_4)$ c. q. f. d.

Rappelons enfin que la valeur absolue du nombre $\begin{cases} |m_3| \\ |m_4| \end{cases}$ indique le plus petit degré en $\begin{cases} e \\ e' \end{cases}$

Reprenons maintenant l'étude de notre question ci-dessus. On aura à satisfaire deux relations susmentionnées (26), (27)

$$m_1 n_1 + m_2 n' + m_3 f = 0 \tag{26}$$

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$, $|m_4|$, désigne le degré en e' (27)

Mais les mouvements moyens eux-mêmes sont liés par la condition des solutions de la première sorte.

$$p n_1 - (p+q) n' \pm q f = 0.$$

Nous avons ainsi deux équations diophantiques pour trois inconnues entières, positives ou négatives. En réduisant nous trouverons facilement l'équation unique pour deux inconnues

$$m_1 (p+q)(\bar{l} \mp s) + m_2 p (\bar{l} \mp s) = \mp m_4 ps \tag{28}$$

m_4 est fixé par le degré du terme en excentricité e', les nombres $\bar{l}$, s sont introduits au moyen des relations fondamentales, relatives aux solutions séculaires (p. 5.).

Les signes négatifs (positifs) appartiennent au sens direct (rétrograde) de la rotation séculaire de la ligne des apsides.

Cette équation n'aura pas en général des solutions données par des nombres entiers, vu que les coëfficients des inconnues sont commensurables, ayant le diviseur commun $(\bar{l} \mp s)$. Cependant l'existence des termes critiques autres que ceux des nos trois premières catégories sera prouvée dans des cas particuliers qui concernent surtout les solutions longuévales.

Il pourra arriver par exemple

$$\bar{l} \mp s = 1 \quad \bar{l} \mp s = m_4 ps \text{ etc.}$$

En effet s donne le nombre des révolutions du périhélie pendant une période, pour la première classe, il sera $s=1$ pour la deuxième $s=$ nombre entier petit. Par contre en cas des solutions séculaires véritables, $\bar{l}$ sera un nombre considérable (A conférer les tables, Bull. astron.)

On examinera par la même méthode les termes originairement non critiques, qui cependant, par la transformation, ajoutant tous les angles par des multiples, — pourraient devenir critiques, c'est-à-dire de la quatrième catégorie.

La condition s'écrit cette fois $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 \pm$
$$\pm h_3 p n_1 \mp (p+q)\, h_3 n_2 \pm h_3 q n_3 = 0, \qquad (26')$$

h_3 entier. La réduction exécutée, on retombera au cas précédent.

Donnons comme exemple de cette quatrième catégorie des termes une orbite longuévale du type Hécube $\zeta = \pi$

$$p n_1 - (p+q)\, n' \pm q f = 1.450 - 2.300 + 1.150 = 0 \qquad (24)$$

Ici on aura $p=1$, $q=1$, $s=1$, $l=2$, f positif

Cherchons les termes du degré e', nous aurons

$$2 m_1 + m_2 = m_4 = 1$$

ce qui donne les systèmes

$$\begin{array}{llllllllll}
m_1 = & +1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & +2 & +3 & +4 & +5 \\
m_2 = & -1 & +1 & +3 & +5 & +7 & +9 & -3 & -5 & -7 & -9 \\
m_3 = & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & 0 & +1 & +2 & +3
\end{array}$$

tous les arguments jouissant de cette composition et tous leurs multiples seront devenus critiques.

Dans ce qui suit, il faudra rechercher les conditions sous lesquelles les valeurs moyennes des dérivées de la fonction R, telles que $\frac{\partial R}{\partial y_1}, \frac{\partial R}{\partial y_2}$ disparaissent. Calculons à cet effet la valeur moyenne de ces fonctions, il faudra intégrer les termes trigonométriques particuliers et substituer après les limites, 0, T (période totale) de l'intégration.

Examinons, à ce point de vue, nos diverses catégories des termes critiques. Premièrement les termes trigonométriques ordinaires (non critiques) donneront — on le sait bien — zéro pour le résultat. Leurs arguments dépendent du temps, les termes intégrés dépendront encore du temps et auront la même valeur pour les deux limites, c'est-à-dire se détruiront mutuellement.

Le même cas aura lieu avec les termes des catégories deuxième et troisième.

La deuxième catégorie renferme les termes avec des arguments où le coëfficient du temps ne s'annule pas pendant la durée de la période totale, c'est-à-dire les multiples de

$$\left.\begin{matrix}\zeta \\ 2\zeta'\end{matrix}\right\} = (p+q)\,n't - p n_1 t + p\,(\pi' - \pi) + (p+q)\,M'_0 - p\,M_0 =$$

$$= q f t + p(\pi' - \pi) + (p+q)\,M'_0 - p\,M_0 \qquad (25)$$

Ainsi les résultats de l'intégration pour les deux limites se détruiront.

En ce qui concerne les termes de catégorie troisième, on voit qu'à ce point de vue chaque argument de cette espèce se réduit nécessairement à celui de la catégorie deuxième, dépendante du temps et donnant par suite la valeur moyenne zéro.

Par contre, les catégories première et quatrième donneront un résultat différent de zéro.

Pour la catégorie première, d'après la condition fondamentale des solutions de la première sorte, il faut que toujours

$$(p+q)\,n' - p\,n - p\,h \mp q f = 0 \qquad (24)$$

donc $\int_0^T dt \cos m\,[(p+q)\,M'_0 - p\,M_0 - (p+q)\,(\pi - \pi')] =$

$$= T \cos m\,[(p+q)\,M'_0 - p\,M_0 - (p+q)\,(\pi - \pi')]$$

et nous trouvons comme résultat final de la quadrature une quantité différente de zéro en général.

On voit la même chose pour les termes de la catégorie quatrième, d'après sa définition donnée plus haut.

Ainsi nous avons démontré en somme qu'à la valeur moyenne de la fonction R et des ces dérivées ne contribuent que les termes des catégories première et quatrième, les derniers existant seulement dans des cas spéciaux des solutions longuévales, en négligeant, bien entendu, les termes d'un degré très élevé. Les catégories deuxième et quatrième ne donnent pas des termes critiques dans la vrai acception du mot. Il reste encore un point à éclairer. Nous avons groupé les termes de la fonction perturbatrice en quatre catégories en jugeant seulement d'après la forme non transformée, calculée par Le Verrier, donnée ci-dessus. Il faut alors faire voir qu'une simplification pareille est justifiée.

En effet appelons un argument quelconque de la dite fonction non transformée généralement Θ, n'oubliant pas que dans le cas des termes critiques cet argument se reduira à $\Theta = \zeta$. La transformation envisagée ne consiste qu'en une substitution des séries finales tellles que (D) pag. 19.

$$\Theta = \tau + \Theta_1 \sin \tau + \Theta_2 \sin 2\tau + \ldots$$
$$l = n(\tau + \gamma) + (l) + l_1 \sin \tau + l_2 \sin 2\tau + \ldots$$
$$g = g_0(\tau + \gamma) + (g) + g_1 \sin \tau + g_2 \sin 2\tau + \ldots$$

En développant et passant aux multiples des arguments, on ne verra apparaître que des termes $\zeta \pm m\Theta$.

Mais ces derniers termes ne seront, — on le sait bien, — que du plus haut degré par rapport à la masse μ. Les principaux termes critiques, c'est-à-dire les premiers termes de chaque développement particulier à la Taylor, — resteront les mêmes, bien que les éléments qui y figurent aient la signification des éléments séculaires canoniques de Delaunay.

Reprenons maintenant l'étude de nos équations servant à déterminer les déplacements initiaux qu'on doit fixer de sorte que les déviations finales disparaissent. Il faut donc que

$$\psi_1(T) = \psi_2(T) = \varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0$$

Écrivons les deux équations premières

$$\frac{\partial^2(\Phi_0+\mu\Phi)}{\partial x_1^{\,2}}\alpha_1+\frac{\partial^2(\Phi_0+\mu\Phi)}{\partial x_1\,\partial x_2}\alpha_2+\ldots+\frac{e'\mu}{T}\int_o^T\frac{\partial R}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial^2(\Phi_0+\mu\Phi)}{\partial x_1\,\partial x_2}\alpha_1+\frac{\partial^2(\Phi_0+\mu\Phi)}{\partial x_2^{\,2}}\alpha_2+\ldots+\frac{e'\mu}{T}\int_o^T\frac{\partial R}{\partial x_2}=0$$

On voit tout de suite que le Hessien

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial(\Phi_0+\mu\Phi)}{\partial x_1},\frac{\partial(\Phi_0+\mu\Phi)}{\partial x_2}\right)}{\partial(x_1,x_2)}\leqq 0$$

ne sera pas nul en général.

Passons maintenant à la discussion des équations $\varphi_1=\varphi_2=0$. En mettant ici les valeurs du degré premier déterminées ci-dessus, on peut écrire

$$\frac{\varphi_1}{\mu e'}=\beta_1\int_o^T\frac{\partial^2 R}{\partial y_1^{\,2}}dt+\beta_2\int_o^T\frac{\partial^2 R}{\partial y_1\,\partial y_2}\,dt+\ldots.+\int_o^T\frac{\partial R}{\partial y_1}\,dt=0$$

$$\frac{\varphi_2}{\mu e'}=\beta_1\int_o^T\frac{\partial^2 R}{\partial y_1\,\partial y_2}dt+\beta_2\int_o^T\frac{\partial^2 R}{\partial y_2^{\,2}}\,dt+\ldots.+\int_o^T\frac{\partial R}{\partial y_2}\,dt=0$$

Nous avons mis en évidence que les deux équations contiennent $\mu e'$ comme facteur. Ensuite deux cas pourront se présenter:

1°) La partie critique de la fonction R n'est composée que des termes des trois catégories premières, la quatrième ne figurant pas que dans les termes, d'un ordre plus élevé, alors il s'agit des solutions séculaires en général.

Cherchons dans ce cas les termes critiques du plus bas degré en e' (et μ). Nous en trouverons (20) par exemple pour le cas $\frac{p+1}{p}$ les termes critiques principaux que voici:

$$A_{12}^{10}e\,e'^2\cos\zeta,\quad A_{22}^{20}e^2e'^2\cos 2\zeta,$$

D'après ce qui a été dit sur la valeur moyenne de la fonction R, il suffira de se borner aux termes de la catégorie première. Ainsi dans ce cas nos équations contiendront même e'^2 comme facteur. Nous écrirons par conséquent

$$\frac{\varphi_1}{e'^2}=\frac{\varphi_2}{e'^2}=0.$$

Pour que la solution périodique considérée représente une continuation analytique de la solution originaire, il faudra que les déplacements β_1, β_2 s'annulent avec e'. Cependant dans nos équations figurent des termes indépendants de e'. Il faut par conséquent que

$$\int_0^T \frac{\partial R_2}{\partial y_1} dt = \int_0^T \frac{\partial R_2}{\partial y_2} dt = 0.$$

On peut mettre ces deux conditions sous une forme plus convenable:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial R_2}{\partial y_1} dt = \frac{\partial [R_2]}{\partial y_1} = \frac{\partial [R_2]}{\partial y_2} = 0 \qquad (29)$$

ce qui constitue, disons le d'avance — deux conditions analogues à celles des solutions périodiques de la première sorte qui mènent aux configurations principales de la conjonction et de l'opposition symétriques et aux conditions bien connues des solutions générales.

On se convaincra facilement que pratiquement il existe une liaison entre les valeurs séculaires moyennes. En effet on voit immédiatement d'après la structure des arguments critiques que

$$q\varphi_1 + p\varphi_2 = q\frac{\partial [R_2]}{\partial y_1} + p\frac{\partial [R_2]}{\partial y_2} = 0.$$

En même temps le déterminant fonctionnel disparaît

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial [R_2]}{\partial y_1}, \frac{\partial [R_2]}{\partial y_2}\right)}{\partial (y_1, y_2)} = 0$$

Et cependant l'intégrale de Jacobi n'existe pas (voir § 3).

Donc il semblerait que nos équations n'ont pas de solution simple, que les solutions séculaires n'existent pas. Et en effet elles n'existent pas en général — on devra ajouter une condition, concernant les termes d'un ordre plus élevé, et qui remplacera l'une de nos conditions (29), afin que les solutions existent.

Pour la trouver formons de nos équations la combinaison $\varphi_1 q + \varphi_2 p = 0$ qui pourra remplacer par exemple $\varphi_2 = 0$. Mais dans la nouvelle relation les termes aux arguments de la première catégorie se détruisent, les termes du plus bas dégré en e' seront cette fois $e'^n R_n$ la partie R_n contenant déjà les termes de la quatrième catégorie. On retrouvera les solutions symétriques etc. Nous aurons ainsi au lieu de (29) les deux conditions

$$\frac{\partial [R_2]}{\partial y_1} = \frac{\partial [R_n]}{\partial y_2} = 0 . \tag{30}$$

En même temps le déterminant fonctionnel des équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 q + \varphi_2 p = 0 \tag{31}$$

sera distinct de zéro, les solutions existent donc bien.

Dans la pratique il ne faudra pas du tout chercher la deuxième liaison, relative aux termes d'un ordre plus élevé, parce que les corrections ou déplacements cherchés seront devenus eux mêmes très petits avec l'ordre des termes. Pour abréger — on pourra s'exprimer — comme je l'ai fait dans le Bul. astron. l. c. p. 430 »Le hessien de deux dernières équations disparaît, elles ne sont donc pas distinctes«.

2°) Dans la fonction R figurent les termes de toutes les quatre catégories. On pourra répéter la même analyse, seulement il y aura, cette fois resp. aussi des termes du premier degré en e', de sorte que les deux conditions s'écriront

$$\frac{\partial [R_1]}{\partial y_1} = \frac{\partial [R_1]}{\partial y_2} = 0 \tag{32}$$

Écrivons donc pour les analyser les deux conditions principales de l'existence des solutions séculaires que nous venons de trouver ad 1°) 2°)

$$\frac{\partial [R]}{\partial y_1} = \frac{\partial [R]}{\partial y_2} = 0 \qquad (29), \ (30)$$

ou R se réduira à R_2, R_n ou bien à R_1 corformément à la structure des termes critiques qui y figurent. On pourra satisfaire à ces deux conditions de deux manières distinctes

1) Supposons qu'il s'agisse de solutions symétriques du problème restreint, servant de point de départ.

Dans ce cas on aura en admettant l'hypothèse $e'=0$

$$\hat{\zeta}=0$$

Les trois corps se trouveront au commencement du mouvement sur la ligne des apsides commune.

En admettant maintenant $e'\gtrless 0$ on pourra satisfaire aux deux conditions (29), (30) écrites plus haut en posant encore $\zeta=0$. En effet, nous ferons voir plus tard que l'argument ζ se réduira précisément à sa valeur non troublée

$$(\mu=\varepsilon=e'=0)$$

Les conditions de l'existence consistent en séries trigonométriques procédant suivant les multiples des sinus — ainsi tous les termes particuliers disparaîtront à la fois et l'équation sera satisfaite d'une manière pour ainsi dire dégénérative.

2) Prenons maintenant les solutions générales.

Dans ce cas on aura en admettant l'hypothèse $e'=0$

$$\hat{\zeta}\gtrless 0 \qquad \hat{e}\gtrless 0$$

Les trois corps ne seront plus au commencement du mouvement sur la ligne des apsides commune.

En faisant maintenant $e'\gtrless 0$ on satisfaira à nos deux équations de condition par: $\zeta\gtrless\hat{\zeta}\gtrless 0 \quad e\gtrless\hat{e}\gtrless 0$ (29)

Ici encore on constatera l'existence des solutions séculaires.

Il reste cependant un point bien délicat à éclairer, il faut démontrer qu'il n'y a pas de désaccord entre les conditions trouvées plus haut (29), (30) et celles (37) qui fixent déjà l'existence des solutions du problème restreint ($e'=0$) servant de point de départ. Il faudra expliquer quelques principes qui nous seront utiles par la suite. Reprenons à cet effet les équations du problème restreint (9) $e'=0$. Introduisons pour un moment le système des axes tournants uniformément avec la planète troublante, décrivant cette fois un cercle. Nous aurons (voir Bul. astron. l. c.) pour les variables canoniques (10)

$$\begin{aligned} x_1 &= k\sqrt{\hat{a}}\ ,\ y_1 = \hat{M} + \pi - M' - \pi' \\ x_2 &= k\sqrt{\hat{a}}\,(1-\sqrt{1-\hat{e}^2})\ ,\ y_2 = -\pi + \pi' + M' \end{aligned} \tag{33}$$

et pour les équations du mouvement $\alpha = 1, 2.$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}\ ,\ \frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\ ,\ F = \frac{k^2}{2\hat{a}} + n'\,(x_1 - x_2) + \mu\,\Phi \tag{34}$$

Les caractères ont la même signification que jusqu'à présent, une confusion de x_α, y_α avec x_α, y_α anciennes n'est pas à craindre pour le moment. Posons $t = (1+\nu)\tau$ et calculons les séries périodiques des sortes de Poincaré, pour le problème restreint, au voisinage d'une commensurabilité des mouvements moyens*)

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \xi_\alpha^0 + \mu\, x_\alpha^1 + \mu^2\, x_\alpha^2 + \\ y_\alpha &= \eta_\alpha^0 + + \mu\, y_\alpha^1 + \mu^2\, y_\alpha^2 + \\ \nu &= \nu_1\,\mu + \nu_2\,\mu^2 + \end{aligned} \tag{35}$$

Pour la fonction Φ_0 nous trouverons immédiatement l'expression

$$\Phi_0 = \frac{k^2}{2\hat{a}} + n'\,(x_1 - x_2).$$

Notons expressément que dans la considération qui va suivre les fonctions Φ, Φ_1, Φ_2 etc. conservent leur signification originaire c'est-à-dire non-transformée par les opérations à la Delaunay.

On trouvera

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_\alpha^0}{d\tau} &= 0 & x_\alpha^0 &= \text{konst}, \\ \frac{d\,\eta_\alpha^0}{d\tau} &= -\frac{\partial \Phi_0(\xi^0{}_1, \xi^0{}_2)}{\partial x_\alpha} = n_\alpha^0 & \eta_1^0 &= n_1^0\,\tau + \text{konst}. \\ & & \eta_2{}^0 &= \text{konst}. \end{aligned} \tag{36}$$

pour le premier degré en μ on aura

*) de même il ne faut pas confondre τ avec l'argument de Delaunay pag. 19, 31.

$$\frac{dx_\alpha^1}{d\tau} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_\alpha^0}$$

$$\frac{dy_\alpha^1}{d\tau} = -\nu_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_\alpha^0} - \left(\sum \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_\alpha^0} \right),$$

Pour intégrer ces équations au moyen des séries périodiques écrivons

$$\begin{aligned} x_\alpha^1 &= P_\alpha + c_\alpha^1 \\ y_\alpha^1 &= Q_\alpha^1 + k_\alpha^1 \end{aligned} \tag{35'}$$

P_α, Q_α représentant les séries périodiques resp. en cos, (P), sin, (Q); c_α^1, k_α^1 les constantes c'est-à-dire les termes tout connus.

La condition de la nonexistence des termes séculaires dans les deux intégrales x_α^1 donnera

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1^0}\right] = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2^0}\right] = 0 \tag{37}$$

Nous désignons par une paranthèse les parties constantes des séries trigonométriques correspondantes.

La même condition pour les intégrales y_1^1 y_2^1 donnera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^{0\,2}} c_1^1 + \nu_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial [\Phi_1]}{\partial x_1^0} &= 0 \\ \nu_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2^0} + \frac{\partial [\Phi_1]}{\partial x_2^0} &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Les deux équations serviront à déterminer les deux inconnues c_1^1, ν_1.

Pour passer au deuxième degré en μ nous poserons:

$$x_\alpha^2 = P_\alpha^2 + c_\alpha^2, \; y_\alpha^2 = Q_\alpha^2 + k_\alpha^2$$

et les équations $\alpha = 1, 2$

$$\frac{dx_\alpha^2}{d\tau} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_\alpha^0} + \sum \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\alpha^0 \partial y_\beta^0} y_\beta^1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\alpha^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^1 \right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_\alpha^0} \nu_1$$

$$\frac{dy_1^2}{d\tau} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1^0} - \sum \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^2 - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0 \partial x_\nu^0} x_\beta^1 x_\gamma^1 -$$

$$- \sum \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^0 \partial y_\beta^0} y_\beta^1 \right) - \nu_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1^0} - \nu_1 \sum x_\beta^1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0} -$$

$$- \nu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1^0}; \quad - \frac{dy_2^2}{d\tau} = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2^0} - \sum \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^0 \partial y_\beta^0} y_\beta^1 \right) -$$

$$- \nu_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2^0} - \nu_1 \sum x_\beta^1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_2^0 \partial x_\beta^0} - \nu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2^0}$$

donneront

$$\sum k_\beta^1 \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\beta^0 \partial y_\alpha^0} \right] + c_2^1 \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^0 \partial y_\alpha^0} \right] = - \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_\alpha^0} \right] - c_1^1 \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^0 \partial y_\alpha^0} \right] -$$

$$- \sum \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\beta^0 \partial y_\alpha^0} Q_\beta^1 \right] + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\alpha^0 \partial x_\beta^0} P_\beta^1 \right] \right\} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_\alpha^0} \nu_1 \qquad (39)$$

Dans ce cas de détermination des déplacements initiaux du mouvement de Képler originaire, il y aura toujours plus d'inconnues que de conditions, c'est pourquoi nous pouvons disposer librement de l'une d'entre elles.

Nous choisirons $c_2^1 = o$ et plus généralement $c_2^k = o$, $k = 1, 2, 3$

Les deux dernières équations (39) serviront alors à trouver les deux inconnues k_1^1, k_2^1. Enfin les equations différentielles pour y_1, y_2 écrites plus haut donneront pour les inconnues ν_2, c_1^2 les conditions suivantes:

$$\sum \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0} c_\beta^2 + \nu_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1^0} = - \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1^0} \right] - \nu_1 \sum c_\beta^1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0} - \nu_1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1^0} \right] -$$

$$- \sum \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_\beta^0 \partial x_1^0} \right] c_\beta^1 + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\beta^0 \partial x_1^0} \right] k_\beta^1 \right\} - \sum \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_\beta^0 \partial x_1^0} P_\beta^1 \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\beta^0 \partial x_1^0} Q_\beta^1 \right] \right\} - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0 \partial x_\gamma^0} c_\beta^1 c_\gamma^1 - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x_1^0 \partial x_\beta^0 \partial x_\gamma^0} \left[P_\gamma^1 P_\beta^1 \right]$$

$$\nu_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2^0} = -\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2^0}\right] - \nu_1 \sum c_\beta^1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_2^0 \partial x_\beta^0} -$$

$$- \nu_1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2^0}\right] - \sum \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^0 \partial x_\beta^0}\right] c_\beta^1 + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^0 \partial y_\beta^0}\right] k_\beta^1 \right\} - \qquad (40)$$

$$- \sum \left\{ \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_\beta^0 \partial x_2^0} P_\beta^1\right] + \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_\beta^0 \partial x_2^0} Q_\beta^1\right] \right\}$$

On pourra procéder ainsi jusqu'à un degré convenable par rapport à μ.

Nous avons trouvé en somme:

a) que les éléments Képlériens originaires sont liés par les conditions (37)

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1^0}\right] = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2^0}\right] = 0$$

si l'on fixe bien entendu la masse de la planète troublante et la commensurabilité des mouvements moyens. Cependant les deux conditions ne représentent qu' une seule. En effet la commensurabilité étant fixée par $\frac{n}{n'} = \frac{p+q}{p}$, donnera pour l'argument critique.

$$\hat{\zeta} = -p\, y_1 + q\, y_2 = 0 \qquad (22)$$

dont la seconde de nos deux équations sera la suite de la première.

Nous trouvons ainsi une liaison unique entre les éléments osculateurs non troublés (37).

$$(\hat{a}, \hat{e}, \hat{\zeta}) = (\hat{a}, \hat{e}, \hat{M}, \pi) = (x_1, x_2, y_1, y_2,) = 0$$

Pour passer aux solutions du problème restreint on devra déterminer les déplacements

$$c_\alpha = \mu\, c_\alpha^1 + \mu^2\, c_\alpha^2 + \mu^3\, c_\alpha^3 + \ldots\ldots$$

$$\bar{k}_\alpha = \mu\, k_\alpha^1 + \mu^2\, k_\alpha^2 + \mu^3\, k_\alpha^3 + \ldots\ldots \qquad \alpha = 1, 2 \qquad (41)$$

Bornons nous pour simplifier l'explication à la première puissance de la masse troublante, nous parlerons ainsi, pour abréger, des déplacements c_α^1, k_α^1 ou bien des accroissements correspondants en δa, δe, δM, $\delta\pi$, (resp. $\delta\zeta$).

En éliminant le facteur ν_1 entre les deux équations (38) on trouvera en posant en même temps $c_2^1 = 0$.

$$u\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{3\,c_1^1}{x_1^4} - f\frac{n}{n'} = 0 \text{ ou bien } -f(p+q) - p\delta n + (f-h)\,p = 0$$

ce que donne vu la liaison de commensurabilité,

$$(n+h)\,p + q\,f - (p+q)\,n' = 0 \qquad (24)$$

relation bien connue et citée plus haut. Les lettres f, h, n, p, q ont reçu la signification qui leur avait été donnée auparavant.

b) Nous trouvons ainsi une liaison entre

$$(\hat{a} + \delta a,\ \hat{e} + \delta e) = (\xi_1^0 + c_1^1,\ \xi_2^0 + c_2^1) = 0.$$

Ayant choisi $c_2^1 \sim \delta e = 0$ cette liaison sert à trouver le déplacement convenable et nécessaire pour l'existence d'une solution périodique de sorte de Poincaré au problème restreint ($e' = 0$).

Nous allons d'abord montrer que pour les solutions périodiques et symétriques du problème restreint, de sortes de Poincaré — du moins celles qui nous servaient de point de départ — tous les déplacements en coordonnées angulaires disparaîtront ($k^1{}_1 = k^1{}_2 = k_\alpha^m = 0$).

En effet nous avons déjà mentionné la forme du développement de la fonction perturbatrice. C'est en somme une série de cosinus des angles. La dérivation par rapport à une variable angulaire quelconque de cette série donnera une série de sinus d'angles, une deuxième dérivation donnera comme résultat une série de cosinus et ainsi de suite. De même la formation précitée des nos solutions montre que les fonctions P_α^k c'est-à-dire les x_α consisteront en une série

de cosinus tandisque les fonctions Q_α^k c'est-à-dire les y_α seront construites comme séries de sinus.

Or toutes les séries composées d'une suite des sinus jouissent de la propriété remarquable de disparaître avec l'argument en perdant tous les termes identiquement. L'argument des ces séries, figurant dans la chaîne des algorithmes précités, est l'argument critique et ses multiples, cet argument disparaît — on le sait bien. — dans les solutions symétriques $\hat{\zeta} = 0$.

Si l'on discute maintenant les équations du premier degré servant à déterminer les déplacements k_α^1, on constate tout de suite que tous les termes de ces équations disparaissent, contenant soit une dérivée d'un ordre impair par rapport à y_α ou bien une dérivée d'ordre pair multipliée par une série en sinus, ou bien $c_2^1 = 0$ qui était choisi égal à zéro. Ainsi il restera deux équations linéaires homogènes avec un déterminant égal à zéro c'est-à-dire deux équations dépendantes l'une de l'autre, c'est pourquoi la seule solution:

$$k_1^1 = k_2^1 = 0$$

sera admissible et on trouvera la même chose à un degré ultérieur quelconque c. q. f. d. Le moment est venu d'intercaler une remarque explicative, concernant la formation des équations du dernier algorithme.

La mention faite plus haut et relative à la structure de nos séries telles que P_α, Q_α, $\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x_1 \partial y_1 \partial y_2}$ etc. explique assez clairement, pourquoi on doit, en cherchant la partie constante du résultat de multiplication de plusieures séries bien distinguer entre $\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_\beta \partial y_1} P_\beta^1\right]$ et $\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_\beta \partial y_1}\right]\left[P_\beta^1\right]$, chaque résultat consistant en pures cosinus pouvant amener l'existence de nouveaux termes constants pour $\hat{\zeta} = 0$.

En effet, après avoir multiplié par exemple deux $\begin{matrix}\cos m\zeta \\ \sin m\zeta\end{matrix}$ $\begin{matrix}\cos m\zeta \\ \sin m\zeta\end{matrix}$ particuliers on reviendra aux multiples des angles, ce qui fera figurer des arguments tels que $2m\zeta$, 0, dans les fonctions cosinus.

A l'opposite de cela le même procédé de multiplication des séries en cosinus et sinus amenera en particulier l'existence des mêmes deux arguments $2m\zeta$, 0, cette fois ne figurant que dans les fonctions trigonométriques sinus. Ainsi il n'y a plus de contribution en faveur des termes constants c'est-à-dire indépendants du temps. C'est pourquoi par exemple les termes tels que $\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_\beta \, \partial y_1} P_\beta^1\right] \sim \sin 0$ pour $\zeta = 0$, π etc. seront à supprimer.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de ce qu'il ne peut y avoir de désaccord entre les diverses conditions à satisfaire, trouvées plus haut et valables chaque fois simultanément. Nous les résumons ainsi.

I. liaison (37) entre les éléments Képlériens, non troublés

$$(\hat{a},\ \hat{e},\ \hat{M},\ \hat{\pi}) = 0 = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}\right] = 0 \qquad (37)$$

II. relation entre les éléments troublés (24) du problème restreint ($\pi \gtrless 0$, $e' = 0$), qui ne sont que les éléments Képlériens munis d'accroissements c'est-à-dire de déplacements initiaux. Nous l'avons écrite dans le mémoire présent sous la forme $(n+h)\ p + qf - (p+q)\ n' = 0$.

Cependant cette relation ne représente aucune liaison nouvelle. En effet l'équation précitée n'était qu'un résultat d'élimination entre quatre équations conditionnelles servant à déterminer les cinq déplacements du problème restreint,

$$\delta a,\ e\ (\nu),\ \delta M,\ \delta\pi,$$

et dont une inconnue restait arbitraire (nous avons choisi $c_2 = 0$, $(\delta e = 0)$,

III. puis les trois conditions (29) resp. (30) pour l'existence des solutions séculaires du problème astéroïdique ($\pi \lesseqgtr 0$, $e' \gtrless 0$).

$$s\frac{n'}{|f|} = rp \pm s, \left(f = \frac{n'\nu}{1+\nu},\ \nu = \pm\frac{s}{pr}\right),$$

$$\left[\frac{\partial R\,(\hat{a}+\delta a,\ \hat{e}+\delta e,\ \hat{M}+\delta M,\ \pi+\delta\pi)}{\partial y_1}\right] = 0, \left[\frac{\partial R}{\partial y_2}\right] = 0$$

Nous avons fait ressortir que les éléments séculaires à la Delaunay qui figurent dans les dernières conditions sont composés d'éléments Képlériens (I.), munis de déplacements valables pour le problème restreint (II.)

Prenons pour démontrer la proposition le cas le plus général, celui des solutions longuévales c'est-à-dire des solutions séculaires du problème astéroïdique où il apparaît la quatrième catégorie des termes critiques.

Ici, comme nous l'avons déjà mentionné, les deux conditions III (29) sont bien distinctes. Il pourra se faire que les accroissements tels que δa, δe, (e), (ν), δM, $\delta\pi$ et dont deux resteront arbitraires pourront coïncider avec ceux calculés ad II).

Dans ce cas toutes nos conditions seront d'accord et l'on pourra affirmer l'existence des solutions périodiques séculaires, longuévales asymétriques $c.q.f.d.$

Le cas, bien entendu, des solutions séculaires, où il n'y a pas de termes critiques de la quatrième catégorie conduit au même raisonnement. Seulement ici les deux conditions ad III (29) se confondent en une seule, et il n'y aura pas non plus de contradiction entre les équations à satisfaire. Dans ce cas on parlera de l'existence des solutions séculaires générales $c.q.f.d.$

Enfin le cas qui nous intéresse le plus, celui des solutions séculaires, symétriques sera le plus facile à traiter. En effet, on peut le nommer cas particulier, ou dégénéré. Cette fois la condition ad I (37) sera satisfaite identiquement, la série trigonométrique correspondante, composée de sinus, disparaissant terme à terme pour $\hat{\zeta}=0$. Il en sera de même avec les deux conditions ad III (29) (qui n'en sont d'ailleurs qu' une seule). En effet les séries correspondantes se composeront de sinus dont tous les arguments disparaîtront. Les arguments auront la forme générale:

$$m\zeta = -py_1 + qy_2 = -p\eta_1^0 + q\eta_2^0 - p\bar{k}_1 + q\bar{k}_2 = \qquad (22)$$
$$= -py_1^0 + qy_2^0 = -p\hat{M} + (p+q)\,M' - (p+q)\,(\hat{\pi} - \pi')$$

Nous avons démontré que pour les solutions symétriques il y aura toujours (41) $\bar{k}_1 = k_1^1 = k_1^2 = \bar{k}_2 = k_2^1 = .. = 0$, de sorte

que les dites arguments se réduiront nécessairement à leurs valeurs non troublées, osculatrices. Tous les sinus de nos séries disparaîtront encore terme à terme.

Ainsi il n'y aura plus de relation entre $(\hat{e}, \hat{\zeta})$ ad I) (37), il n'y aura non plus de liaison entre $(\hat{e}+\delta e,\ \hat{a}+\delta a,\ \hat{\zeta}+\delta\zeta)=0$ ad III) (29).

C'est pourquoi il n'y a pas de contradiction entre nos équations de condition pour l'existence des solutions séculaires du problème astéroïdique $(\mu \gtrless 0,\ e' \gtrless 0)$ *c. q. f. d.*

Il reste une dernière remarque explicative à faire en ce qui concerne un désaccord apparent dans la signification des constantes.

D'un côté nous envisageons les éléments d'une ellipse osculatrice (pag. 36)

$$\begin{aligned} x_1 &= k\sqrt{\hat{a}}, & y_1 &= \hat{M}+\pi-M'-\pi', \\ x_2 &= k\sqrt{\hat{a}}\,(1-\sqrt{1-\hat{e}^2}), & y_2 &= -\pi+\pi'+M', \end{aligned}$$

$$\text{pour } \mu=0 . \begin{cases} x_1=\xi_1{}^0, & y_1=\eta_1{}^0, \\ x_2=\xi_2{}^0, & y_2=\eta_2{}^0, \end{cases} \qquad (33)$$

et passons aux éléments du problème restreint. Les deux systèmes des éléments diffèrent des accroissements, dont nous avons construit les développements (41)

$$c_\alpha = c_\alpha^1\mu + c_\alpha^2\mu^2 + c_\alpha^3\mu^3 + \ldots \quad \bar{k}_\alpha = k_\alpha^1\mu + k_\alpha^2\mu^2 + k_\alpha^3\mu^3 + \ldots$$

D'un autre côté, nous avons indiqué ces mêmes éléments des solutions périodiques du problème restreint au moyen des transformations à la Delaunay (page 20)

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ y_1 = (n+h)\,t + y_1^0,\ y_2 = -ft + y_2^0 \qquad (18)$$

Nous posons de nouveau

$$n\gamma + (g) = \pi,\ n\gamma + (l) = M_0,\ \lambda = M+\pi = nt + M_0 + \pi \qquad (18')$$

de sorte que

$$y_1^0 = \pi - \pi' + M_0,\ y_2^0 = -\pi + \pi'$$

Pour mettre d'accord les deux systèmes d'expressions

on devra-ce que nous avons déjà fait- supposer que les accroissements $\overline{k}_1$, $\overline{k}_2$ sont renfermés dans les nouvelles constantes M_0, π, tandis que les accroissements c_1, c_2 seront contenus dans les expressions finales des éléments x_1, x_2, gagnées au moyen des opérations à la Delaunay susmentionnées.

Il sera exactement

$$\eta_\alpha^0 + \overline{k}_\alpha = y_\alpha^0 \tag{42}$$

Nous avons ainsi choisi pour les éléments les lettres y_α, M, π qui représentent non pas une valeur osculatrice mais pour ainsi dire séculaire-moyenne.

L'existence des classes de solutions séculaires une fois prouvée, on peut se servir de méthodes diverses pour réaliser leur construction concrète.

L'une des plus rapides d'entre elles consistera à développer suivant les puissanees entières du paramètre e'.

Poursuivons pour un moment cette construction qui nous sera utile en vue de démontrer un lemme concernant un cas particulier remarquable.

Reprenons les éléments canoniques séculaires du paragraphe précédent voir page 22 (18) valables pour le problème astéroïdique, en faisant $\beta = k$.

$$\begin{aligned} x_1 &= L(a, e, a', n') & y_1 &= (n+h)\,t + M_0 + \pi - \pi' \\ x_2 &= L(a, e, a', n') - G(a, e, a', n') & y_2 &= -ft - \pi + \pi' \end{aligned} \tag{18}$$

et posons en fixant un élément quelconque (une confusion avec les mêmes signes (33), (34), (35) et seq. employés dans ce paragraphe pag. 36 pour le problème restreint — ne peut se produire.

$$\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha^0 + e' x_\alpha^1 + e'^2 x_\alpha^2 + \ldots\ldots \\ y_\alpha &= \eta_\alpha + e' y_\alpha^1 + e'^2 y_\alpha^2 + \ldots\ldots \qquad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{43}$$

Les équations du mouvement seront décomposées en une suite de liaisons, relatives aux degrés particuliers de e'. On les intégrera au moyen de séries périodiques. Mettons à cet effet.

$$x_\alpha^h = p_\alpha^h + C_\alpha^h, \quad y_\alpha^h = q_\alpha^h + K_\alpha^h \tag{44}$$

p_α^h représentant des series en cosinus, q_α^h des séries en sinus·

On trouvera ainsi pour le degré zéro en e', c'est-à-dire pour e'$=0$, en posant $R_0 = \overline{\Phi}_0(x_1) + \mu\overline{\Phi}(x_1, x_2)$ où la fonction $\overline{\Phi}$ est transformée au moyen des opérations à la Delaunay de ce paragraphe

$$\frac{dx_\alpha^0}{dt} = \frac{\partial R_0(x_1, x_2)}{\partial y_\alpha^0} = 0, \quad \frac{d\eta_\alpha}{dt} = -\frac{\partial R_0}{\partial x_\alpha^0}$$

$x_1^0 =$ konst., $y_1^0 = \pi - \pi' + M_0$, voir p. 22 $\eta_1 = (n+h)\,t + M_0 + \pi - \pi' = (n+h)\,t + y_1^0$

$x_2^0 =$ konst. $y_2^0 = -\pi + \pi'$, $\eta_2 = -ft - \pi + \pi' = -ft + y_2^0$

Pour le premier degré en e' il sera

$$\frac{dx_\alpha^1}{dt} = \frac{\partial R_1}{\partial y_\alpha}, \quad -\frac{dy_\alpha^1}{dt} = \frac{\partial R_1}{\partial x^0{}_\alpha} + \sum \frac{\partial^2 R_0}{\partial x^0{}_\alpha \partial x^0{}_\beta}\, x_\beta^1 .$$

Les séries finales ne contiendront pas des termes séculaires, c'est pourquoi les termes constants, tout connus des deuxièmes membres disparaîtront. On trouvera ainsi en désignant la dite partie par paranthèse.

$$\left[\frac{\partial R_1}{\partial y_\alpha^0}\right] = 0\ , \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_1^0} C^1{}_1 + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_2^0} C^1{}_2 + \left[\frac{\partial R_1}{\partial x_\alpha^0}\right] = 0 \tag{45}$$

Cependant la partie $[R_1]$ n'existe pas en realité (voir page 32) on aura donc

$$\left[\frac{\partial R_1}{\partial y_\alpha^0}\right] = \left[\frac{\partial R_1}{\partial x_\alpha^0}\right] = 0 \tag{46}$$

On aura ainsi deux équations, linéaires et homogènes, servant à déterminer les deux inconnues C^1, C_2^1, leur déterminant est différent de zéro (voir page 32). Donc la solution unique $C_1^1 = C_2^1 = 0$ sera admissible.

Inutile de mentionner que nous avons supprimé les accents des fonctions, R_k désignant les mêmes fonctions — après l'exécution des transformations à la Delaunay. Passons au deuxième degré en e', on aura à résoudre les équations:

$$\frac{dx_\alpha^2}{dt}=\frac{\partial R_2}{\partial y_\alpha^0}+\sum_\beta \frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^1 + \sum_\beta \frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0 \partial y_\beta^0} y_\beta^1$$

$$-\frac{dy_\alpha^2}{dt}=\frac{\partial R_2}{\partial x_\alpha^0}+\sum_\beta \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^1 + \sum_\beta \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0 \partial y_\beta^0} y_\beta^1 +$$

$$+\sum_\beta \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_\beta^0} x_\beta^2 + \frac{1}{2}\sum_\beta \frac{\partial^3 R_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_\beta^0 \partial x_\gamma^0} x_\beta^1 x_\gamma^1$$

Écrivons d'après cela les conditions de disparition des termes constants des deuxièmes membres des deux équations pour x_α^2, nous aurons

$$\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0 y_1^0}\right] K_1^1 + \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0 \partial y_2^0}\right] K_2^1 = -\left[\frac{\partial R_2}{\partial y_\alpha^0}\right] - \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0 \partial x_1^0}\right] C_1^1 - \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0 \partial x_2^0}\right] C_2^1 \qquad (47)$$

Les termes contenant C_α^1 disparaissent, d'après le résultat trouvé pour le premier degré en e'. De plus, la partie en R_1 n'existe pas — ainsi tous les termes en R_1 s'annulent. Il devra en être de même avec $\left[\frac{\partial R_2}{\partial y_\alpha^0}\right]=0$, ce qui constitue les conditions mentionnées plus haut, ((29) p. 33) soit pour l'existence des solutions séculaires symétriques ou asymétriques. Les deux autres équations

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_1^0} C_1^2 + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_2^0} C_2^2 = -\left[\frac{\partial R_2}{\partial x_\alpha^0}\right] - \sum_\beta \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0 \partial x_\beta^0}\right] C_\beta^1 -$$

$$-\sum_\beta \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0 \partial y_\beta^0}\right] K_\beta^1 - \sum_\beta \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0 \partial y_\beta^0} q_\beta^1\right] - \frac{1}{2}\sum_\beta \frac{\partial^3 R_0}{\partial x_\alpha^0 \partial x_\beta^0 \partial x_\gamma^0} C_\beta^1 C_\gamma^1 \gtrless 0 \qquad (48)$$

valables encore pour le deuxième degré en e', serviront à déterminer les inconnues C_α^1. On trouvera immédiatement — d'après ce qui a été dit plus haut, $[R_1]$, C_α^1 étant zéro — que les deuxièmes membres disparaissent à l'exception des premiers termes $\left[\frac{\partial R_2}{\partial x_\alpha^0}\right]$. Ainsi les équations seront linéaires en C_α^2. Le déterminant étant différent de zéro, on pourra les satisfaire au moyen des valeurs C_α^2 qui seront distinctes de nul en général.

Le troisième degré en e' donnera des équations très faciles à former et à intégrer, nous ne les écrivons pas pour abréger, résumant seulement les conditions de la nonexistence des termes séculaires qui en découlent; on trouvera:

$$-\left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_1^0}\right]K_1^1-\left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_2^0}\right]K_2^1=\left[\frac{\partial R_3}{\partial y_\alpha^0}\right]+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0}\right]C_\beta^1+$$

$$+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0}\right]C_\beta^2+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0}\right]K_\beta^2+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0}\right]C_\beta^1\,C_\gamma^1+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]K_\beta^1 K_\gamma^1+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]C_\beta^1\,K_\gamma^1=0 \quad (49)$$

Les deuxièmes membres disparaîtront à cause de la nonexistence des parties $[R_1]$, $[R_3]$ et $C_\alpha^1=0$. On pourra toujours satisfaire à ces équation par $K_1^1=K_2^1=0$ puisque le déterminant

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial R_2}{\partial y_1},\frac{\partial R_2}{\partial y_2}\right)}{\partial(y_1\,,\,y_2)}\gtrless 0 \text{ (termes de la catégorie quatrième).}$$

Si les termes de la quatrième catégorie n'existent pas (pratiquement), on pourra accepter la disparition du déterminant. Les équations étant linéaires et homogènes on pourra les satisfaire encore par la position $K_1^1=K_2^1=0$.

Le degré en e'^3 donnera encore les équations

$$-\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_1^0}C_1^3-\frac{\partial^2 R_0}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_2^0}C_2^3=\left[\frac{\partial R_3}{\partial x_\alpha^0}\right]+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0}\right]C_\beta^1+$$

$$+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial x_\alpha^0\,x_\beta^0}p_\beta^1\right]+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial x_\alpha^0\,y_\beta^0}\right]K_\beta^1+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_2}{\partial x_\alpha^0\,\partial y_\beta^0}q_\beta^1\right]+$$

$$+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0}\right]C_\beta^2+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0}p_\beta^2\right]+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial y_\beta^0}\right]K_\beta^2+$$

$$+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial y_\beta^0}q_\beta^2\right]+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0}\right]C_\beta^1\,C_\gamma^1+ \qquad (50)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0}p_\beta^1\,p_\gamma^1\right]+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]C_\beta^1\,K_\gamma^1+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}p_\beta^1\,q_\gamma^1\right]+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}q_\beta^1\,q_\gamma^1\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]K_\beta^1\,K_\gamma^1+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\frac{\partial^3 R_0}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0}\left(C_\beta^1\,C_\gamma^2+C_\beta^2\,C_\gamma^1\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{\beta,\gamma,\delta}\frac{\partial^4 R_0}{\partial x_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0\,\partial x_\delta^0}C_\beta^1\,C_\gamma^1\,C_\delta^1$$

La plupart des expressions des deuxièmes membres, ainsi écrits, disparaîtra par suite de l'annulation de

$$[R_1]=[R_3]=C_\alpha^1=K_\alpha^1=0.$$

Les deux équations, ayant leurs déterminant différent de zéro, serviront à trouver les constantes C_α^3.

Pour trouver les deux constantes K_α^2 on doit écrire les conditions pour la nonexistence des parties séculaires des séries x_α^4, du quatrième degré en e'.

On trouvera ainsi

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_1^0}K_1^2+\frac{\partial^2 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_2^0}K_2^2=\left[\frac{\partial R_4}{\partial y_\alpha^0}\right]+\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_3}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0}\right]C_\beta^1+$$

$$\sum_\beta\left[\frac{\partial^2 R_3}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0}\right]K_\beta^1+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0}\right]C_\beta^1\,C_\gamma^1+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]C_\beta^1\,K_\gamma^1+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_2}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]K_\beta^1\,K_\gamma^1+\\
&+\frac{1}{6}\sum_{\beta,\gamma,\delta}\left[\frac{\partial^4 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0\,\delta x_\delta^0}\right]C_\beta^1\,C_\gamma^1\,C_\delta^1+\\
&+\frac{1}{6}\sum_{\beta,\gamma,\delta}\left[\frac{\partial^4 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial x_\gamma^0\,\partial x_\delta^0}\right]K_\beta^1\,C_\gamma^1\,C_\delta^1+\\
&+\frac{1}{6}\sum_{\beta,\gamma,\delta}\left[\frac{\partial^4 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0\,\partial x_\delta^0}\right]K_\beta^1\,K_\gamma^1\,C_\delta^1+\\
&+\frac{1}{6}\sum_{\beta,\gamma,\delta}\left[\frac{\partial^4 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0\,\partial y_\delta^0}\right]K_\beta^1\,K_\gamma^1\,K_\delta^1+\\
&+\sum_{\beta}\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0}\right]C_\beta^2+\sum_{\beta}\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0}\right]K_\beta^2+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial x_\gamma^0}\right]\left(C_\beta^1\,C_\gamma^2+C_\beta^2\,C_\gamma^1\right)+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial x_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]\left(C_\beta^1\,K_\gamma^2+C_\beta^2\,K_\gamma^1\right)+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma}\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial y_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\right]\left(K_\beta^1\,K_\gamma^2+K_\beta^2\,K_\gamma^1\right)
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Tous les termes des deuxièmes membres des ces équations, sauf les premiers, devront disparaître parce que nous avons trouvé $[R_1]=[R_2]=C_\alpha^1=K_\alpha^1=0$.

La remarque, faite plus haut dans le paragraphe 2., p. 41. relative à la structure de nos séries telles que p_α, q_α, $\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_1\,\partial y_1\,\partial y_2}$ etc. subsiste encore, expliquant assez clairement, pourquoi nous avons mis en évidence et bien distingué entre par ex.

$$\left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma^0}\,q_\beta^1 q_\gamma^1\right] \text{ et } \left[\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_\alpha^0\,\partial y_\beta^0\,\partial y_\gamma}\right][q_\beta^1 q_\gamma^1].$$

Le résultat d'une multiplication de deux séries, procédant

suivant resp. les $\begin{cases}\text{cosinus}\\ \text{sinus}\end{cases}$, $\begin{cases}\text{cosinus}\\ \text{sinus}\end{cases}$ pourra amener l'existence de nouveaux termes constants pour la valeur des arguments o ou 2ζ, tandis qu' un produit de deux séries en resp. sinus et cosinus ne pourra, en disparaissant, contribuer en rien, au nombre des termes constants et ainsi de suite.

La convergence des séries trouvées sera assez lente, au moins dans le cas de notre système solaire. En effet les développements procèdent suivant les puissances de e', et de plus les facteurs tels que $\frac{1}{e}$, retarderont la convergence. Cependant il fallait compléter le paragraphe 2. par leur explication, qui s'impose notamment au point de vue théorique.

En nous appuyant sur les résultats donnés ci-dessus, nous allons maintenant démontrer un lemme, relatif aux solutions séculaires du problème astéroïdique, trouvées dans le paragraphe 2.

Nous avons demontré jusqu' à présent, qu'une solution périodique symétrique de sortes de Poincaré pour le problème restreint donne naissance à une solution séculaire symétrique du problème astéroïdique.

Les trois corps se trouvant originairement sur la ligne des apsides, commune aux ellipses képlériennes, gardaient la même position aussi pour $\mu \leq o$ c'est-à-dire au problème restreint (troublé). En effet nous avons constaté expressément à la page 41, $k_1^1 = k_2^1 = 0$ pour les déplacements des variables angulaires. On démontrera facilement qu'il y a encore $K_1^1 = K_2^1 = 0$ etc..., c'est-à-dire: Les trois corps se trouvant originairement sur la ligne commune des apsides des ellipses képlériennes, garderont exactement la même position initiale encore pour le problème (troublé) astéroïdique $\mu \leq o$, $e' \leq o$.

En effet les deuxièmes membres des dernières équations (51) ne contiennent que les séries en sinus des multiples des arguments critiques qui disparaissent ($\zeta = o$), ils se réduiront nécessairement à zéro, et les deux équations (51) prendront la forme $aK_1^1 + bK_2^1 = 0$, $cK_1^1 + dK_2^1 = 0$.

On pourra toujours satisfaire à ces deux équations par la position simple $K_1^1 = K_2^1 = 0$, c. q. f. d.

Par contre dans le cas général des solutions séculaires asymétriques nous allons souligner le fait suivant. Une solution périodique asymétrique du problème restreint pourra bien donner naissance à une solution séculaire asymétrique du problème astéroïdique ($\mu \leq o, e' \leq o$).

Les trois corps ne se trouvent pas au commencement du mouvement sur la même ligne des apsides qui d'ailleurs n'est pas commune aux deux ellipses képlériennes osculatrices. De plus on devra les écarter de certains déplacements, bien définis qui seront de l'ordre de la masse troublante μ pour le problème restreint (c'est ce que nous avons dénoté par k_α etc. à la p. 37, 41. Dans le cas du problème astéroïdique, c'est-à-dire en admettant $e' \leq o$, on devra de nouveau les écarter des autres déplacements de l'ordre e', si l'on veut choisir les positions initiales qui seules donnent naissance aux solutions séculaires asymétriques. Nous avons désigné les derniers déplacements par K_α^1 etc, les équations servant à déterminer les dits accroissement montrent assez clairement que les solutions seront en général différentes de zéro.

Cependant la méthode employée, quoique très courte, n'est pas la plus avantageuse pour les recherches qui nous occuperont dans la suite. C'est pourquoi nous envisagerons un procédé analogue à celui qui vient d'être expliqué pour le cas du problème restreint. En partant des équations ci-dessus nous leur ferons subir une suite continue des opérations de Delaunay. Il faut accentuer que nous devrons — comme il a été déjà fait pour le problème restreint — isoler les dites solutions du problème astéroïdique. De nouveau on devra opérer seulement sur les deux équations premières et qui donnent le mouvement de l'astéroïde, c'est-à-dire garder intacts les éléments de la planète troublante et supprimer le facteur ε, de sorte que β se reduira à k. Inutile de mentionner que cette fois le paramètre μ sera remplacé par e', et que les arguments des séries trigonométriques resteront les mêmes que celles des équations (16) pag. 21., à savoir

$$\Theta = l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 M',$$

l_α nombre entier, positif ou négatif. On aura en cas d'un terme critique de première catégorie (23)

$$\Theta = \frac{\zeta}{2\zeta} = (p+q)\, n't - pnt - pht - qft + (p+q)\, M_0' - pM_0 - \\ - (p+q)(\pi - \pi') = -py_1 + qy_2 + M'(p+q).$$

La structure de l'argument montre l'existence d'une intégrale première

$$qx_1 + px_2 = \sigma' = \text{const.}$$

σ' étant une constante arbitraire. Ainsi on sera amené à intégrer, au moyen des séries périodiques, les équations correspondantes pour e et Θ.

Après avoir trouvé les séries trigonométriques, satisfaisant à ces équations

$$e = e_0 + e_1 \cos \tau + e_2 \cos 2\tau + \ldots\ldots \qquad e_k = e_k(a, e, a', n', \sigma')$$
$$\Theta = \tau + \Theta_1 \sin \tau + \Theta_2 \sin 2\tau + \ldots\ldots \qquad \Theta_2 = \Theta_2(a, e, a', n', \sigma')$$

nous mettrons e dans notre intégrale première, ce qui donnera une série périodique pour

$$a = a_0 + a_1 \cos \tau + a_2 \cos 2\tau + \ldots$$
$$a_k = a_k(a, e, a', n', \sigma')$$

en dénotant la partie non périodique par a_0. Puis l'on substituera a_0 au lieu de σ' dans les expressions de a, e, Θ

Au moyen de ces expressions nous formerons ensuite les séries

$$L = L(a, e, a', n') = L_0 + L_1 \cos \tau + L_2 \cos 2\tau + \ldots\ldots$$
$$G = G(a, e, a', n') = G_0 + G_1 \cos \tau + G_2 \cos 2\tau + \ldots\ldots$$

Les divers L_k G_k ne seront que des fonctions des éléments non angulaires

$$L_m = L_m(a_0, e_0, a', n') \qquad G_m = G_m(a_0, e_0, a', n')$$

Leur degré par rapport a e' sera m (e'^m). Les fonctions L, G resteront toujours divisibles par le facteur k.

Puis on passera aux nouvelles canoniques et on pourra répéter tout le passage des pages resp. 18., 19., 20., mais sans oublier que le paramètre e' joue le rôle de μ (la masse) d'auparavant.

En étudiant l'effet de plusieurs transformations semblables on se rappelera que les variables changeront plusieurs fois.

Par ce qui precède une possibilité est offerte, un moyen théorique servant à se débarrasser de tous les termes trigonométriques critiques et non critiques, donnant naissance à la solution séculaire envisagée pour le problème moins général, astéroïdique.

§ 3. Intégrales algébriques et uniformes du problème.

Les équations du mouvement (pag. 13.) possèdent, on le sait bien, généralement deux intégrales algébriques et uniformes.

Étudions d'abord les équations primitives (1), (7), non transformées et passons en descendant du cas le plus général aux cas plus simples, dégénérés.

D'abord dans le problème général des trois corps, formulé ci dessus § 2. (1), deux intégrales existent, à savoir l'intégrale de Jacobi, formée en posant la fonction caractéristique égale à une constante, grâce à la circonstance que celle-ci ne dépend pas du temps explicitement, puis l'intégrale des aires, la suite naturelle de la qualité bien connue du développement, qui ne dépend que de la différence des longitudes des périhélies

Les deux intégrales s'écrivent alors

$$G_1 + G'_1 = c = \varepsilon \gamma_1 \sqrt{a(1-e^2)} + \mu \gamma'_1 \sqrt{a'(1-e'^2)} \qquad (11)$$

$$F = C = \varepsilon \Phi_0 + \Phi'_0 \mu + \varepsilon \mu \Phi + e' \mu \varepsilon R + \varepsilon^2 \mu \Psi \qquad (4')$$

Dans le cas du problème astéroïdique où $\varepsilon = 0$, $e' \leq 0$, le mouvement moyen, ainsi que les autres éléments de la planète troublante, seront constants de sorte que la fonction caractéristique sera une fonction explicite du temps; alors la deuxième de nos équations (4') ne représentera plus aucune intégrale des équations (9) du mouvement, ne satisfaisant plus aux dernières (9); — l'intégrale des aires (11) se réduira, ε étant nul, à une relation triviale liant seulement les éléments constants de la planète troublante — c'est-à-dire, les données du problème.

Prenons enfin le cas du problème restreint: $e' = 0$, $\varepsilon = 0$; cette fois, l'intégrale des aires n'existe pas, l'intégrale

des forces vives recommence à subsister, vu que la fonction perturbatrice ne dépend pas du temps. Tous les termes contenant le temps explicite s'annulent avec $e' = 0$.

Passons maintenant au cas des équations du mouvement transformées par des variations des constantes (D) à la Delaunay dans le § 2.

En ce qui concerne l'intégrale des aires du problème général de trois corps dans un plan, celle-ci ne cessera pas d'exister, bien que dans une forme, transformée conformément aux substitutions faites, c'est-à-dire à la dernière définition des éléments canoniques, coordonnés aux variables angulaires π et π'.

Les substitutions des séries finales n'introduisent que des multiples des angles Θ figurant dans les opérations particulières. Les arguments nouveaux s'ajoutent aux arguments anciens de sorte que, si la fonction perturbatrice originaire ne dépend que de la différence des longitudes des périhélies — le même cas aura encore lieu pour la fonction transformée.

En employant la même lettre G qu'au commencement des opérations, rappelons seulement qu'elle signifie une liaison plus compliquée, que ne l'était la simple définition primitive (voir (11) page 16.), elle sera divisible par γ_1 (pour mieux dire par $\varepsilon\gamma_1 = \beta$).

$$\varepsilon\varphi(a, e, a', e') + \mu^2\varepsilon. \text{ (série périodique des arguments angulaires)} + \gamma'_1\mu\sqrt{a'(1-e'^2)} = c \qquad (11)'$$

φ dénotant une fonction definie par les opérations de Delaunay.

Dans le cas du problème astéroïdique et du problème restreint, cette intégrale se réduira, comme auparavant, à une relation entre les constantes connues. — De même en ce qui concerne l'intégrale de Jacobi, dans les deux cas du problème général des trois corps dans un plan et du problème restreint.

On écrira immédiatement cette intégrale en égalant à une constante la dernière fonction caractéristique transformée (celle-ci ne dépendant non plus du temps explicitement).

Reprenons le cas des orbites à courte période du problème restreint de Poincaré. Choisissons les variables (10) du § 2 en faisant l'hypothèse $n/n' = (p+q)/p$.
L'intégrale de Jacobi s'écrit

$$F\ (L,\ G,\ l,\ g) = C \qquad F = \Phi_0 + \mu\,\Phi \text{ (page 16.)}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L}\ \frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial G}\ \frac{dG}{dt} + \frac{\partial F}{\partial l}\ \frac{dl}{dt} + \frac{\partial F}{\partial g}\ \frac{dg}{dt} = 0$$

on aura (Charlier Mech. d. Himmels II. p. 246 et seq.)

$$\frac{d[L]}{dt} = \frac{d[G]}{dt} = 0\ ,\ \text{donc}\ n\frac{\partial[F]}{\partial l} - n'\ \frac{\partial[F]}{\partial g} = 0$$

Donc les équations bien connues de Poincaré-Charlier (p. 249.) servant à déterminer les conjonctions et oppositions symétriques ne sont pas indépendantes à cause de l'existence de l'intégrale de Jacobi. — Il en sera de même pour le problème général. Par contre, le cas du problème astéroïdique, où cette intégrale de Jacobi n'existe plus, exigera une étude plus délicate: Dans ce cas, nous l'avons vu à la fin du dernier paragraphe, une relation entre les valeurs séculaires des éléments semble subsister. Par suite de ce fait les équations servant à déterminer l'un des déplacements initiaux ne seraient plus indépendantes, et l'une de ces inconnues resterait arbitraire. Il n'en est rien. La chose est évidente dans le cas de l'existence de termes de la quatrième catégorie. Dans le cas, où ces termes n'existent pas pratiquement, ils ne cesseront pas d'exister dans un ordre (degré) de e', μ plus élevé.

Mettons cette fois $F = \Phi_0 + \mu\Phi + \mu e' R$, le temps figure explicitement dans les arguments angulaires, on aura

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial G}\ \frac{dG}{dt} + \frac{\partial F}{\partial L}\ \frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial g}\ \frac{dg}{dt} + \frac{\partial F}{\partial l}\ \frac{dl}{dt} = 0$$

$$\text{ou bien}\ F - \int \frac{\partial F}{\partial t}\,dt = C$$

Il est facile de montrer que cette relation Jacobi-Callandreau ne représent aucune liaison entre les variables canoniques:

On s'en convaincra en introduisant deux variables nouvelles (Poincaré, Leçons I p. 14).

$$\frac{du}{dt}=1 \quad u=t+h\ ,\ \frac{dv}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial u} \quad F''=F+v$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial F''}{\partial v} \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{\partial F''}{\partial u}$$

De cette manière on gagnera deux intégrales $F''=C$, (Jacobi-Callandreau) et $u=t+h$, et en même temps deux nouvelles équations de mouvement.

Dans le cas de nos équations transformées [page 21. § 2. (16)].

$$\text{on aura} \quad \frac{d[L]}{dt}=\frac{d[G]}{dt}=0 \quad \text{donc}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l}\frac{dl}{dt}+\frac{\partial F}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=(n+h)\frac{\partial F}{\partial l}+f\frac{\partial F}{\partial g}+n'\frac{\partial F}{\partial M'}=$$

$$=\sum_{\omega}\left\{m_1\ (n+h)+m_2 f+\ m_3 n'\right\}\frac{\partial F}{\partial \omega}=0$$

$$w=[(n+h)\ m_1+f\,m_2+m_3\,n']\,t+\text{konst}$$

ce qui n'est pas une relation liant seulement les deux fonctions $\frac{\partial F}{\partial l}$ $\frac{\partial F}{\partial g}$ puisque une fonction nouvelle $\frac{\partial F}{\partial M'}$ y entre.

§ 4. **Cas du problème général des trois corps.**

Envisageons le résultat des substitutions faites — ne serait ce même que théoriquement — jusqu'à présent.

Les variables anciennes qui nous servaient de point de départ, seront représentées par les séries de la forme suivante:

$$x_1=L=A_0'(\bar{x}_1,\bar{x}_2,a',e')+\Sigma A_k'(\bar{x}_1,\bar{x}_2,a',e')\cos(i'\bar{y}_1+i''\bar{y}_2+i'''n't+c)$$

$$x_2=L-G=A_0''(\bar{x}_1,\bar{x}_2,a',e')+\Sigma A_k''(\bar{x}_1,\bar{x}_2,a',e')\cos(i'\bar{y}_1+i''\bar{y}_2+i'''n't+c)$$

$$y_1=M+\pi-\pi'=\bar{y}_1+\Sigma B_k'(\bar{x}_1,\bar{x}_2,a',e')\ \sin\ (i'\bar{y}_1+i''\bar{y}_2+i'''n't+c)$$

$$y_2 = -\pi + \pi' = \bar{y}_2 + \Sigma B_k'' (\bar{x}_1, \bar{x}_2, a' e') \sin (i' \bar{y}_1 + i'' \bar{y}_2 + i''' n' t + c)$$

On nomme les constantes $\bar{x}_1 = \bar{x}_1 (\bar{a}, \bar{e}, a', e'), \bar{x}_2 = \bar{x}_2 (a, e, a', e')$, $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ les éléments canoniques des solutions séculaires du problème astéroïdique; $c = \text{const.}$

Maintenant il faudra varier les constantes pour obtenir les équations du problème général. On trouvera sans peine:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} \frac{d\bar{x}_1}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} \frac{d\bar{x}_2}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{y}_1} \frac{d\bar{y}_1}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{y}_2} \frac{dy_2}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial a'} \frac{da'}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial e'} \frac{de'}{dt} + \frac{\partial x_1}{\partial \pi'} \frac{d\pi'}{dt}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} \frac{d\bar{x}_1}{dt} + \ldots$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial y_1}{\partial \bar{x}_1} \frac{d\bar{x}_1}{dt} +$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial y_2}{\partial \bar{x}_1} \frac{d\bar{x}_1}{dt} +$$

La substitution finale, c o m p o s é e, restant de forme canonique, leur déterminant sera toujours $\frac{\partial (x_1, x_2, y_1, y_2)}{\partial (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)} = |1|$. (Voir Dziobek Mathem. Theorien der Planetenbewegungen p. 116. 117. La démonstration citée subsiste même pour notre cas, où la substitution contient le temps t.) Les équations donnent facilement $\frac{d\bar{x}_1}{dt}, \frac{d\bar{x}_2}{dt}, \frac{d\bar{y}_1}{dt}, \frac{d\bar{y}_2}{dt}$. Donc on pourra indiquer la forme des équations du problème complet, comme il suit: Les parties ne contenant aucune dérivée de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ s'ajoutent aux deuxièmes membres des dernières équations

$$\frac{dx_1}{dt} \left(\sim \frac{\partial F}{\partial y_1} \right) - \frac{\partial x_1}{\partial a'} \frac{da'}{dt} \text{ etc.}$$

Le temps sortira en général en dehors de signes trigonométriques. En effet, nous avons remplacé dans le pro-

blème astéroïdique M' par $y_3 = n't$, $n' = \frac{k\sqrt{1+\mu}}{a'^{3/2}} = \text{constante}$

Mais le procédé bien connu de Lagrange permet de restituer la forme classique qui ne contient plus le temps explicite. En fait, on pourra toujours remplacer une série telle que

$$t\frac{dn'}{dt}, \text{ par la série } t\frac{dn'}{dt} = \frac{dM'}{dt} - n'.$$

Les équations servant à déterminer $\bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{y}_3, \bar{y}_4$ qu'on devra de même transformer au moyen de nos substitutions perdront leur forme canonique. Les coordonnées a', e', π', entrant dans les variables nouvelles $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ etc. il sera en général pour une fonction perturbatrice quelconque:

$$\frac{\partial f[\bar{x}_1(a', e'), \bar{x}_2(a', e'), x_3, x_4]}{\partial x_3} \leq \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4)}{\partial x_3}$$

Supprimons les accents des éléments $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$, provenant du changement canonique, final des variables — devenus inutiles.

En substituant ces éléments dans les équations du mouvement on doit les multiplier partout avec le facteur β (voir (6) page 15.) provenant du fait connu de la restitution d'un cas dégénéré. En effet, en imaginant le cas du problème restreint ou astéroïdique on posa simplement $\gamma_1 = k$, tandis qu'à présent ce facteur redevient $\gamma_1 = k\frac{\sqrt{1+\mu}}{1+\mu+\varepsilon}$, $\varepsilon \leq 0$.

Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \mu\varepsilon Y_1, & -\frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial\Phi_0(x_1)}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial\Phi(x_1, x_2, a', e')}{\partial x_1} + \mu\varepsilon X_1 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \mu\varepsilon Y_2, & -\frac{dy_2}{dt} &= \frac{\mu\partial\Phi(x_1, x_2, a', e')}{\partial x_2} + \mu\varepsilon X_2 \\
\frac{dx_3}{dt} &= \varepsilon Y_3, & -\frac{dy_3}{dt} &= \frac{\partial\Phi_0'(x_3)}{\partial x_3} + \varepsilon X_3, \qquad (52) \\
\frac{dx_4}{dt} &= \varepsilon Y_4, & -\frac{dy_4}{dt} &= +\varepsilon X_4.
\end{aligned}$$

$$x_1 = L(a, e, a', e' n') = \gamma_1\overline{L}(a, e, a' e' n'), \; y_1 = (n+h)t + \\ + M_0 + \pi - \pi'$$

$$x_2 = L(a, e, a', e', n') \quad - G(a, e, a', e', n'), y_2 = -ft - \pi + \pi' \qquad (17), (18), (53)$$

$$x_3 = L' = \gamma_1 \sqrt{a}, \; y_3 = M'$$

$$\mu x_4 = \mu G' + \varepsilon\varphi(a, e, a' e' n') + \mu^2\varepsilon \text{ (série périodique)}, y_4 = \pi',$$

$$G = \gamma_1 \overline{G}(a, e, a', e', n'), \; G' = \gamma_1' \sqrt{a'} \sqrt{1-e'^2} \qquad (6)$$

$$\gamma_1 = k\sqrt{\frac{1+\mu}{1+\mu+\varepsilon}}, \; \beta = \varepsilon\gamma_1, \gamma_1' = \frac{k}{\sqrt{1+\mu}}, \; \beta' = \mu\gamma_1'$$

voir les formules (6), (17), (18).

Les fonctions X_k, Y_k désignent resp. les séries en cos resp. sin des arguments angulaires.

Les substitutions des séries finales n'introduisent que des multiples des angles figurant dans les opérations particulières. Les arguments nouveaux ne font que s'ajouter aux arguments anciens, la fonction perturbatrice persistera ainsi à ne dépendre que de la différence des longitudes des périhélies — même après la transformation. Par suite de cela — nous l'avons vu dans le § 3 — l'intégrale des aires (11) subsistera quoique dans une forme un peu modifiée. Le même cas aura encore lieu avec l'intégrale des forces vives, la fonction perturbatrice transformée ne renfermant nullement le temps explicite. Au moyen de l'intégrale des aires on réduira — on le sait bien — notre système général définissant le mouvement des trois corps dans un plan, à trois degrés de liberté seulement. L'opération algébrique exécutant cette réduction sera tout-à-fait analogue à celle ,usitée ordinairement. La circonstance que nous envisageons des autres éléments, les soit-disants éléments séculaires n'y changera rien. On s'imaginera qu'on élimine l'excentricité de la seconde planète, c'est-à-dire de l'ancienne planète troublante, au moyen de la dite intégrale $\varepsilon\varphi(a, e, a', e') + \varepsilon\mu^2$ (série périodique) $+ \gamma_1 \mu \sqrt{a'(1-e'^2)} = C$

La variable séculaire G contiendra toujours le facteur γ_1.

Posons maintenant dans nos équations du mouvement $\varepsilon = 0$, on retrouvera au moyen des simples quadratures les éléments de la solution séculaire, servant de point de départ.

$$x_1 = L = x_1^0 + \alpha_1 = \bar{x}_1 \quad y_1 = (n+h)\,t + \bar{y}_1^0$$

$$\bar{y}_1^0 = M_0 + \pi - \pi' + \beta_1$$

$$x_2 = L - G = x_2^0 + \alpha_2 = \bar{x}_2 \quad y_2 = -ft + \bar{y}_2^0$$
$$\bar{y}_2^0 = -\pi + \pi' + \beta_2 \qquad (53)$$
$$x_3 = L' \quad y_3 = n't + y_3^0 \quad y_3^0 = M_0'$$
$$y_4 = \bar{y}_4^0 \quad y_4^0 = \pi'$$

$\mu x_4 = \mu G' + \varepsilon\varphi\,(a, e, a', e') + \varepsilon\mu^2$ (série périodique).

Notons que les accroissements α_1, α_2 calculés d'une autre manière (19) dans le paragraphe 2, seront renfermés, cette fois sous formes de constantes d'intégration dans les fonctions L, G, gagnées par les dernières transformations à la Delaunay, dont nous avons tout à l'heure expliqué l'arrangement p. 53.

Supposons maintenant que ε cesse d'être zéro et imaginons que dans une certaine solution les valeurs initiales des éléments soient

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + \bar{\alpha}_1\,, \quad y_1 = \bar{y}_1^0 + \bar{\beta}_1 \\ x_2 &= \bar{x}_2 + \bar{\alpha}_2\,, \quad y_2 = \bar{y}_2^0 + \bar{\beta}_2 \\ x_3 &= \bar{x}_3 + \alpha_3\,, \quad y_3 = y_3^0 + \beta_3 \end{aligned} \qquad (54')$$

les constantes $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$ disparaissant avec la masse de la planète qui remplace cette fois l'ancien astéroïde. Dans ce même mouvement envisagé, les valeurs des éléments pour la fin de la période totale et valable pour la solution séculaire originaire ($\varepsilon = 0$), c'est-à-dire pour $t = T$, seront données par

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + \bar{\alpha}_1 + \bar{\varphi}_1\,, \quad y_1 = \bar{y}_1^0 + \bar{\beta}_1 + (n+h)\,T + \bar{\psi}_1 \\ x_1 &= \bar{x}_2 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\varphi}_2 \quad y_2 = \bar{y}_2^0 + \bar{\beta}_2 - fT + \bar{\psi}_2 \\ x_3 &= \bar{x}_3 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\varphi}_3\,, \quad y_3 = \bar{y}_3^0 + \bar{\beta}_3 + n'T + \bar{\psi}_3 \end{aligned} \qquad (54)$$

On écrira facilement les équations servant à déterminer les déviations finales que voici.

$$\frac{d\bar{\varphi}_1}{dt} = \mu\varepsilon Y_1\,, \quad n + h + \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} = \frac{k^4}{x_1^3} - \mu\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \mu\varepsilon X_1$$

$$\frac{d\bar{\varphi}_2}{dt} = \mu\varepsilon Y_2\,, \quad -f + \frac{d\bar{\psi}_2}{dt} = -\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \mu\varepsilon X_2$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \varepsilon Y_3 \quad n' + \frac{d\bar{\psi}_3}{dt} = \frac{k^4}{x_3^3} - \varepsilon X_3$$

Inutile de mentionner que dans tous les arguments des termes trigonométriques aux deuxièmes membres, les mouvements moyens seront encore représentés par les valeurs anciennes

$$(n+h)\,,f\,,$$

appartenant à la solution séculaire astéroïdique, avoisinante qui nous servait de point de départ.

Notons encore expressément qu'on impose par là l'invariabilité des rotations séculaires seulement à la différence des angles $\pi - \pi'$, n'étant nullement obligé d'exclure un mouvement séculaire, commun à toutes les deux apsides (en ce qui concerne cette partie, provenant de l'influence de la masse ε, devenue différente de zéro).

Enfin il faut expliquer la forme des deuxièmes membres des équations dernières et (52). Nous avons supprimé les deux termes

$$-\mu e' \frac{\partial R(a,e,a',e',n')}{\partial x_1}\,,\quad -\mu e' \frac{\partial R(a,e,a',e',n')}{\partial x_2}\,.$$

En effet, d'après les théorèmes d'existence des classes des solutions fixées plus haut § 2 pour le cas du problème astéroïdique non restreint, ainsi que d'après les préceptes donnés, relatifs à la formation des ces solutions, les dites parties, transformées d'ailleurs au moyen des opérations de la fin du deuxième paragraphe, devront nécessairement disparaître pour les valeurs correspondantes des arguments a, e, a', e'.

Autrement on admettrait des accroissements des rotations séculaires pendant une période du mouvement, ce qui est contraire à l'idée principale du mouvement périodique, envisagé pour $e' \gtrless 0\,,\varepsilon = 0\,,$

En partant des nos dernières équations pour les déplacements finals nous trouverons par une simple inversion les relations servant à déterminer les déplacements initiaux, inconnus, seuls admissibles, si le mouvement général pour $\varepsilon \lesseqgtr 0$ doit rester périodique, de la même période.

$$\bar{\psi}_1 = -\mu\varepsilon\int_0^T X_1\,dt - \bar{\alpha}_1\int_0^T dt\,\frac{\partial^2(\Phi_0+\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_1^2} -$$

$$-\bar{\alpha}_2\int_0^T dt\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_1\,\partial x_2} - \bar{\alpha}_3\int_0^T dt\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_1\,\partial x_3} + \ldots.$$

$$\bar{\psi}_2 = -\mu\varepsilon\int_0^T X_2\,dt - \bar{\alpha}_1\int_0^T dt\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_1\,\partial x_2} -$$

$$-\bar{\alpha}_2\int_0^T dt\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_2^2} - \bar{\alpha}_3\int_0^T dt\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_2\,\partial x_3} + \ldots.$$

$$\bar{\psi}_3 = -\varepsilon\int_0^T X_3\,dt - \bar{\alpha}_3\int_0^T dt\,\frac{\partial^2\Phi_0'(x_3)}{\partial x_3^2} + \ldots.$$

$$\bar{\varphi}_1 = \mu\varepsilon\int_0^T dt\,Y_1 + \bar{\beta}_1\,\mu\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \tag{55}$$

$$+\bar{\beta}_2\,\mu\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_1}{\partial y_2} + \bar{\beta}_3\,\mu\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_1}{\partial y_3} + .$$

$$\bar{\varphi}_2 = \mu\varepsilon\int_0^T dt\,Y_2 + \bar{\beta}_1\,\mu\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_2}{\partial y_1} +$$

$$+\bar{\beta}_2\,\mu\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \bar{\beta}_3\,\mu\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_2}{\partial y_3} + ..$$

$$\bar{\varphi}_3 = \varepsilon\int_0^T Y_3\,dt + \bar{\alpha}_1\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_3}{\partial x_1} + \bar{\alpha}_2\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_3}{\partial x_2} +$$

$$+\bar{\alpha}_3\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_3}{\partial x_3} + \bar{\beta}_1\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_3}{\partial y_1} + \bar{\beta}_2\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_3}{\partial y_2} +$$

$$+\bar{\beta}_3\varepsilon\int_0^T dt\,\frac{\partial Y_3}{\partial y_3} + \ldots. \qquad \Phi_0 = \frac{k^4}{x_1^3}\,,\ \Phi_0' = \frac{k^4}{x_3^3}$$

Les équations trouvées auront tonjours une solution simple pour, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\alpha}_3$, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, $\bar{\beta}_3$ ce qui nous donne de suite le theorème suivant:

Les solutions séculaires de bifurcation, étudiées, de toutes les classes et catégories, valables pour le problème géneral des trois corps dans un plan—seront développables en séries trigonométriques, suivant les puissances du paramètre ε, la masse de l'ancien astéroïde. Les séries une fois construites seront absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de l'argument du temps, c'est à dire pour toujours.

En effet, en ce qui concerne le Hessien qui constitue le déterminant fonctionnel des nos équations en $\bar{\psi}_k = 0$, celui-ci en général ne pourra pas être nul ce que nous écrirons en posant $H' = \Phi_0 + \mu\Phi + \mu e' R$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial H'}{\partial x_1}, \frac{dH'}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi_0'}{\partial x_3}\right)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \gtrless 0 \tag{57}$$

Les équations $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0$ contiendront $\mu\varepsilon$ comme facteur, l'équation $\bar{\varphi}_3 = 0$, pourra s'écrire $\frac{\bar{\varphi}_3}{\varepsilon} = 0$. Par suite de l'existence de l'intégrale de l'énérgie $F = C$ (transformée), puisque il y a $\frac{dF}{\partial x_3} \gtrless 0$, l'équation $\frac{\bar{\varphi}_3}{\varepsilon} = 0$ sera une conséquence des équations $\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_3 = \frac{\bar{\varphi}_1}{\mu\varepsilon} = \frac{\bar{\varphi}_2}{\mu\varepsilon} = 0$. Le déterminant

$$\frac{\partial\left(\frac{\bar{\varphi}_1}{\mu\varepsilon}, \frac{\bar{\varphi}_2}{\mu\varepsilon}\right)}{(\partial y_1, y_2)} \gtrless 0$$

sera manifestement différent de zéro.

Pour que la solution périodique considérée représente une continuation analytique de la solution originaire (pour $\varepsilon = 0$), il faudra que les déplacements $\bar{\beta}_1$ $\bar{\beta}_2$ s'annulent avec ε.

Cependant nos équations $\frac{\overline{\varphi_1}}{\mu\varepsilon} = \frac{\overline{\varphi_2}}{\mu\varepsilon} = 0$, renferment les termes indépendants de ε. Il faudra par conséquent que

$$\int_0^T dt\, Y_1 = \int_0^T dt Y_2 = 0,$$

c'est-à-dire en désignant la valeur moyenne (séculaire) de Y par $[Y]$: $[Y_1] = [Y_2] = 0$. (56)

Cherchons les intégrales renfermées dans le symbole de la paranthèse. Il faut se rappeler que les arguments des termes critiques, qui nous intéressent uniquement à ce point de vue, seront précisément les mêmes que ceux des dites quatre catégories, étudiées dans le paragraphe deuxième. (23) (24) (25) etc.

Or nous avons trouvé que les trois catégories premières se réduiront à une seule, les deux autres n'étant pour rien dans l'évaluation de la valeur recherchée. En ce qui concerne la catégorie quatrième, celle-là n'existera que dans des cas particuliers des solutions longévales.

Les trois conditions ci-dessus, seront satisfaites dans tous les cas par l'annulation de l' argument critique.

En posant

$$0 \equiv \Theta = \frac{\zeta}{2\xi} = -py_1 + qy_2 + M'(p+q) = (p+q)\,n't - pnt - \\ - pht - qft + (p+q)M'_0 - pM_0 - (p+q)(\pi - \pi) \quad (22)$$

on retrouve les conditions bien connues des conjonctions et oppositions symétriques. Il restera cependant à faire un examen plus approfondi relativement aux éléments initiaux, séculaires. En effet, nous avons trouvé, en passant des éléments Képlériens osculateurs aux élements (troublés) du problème astéroïdique (c'est-à-dire séculaires) et enfin aux éléments séculaires du problème général des trois corps dans un plan — qu'il sera indispensable de satisfaire avec les dits éléments à certaines conditions bien définies. Nous nous reportons simplement à la fin du paragraphe 2, où nous avons résumé les trois conditions I, II, III. (37), (24), (29) resp. (30). p. 42.

Prenons le cas le plus général, celui des solutions asy-

métriques, longuaevales — où la quatrième catégorie des termes critiques (26) existe bien.

Dans le résumé précité, nous avons constaté en somme trois liaisons:

I. la relation (37) entre les éléments Képlériens

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1^0}\right] = (\hat{a}, \hat{e}, \hat{M}, \hat{\pi}) = 0 \qquad (37)$$

II. deux relations (29) (30) entre les éléments du problème restreint $\hat{a} + \delta a$, $\hat{e} + \delta e$, $\hat{M} + \delta M$, $\pi + \delta\pi$,

$$\left[\frac{\partial R}{\partial y_1}\right] = 0, \left[\frac{\partial R}{\partial y_2}\right] = 0 \qquad (29)\ (30)$$

Les trois conditions (56), trouvées dans ce qui précède, qui ne représentent que deux,

$$\text{III.}\ [Y_1] = [Y_2] = 0 \qquad (56)$$

constituent une liaison entre les éléments séculaires du problème, astéroïdique, c'est-à-dire les éléments du problème restreint, munis de déplacements β_1, β_2, α_1, α_2 de § 2 (19) page 22. ou bien: $a + \delta a + \Delta a$, $e + \delta e + \Delta e$, $M + \delta M + \Delta M$, $\pi + \delta\pi + \Delta\pi$, si nous désignons par Δ, les accroissement des éléments correspondants aux canoniques définies plus haut § 2 (19).

En distinguant ainsi les divers accroissements, exigés par les diverses étapes du problème, nous voyons clairement qu'on pourra souvent satisfaire simultanément aux conditions précédentes.

Ainsi, même dans le cas le plus général du problème des trois corps dans un plan, où il y aura la quatrième catégorie des termes critiques, les solutions longuaevales asymétriques et à fortiori les solutions séculaires asymétriques, pourront bien exister.

Inutile de mentionner que dans la dernière classe des solutions séculaires asymétriques, les deux conditions ad II (29) se réduiront à une seule, et les trois conditions pour (φ) (56) ne seront pas indépendantes non plus.

Passons enfin à la discussion du cas le plus étendu et le plus simple, celui des solutions séculaires symétriques. Nous le nommerons cas particulier, quasi dégénéré. Cette fois

la condition ad I (37) sera satisfaite identiquement, la série trigonométrique correspondante, composée des sinus disparaissant terme à terme pour $\zeta = 0$. En ce qui concerne les conditions ad II (29) nous avons montré que ces séries de sinus ont les mêmes arguments que les séries précédentes (37). En effet nous avons démontré dans le § 2 p. 40. que pour les solutions symétriques les accroissements des éléments angulaires disparaissent (41) $k_1^1 = k_2^1 = 0$ etc. c'est-à-dire $\delta M = \delta\pi = 0$. Donc ces séries de sinus ad II (29), (30) s'annulent également terme à terme.

Nous voyons immédiatement que la même circonstance se produit encore pour les deux dernières conditions (56) (en Y). Nous n'avons qu'à nous reporter au lemme, démontré à la fin du deuxième paragraphe p. 51., où nous avous fait voir en détail qu'il devrait nécessairement y avoir $K_1^1 = K_2^1 = 0$ etc, c'est-à-dire $\Delta M = \Delta\pi = 0$. Donc l'argument des ces séries restera le même ayant encore les valeurs osculatrices non troublées, donc les séries disparaîtront terme à terme, et l'existence de toutes les classes de solutions séculaires symétriques se trouve démontrée.

Il reste à préciser un peu le caractère géométrique des solutions nouvelles, trouvées. C'est à quoi nous servira la dernière des équations (43), (52) du mouvement pour le problème dans un plan, non réduit.

En effet cette équation donne la rotation séculaire du périhélie de (l'ancienne) planète troublante, elle s'écrira comme il suit:

$$-\frac{dg'}{dt} = -\frac{d\pi'}{dt} = -\frac{d\bar{\varphi}_4}{dt} = \varepsilon X_4 \qquad (58)$$

Pour discuter les mouvements périodiques, engendrés par l'apparition de la masse de l'ancien planétoide, devenu planète, rappelons que la solution séculaire avoisinante, valable pour le problème astéroïdique, n'est plus synodique, mais sidérale. Le périhélie de la planète troublante est absolument fixe, tandis que le périhélie de l'astéroïde fait des révolutions complètes plus ou moins vite. Dès qu'on commence à supposer $\varepsilon \leqq 0$, le périhélie de l'(ancienne) planète troublante se met de son côté en mouvement révolutionnaire.

D'après le choix des nos variables, ainsi que d'après les conditions, imposées à nos équations servant à déterminer les déplacements inconnus, nécessaires pour qu'une solution séculaire du problème général puisse avoir lieu — on reconnaît tout de suite qu'il n'y aura pas dans l'angle $y_2 = \pi' - \pi$, au total d'autre mouvement moyen (rotation séculaire) que celui de — f.

Mais il est bien possible — et rappelons à cet effet le cas des solutions ordinaires à période courte, de la deuxième sorte, — qu'avec $\varepsilon \gtrless 0$ la ligne des apsides de l'ellipse de l'ancienne planète troublante commence à tourner, naturellement de la seule manière admissible que ce mouvement séculaire rotatoire soit contrebalancé par un autre mouvement rotatoire, imposé, sous l'influence des termes en X_2 de la dite équation, au périhélie de l'ancien astéroïde.

Et en effet nous sommes en état d'indiquer facilement les expressions analytiques définissant ces rotations séculaires, du moins leurs valeurs principales. Il suffit d'ajouter le résultat de la quadrature donnant $-\frac{d\pi'}{dt}$, $\pi' = y_4$, dernière équation (52) à l'équation citée pour $\frac{dy_2}{dt}$ (52).

Nous nous bornons à envisager les parties principales en conservant uniquement les termes non transformés, même après les transformations exécutées. Nous avons accentué déjà à plusieurs reprises qu'en général (à l'exception de certains cas spéciaux, comme par exemple ceux des orbites longuaevales), les termes critiques bien connus de Laplace-Le Verrier, s'il entrent, bien entendu, dans la première des catégories critiques mentionnées — ne cessent pas d'être critiques, même après avoir subi toutes les variations nécessaires des constantes. Les constantes (c'est-à-dire les éléments) figurant dans leur coëfficients ont alors naturellement un sens changé.

Trois cas pourront se présenter

1°) Les éléments et déplacements inititiaux sont tels que $\frac{d\pi'}{dt} = 0$. Cette équation constitue une relation entre les paramètres du problème,

$$X_4 = 0 \qquad (59)$$

Et on pourra facilement trouver les valeurs admissibles et satisfaisant à la condition dernière. L'existence de la classe première et deuxième des nos solutions séculaires du problème général des trois corps se trouve ainsi démontrée (Voir le théorème page 8. du paragraphe premier de ce mémoire).

2°) On aura $\frac{d\pi}{dt} = +$ une fonction essentiellement positive.

La ligne des apsides de l' (ancienne) planète troublante commence à tourner dans le sens direct. Ce mouvement sera naturellement contrebalancé par une accélération séculaire du périhélie de l'ancien planétoïde, devenu la deuxième planète troublante.

Cependant il faut noter expressément que le mouvement périodique total quoique jouissant exactément de la période sidérale (du problème astéroidique) ne sera plus sidéral, mais seulement synodique, l'ancienne configuration sidérale commencant à tourner (termes critiques en X_4).

Cette 2° alternative, prouve ainsi l'existence de la troisième classe des solutions séculaires du problème général, comme nous l'avons mentionné dans le theorème du paragraphe premier, cité plus haut.

3°) On aura $\frac{d\pi'}{dt} =$ une fonction essentiellement négative. La ligne des apsides de l'(ancienne) planète troublante tourne dans le sens rétrograde. Le mouvement séculaire total est encore synodique jouissant de la même période du mouvement astéroïdique sidéral qui nous servait de point de départ.

La dernière alternative 3° entre encore dans le cas de la classe troisième des solutions de bifurcation du problème général en attestant ainsi leur existence. (Voir le théorème du paragraphe 1.)

Cependant le résultat obtenu n'est pas complet, pour l'étudier en détail, il faudra respecter le signe de la fonction f.

Rappelons que $f = \frac{d\pi}{dt} - \frac{d\pi'}{dt}$, représentait la différence des mouvements séculaires, rotatoires des lignes des apsides resp. π et π'. D'après le signe de f on distinguera facile-

ment les diverses possibilités I.—III. resp. *a) b) c) d)* qui pourront se présenter en général et que nous avons fixées dans le Résumé (§ 1) du présent mémoire p. 9. 10.

§ 5. Cas du problème général. Solutions séculaires d'une période quelconque.

Reprenons encore l'étude des équations transformées.

Les classes séculaires, fixées jusqu'ici pour le cas du problème général ne sont pas les seules qu'on puisse imaginer. Et en effet, après avoir passé au problème général nous nous débarassons d'une circonstance gênante, pour ainsi dire, valable dans le cas plus restreint du problème astéroïdique.

Maintenant le temps ne figure plus explicitement dans nos équations, c'est-à-dire une durée quelconque des mouvements périodiques sera admissible.

En employant la transformation $t=(1+\varkappa)\,\tau$ nous transcrivons ainsi les équations du mouvement (52):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\tau} &= (1+\varkappa)\,\mu\varepsilon Y_1\,,\\
-\frac{dy_1}{d\tau} &= =(1+\varkappa)\left\{\frac{\partial\Phi_0(x_1)}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial\Phi\,(x_1,x_2,a',e')}{\partial x_1}+\mu\varepsilon X_1\right\}\\
\frac{dx_2}{d\tau} &= (1+\varkappa)\,\mu\varepsilon Y_2\,,\\
-\frac{dy_2}{d\tau} &= (1+\varkappa)\left\{+\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\mu\varepsilon X_2\right\}\\
\frac{dx_3}{d\tau} &= (1+\varkappa)\;\;\varepsilon Y_3\,,\\
-\frac{dy_3}{d\tau} &= (1+\varkappa)\left\{\frac{\partial\Phi'_0(x_3)}{\partial x_3}+\varepsilon X_3\right\}\\
\frac{dx_4}{d\tau} &= (1+\varkappa)\;\;\varepsilon Y_4\,,\quad -\frac{dy_4}{d\tau}=(1+\varkappa)\,\varepsilon X_4
\end{aligned}\right\}\quad(60)$$

Dans les fonctions, où nous avons fixé les arguments, ne figurent jamais d'autres éléments que ceux qui sont indiqués.

Dans ces équations on éliminera l'excentricité de la seconde planète, c'est-à-dire de l'ancienne planète troublante, au moyen, de l'intégrale (transformée) des aires § 3 (11′)

$\varepsilon\varphi\,(a, e, a', e') + \mu^2\varepsilon\,(\text{série pérod.}) + \mu\gamma_1'\sqrt{a\,(1-e^{2'})} = c \quad (11')$

Rappelons les valeurs des éléments séculaires, transformés. (53)

$$\begin{aligned}
&x_1 = L(a, e, a', e', n') && y_1 = (n+h)t + \pi - \pi' + \beta_1,\\
&x_2 = L(a, e, a', e', n') - G(a, e, a', e', n') && y_2 = -ft + \pi' - \pi + \beta_2,\\
&x_3 = L' = \gamma_1'\sqrt{a'} && y_3 = M',\\
&\mu x_4 = \varepsilon G + \mu G' = \varepsilon\varphi(a,\ e, a',\ e',\ n') + \mu^2\varepsilon\ (\text{série périodique}) + \\
&\quad + \gamma_1' a'\sqrt{1-e'^2}, && y_4 = \pi''
\end{aligned}$$

Posons
$$\begin{aligned}
\bar{y}_1^0 &= M_0 + \pi - \pi' + \beta_1,\\
\bar{y}_2^0 &= -\pi + \pi' + \beta_2,\\
\bar{y}_3^0 &= M_0',\\
\bar{y}_4^0 &= \pi'.
\end{aligned} \qquad (53)$$

Nous trouverons facilement les valeurs des nos éléments pour la fin de la nouvelle période, prolongée $\tau = T$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \bar{x}_1^0 + \bar{\alpha}_1 + \bar{\varphi}_1, & y_1 &= (n+h)\tau + \bar{y}_1^0 + \bar{\beta}_1 + \bar{\psi}_1,\\
x_2 &= \bar{x}_2^0 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\varphi}_2, & y_2 &= -f\tau + \bar{y}_2^0 + \bar{\beta}_2 + \bar{\psi}_2, \qquad (61)\\
x_3 &= \bar{x}_3^0 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\varphi}_3, & y_3 &= n'\tau + \bar{y}_3^0 + \bar{\beta}_3 + \bar{\psi}_3,
\end{aligned}$$

Les déviations finales seront données par

$$\frac{d\bar{\varphi}_1}{d\tau} = (1+\varkappa)\mu\varepsilon Y_1, \quad n + h + \frac{d\bar{\psi}_1}{d\tau} = (1+\varkappa)\left\{\frac{k^4}{x_1^3} - \mu\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \mu\varepsilon X_1\right\}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}_2}{d\tau} = (1+\varkappa)\mu\varepsilon Y_2, \quad -f + \frac{d\bar{\psi}_2}{d\tau} = (1+\varkappa)\left\{-\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \mu\varepsilon X_2\right\}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}_3}{d\tau} = (1+\varkappa)\ \varepsilon Y_3, \quad n' + \frac{d\bar{\psi}_3}{d\tau} = (1+\varkappa)\left\{\frac{k^4}{x_3^3} - \varepsilon X_3\right\}$$

$$\bar{\psi}_1 = -(1+\varkappa)\,\mu\varepsilon\int_0^\tau X_1\,d\tau + \varkappa\left(\frac{k^4}{x_1^3} - \mu\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) -$$

$$-\bar{\alpha}_1\int_0^T d\tau\,\frac{\partial^2\,(\Phi_0 + \mu\Phi + \mu e' R)}{\partial x_1^2} - \bar{\alpha}_2\int_0^T d\tau\,\frac{\partial^2(\mu\Phi + \mu e' R)}{\partial x_1\,\partial x_2} -$$

$$-\alpha_3\int_0^T d\tau\,\frac{\partial^2\,(\mu\Phi + \mu e' R)}{\partial x_1\,\partial x_3} +$$

$$\overline{\psi}_2 = -(1+\varkappa)\,\mu\varepsilon\int_0^T X_2\,d\tau - \varkappa\,\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \overline{\alpha}_1\int_0^T d\tau\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_1\,\partial x_2} -$$

$$-\overline{\alpha}_2\int_0^T d\tau\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_2^2} - \overline{\alpha}_3\int_0^T d\tau\,\frac{\partial^2(\mu\Phi+\mu e' R)}{\partial x_2\,\partial x_3} + .$$

$$\overline{\psi}_3 = -(1+\varkappa)\,\varepsilon\int_0^T X_3\,d\tau + \varkappa\frac{k^4}{x_3^3} - \quad -\overline{\alpha}_3\int_0^T d\tau\,\frac{\partial^2\Phi'_0(x_3)}{\partial x_3^2} + \ldots$$

$$\overline{\varphi}_1 = (1+\varkappa)\,\mu\varepsilon\int_0^T Y_1\,d\tau + \overline{\beta}_1\,\mu\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \overline{\beta}_2\mu\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_1}{\partial y_2} +$$

$$+\overline{\beta}_3\,\mu\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_1}{\partial y_3} + \ldots$$

$$\overline{\varphi}_2 = (1+\varkappa)\,\mu\varepsilon\int_0^T Y_2\,d\tau + \overline{\beta}_1\mu\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_2}{\partial y_1} + \overline{\beta}_2\mu\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_2}{\partial y_2} +$$

$$+\overline{\beta}_3\,\mu\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_2}{\partial y_3} + \ldots$$

$$\overline{\varphi}_3 = (1+\varkappa)\,\varepsilon\int_0^T Y_3\,d\tau + \overline{\alpha}_1\,\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_3}{\partial x_1} + \overline{\alpha}_2\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_3}{\partial x_2} +$$

$$+\overline{\alpha}_3\,\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_3}{\partial x_3} + \overline{\beta}_1\,\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_3}{\partial y_1} + \overline{\beta}_2\,\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_3}{\partial y_2} +$$

$$+\overline{\beta}_3\,\varepsilon\int_0^T d\tau\,\frac{\partial Y_3}{\partial y_3} + \ldots$$

Nous n'ajoutons pas, afin d'abréger, toutes les explications nécessaires concernant les résultats trouvés ci-dessus pour $\overline{\psi}$, $\overline{\varphi}$. On comblera facilement cette lacune en se reportant au cas analogue des équations du § 4 (55), où il y avait seulement $\varkappa = 0$.

Les dernières équations servent à déterminer les inconnues $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$, $\overline{\alpha}_3$, $\overline{\beta}_1$, $\overline{\beta}_2$, $\overline{\beta}_3$, $\varkappa$. Ayant seulement six équations nous pouvons disposer librement de l'un de déplacements recherchés.

Si l'on admettait $\varkappa = 0$, on retomberait dans le cas précédent, il faudra donc démontrer que les dites équations peuvent

bien avoir une solution simple et distincte de celle de $\varkappa = 0$, par exemple en posant $\overline{\alpha_1} = 0$.

A cet effet, il faudra examiner le déterminant de nos équations.

Or ce déterminant se décomposera en deux facteurs:

Le premier facteur sera le déternimant des équations $\overline{\varphi_k}$, et l'on voit tout de suite qu'il coïncide précisément avec celui des équations en $\overline{\varphi_k}$ du cas précedent ($\varkappa = 0$) et qui a été trouvé différent de nul en général.

Le deuxième facteur s'écrira en posant:

$$H' = \Phi_0 + \mu\Phi + \mu e' R$$

$$(n+h)\frac{\partial\left(\frac{\partial H'}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi'_0}{\partial x_3}\right)}{\partial(x_2, x_3)} + f\frac{\partial\left(\frac{\partial H'}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi'_0}{\partial x_3}\right)}{\partial(x_1, x_3)} + n'\frac{\partial\left(\frac{\partial H'}{\partial x_2}, \frac{\partial H'}{\partial x_3}\right)}{\partial(x_1, x_2)} \gtrless 0 \qquad (62)$$

L'expression analytique montre assez clairement que ce déterminant est essentiellement distinct de celui qui lui correspond dans la discussion du cas précédent § 4. Enfin la condition de continuité donne les trois relations

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0 \qquad (56)$$

qui n'étant pas distinctes montrent par le même raisonnement que la dernière fois p. 66, l'existence des nouvelles solutions séculaires de conjonction (et d'opposition) symétriques et asymétriques.

Pour expliquer le caractère géométrique des ces nouvelles solutions trouvées, nous nous servirons — comme au cas des trois classes précédentes — de la dernière des équations (60) du mouvement. Cette équation détermine la rotation séculaire du périhélie de l'ancienne planète troublante:

$$-\frac{dg'}{d\tau} = -\frac{d\pi'}{d\tau} = -\frac{dy_4}{d\tau} = (1+\varkappa)\varepsilon X_4 \qquad (63)$$

Les traits désignant la transformation à la Delaunay, en ce qui concerne les fonctions, Φ, R, X ,Y, — sont supprimés.

Discutons cette fois les mouvements périodiques engendrés par l'apparition de la masse de l'ancien astéroïde,

devenu planète. Originairement le périhélie de la planète troublante était absolument fixe, dès qu'on commence à supposer $\varepsilon \gtrless 0$, le périhélie de l'ancienne planète troublante sera troublé de son côté et se mettra en mouvement révolutionnaire.

Mais tandisque dans les classes valables pour le problème astéroïdique des trois corps dans un plan, les mouvements étaient nécessairement sidérales — ils n'en seront cette fois que synodiques.

Le facteur $\varkappa$, déterminé d'une manière convenable, définit une rotation du système. C'est pourquoi la période du mouvement périodique total sera aussi changée en général — soit prolongée, ou raccourcie.

Dans les classes, définies pour le problème astéroïdique, il n'y avait pas d'autre mouvement moyen dans l'angle $y_2 = \pi' - \pi$ que celui de $-f$, mais cette fois-ci le dit mouvement sera augmenté d'une vitesse angulaire accessoire et déterminée au moyen de la valeur $\varkappa$.

Il sera bien possible qu'avec $\varepsilon \lesseqgtr 0$ la ligne des apsides de l'ellipse de l'ancienne planète troublante commence à tourner en dehors du mouvement imposé par l'existence du facteur $\varkappa$ — aussi sous l'influence des perturbations analogues à celles mentionnées au cas précédent ad 2° du problème général (p. 68. 69.) Ce mouvement séculaire rotatoire sera contrebalancé par un autre mouvement rotatoire, imposé sous l'influence des termes en X_2 (voir page 68) de l'équation $\frac{dy_2}{d\tau}$ — au périhélie de l'ancien astéroïde.

Nous sommes en état d'indiquer les expressions analytiques définissant ces rotations séculaires, du moins leurs valeurs principales. Il suffira d'ajouter la dernière des équations du système à celle qui donne $\frac{dy_2}{d\tau}$.

En rappelant la remarque faite dans le cas du paragraphe précédent sur les termes critiques et leur forme, après avoir exécuté toutes les transformations imaginées — nous envisageons les parties principales (à l'exception de certains cas spéciaux, comme par exemple les orbites longuévales) consistant seulement en des termes critiques bien connus de

Laplace-Le Verrier et donnés plus haut. Les éléments figurant dans leurs coëfficients ont alors un sens changé.

Trois cas pourront se présenter.

1°) Les éléments et déplacements initiaux sont tels que $\frac{d\pi'}{d\tau} \equiv 0$

Cette équation constitue une relation entre les paramètres du problème

$$(1+\varkappa)\,\varepsilon X_4 = 0 \qquad (59)$$

Ainsi on retombera au cas analogue à celui qui précède et qui sera du caractère sideral.

2°) On aura $\frac{d\pi'}{d\tau} =$ une fonction de valeur essentiellement positive.

La ligne des apsides de l'ancienne planète troublante tourne. Il y a deux raisons pour cela: L'une est l'existence du facteur $\varkappa$, à la suite duquel toute la configuration, au problème astéroïdique originairement fixe, tourne; l'autre raison provient des perturbations analogues à celles, définies plus haut et à la fin du paragraphe précendent sub 2°). Ce dernier mouvement sera contrebalancé par une accélération de la rotation séculaire du périhélie de l'ancien planétoïde, devenu planète troublante.

Le mouvement périodique total ne sera plus sidéral, mais seulement synodique et la durée de période sera en général changée en comparaison avec celle du mouvement périodique avoisinant et fixé pour le problème astéroïdique. La ligne des apsides de l'ancien planétoïde fait, pendant une période totale, une révolution complète et tourne outre cela d'un certain angle, la ligne des apsides de l'autre planète tourne du même angle (moindre que 360°). — Dans ces cas 1° et 2°, il s'agira de la classe quatrième (voir le theorème de la fin du paragraphe 1. p. 10.). Si enfin pendant la période totale du mouvement la ligne des apsides de l'ancien planètoïde tourne plusieurs fois, il s'agira de la classe cinquième. (p. 10.)

3°) On aura $\frac{d\pi'}{a\tau} =$ à une fonction essentiellement négative. La ligne des apsides de l'ancienne planète troublante

tourne dans le sens rétrograde. Le mouvement séculaire est synodique. La durée de période est distincte de celle, trouvee pour le problème asteroïdique, correspondant.

Ici encore on constatera les conditions pour les classes quatrième et cinquième, définies dans le paragraphe premier, dont l'existence se trouve ainsi rigoureusement prouvée.

D'ailleurs pour obtenir tous les cas divers qui pourront se présenter, il faudra étudier le signe de la fonction f. On distinguera ainsi facilement les possibilités I — III a) b) c) d), fixées plus haut, dans le Résumé du présent mémoire. p. 9, 10.

E R R A T A:

Au lieu de:	Page	Série	Lisez:
de le deuxième sorte	1	3 en remont.	de la deuxième sorte
geométrique	3	16	géométrique
rêprésente . .	4	17	représente
de la première classe	4	3 en remont.	de la première ou de la deuxième classe
mém-oire	5	1 en remont.	mé-moire
tome 1 fasc. 3.	5	note**)	tome II. fasc. 7.
de la période séculaire le même angle	9	18 en rem.	de la période le même angle
probléme	11	10	problème
élements	12	7	éléments
	13	10	(1)
deuxime planète	15	6	deuxième planète
pourles quatre	23	10	pour les quatre
$n_1 = n + h_1$,	28	8 en remont.	$n_1 = n + h$,
$n\ (\tau + \gamma)$	31	15	$n\ (t + \gamma)$
$g_0\ (\tau + \gamma)$	31	14	$g_0\ (t + \gamma)$
des solutions périodiques séculaires,	43	15	des solutions séculaires,
puissanees	45	15	puissances