

VĚSTNÍK KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK

TŘÍDA
MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.

ROČNÍK 1929.



V PRAZE 1930.
NÁKLADEM KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK.
V KOMISI FRANTIŠKA ŘIVNÁČE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME

CLASSE DES SCIENCES.

ANNÉE 1929.

1929



PRAGUE 1930.
PUBLIÉ PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME.
LIBRAIRIE FR. ŘIVNÁČ.

Obsah.

Vojtěch Jarník: Über das Riemannsche Integral.	I.
J. Sobotka: Zur Darstellung sphärischer Dreiecke durch Kreisvierecke. .	II.
Josef Klíma: O problému projektivnosti při orientované poloze dvou obrazů	III.
B. Němec: Multipolare Teilungen in chloralisierten Wurzeln.	IV.
B. Němec: Tumoren an den Wurzeln der Pflaumen.	V.
B. Němec: Über den Einfluss der Bakterien auf die Entwicklung des pflanzlichen Kallus.	VI.
Jan Kořínek: Sur la culture de la Spirogyra dans des suspensions bactériennes.	VII.
B. Němec: Über die Sporenbildung bei <i>Hydnotria Tulasnei</i>	VIII.
J. Sobotka: Einige Bemerkungen zur Theorie der elementaren Kon- struktionen.	IX.
B. Němec: Bakterien in den Fruchtkörpern einiger Ascomyzyten.	X.
E. Bydžovský: Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona.	XI.
Jaromír Klika: Příspěvek ke geobotanickému prozkumu středního Polabí.	XII.
M. Servít: Flechten aus der Čechoslovakei.	XIII.
Vladimír Kořínek: Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen.	XIV.
V. Hruška: Aproximace funkcí.	XV.
E. Buchar: Mesures d'étoiles doubles.	XVI.

Table des matières.

Vojtěch Jarník: Sur l'intégrale de Riemann.	I.
J. Sobotka: Sur la représentation des triangles sphériques à l'aide des quadrangles circulaires.	II.
Josef Klíma: Sur le problème de la projectivité pour la position orientée de deux images.	III.
B. Němec: Sur des partages multipolaires dans les racines chloralisées.	IV.
B. Němec: Sur des tumeurs sur les racines des pruniers.	V.
B. Němec: Sur l'influence des bactéries sur le développement du Callus végétal.	VI.
Jan Kořínek: Sur la culture de la Spirogyra dans des suspensions bactériennes.	VII.
B. Němec: Sur la formation des spores de Hydnotria Tulasnei.	VIII.
J. Sobotka: Quelques remarques concernant la théorie des constructions élémentaires.	IX.
B. Němec: Sur des bécaries dans les ovaires de quelques Ascomyzytes.	X.
B. Bydžovský: Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona.	XI.
Jaromír Klika: Une contribution à l'étude sociologique des associations de la vallée de l'Elbe (Labe).	XII.
M. Servít: Les lichens de la Tchécoslovaquie.	XIII.
Vladimír Kořínek: Sur la composition des formes quadratiques quaternaires.	XIV.
V. Hruška: Sur l'approximation des fonctions.	XV.
E. Buchar: Mesures d'étoiles doubles.	XVI.

Über das Riemannsche Integral.

Von VOJTĚCH JARNÍK.

Vorgelegt den 17. Feber 1929.

§ 1. Einleitung.

Wir bezeichnen im Folgenden, wenn $a < b$, mit (a, b) das offene Intervall $a < x < b$, mit $\langle a, b \rangle$ das abgeschlossene Intervall $a \leq x \leq b$, mit $(a, b >$ bzw. $\langle a, b)$ die halb-offenen Integrale $a < x \leq b$ bzw. $a \leq x < b$.¹⁾

Es sei nun $f(x)$ eine in $\langle a, b \rangle$ definierte und beschränkte Funktion, Dann wollen wir folgende Bezeichnungen benutzen: $m(f(x); a, b)$ sei die untere Grenze von $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$. Wenn

$$(1) \quad n \geq 1, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

so sei

$$(2) \quad s(f(x); x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n m(f(x); x_{i-1}, x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Wenn für zwei in $\langle a, b \rangle$ beschränkte Funktionen $f(x), g(x)$ und für jedes n, x_0, x_1, \dots, x_n mit (1) gilt $s(f(x); x_0, x_1, \dots, x_n) = s(g(x); x_0, x_1, \dots, x_n)$, wollen wir schreiben

$$(3) \quad S(f(x)) = S(g(x)) \text{ in } \langle a, b \rangle.$$

Wenn $f(x) = g(x)$ für alle x aus $\langle a, b \rangle$, so schreiben wir

$$(4) \quad f(x) \equiv g(x) \text{ in } \langle a, b \rangle.$$

Wenn eine in $\langle a, b \rangle$ beschränkte Funktion $f(x)$ gegeben ist, so sind auch alle Zahlen (2) mit der Bedingung (1) dadurch definiert; die obere Grenze der Zahlen (2) ist das untere Integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

¹⁾ Es handelt sich stets nur um endliche Intervalle und um reelle beschränkte Funktionen.

Wir fragen nun, ob und inwieweit auch umgekehrt die Funktion $f(x)$ durch die Angabe sämtlicher Zahlen (2) in $\langle a, b \rangle$ definiert ist, d. h. ob oder unter welchen weiteren Bedingungen (4) aus (3) folgt.

Erstens ist es klar, dass aus (3) nicht ohne weiteres auf (4) geschlossen werden darf. Denn es sei z. B. $f(x)$ stetig in $\langle a, b \rangle$ und es entstehe $g(x)$ aus $f(x)$ dadurch, dass man $f(x)$ für alle rationalen x irgendwie vergrößert. Dann gilt offenbar (3), nicht aber (4).

Dieser Umstand führt uns dazu, eine besondere Klasse von Funktionen durch die folgende Definition einzuführen:

Definition 1. Eine Funktion $f(x)$ heisse „vom Typus A in $\langle a, b \rangle$ “, wenn folgendes gilt:

1. $f(x)$ ist definiert und beschränkt in $\langle a, b \rangle$;
2. $f(a) \leq \liminf_{x=a+0} f(x)$; $f(b) \leq \liminf_{x=b-0} f(x)$;
3. $f(\xi_0) \leq \max \left(\liminf_{x=\xi_0-0} f(x), \liminf_{x=\xi_0+0} f(x) \right)$

für $a < \xi_0 < b$.

Und es gilt folgender

Satz 1. Zu jeder in $\langle a, b \rangle$ beschränkten Funktion $f(x)$ gibt es eine Funktion $g(x)$ vom Typus A in $\langle a, b \rangle$, so dass

$$(3) \quad S(f(x)) = S(g(x)) \text{ in } \langle a, b \rangle.$$

Nach diesem Satz kann es sich also bei unserem Problem nur darum handeln, ob für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die vom Typus A in $\langle a, b \rangle$ sind, (3) aus (4) folgt. Und wir werden beweisen:

Satz 2. Wenn $f_1(x)$, $f_2(x)$ vom Typus A in $\langle a, b \rangle$ sind und wenn

$$S(f_1(x)) = S(f_2(x)) \text{ in } \langle a, b \rangle,$$

so ist entweder

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \text{ in } \langle a, b \rangle,$$

oder

$$f_1(x) = A(x-a) + B, \quad f_2(x) = A(b-x) + B,$$

wo A, B Konstanten sind, $A \neq 0$.

Satz 3. $S(A(x-a) + B) = S(A(b-x) + B)$ in $\langle a, b \rangle$.

Diese beiden Sätze geben eine vollständige Antwort auf unsere Frage: Eine Funktion $f(x)$ vom Typus A in $\langle a, b \rangle$ ist durch die Angabe sämtlicher Zahlen (2) mit der Bedingung (1) eindeutig gegeben; bis auf den Fall, dass $f(x)$ eine in $\langle a, b \rangle$ nicht konstante lineare Funktion ist; in diesem Falle gibt es noch genau eine Funktion $g(x)$ vom Typus A in $\langle a, b \rangle$, die dieselben Zahlen (2) wie $f(x)$ besitzt; und zwar ist $g(x)$ auch linear in $\langle a, b \rangle$ und

$$f(a) = g(b), f(b) = g(a).$$

§ 2. Beweis des Satzes 1.

Es sei $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ definiert und beschränkt. Wir definieren $g(x)$ in $\langle a, b \rangle$ folgendermassen:

$$1) g(a) = \min(f(a), \liminf_{x=a+0} f(x))$$

$$2) g(b) = \min(f(b), \liminf_{x=b-0} f(x))$$

$$3) g(\xi_0) = \min(f(\xi_0), \max(\liminf_{x=\xi_0-0} f(x), \liminf_{x=\xi_0+0} f(x)))$$

für $a < \xi_0 < b$.

Wir behaupten: für $a \leq c < d \leq b$ ist

$$(5) \quad m(g(x); c, d) = m(f(x); c, d).$$

Denn offenbar ist erstens $m(g(x); c, d) \leq m(f(x); c, d)$. Zweitens gibt es nach 1) 2) 3) zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem ξ_0 aus $\langle c, d \rangle$ ein x aus $\langle c, d \rangle$, so dass $f(x) < g(\xi_0) + \varepsilon$; also $m(f(x); c, d) \leq m(g(x); c, d)$. Daraus folgt aber (5).

Weiter ist für $a \leq \xi_0 < b$ nach (5) $\liminf_{x=\xi_0+0} g(x) = \lim_{h'=+0} m(g(x); \xi_0+h, \xi_0+h')$

$$\begin{aligned} \lim_{h=+0} m(g(x); \xi_0+h, \xi_0+h') &= \lim_{h'=+0} \lim_{h=+0} m(f(x); \xi_0+h, \xi_0+h') = \\ &= \liminf_{x=\xi_0+0} f(x) \end{aligned}$$

und ebenso für $a < \xi_0 \leq b$

$$\liminf_{x=\xi_0-0} g(x) = \liminf_{x=\xi_0-0} f(x).$$

Also ist wegen 1) 2) 3)

$$g(a) \leq \liminf_{x=a+0} g(x), \quad g(b) \leq \liminf_{x=b-0} g(x),$$

$$g(\xi_0) \leq \max(\liminf_{x=\xi_0-0} g(x), \liminf_{x=\xi_0+0} g(x))$$

für $a < \xi_0 < b$.

Also ist $g(x)$ vom Typus A in $\langle a, b \rangle$ und aus (5) folgt (3); w. z. b. w.

§ 3. Beweis des Satzes 2.

In diesem Beweis liegt die ganze Schwierigkeit.

Hilfssatz 1. Wenn für zwei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ vom Typus A in $\langle a, b \rangle$ gilt

$$S(f_1(x)) = S(f_2(x)) \text{ in } \langle a, b \rangle$$

und

$$\begin{aligned} m(f_1(x); a, \xi) &= m(f_2(x); a, \xi) \\ m(f_1(x); \xi, b) &= m(f_2(x); \xi, b) \end{aligned}$$

für alle ξ mit $a < \xi < b$, so ist $f_1(x) \equiv f_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$.

Beweis: Es genügt zu zeigen: wenn $f(x)$ vom Typus A in $\langle a, b \rangle$ ist, so lässt sich $f(\xi_0)$ für $a \leq \xi_0 \leq b$ durch die Zahlen

$s(f(x); x_0, x_1, \dots, x_n)$, $m(f(x); a, \xi)$, $m(f(x); \xi, b)$ mit $n \geq 1$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $a < \xi < b$ eindeutig darstellen.

Und das geschieht durch folgende Formeln:

$$f(a) = \min(f(a), \liminf_{x=a+0} f(x)) = \lim_{h=+0} m(f(x); a, a+h);$$

$$f(b) = \min(f(b), \liminf_{x=b-0} f(x)) = \lim_{h=+0} m(f(x); b-h, b);$$

$$m(f(x); \xi, \eta) = \frac{1}{\eta - \xi} (s(f(x); a, \xi, \eta, b) - m(f(x); a, \xi)(\xi - a) - m(f(x); \eta, b)(b - \eta))$$

für $a < \xi < \eta < b$;

$$\begin{aligned} f(\xi_0) &= \max(\min(f(\xi_0), \liminf_{x=\xi_0-0} f(x)), \min(f(\xi_0), \liminf_{x=\xi_0+0} f(x))) = \\ &= \max(\lim_{h=+0} m(f(x); \xi_0-h, \xi_0), \lim_{h=+0} m(f(x); \xi_0, \xi_0+h)) \end{aligned}$$

für $a < \xi_0 < b$.

Hilfssatz 2. Voraussetzungen:

$f_1(x)$, $f_2(x)$ seien vom Typus A in $\langle a, b \rangle$.

Es sei

$$(6) \quad S(f_1(x)) = S(f_2(x)) \text{ in } \langle a, b \rangle.$$

Es sei nicht

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \text{ in } \langle a, b \rangle.$$

Der gemeinsame Wert von

$$s(f_i(x); x_0, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2)$$

werde mit

$$s(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

bezeichnet.

Behauptungen:

I. Für kein ξ_0 ist

$$s(a, \xi_0, b) = s(a, b), \quad a < \xi_0 < b.$$

II. Für kein ξ_0 ist

$$\liminf_{x=\xi_0} s(a, x, b) = s(a, b), \quad a < \xi_0 < b.$$

III. Bei geeigneter Numerierung ist

$$f_1(a) = m(f_1(x); a, b) = \frac{s(a, b)}{b - a},$$

$$f_2(b) = m(f_2(x); a, b) = \frac{s(a, b)}{b - a},$$

$$f_1(a) < m(f_1(x); c, b)$$

$$f_2(b) < m(f_2(x); a, c)$$

für jedes c mit $a < c < b$.

Diese Numerierung werde in den folgenden Behauptungen beibehalten.

IV. Für $a \leq \xi < \eta < b$ ist

$$m(f_1(x); \xi, b) < m(f_1(x); \eta, b).$$

V. Für $a \leq x < y \leq b$ ist

$$f_1(x) < f_1(y).$$

VI. Für $a \leq x < y \leq b$ ist

$$f_2(x) > f_2(y).$$

Beweis: Wenn ich im Folgenden etwas über $f_i(x)$ aussage, meine ich damit, dass die Aussage für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s(a, b) = 0$ (also $m(f_i(x); a, b) = 0$) — denn sonst betrachte man $f_i(x) - \frac{s(a, b)}{b - a}$ statt $f_i(x)$.

Es sei nun $a < \xi_0 < b$, $s(a, \xi_0, b) = s(a, b) = 0$. Dann ist $m(f_i(x); a, \xi_0) = m(f_i(x); \xi_0, b) = m(f_i(x); a, b) = 0$, also für $\xi_0 \leq \xi < b$

$$m(f_i(x); a, \xi) = 0, m(f_i(x); \xi, b) = \frac{s(a, \xi, b)}{b - \xi}$$

und für $a < \xi < \xi_0$

$$m(f_i(x); \xi, b) = 0, m(f_i(x); a, \xi) = \frac{s(a, \xi, b)}{\xi - a}.$$

Also ist für jedes ξ mit $a < \xi < b$

$$m(f_1(x); a, \xi) = m(f_2(x); a, \xi), m(f_1(x); \xi, b) = m(f_2(x); \xi, b).$$

Also ist wegen (6) und nach Hilfssatz 1.

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \text{ in } \langle a, b \rangle,$$

was einen Widerspruch gegen die Voraussetzungen ergibt. Damit ist die Behauptung I. bewiesen.

Es sei nun $a < \xi_0 < b$, $\lim_{x=\xi_0} \inf s(a, x, b) = s(a, b) = 0$.

Dann gibt es entweder eine Folge ξ_1, ξ_2, \dots mit $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots$, $\xi_n \rightarrow \xi_0$, $s(a, \xi_n, b) \rightarrow 0$ oder eine Folge ξ_1, ξ_2, \dots mit $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \dots$, $\xi_n \rightarrow \xi_0$, $s(a, \xi_n, b) \rightarrow 0$.

In beiden Fällen ist also

$$(\xi_n - a) m(f_i(x); a, \xi_n) + (b - \xi_n) m(f_i(x); \xi_n, b) \rightarrow 0,$$

also

$$m(f_i(x); a, \xi_n) \rightarrow 0, m(f_i(x); \xi_n, b) \rightarrow 0.$$

Im ersten Fall ($\xi_1 < \xi_2 < \dots$) haben wir also:

Für $b > \xi \geq \xi_0$ ist $m(f_i(x); a, \xi) \leq m(f_i(x); a, \xi_n)$ für alle n , also

$$(7) \quad m(f_i(x); a, \xi) = 0, m(f_i(x); \xi, b) = \frac{s(a, \xi, b)}{b - \xi}.$$

Für $a < \xi < \xi_0$ ist $m(f_i(x); \xi, b) \leq m(f_i(x); \xi_n, b)$ für fast alle n , also

$$(8) \quad m(f_i(x); \xi, b) = 0, m(f_i(x); a, \xi) = \frac{s(a, \xi, b)}{\xi - a},$$

Aus (6), (7), (8) folgt aber nach Hilfssatz 1. $f_1(x) \equiv f_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$, also ein Widerspruch.

Ebenso ergibt sich ein Widerspruch im zweiten Fall ($\xi_1 > \xi_2 > \dots$). Damit ist die Behauptung II. bewiesen.

Es sei nun $a < c < d < b$; dann ist nach der Behauptung II.

$$(9) \quad m(f_1(x); c, d) > 0.$$

Denn sonst könnte man entweder ein ξ_0 mit $c \leq \xi_0 \leq d$,

$f_1(\xi_0) = 0$ finden, oder eine Folge ξ_1, ξ_2, \dots von untereinander verschiedenen Zahlen mit $c \leq \xi_n \leq d$, $f_1(\xi_n) \rightarrow 0$. Im ersten Fall wäre

$s(a, \xi_0, b) = (\xi_0 - a) m(f_1(x); a, \xi_0) + (b - \xi_0) m(f_1(x); \xi_0, b) = 0 = s(a, b)$, gegen die Behauptung I. Im zweiten Fall wäre $s(a, \xi_n, b) = (\xi_n - a) m(f_1(x); a, \xi_n) + (b - \xi_n) m(f_1(x); \xi_n, b) \rightarrow 0$, also, wenn ξ_0 einen Häufungswert der Folge ξ_1, ξ_2, \dots bedeutet, $\liminf_{x=\xi_0} s(a, x, b) = 0 = s(a, b)$, gegen die

Behauptung II.

Wegen $m(f_1(x); a, b) = 0$ und wegen (9) ist also entweder für alle h mit $0 < h < b - a$

$$m(f_1(x); a, a + h) = 0, \text{ also}$$

$$f_1(a) = \min(f_1(a), \liminf_{x=a+0} f_1(x)) = \lim_{h=+0} m(f_1(x); a, a+h) = 0$$

oder es ist für alle h mit $0 < h < b - a$

$$m(f_1(x); b - h, b) = 0, \text{ also}$$

$$f_1(b) = \min(f_1(b), \liminf_{x=b-0} f_1(x)) = \lim_{h=+0} m(f_1(x); b-h, b) = 0.$$

Es kann aber nicht $f_1(a) = f_1(b) = 0$ sein, denn sonst wäre für $a < x < b$ $s(a, x, b) = 0 = s(a, b)$, gegen die Behauptung I. Es gilt also genau eine von den beiden Gleichungen

$$f_1(a) = 0, f_1(b) = 0,$$

Ebenso gilt genau eine von den beiden Gleichungen

$$f_2(a) = 0, f_2(b) = 0$$

und für $a < c < d < b$ ist

$$m(f_2(x); c, d) > 0.$$

Wäre nun $f_1(a) = f_2(a) = 0$, so wäre für $a < \xi < b$

$$m(f_i(x); a, \xi) = 0, m(f_i(x); \xi, b) = \frac{s(a, \xi, b)}{b - \xi}$$

also nach Hilfssatz 1. $f_1(x) \equiv f_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$, gegen die Voraussetzung. Ebenso ist nicht $f_1(b) = f_2(b) = 0$.

Also ist bei geeigneter Numerierung

$$f_1(a) = 0, f_1(b) > 0, f_2(a) > 0, f_2(b) = 0.$$

Weil

$$\begin{aligned} 0 < f_1(b) &= \min(f_1(b), \liminf_{x=b-0} f_1(x)) = \\ &= \lim_{h=+0} m(f_1(x); b-h, b), \end{aligned}$$

so gilt wegen (9) für $a < c < b$

$$m(f_1(x); c, b) > 0$$

und ebenso beweist man

$$\overline{m}(f_2(x); a, c) > 0.$$

Damit ist die Behauptung III bewiesen.

Wir schalten nun folgende Zwischenbemerkung ein.

Es sei $a < c < b$; wir setzen

$$\begin{aligned} \overline{f}_i(x) &= f_i(x) \text{ für } a \leq x < c, \overline{f}_i(c) = \\ &= \min(f_i(c), \liminf_{x=c-0} f_i(x)) \quad (i=1, 2). \end{aligned}$$

Dann ist offenbar $\overline{f}_i(x)$ vom Typus A in $\langle a, c \rangle$ und $m(f_i(x); \xi, \eta) = m(\overline{f}_i(x); \xi, \eta)$ für $a \leq \xi < \eta \leq c$. Für

$$(10) \quad n \geq 1, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c$$

ist also

$$s(\overline{f}_i(x); x_0, x_1, \dots, x_n) = s(x_0, x_1, \dots, x_n, b) - m(f_i(x); c, b) (b - c).$$

Wir setzen noch

$$f_i(x; c) = \overline{f}_i(x) + m(f_i(x); c, b) \frac{b - c}{c - a}$$

Dann ist $f_i(x; c)$ vom Typus A in $\langle a, c \rangle$ und aus (10) folgt

$$s(f_i(x; c); x_0, x_1, \dots, x_n) = s(x_0, x_1, \dots, x_n, b),$$

also insbesondere

$$S(f_1(x; c)) = S(f_2(x; c)) \text{ in } \langle a, c \rangle.$$

Die Differenz $f_i(x; c) - f_i(x)$ ist konstant in $\langle a, c \rangle$.

Ebenso setzen wir

$$\begin{aligned} \overline{F}_i(x) &= f_i(x) \text{ für } c < x \leq b, \\ \overline{F}_i(c) &= \min(f_i(c), \liminf_{x=c+0} f_i(x)) \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

und

$$F_i(x; c) = \overline{F}_i(x) + m(f_i(x); a, c) \frac{c - a}{b - c}.$$

Dann ist $F_i(x; c)$ vom Typus A in $\langle c, b \rangle$; für

$$n \geq 1, c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ ist}$$

$$s(F_i(x; c); x_0, x_1, \dots, x_n) = s(a, x_0, x_1, \dots, x_n),$$

also insbesondere

$$S(F_1(x; c)) = S(F_2(x; c)) \text{ in } \langle c, b \rangle.$$

Die Differenz $F_i(x; c) - f_i(x)$ ist konstant in $\langle c, b \rangle$ ²⁾

Wir wollen nun voraussetzen, dass es zwei Zahlen ξ, η gibt, so dass

$$(11) \quad a \leq \xi < \eta < b, \quad m(f_1(x); \xi, b) = m(f_1(x); \eta, b).$$

Nach der Behauptung III ist sicher $\xi > a$. Wir bilden $F_i(x; \xi)$. Die Funktion $F_2(x; \xi)$ nimmt ihren kleinsten Wert in $\langle \xi, b \rangle$ im Punkt b an, da dies nach der Behauptung III für $f_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$ gilt. Weiter gilt $S(F_1(x; \xi)) = S(F_2(x; \xi))$ in $\langle \xi, b \rangle$. Wäre nicht $F_1(x; \xi) \equiv F_2(x; \xi)$ in $\langle \xi, b \rangle$, so müsste nach der Behauptung III gelten

$F_1(\xi; \xi) = m(F_1(x; \xi); \xi, b) < m(F_1(x; \xi); \eta, b)$ im Widerspruch zu (11). Also ist $F_1(x; \xi) \equiv F_2(x; \xi)$ in $\langle \xi, b \rangle$, also ist $f_1(x) - f_2(x)$ konstant in $\langle \xi, b \rangle$.

Es sei X die untere Grenze derjenigen ξ , zu welchen es ein η mit (11) gibt. Also ist $a \leq X < b$ und $f_1(x) - f_2(x)$ ist konstant in $\langle X, b \rangle$.

Es sei $X < y < b$. Weil $f_1(x) - f_2(x)$ nicht in $\langle a, b \rangle$ konstant ist³⁾, so ist $f_1(x) - f_2(x)$ nicht konstant in $\langle a, \frac{X+y}{2} \rangle$. Also ist auch $f_1(x; y) - f_2(x; y)$ nicht konstant, also insbesondere nicht identisch Null in $\langle a, y \rangle$. Weil $S(f_1(x; y)) = S(f_2(x; y))$ in $\langle a, y \rangle$ und weil $f_1(x; y)$ in $\langle a, y \rangle$ ihren kleinsten Wert im Punkte a annimmt, so ist nach Behauptung III

$$f_2(y; y) < m(f_2(x; y); a, z)$$

für $a < z < y$; also — nach der Definition von $f_2(x; y)$

$$(12) \quad \min(f_2(y), \liminf_{x=y-0} f_2(x)) < m(f_2(x); a, z)$$

für $X < y < b, a < z < y$.

Es sei $0 < t < b - y$; dann ist nach (12)

$$\min(f_2(y+t), \liminf_{x=y+t-0} f_2(x)) < m(f_2(x); a, y).$$

²⁾ Auch die Differenzen

$m(f_i(x; c); \xi, \eta) - m(f_i(x); \xi, \eta), m(F_i(x; c); \xi', \eta') - m(f_i(x); \xi', \eta')$ sind offenbar für $a \leq \xi < \eta \leq c \leq \xi' < \eta' \leq b$ von ξ, η, ξ', η' unabhängig

³⁾ Denn sonst müsste wegen (6) diese Konstante Null sein, also $f_1(x) \equiv f_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$ gegen die Voraussetzung.

Für $t \rightarrow 0$ folgt daraus

$$\liminf_{x=y+0} f_2(x) \leq m(f_2(x); a, y),$$

also

$$\liminf_{x=y+0} f_2(x) \leq \min(f_2(y), \liminf_{x=y-0} f_2(x)).$$

Weil

$$f_2(y) \leq \max(\liminf_{x=y-0} f_2(x), \liminf_{x=y+0} f_2(x)),$$

so ist also

$$f_2(y) \leq \liminf_{x=y-0} f_2(x),$$

und statt (12) kann man schreiben

$$(13) \text{ für } X < y < b, a < z < y \text{ ist } f_2(y) < m(f_2(x); a, z).$$

Insbesondere ist also für $X \leq z < y \leq b$

$$f_2(y) < f_2(z)$$

(für $y = b$ folgt diese Ungleichung aus der Behauptung III).

Also ist $f_2(x)$ abnehmend in $\langle X, b \rangle$, und da $f_1(x) - f_2(x)$ in $\langle X, b \rangle$ konstant ist, so ist $f_1(x)$ abnehmend in $\langle X, b \rangle$.

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle $a < X < b$ und $X = a$.

1. Fall. $a < X < b$. Wir wählen ein $h > 0$ so, dass $h < X - a$, $h < \frac{b-X}{2}$, $8Mh < \left(f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right) - f_2(b)\right)\left(\frac{b-X}{2} + h\right)$ wo M eine gemeinsame obere Schranke von $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$ in $\langle a, b \rangle$ ist. Wir bilden für ein ξ mit $X < \xi \leq \frac{b+X}{2}$

$$s(a, X-h, \xi, b) = m(f_1(x); a, X-h)(X-h-a) + m(f_1(x); X-h, \xi)(\xi-X+h) + m(f_1(x); \xi, b)(b-\xi).$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen für $i=1$ und $i=2$ ergibt sich, dass der Ausdruck

$$(14) \quad (m(f_1(x); X-h, \xi) - m(f_2(x); X-h, \xi))(\xi-X+h) + (m(f_1(x); \xi, b) - m(f_2(x); \xi, b))(b-\xi)$$

von ξ unabhängig ist. Es ist aber

$$m(f_1(x); \xi, b) = f_1(b), \quad m(f_2(x); \xi, b) = f_2(b);$$

und nach der Definition von X ist

$$m(f_1(x); X-h, b) < m(f_1(x); \xi, b),$$

$$\text{also } m(f_1(x); X-h, \xi) < m(f_1(x); \xi, b) \leq f_1(b).$$

Endlich ist nach (13)

$$f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right) < m(f_1(x); a, \xi) \leq m(f_2(x); X-h, \xi).$$

Also ist der Ausdruck (14) für $\xi = \frac{b+X}{2}$ kleiner als

$$\begin{aligned} & \left(f_1(b) - f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right)\right) \left(\frac{b-X}{2} + h\right) + (f_1(b) - f_2(b)) \frac{b-X}{2} = \\ & = (f_1(b) - f_2(b)) (b - X + h) - \left(f_2\left(\frac{2b+X}{3}\right) - \right. \\ & \left. - f_2(b)\right) \left(\frac{b-X}{2} + h\right) < (f_1(b) - f_2(b)) (b - X + h) - 8Mh. \end{aligned}$$

Für $\xi = X + h$ ist aber der Ausdruck (14) grösser als

$$-2M \cdot 2h + (f_1(b) - f_2(b)) (b - X - h) > -8Mh + (f_1(b) - f_2(b)) (b - X + h).$$

Also ist der Ausdruck (14) doch nicht von ξ unabhängig, was einen Widerspruch liefert.

2. Fall. $X = a$. Dann ist $f_2(x)$ abnehmend in $\langle a, b \rangle$, $f_1(x)$ in (a, b) . Nach der Behauptung III. ist $f_1(a) = f_2(b) = 0$, $f_1(b) > 0$. Also ist für $0 < h < b - a$, $s(a, a + h, b) = f_1(b)(b - a - h) = f_2(a + h)h$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn für $h \rightarrow 0$ ist $f_2(a + h)h \rightarrow 0$, $f_1(b)(b - a - h) \rightarrow f_1(b)(b - a) > 0$.

Daher enthält die Annahme (11) jedenfalls einen Widerspruch, womit die Behauptung IV. bewiesen ist.

Es sei nun $a \leq \xi < \eta \leq b$. Wenn $\xi = a$, so ist nach der Behauptung III. $f_1(\xi) < f_1(\eta)$. Also sei $\xi > a$. Dann ist für $h > 0$, $h < \xi - a$, $h < \frac{\eta - \xi}{2}$ nach der Behauptung IV.

$$\begin{aligned} & m(f_1(x); \xi - h, b) < m(f_1(x); \xi, b) \\ & < m(f_1(x); \xi + h, b) < m\left(f_1(x); \frac{\xi + \eta}{2}, b\right). \end{aligned}$$

Also

$$m(f_1(x); \xi - h, \xi) < m(f_1(x); \xi, \xi + h) < m\left(f_1(x); \frac{\xi + \eta}{2}, b\right).$$

Also für $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \min(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi-0} f_1(x)) & \leq \min(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi+0} f_1(x)) \leq \\ & \leq m\left(f_1(x); \frac{\xi + \eta}{2}, b\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$f_1(\xi) = \max \left(\min \left(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi-0} f_1(x) \right), \min \left(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi+0} f_1(x) \right) \right)$$

ist also

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \min \left(f_1(\xi), \liminf_{x=\xi+0} f_1(x) \right) \leq m \left(f_1(x); \frac{\xi+\eta}{2}, b \right) \\ &< m \left(f_1(x); \frac{\xi+2\eta}{3}, b \right) \leq f_1(\eta), \end{aligned}$$

womit die Behauptung V. bewiesen ist. Durch die Betrachtung der Funktionen $f_2(-x)$, $f_1(-x)$ im Intervall $\langle -b, -a \rangle$ wird endlich die Behauptung VI. auf die Behauptung V. zurückgeführt.

Damit ist der Hilfssatz 2 in allen Teilen bewiesen.

Beweis des Satzes 2. Nach Hilfssatz 2. ist $f_1(x)$ wachsend, $f_2(x)$ abnehmend in $\langle a, b \rangle$. Also ist für $a < x < y < b$

$$(15) \quad s(a, x, b) = f_1(a)(x-a) + f_1(x)(b-x) = f_2(x)(x-a) + f_2(b)(b-x),$$

$$(16) \quad s(a, x, y, b) = f_1(a)(x-a) + f_1(x)(y-x) + f_1(y)(b-y) = f_2(x)(x-a) + f_2(y)(y-x) + f_2(b)(b-y).$$

Nach (15), (16) ist

$$\begin{aligned} (17) \quad & (f_1(x) - f_2(y))(y-x) = f_2(x)(x-a) + \\ & + f_2(b)(b-y) - f_1(a)(x-a) - f_1(y)(b-y) = \\ & = s(a, x, b) + f_2(b)(x-y) - s(a, y, b) - \\ & - f_1(a)(x-y) = s(a, x, b) - s(a, y, b), \end{aligned}$$

$$\text{da } f_1(a) = f_2(b) = \frac{s(a, b)}{b-a}.$$

Weil $f_1(x)$, $f_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$ beschränkt sind, so ist nach (17) $s(a, x, b)$ eine stetige Funktion von x in (a, b) . Nach (15) sind also auch $f_1(x)$, $f_2(x)$ stetig in (a, b) ; also folgt aus (17) bei $y \rightarrow x+0$

$$\lim_{y \rightarrow x+0} \frac{s(a, x, b) - s(a, y, b)}{y-x} = f_1(x) - f_2(x)$$

und bei $x \rightarrow y-0$

$$\lim_{x \rightarrow y-0} \frac{s(a, x, b) - s(a, y, b)}{y-x} = f_1(y) - f_2(y).$$

Also ist für $a < x < b$

$$\frac{d}{dx} s(a, x, b) = f_2(x) - f_1(x).$$

Aus (15) folgt dann die Differentierbarkeit von $f_i(x)$ in (a, b) und die Richtigkeit der Gleichungen

$$(18) \quad \begin{aligned} f_2(x) &= f_1(a) + (b-x)f'_1(x) \\ f_1(x) &= f_2(b) - (x-a)f'_2(x) \end{aligned}$$

in (a, b) . Daraus folgt die Existenz von $f_1''(x)$ in (a, b) und die Gleichung

$$f_1''(x)(b-x)(x-a) - f'_1(x)(x-a) + f_1(x) - f_2(b) = 0$$

Die Funktion $f_1(x) - f_2(b) = f_1(x) - f_1(a)$ genügt also für $a < x < b$ der Gleichung

$$y''(b-x)(x-a) - y'(x-a) + y = 0,$$

deren allgemeines Integral ist

$$C_1(x-a) + C_2 \left(b-a + (x-a) \log \frac{b-x}{x-a} \right).$$

Da $f_1(x)$ in $\langle a, b \rangle$ wachsend und beschränkt ist, gilt notwendig

$$(19) \quad f_1(x) = f_1(a) + A(x-a), \quad A > 0$$

für $a < x < b$. Für $x = a$ ist diese Gleichung auch erfüllt; weiter ist $f_1(b) \leq \lim_{x \rightarrow b-0} f_1(x)$ (weil $f_1(x)$ wächst) und andererseits $f_1(b) \leq \liminf_{x \rightarrow b-0} f_1(x)$.

Also ist $f_1(x)$ linksseitig stetig im Punkt b , also gilt (19) auch für $x = b$.

Aus (15) folgt dann

$$(20) \quad f_2(x) = f_1(a) + A(b-x) = f_2(b) + A(b-x)$$

für $a < x < b$; für $x = b$ ist diese Gleichung auch erfüllt; weiter ist $f_2(a) \geq \lim_{x \rightarrow a+0} f_2(x)$ (weil $f_2(x)$ abnimmt) und andererseits $f_2(a) \geq \liminf_{x \rightarrow a+0} f_2(x)$. Also ist $f_2(x)$ rechtsseitig stetig im Punkt a , also gilt (20) auch für $x = a$.

Daher gilt (19) und (20) für $a \leq x \leq b$, womit Satz 2. bewiesen ist.

§ 4. Beweis des Satzes 3.

Für $n \geq 1$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $A > 0$ ⁴⁾ ist

$$\begin{aligned} & s(A(x-a) + B; x_0, x_1, \dots, x_n) \\ & - s(A(b-x) + B; x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

⁴⁾ $A > 0$ bedeutet offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (A(x_{i-1} - a) + B - A(b - x_i) - B)(x_i - x_{i-1}) \\
&= A \sum_{i=1}^n (x_{i-1} + x_i)(x_i - x_{i-1}) - A(a+b) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\
&= A \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) - A(a+b)(b-a) \\
&= A(b^2 - a^2) - A(b^2 - a^2) = 0, \text{ w. z. b. w.}
\end{aligned}$$

Résumé.

Sur l'intégrale de Riemann.

Par Vojtěch J a r n í k.

$f(x)$ étant définie et bornée dans l'intervalle fermé $\langle \xi, \eta \rangle$, désignons par $m(f(x); \xi, \eta)$ la borne inférieure de $f(x)$ dans $\langle \xi, \eta \rangle$.

Supposons $f(x)$ définie et bornée dans $\langle a, b \rangle$. Alors on peut former, pour $n \geq 1$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, les nombres

$$(1) \ s(f(x); x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n m(f(x); x_{i-1}, x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

La borne supérieure des nombres (1) est l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.

Nous nous posons, dans la Note présente, le problème suivant: en quelle mesure une fonction $f(x)$ est-elle déterminée par la totalité des nombres (1)? La résolution de ce problème est fournie par les théorèmes 1, 2, 3 du § 1^{er}.

II.

Zur Darstellung sphärischer Dreiecke durch Kreisvierecke.

Von J. SOBOTKA.

Vorgelegt am 10. April 1929.

1. Auf die Darstellung sphärischer Dreiecke durch Kreisvierecke hat wohl zuerst E. Study in seiner grundlegenden Schrift: »Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen« (1893) aufmerksam gemacht und diesbezüglich eine Reihe interessanter Sätze aufgestellt. Unabhängig von Study's Auffassung, aber auf ähnliche Art, hat Ernst Eckhardt in seiner Schrift: »Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks (1909) bemerkenswerte Zusammenhänge der Relationen zwischen den Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreiecks und denen eines Kreisvierecks sowohl rechnerisch als auch konstruktiv behandelt.

Nun wissen wir, daß eine einfache Abbildung der Gebilde auf einer Kugel in eine Ebene durch die stereographische Projektion erfolgt, durch welche alle Winkel einer Figur auf der Kugel in gleiche Winkel projiziert werden. Da die Längen der Seiten dieser Figur gleich den entsprechenden Winkeln der zu ihr polaren Figur sind, so liefert die stereographische Projektion der Polarfigur die wahren Seitenlängen der ursprünglichen Figur. Tatsächlich führt die stereographische Projektion fast unmittelbar zu den diesbezüglichen Beziehungen und Darstellungen, wie sie sich in den erwähnten Schriften vorfinden, was zu zeigen und weiter zu entwickeln den Zweck der vorliegenden Arbeit bildet.

2 Wir projizieren die Gebilde auf der Kugel, deren Halbmesser mit r bezeichnet werden möge, stereographisch in eine durch ihren Mittelpunkt O gehende Ebene und bezeichnen

die Projektion eines Gebildes dadurch, daß wir zum Symbol des Gebildes oben einen Strich beisetzen. Wir beschränken uns, obzwar es nicht notwendig ist, auf Euler'sche Dreiecke, gebrauchen aber die Bezeichnung von Möbius; die Seiten des Dreieckes bezeichnen wir mit a, b, c ; die Winkel entsprechend mit α, β, γ ; die inneren Winkel desselben mit $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$, so daß also $\bar{\alpha} = \pi - \alpha, \bar{\beta} = \pi - \beta, \bar{\gamma} = \pi - \gamma$ ist.

Die zu den Ecken A, D, C des Dreiecks diametral gegenüberliegende Punkte auf der Kugel bezeichnen wir A_1, B_1, C_1 .

Wir projizieren die Kugel stereographisch von einem dieser Gegenpunkte als Projektionsmittelpunkt, etwa von A_1 . Die Projektion des Parallelogramms BCB_1C_1 ist ein Kreisviereck, welches in einem einfachen Zusammenhang mit dem sphärischen Dreiecke ist. Dieses Kreisviereck zerfällt durch seine Diagonalen in die Dreiecke $A'B'C', A'C'B_1', A'B_1C_1', A'C_1B'$; der Kreis (a') , in den sich der Hauptkreis $(a) = BCB_1C_1$ der Kugel projiziert, und dessen Halbmesser wir mit R bezeichnen wollen, bestimmt mit den Diagonalen $B_1B', C'C_1'$ vier Teile der Ebene $\widehat{A'B'C'}, \widehat{A'C_1B_1'}, \widehat{A'B_1C_1'}, \widehat{A'C_1B'}$ welche Projektionen der sphärischen Dreiecke

$$ABC, ACB_1, AB_1C_1, AC_1B$$

sind. Die Winkel dieser Dreiecke sind entsprechend

$$\alpha, \beta, \gamma; \pi - \alpha, \pi - \gamma, \beta; \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma; \pi - \alpha, \gamma, \pi - \beta.$$

Die sphärischen Exzesse dieser Dreiecke seien $2\sigma_0, 2\sigma_2, 2\sigma_1, 2\sigma_3$. Es ist somit

$$2\sigma_0 = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma), \quad 2\sigma_2 = \alpha - \beta + \gamma, \quad 2\sigma_1 = -\alpha + \beta + \gamma, \\ 2\sigma_3 = \alpha + \beta - \gamma.$$

Setzen wir für die Seiten des Kreisviereckes

$$B'C' = Z_0, \quad C'B_1' = Z_2, \quad B_1'C_1' = Z_1, \quad C_1'B' = Z_3.$$

Die Winkel in dem Dreiecke $\widehat{A'B'C'}$ sind $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$; es ist also

$$\alpha = \text{arc}(B'A'C_1') = \text{arc}(B_1'A'C'), \quad \beta = \text{arc}(B'C'B_1'), \\ \gamma = \text{arc}(C'B'C_1').$$

Der Exzeß von ABC ist gleich dem des Dreiecks $\widehat{A'B'C'}$. Zieht man die Winkel des Dreiecks $\widehat{A'B'C'}$ von denen des Dreiecks $\widehat{A'B_1C_1'}$ ab, so erhält man die Winkel, welche die

Sehne $B'C'$ mit den in B' und C' an den Bogen $\widehat{B'C'}$ gezogenen Halbtangenten einschließen; es ist also jeder von diesen Winkeln gleich σ_0 , und der zum Bogen $\widehat{B'C'}$ gehörige Mittelpunktswinkel von (a') ist somit gleich $2\sigma_0$. Ebenso erkennt man, daß die zu den Kreisbogen $\widehat{C'B'_1}$, $\widehat{B'_1C'_1}$, $\widehat{C'_1C'}$ gehörigen Mittelpunktswinkel von (a') entsprechend gleich sind $2\sigma_2$, $2\sigma_1$, $2\sigma_3$. Von diesen Kreisbogen sind entweder alle kleiner als ein Halbkreis, dann umspannen die Winkel $2\sigma_0, \dots, 2\sigma_3$ die entsprechenden Sehnen Z_0, \dots, Z_3 ; oder einer von ihnen ist größer, die übrigen sind aber kleiner als ein Halbkreis; dann enthält der zum ersten gehörige Mittelpunktswinkel die entsprechende Sehne nicht, während in jedem der übrigen Fälle er sie enthält.

Den Kreisbogen $B'_1C'B'_1$, $C'_1B'_1C'$, welche durch die Diagonalen $d_2=B'B'_1$, $d_3=C'C'_1$ abgeschnitten werden kommen die Mittelpunktswinkel $2\sigma_3+2\sigma_1=2\beta$ und $2\sigma_2+2\sigma_1=2\gamma$ zu. Es ist also

$$d_2=2R \sin \beta, d_3=2R \sin \gamma, \text{ und } d_2:d_3=\sin \beta:\sin \gamma. \quad (1)$$

Projizieren wir das zu ABC polare Dreieck $\overline{A\overline{B}\overline{C}}$ von dem Gegenpunkte A_1 der Ecke A als Projektionszentrum stereographisch, so gelangen wir zu einem analogen Kreisvierecke $\overline{B'\overline{C'}\overline{B'_1}\overline{C'_1}}$. Die Seiten desselben sind

$$\overline{B'\overline{C'}}=Y_0, \overline{C'\overline{B'_1}}=Y_2, \overline{B'_1\overline{C'_1}}=Y_1, \overline{C'_1\overline{B'}}=Y_3;$$

weiter ist

$$a=\text{arc}(\overline{B'\overline{A'}\overline{C'_1}})=\text{arc}(\overline{B'_1\overline{A'}\overline{C'}}), \quad b=\text{arc}(\overline{B'\overline{C'}\overline{B'_1}}), \\ c=\text{arc}(\overline{C'\overline{B'}\overline{C'_1}}).$$

Die zu den Kreisbogen $\overline{B'\overline{C'}}$, $\overline{C'\overline{B'_1}}$, $\overline{B'_1\overline{C'_1}}$, $\overline{C'_1\overline{C'}}$ gehörigen Mittelpunktswinkel des Kreises (a') , in welchen das Viereck $\overline{B'\overline{C'}\overline{B'_1}\overline{C'_1}}$ eingeschrieben ist und dessen Halbmesser wir mit \overline{R} bezeichnen wollen, sind entsprechend.

$$2s_0=2\pi - (a+b+c), \quad 2s_2=a-b+c, \quad 2s_1=-a+b+c, \\ 2s_3=a+b-c,$$

und stellen die Exzesse der Dreiecke $\overline{A\overline{B}\overline{C}}$, $\overline{A\overline{C}\overline{B}_1}$, $\overline{A\overline{B}_1\overline{C}_1}$, $\overline{A\overline{C}_1\overline{B}}$ dar. Zu den Kreisbogen $\overline{B'\overline{C'_1}\overline{B'_1}}$, $\overline{C'\overline{B'_1}\overline{C'_1}}$, welche durch die Diagonalen $\overline{d_2=B'B'_1}$, $\overline{d_3=C'C'_1}$ begrenzt werden, gehören die Mittelpunktswinkel $2b$ und $2c$, und es ist

$$\bar{d}_2 = 2\bar{R} \sin b, \quad \bar{d}_3 = 2\bar{R} \sin c, \quad \text{und} \quad \bar{d}_2 : \bar{d}_3 = \sin b : \sin c. \quad (1')$$

Das sind Zusammenhänge, zu denen Study auf anderem Wege gelangt ist (a. a. O. S. 174).

3. Wir haben die Art kennen gelernt, wie die Winkel α, β, γ mit dem Viereck $B'C'B_1C_1'$ zusammenhängen und wollen den Zusammenhang der Seiten a, b, c mit diesem Viereck näher untersuchen. Zunächst folgt aus dem Driek $A_1B'C'$, daß

$$B'C'^2 = B'A_1^2 + C'A_1^2 - 2B'A_1 \cdot C'A_1 \cos (B'A_1C').$$

Da die Kugel und ihre stereographische Projektion von A_1 in die durch O gehende zu $A A_1$ normale Ebene invers sind für A_1 als Zentrum der Inversion in bezug auf die um A_1 als Mittelpunkt mit dem Radius $r\sqrt{2}$ beschriebene Kugel, so läßt sich die letzte Gleichung transformieren in die Gleichungen

$$\begin{aligned} B'C'^2 &= \left(\frac{2r^2}{BA_1}\right)^2 + \left(\frac{2r^2}{CA_1}\right)^2 - 2\left(\frac{2r^2}{BA_1}\right)\left(\frac{2r^2}{CA_1}\right)\cos(BA_1C) = \\ &= \frac{4r^4}{BA_1^2 \cdot CA_1^2} \cdot BC^2. \end{aligned}$$

Es ist also

$$B'C' = \frac{2r^2}{BA_1 \cdot CA_1} \cdot BC. \quad (2)$$

Da

$$BC = 2r \sin \frac{a}{2}, \quad BA_1 = 2r \cos \frac{c}{2}, \quad CA_1 = 2r \cos \frac{b}{2}$$

so ist

$$B'C' = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \cdot r.$$

Analog können wir die Strecken $C'B_1, B_1C_1', C_1'B'$ ausdrücken und gelangen so zu den Beziehungen

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} r, \quad Z_2 = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}} r, \quad Z_1 = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}} r, \\ Z_3 &= \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} r. \end{aligned} \quad (3)$$

Ferner ist

$$A'C' = OC' = r \operatorname{tg} \frac{b}{2}, \quad A'C_1' = r \cot \frac{b}{2}, \quad A'B' = r \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \quad A'B_1' = r \cot \frac{c}{2},$$

somit

$$C'C_1' = r \left(\operatorname{tg} \frac{b}{2} + \cot \frac{b}{2} \right) = \frac{2r}{\sin b}.$$

Es ist also

$$d_3 = \frac{2r}{\sin b}, \quad d_2 = \frac{2r}{\sin c} \quad \text{und} \quad d_2 : d_3 = \sin b : \sin c. \quad (4)$$

Aus (1) und (4) folgt

$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta = \frac{r}{R}, \quad (5)$$

also der Sinussatz.

In dem Dreieck $A'B'C'$ ist

$$B'C'^2 = B'A'^2 + C'A'^2 + 2B'A' \cdot C'A' \cos \alpha.$$

Setzen wir da die zuvor berechneten Werte ein, so kommt

$$\frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cos \alpha,$$

also

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \sin^2 \frac{c}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2} + 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \alpha.$$

Gehen wir zu a, b, c über, so wird

$$2(1 - \cos a) = (1 - \cos c)(1 + \cos b) + (1 - \cos b)(1 + \cos c) + 2 \sin b \sin c \cos \alpha,$$

woraus folgt

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha,$$

also der Kosinussatz.

Aus (3) ergibt sich die Proportion

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_0 = \operatorname{tg} \frac{a}{2} : \operatorname{tg} \frac{b}{2} : \operatorname{tg} \frac{c}{2} : \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}. \quad (5')$$

4. Analog führt das Polardreieck \overline{ABC} zu den Beziehungen

$$\begin{aligned}
 Y_0 &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} r, & Y_2 &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} r, & Y_1 &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} r, \\
 Y_3 &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} r, & & & & & (3')
 \end{aligned}$$

$$\bar{d}_3 = \frac{2r}{\sin \beta}, \quad \bar{d}_2 = \frac{2r}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad \bar{d}_2 : \bar{d}_3 = \sin \beta : \sin \gamma.$$

Es ist also mit Rücksicht auf (1')

$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta = \frac{r}{R}.$$

Diese Gleichung verglichen mit (5) gibt $\bar{R} = R$, was auch die Konstruktion bestätigt.

Denn schneidet die Senkrechte von A_1 auf die Ebene des Großkreises durch B, C die durch O gelegte Projektionsebene P im Punkte S , so ist bekanntlich S der Mittelpunkt der Projektion dieses Großkreises (a) und $A_1 S$ ist gleich dem Halbmesser R dieser Projektion. Für das Polardreieck ist A_1 das Projektionszentrum und (BCO) die Projektionsebene, während die Ebene des durch \bar{B} und \bar{C} gehenden Großkreises mit P zusammen fällt. Wird also (BCO) von der durch \bar{A}_1 gehenden Senkrechten auf P in S_1 geschnitten, so ist $\bar{A}_1 S_1 = R$. Es ist $(O\bar{A}_1) \parallel (S\bar{A}_1)$, $(A_1 S_1) \parallel (O A_1)$ und die rechtwinkligen Dreiecke $O A_1 S$, $O\bar{A}_1 S_1$ sind kongruent, weshalb $\bar{A}_1 S_1 = A_1 S$.

Aus den letzten Gleichungen folgt ebenso

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

und

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

5. Aus den Gleichungen (3) erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
 & -Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 = \\
 & = \frac{r}{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \left[\sin \frac{a}{2} \left(-\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \Big) + \cos \frac{a}{2} \left(\sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} + \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \right) \Big] \\
& = \frac{4r}{\sin b \sin c} \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b+c}{2} + \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b+c}{2} \right) \\
& = \frac{4r}{\sin b \sin c} \sin \frac{a+b+c}{2}.
\end{aligned}$$

Auf dieser Weise gelangen wir zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
-Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 &= \frac{4r}{\sin b \sin c} \sin s_0, \\
Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3 &= \frac{4r}{\sin b \sin c} \sin s_1, \\
Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3 &= \frac{4r}{\sin b \sin c} \sin s_2, \\
Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3 &= \frac{4r}{\sin b \sin c} \sin s_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Drücken wir die Seiten Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 unseres Kreisvierecks $B' C' B'_1 C'_1$ mithilfe der zugehörigen Mittelpunktswinkel aus, so erhalten wir die Relationen

$$Z_0 = 2R \sin \sigma_0, Z_1 = 2R \sin \sigma_1, Z_2 = 2R \sin \sigma_2, Z_3 = 2R \sin \sigma_3 \text{ und } \pm Z_0 \pm Z_1 \pm Z_2 \pm Z_3 = 2R (\pm \sin \sigma_0 \pm \sin \sigma_1 \pm \sin \sigma_2 \pm \sin \sigma_3),$$

worin einander immer die beiderseits gleichliegenden Zeichen der Glieder entsprechen. Es ist also

$$R (-\sin \sigma_0 + \sin \sigma_1 + \sin \sigma_2 + \sin \sigma_3) = \frac{2r}{\sin b \sin c} \sin s_0,$$

$$R (\sin \sigma_0 - \sin \sigma_1 + \sin \sigma_2 + \sin \sigma_3) = \frac{2r}{\sin b \sin c} \sin s_1,$$

$$R (\sin \sigma_0 + \sin \sigma_1 - \sin \sigma_2 + \sin \sigma_3) = \frac{2r}{\sin b \sin c} \sin s_2,$$

$$R (\sin \sigma_0 + \sin \sigma_1 + \sin \sigma_3 - \sin \sigma_2) = \frac{2r}{\sin b \sin c} \sin s_3.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
R (\sin \sigma_0 + \sin \sigma_1 + \sin \sigma_2 + \sin \sigma_3) &= \frac{r}{\sin b \sin c} \\
& (\sin s_0 + \sin s_1 + \sin s_2 + \sin s_3)
\end{aligned}$$

Da analog

$Y_0 = 2\bar{R} \sin s_0$, $Y_1 = 2\bar{R} \sin s_1$, $Y_2 = 2\bar{R} \sin s_2$, $Y_3 = 2\bar{R} \sin s_3$,
so erhalten wir zunächst, dass

$$\frac{4r}{\sin b \sin c} \sin s_0 = \frac{2r Y_0}{\bar{R} \sin b \sin c},$$

und da $\bar{R} = R$, so wird unter Berücksichtigung der Formel (5)

$$\frac{4r}{\sin b \sin c} \sin s_0 = 2 \frac{\sin \gamma}{\sin c} Y_0.$$

Verfahren wir mit Bezug auf die rechten Seiten der übrigen Gleichungen (6) in gleicher Weise, so gelangen wir zu den Gleichungen

$$-Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 = 2 \frac{\sin \gamma}{\sin c} Y_0$$

$$Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3 = 2 \frac{\sin \gamma}{\sin c} Y_1$$

$$Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3 = 2 \frac{\sin \gamma}{\sin c} Y_2$$

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3 = 2 \frac{\sin \gamma}{\sin c} Y_3$$

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 = \frac{\sin \gamma}{\sin c} (Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

sowie zu den Beziehungen

$$\frac{\sin s_0 + \sin s_1 + \sin s_2 + \sin s_3}{\sin \sigma_0 + \sin \sigma_1 + \sin \sigma_2 + \sin \sigma_3} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3 = (-Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3) : (Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3) : \\ : (Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3) : (Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3)$$

6. Ebenso ergeben sich die dualen Beziehungen

$$-Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{4r}{\sin \beta \sin \gamma} \sin \sigma_0$$

$$Y_0 - Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{4r}{\sin \beta \sin \gamma} \sin \sigma_1$$

$$Y_0 + Y_1 - Y_2 + Y_3 = \frac{4r}{\sin \beta \sin \gamma} \sin \sigma_2$$

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 - Y_3 = \frac{4r}{\sin \beta \sin \gamma} \sin \sigma_3$$

und

(6')

$$\begin{aligned}
 -Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 &= 2 \frac{\sin c}{\sin \gamma} Z_0 \\
 Y_0 - Y_1 + Y_2 + Y_3 &= 2 \frac{\sin c}{\sin \gamma} Z_1 \\
 Y_0 + Y_1 - Y_2 + Y_3 &= 2 \frac{\sin c}{\sin \gamma} Z_2 \\
 Y_0 + Y_1 + Y_2 - Y_3 &= 2 \frac{\sin c}{\sin \gamma} Z_3
 \end{aligned} \tag{7'}$$

Dabei wurden die Dreiecke ABC , $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ auf derselben Kugel K dargestellt. Wir können aber das Dreieck $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ auf einer anderen Kugel \overline{K} darstellen, die wir unbeschadet der Allgemeinheit mit K konzentrisch annehmen, und deren Halbmesser mit \overline{r} bezeichnet werden möge. Wir haben dann in den dem Dreieck $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ entsprechenden Formeln überall \overline{r} statt r zu setzen. Da wir hiedurch für dieses Dreieck eine ähnliche Abbildung im Verhältnis $r:\overline{r}$ vorgenommen haben, so wird alsdann statt $R = \overline{R}$ zu setzen sein $R:\overline{R} = r:\overline{r}$.

Aus (1) und (4), sowie (1') und (4') folgt hier

$$\frac{r}{R} = \frac{\overline{r}}{\overline{R}} = \sin \beta \sin c = \sin b \sin \gamma.$$

Wählen wir \overline{r} so, daß $d_3 = \overline{d}_3$ wird, so führen diese Formeln zu den Beziehungen

$$\frac{r}{r} = \frac{\overline{R}}{R} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin \alpha},$$

und es wird gleichzeitig $\overline{d}_2 = d_2$

Die Seiten des zweiten Kreisviereckes Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 gehen hiedurch über in

$$\overline{Y}_0 = \frac{\overline{R}}{R} Y_0, \overline{Y}_1 = \frac{\overline{R}}{R} Y_1, \overline{Y}_2 = \frac{\overline{R}}{R} Y_2, \overline{Y}_3 = \frac{\overline{R}}{R} Y_3.$$

wir bezeichnen sie mit X_0, X_1, X_2, X_3 . Hiedurch gehen die Formeln (7) und (7') über in

$$\begin{aligned}
 -Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 &= 2 X_0 \\
 Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3 &= 2 X_1 \\
 Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3 &= 2 X_2 \\
 Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3 &= 2 X_3
 \end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned}
 -X_0 + X_1 + X_2 + X_3 &= 2Z_0 \\
 X_0 - X_1 + X_2 + X_3 &= 2Z_1 \\
 X_0 + X_1 - X_2 + X_3 &= 2Z_2 \\
 X_0 + X_1 + X_2 - X_3 &= 2Z_3
 \end{aligned}
 \tag{8'}$$

Wir bezeichnen diese Vierecke mit Z und X.

7. Von den zahlreichen Beziehungen, welche sich hier ergeben, führen wir die folgenden an.

Zunächst geben die Formeln (8) und (8') eine Konstruktion der Seiten des sphärischen Dreiecks, wenn seine Winkel gegeben sind und umgekehrt; denn aus gegebenem Z oder X kann man ohneweiters X resp. Z konstruieren, da beide gleiche Diagonalen haben und man aus den Seiten des einen die des anderen ohneweiters ermitteln kann. Das sind die von Study gegebenen Konstruktionen.

Aus dem Viereck X folgt, indem wir $\overline{B'}$, $\overline{B_1'}$ mithilfe des auf die geradlinigen Dreiecke $\overline{B'}$, $\overline{B_1'}$, \overline{C} , $\overline{B'}$, $\overline{B_1'}$, $\overline{C_1'}$ angewandten Kosinussatzes ausdrücken

$$\cos b = \frac{X_0^2 + X_2^2 - X_1^2 - X_3^2}{2(X_0 X_2 + X_1 X_3)}$$

$$\text{und da } \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} = \frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}, \text{ so ist}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} = \frac{(-X_0 + X_1 + X_2 + X_3)(X_0 + X_1 - X_2 + X_3)}{(X_0 - X_1 + X_2 + X_3)(X_0 + X_1 + X_2 - X_3)}$$

Führen wir in die letzte Formel die Beziehungen von (8') ein, so wird

$$\operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} = \frac{Z_0 Z_2}{Z_1 Z_3}, \text{ woraus sich ergibt } \cos b = \frac{Z_1 Z_3 - Z_0 Z_2}{Z_1 Z_3 + Z_0 Z_2}$$

Ebenso erhalten wir

$$\operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} = \frac{Z_0 Z_3}{Z_1 Z_2} \text{ und } \cos c = \frac{Z_1 Z_2 - Z_0 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_0 Z_3}$$

sowie

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{Z_0 Z_1}{Z_2 Z_3} \text{ und } \cos a = \frac{Z_2 Z_3 - Z_0 Z_1}{Z_2 Z_3 + Z_0 Z_1}$$

Die Flächeninhalte P_z und P_x von Z an X sind

$$P_z = \sqrt{X_0 X_1 X_2 X_3}, \quad P_x = \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$$

und da $P_z = d_3 d_2 \sin \alpha$, $P_x = d_3 d_2 \sin \alpha$, so ist $\frac{R}{R} = \frac{P_x}{P_z}$

8. Man kann das Formelsystem der sphärischen Geometrie aus den Beziehungen an den Vierecken Z und X ableiten, wie es Eckhardt in ausführlicher Weise tut. So bekommen wir aus der Relation

$2B' B_1' \cdot C' C_1' \cos \alpha = B' C'^2 + B_1' C_1'^2 - B' C_1'^2 - B_1' C'^2$
die Beziehung

$$\begin{aligned} 2d_2 d_3 \cos \alpha &= Z_0^2 + Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 \\ &= (Z_0 - Z_1)^2 - (Z_2 + Z_3)^2 + 2(Z_0 Z_1 + Z_2 Z_3) \\ &= (Z_0 + Z_1)^2 - (Z_2 - Z_3)^2 - 2(Z_0 Z_1 + Z_2 Z_3) \end{aligned}$$

Da nach dem Satze von Ptolemäus $Z_0 Z_1 + Z_2 Z_3 = d_2 d_3$ ist, so gehen diese Gleichungen mit Rücksicht auf (6) und (8) über in

$$\begin{aligned} d_2 d_3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= X_0 X_1 = \frac{4r^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \sin s_0 \sin s_1 \\ d_2 d_3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= X_2 X_3 = \frac{4r^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \sin s_2 \sin s_3, \end{aligned}$$

und da nach (4) $d_2 d_3 = \frac{4r^2}{\sin b \sin c}$ ist, so bekommen wir die Formeln

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin s_0 \sin s_1}{\sin b \sin c}, \quad \sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{\sin s_0 \sin s_2}{\sin c \sin a}, \quad \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin s_0 \sin s_3}{\sin a \sin b} \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin s_2 \sin s_3}{\sin b \sin c}, \quad \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{\sin s_3 \sin s_1}{\sin c \sin a}, \quad \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin s_1 \sin s_2}{\sin a \sin b} \end{aligned}$$

sowie die zugehörigen Polarformeln.

9. Unsere Projektion führt auch selbst zu den zyklischen Vertauschungen. Wir können das sphärische Dreieck ABC auch vom Gegenpunkte B_1 der Ecke B oder vom Gegenpunkte C_1 der Ecke C stereographisch projizieren, und zu jeder dieser Projektionen das entsprechende Kreisviereck Z , resp. Y ableiten, und da es nur auf die Form der Projektionen der zugehörigen Kreisvierecke nicht aber auf ihre Größe ankommt, so können wir für alle drei Kreisvierecke Z , bezeichnen wir sie mit $Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma$, denselben umgeschriebenen Kreis (z), sowie für alle drei Kreisvierecke Y , die wir entsprechend mit $Y_\alpha, Y_\beta, Y_\gamma$ bezeichnen wollen, denselben umgeschriebenen Kreis

(x) annehmen. Wir können diese Vierecke also so darstellen, daß $Z_\alpha, Z_\beta, Z_\gamma$ die Seite Z_0 und Y_a, Y_b, Y_c die Seite Y_0 gemeinschaftlich haben, während die übrigen Seiten zyklisch angeordnet sind; also, wenn in Z_α auf einander die Seiten Z_2, Z_1, Z_3 folgen, so folgen in Z_β die Seiten Z_1, Z_3, Z_2 und in Z_γ die Seiten Z_3, Z_2, Z_1 , und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel, in denen Z_0 nicht liegt sind bezüglich α, β, γ . Analoge Anordnung bieten dann die Vierecke Y_a, Y_b, Y_c .

10. Um aus den Beziehungen der betrachteten Vierecke beispielsweise den Winkel α zu konstruieren, wenn die Seiten a, b, c gegeben sind, können wir etwa die Formel

$$\cos \alpha = \frac{Y_2 Y_3 - Y_0 Y_1}{Y_2 Y_3 + Y_0 Y_1} \text{ benützen, aus der folgt, dass}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{Y_2 Y_3}{Y_2 Y_3 + Y_0 Y_1} = \frac{Y_2 Y_3}{d_2 d_3}$$

Wir konstruieren somit die mittlere geometrische Proportionale m zu Y_2, Y_3 und n zu d_2, d_3 ; alsdann ist $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$

Wir wollen noch die Auflösung des sphärischen Dreiecks durch Konstruktion ermitteln, wenn in demselben eine Seite c , ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende Winkel γ (im Möbius'schen Sinne) gegeben sind, wobei sich aus der Konstruktion auch die Bedingungen für die Möglichkeit reeller Lösungen ergeben.

Wir ziehen zunächst die Strecke Z_0 beliebig und ziehen durch ihre Endpunkte A_2, A_3 Halbstrahlen welche auf derselben Seite der Ebene in bezug auf Z_0 liegen, so daß der erste mit Z_0 den Winkel β , der zweite den Winkel γ einschließt. Es sei A der Schnittpunkt dieser Halbstrahlen.

Weiter tragen wir auf einen Schenkel des Winkels c vom Scheitel M aus die Strecke $\overline{MN} = \overline{A_3 A}$ auf und schneiden den zweiten Schenkel mit dem Kreis, welcher seinen Mittelpunkt in N hat und dessen Halbmesser gleich $\overline{A A_2}$ ist in den Punkten N_1, N_2 ; dann ist nach dem Sinussatz b gleich dem Winkel, welchen $(N_1 N_2)$ mit $(N_1 N)$ oder mit $(N_2 N)$ einschließt. Die Aufgabe ist also zweideutig und man sieht aus der Konstruktion wann sie reelle Lösungen hat. Wir verfolgen die Lösung für einen dieser Winkel b .

Aus der Beziehung (5') folgt $Z_2 : Z_3 = \operatorname{tg} \frac{b}{2} : \operatorname{tg} \frac{c}{2}$. Wir ermitteln also zwei Strecken, welche dieses Verhältnis besitzen, und tragen die erste auf den Halbstrahl $A_2 A$ nach $A_2 C_2$ die zweite auf den Halbstrahl $A_3 A$ nach $A_3 C_3$ auf. Für alle möglichen derartigen Strecken desselben Verhältnisses werden die Verbindungsgeraden der Endpunkte C_2, C_3 eine Parabel umhüllen, welche dem Dreieck $A_2 A_3 A$ eingeschrieben ist. Der diesem Dreiecke umgeschriebene Kreis k vom Halbmesser ϱ schneidet den Kreis, welcher dem Dreiecke $C_2 C_3 A$ umgeschrieben ist außer in A noch im Punkte F , welcher der Brennpunkt der erwähnten Parabel ist.

Aus (5') folgt ferner $Z_1 : Z_0 = 1 : \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$; es ist also $Z_1 = \frac{Z_0}{\operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}}$, wodurch Z_1 eindeutig bestimmt ist.

Alle Dreiecke $F C_2 C_3$, welche die Schnittpunkte der Parabeltangente mit $(A_2 A)$ und $(A_3 A)$ und F zu Ecken haben, sind ähnlich. Wir konstruieren eine Strecke von der Länge ϱ_1 für die $\varrho_1 : \varrho = Z_1 : A_2 A_3$ und legen durch die Punkte A, F denjenigen Kreis vom Halbmesser ϱ_1 , welcher die Halbstrahlen $(A A_2), (A A_3)$ in den Punkten B_2, B_3 schneidet. Alsdann ist $B_2 B_3 = Z_1$ und $A_2 B_2 B_3 A_3$ ist ein Kreisviereck. Den Halbmesser ϱ_1 kann man auch aus der Relation $\varrho_1 = \frac{2 Z_1}{\sin (A_2 A A_3)}$ leicht ermitteln. Enthält das gefundene Kreisviereck die Winkel β, γ , dann ist es dasjenige, welches die Seiten Z_0, Z_2, Z_1, Z_3 besitzt, während, wenn es in A_2 und A_3 die Nebenwinkel von β und γ enthält, die Aufgabe abermals keine reelle Lösung hat.

Im ersten Falle möge H der Schnittpunkt der Diagonalen $d_3 = A_2 B_3$ und $d_2 = A_3 B_2$ sein; alsdann ist $\sphericalangle A_2 H B_2 = \alpha$.

Nun können wir auch das Kreisviereck X ermitteln oder das ihm ähnliche Kreisviereck Y im Verhältnis 1:2. Wenn wir auf den einen Schenkel, des Winkels c vom Scheitel desselben die Strecke $A_2 B_3 = 2 d_3$ übertragen, so hat der durch A_2', B_3' gehende Kreis (y), welcher den zweiten Schenkel des Winkels c berührt, die Eigenschaft, daß man ihm ein derartiges Vier-

eck $Y = A'_2 A'_3 B'_3 B'_2$ einschreiben kann, und es ist den Formeln (8) gemäß $\overline{A'_2 A'_3} = Y_0 = -Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3$, $\overline{A'_3 B'_3} = Y_3 = Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3$, $\overline{B'_3 B'_2} = Y_1 = Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3$ und $\overline{B'_2 A'_2} = Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3$.

Ist K der Schnittpunkt von $A'_2 B'_3$, $A'_3 B'_2$, dann ist $\sphericalangle A'_2 K B'_2 = a$, während $\sphericalangle A_2 A'_3 B'_3 = c$ und $\sphericalangle B_2 A'_2 A'_3 = b$ ist.

Résumé.

Dans le présent mémoire, l'auteur étudie la dépendance mutuelle des côtés d'un triangle sphérique et des côtés et des diagonales d'un certain quadrangle inscrit dans un cercle, et, d'une manière analogue, la dépendance mutuelle des angles d'un tel triangle et des côtés et des diagonales d'un autre quadrangle, inscrit à un cercle. On peut construire des quadrangles en une relation simple telle qu'il est facile de construire les triangles sphériques d'après des données déterminées, à l'aide de ces quadrangles.

III.

O problému projektivnosti při orientované poloze dvou obrazů.

Napsal dr. JOSEF KLÍMA.

Předloženo 10. dubna 1929.

Promítneme-li prostorový útvar U ze dvou středů ${}^1S, {}^2S$ na dvě průmětny ${}^1\pi$ resp. ${}^2\pi$, dostaneme průměty U_1, U_2 . Průměty 2s_1 a 1s_2 jsou t. z. uzly v průmětně ${}^1\pi$ resp. ${}^2\pi$ a jsou to stopníky dvojnásob promítacího paprsku $S \equiv \overline{{}^1S}{}^2S$ na průmětnách. Paprskové svazky v průmětnách o středech 2s_1 a 1s_2 jsou uzlovými svazky. Průměty a_1, a_2 bodu a jsou na odpovídajících si uzlových paprscích, jež se protínají na průsečnici $X_{1,2} \equiv ({}^1\pi {}^2\pi)$. Oba svazky uzlové jsou tu přiřazeny k sobě perspektivně o ose $X_{1,2}$. V dalším předpokládáme případ obecný, kdy S a $X_{1,2}$ jsou mimoběžné.

Promítneme dále průmětny ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$ z libovolného středu s na libovolnou průmětnu π , již považujeme za nákresnu. V π dostaneme první obraz a_1^s a druhý obraz a_2 bodu a dle M ü l l e r a t. zv. obecného dvojobrazového zobrazení.¹⁾

Uzly ${}^2s_1, {}^1s_2$ přejdou v uzly ${}^2s_1^s, {}^1s_2^s$ prvního a druhého obrazu, jež jsou středy opět uzlových svazků, perspektivních o ose $X_{1,2}^s$. Označíme-li spojnice $\overline{{}^1S}{}^2S \equiv {}^1S$ a $\overline{{}^2S}{}^1S \equiv {}^2S$, tu uzlové svazky v obraze mají samodružný paprsek ${}^2S_1^s \equiv {}^1S_2^s \equiv \overline{{}^1s_2^s}{}^2s_1^s$. Obrazy a_1^s, a_2^s téhož bodu a jsou na odpovídajících si paprscích uzlových. V dalším vynecháme index „s“ k vyznačení obrazů a budeme lišiti bod a_1 od a_1^s slovem „průmět“ a „obraz“. O obrazech tak získaných, říkáme, že jsou v poloze „orientované“ na rozdíl od nejobecnějšího zobrazení dvěma obrazy, jež dostaneme, provedeme-li na prů-

¹⁾ Vorlesungen über darstellende Geometrie I. sv. „Die linearen Abbildungen“ 2. kapitola str. 124.

mětny ${}^1\pi, {}^2\pi$ jakoukoliv kollineaci a přeneseme tak získané obrazy do nákresny, aniž by uzlové svazky byly perspektivní.

Problém projektivnosti v nejobecnějším systému dvoj-obrazovém spočívá, jak známo, ve vyhledání příslušných uzlů, t. j. bodů, z nichž odpovídající si obrazy promítají se projektivními svazky. Není-li nic jiného dáno, třeba sedmi párů odpovídajících si bodových obrazů k určení uzlů a úloha má obecně tři řešení, jež jsou hlavními body Steinerovy kvadratické příbuznosti, dané sedmi páry odpovídajících si bodů²⁾,

Jestliže čtyři z daných bodů jsou v téže rovině, stačí obrazy jen dvou dalších bodů k obecně jednoznačnému určení uzlových bodů. Známe-li obrazy absolutní kuželosečky, což při přímých fotografiích je t. zv. vnitřní orientace, stačí k vyhledání uzlů buď obrazy čtyř bodů téže roviny³⁾ nebo obrazy pěti obecně položených bodů.⁴⁾

Řešme problém určení uzlů pro orientovanou polohu dvou obrazů. Třeba zde rozeznávati dva případy a to, dána-li základnice $X_{1,2}$, nebo nikoliv.

I. Dána-li základnice $X_{1,2}$ stačí k určení uzlů ${}^2s_1, {}^1s_2$ čtyři páry $a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2$ obrazů bodů a, b, c, d . Úloha je dvojznačnou a lze dostati body ty též tak, že bychom z libovolného bodu s promítli prvě obrazy na libovolnou rovinu ${}^1\pi$ a druhé obrazy na rovinu ${}^2\pi$, protínající se s ${}^1\pi$ v přímce X v rovině $(sX_{1,2})$. Dostaneme tak páry ${}^1a_1{}^2a_2, {}^1b_1{}^2b_2, \dots$ a čtyři spojnice $A \equiv \overline{{}^1a_1{}^2a_2}, B \equiv \overline{{}^1b_1{}^2b_2}, C \equiv \overline{{}^1c_1{}^2c_2}, D \equiv \overline{{}^1d_1{}^2d_2}$ mají obecně dvě příčky, jichž stopníky na rovinách ${}^1\pi, {}^2\pi$ mají za obrazy z s hledané uzly.⁵⁾ Možno též určit uzly následovně, aniž vyjdeme z nákresny.

a) Uvažujme nejdříve dva páry bodů a_1a_2, b_1b_2 (obr. 1.) Libovolnému bodu 1x jako uzlu v prvním obraze odpovídá určitý bod 2x v druhém obraze co uzel. Probíhá-li bod 1x přímku

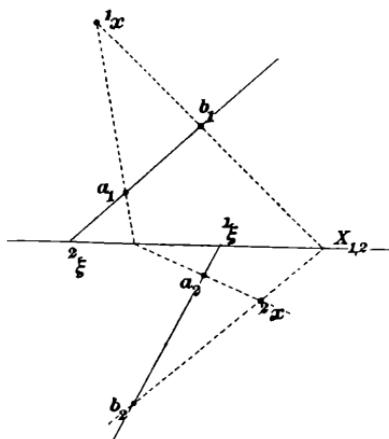
²⁾ Zobecnění tohoto Chaslesova problému podal v roč. 1914 Časopisu pro pěst. mat. p. prof. dr. B. Bydžovský v pojednání: „Řešení zvlášt. problému projektivnosti a jeho užití“ str. 273.

³⁾ K r u p p a: „Über einige Orientierungsprobleme der Photogrammetrie“. Zprávy vídeňské akademie roč. 1912.

⁴⁾ K r u p p a: „Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innerer Orientierung“ tamtéž roč. 1913.

⁵⁾ V uvedených přednáškách Müllerových str. 149.

M_1 , probíhá patrně bod 2x kuželosečku M_2^2 , jdoucí body $a_2, b_2, {}^2\xi \equiv (\overline{a_1 b_1}, X_{1,2})$. Stejně obráceně přímce N_2 v poli ${}^2\pi$ odpovídá kuželosečka N_1^2 , jdoucí body $a_1, b_1, {}^1\xi \equiv (\overline{a_2 b_2}, X_{1,2})$. Dostáváme tak kvadratickou Steinerovu příbuznost o hlavních bodech $a_1, b_1, {}^1\xi$ v poli prvním a $a_2, b_2, {}^2\xi$ v druhém poli ${}^2\pi$.



Obr. 1.

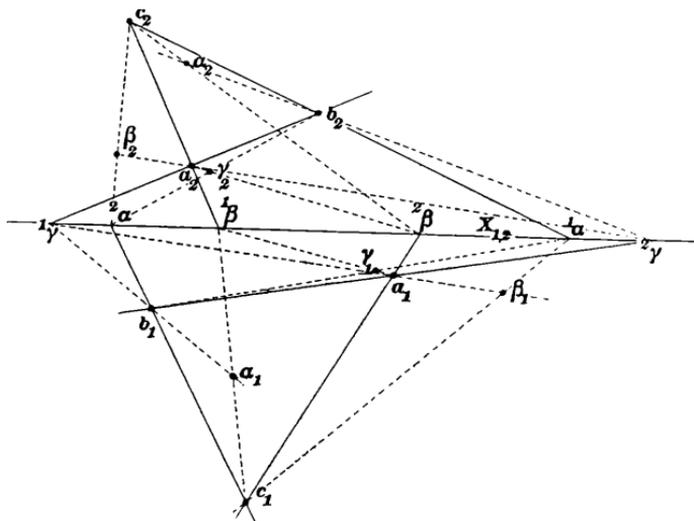
Dána-li podmínka, by uzly byly úběžnými body, t. j. střed s je v rovině jdoucí paprskem S rovnoběžně s π , tu stačí tyto dva páry $a_1 a_2, b_1 b_2$ k určení uzlů. Úběžné přímce pole ${}^1\pi$ odpovídá kuželosečka v ${}^2\pi$ a její úběžné body, z nichž ale jeden je úběžným bodem osy $X_{1,2}$, a úloze nevyhovuje, je hledaným uzlem pole ${}^2\pi$. Úloha je jednoznačnou.

b) Dány-li tři body $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$, tu odpovídající si uzly vyplňují v prvním poli kuželosečku ${}^1U^2$ a v druhém kuželosečku ${}^2U^2$. Myslíme-li si totiž libovolnou přímku M_1 v poli ${}^1\pi$, tu odpovídá jí v příbuznosti (ab) kuželosečka M_2^2 , jdoucí body $a_2, b_2, (M_1 X_{1,2})$ a v příbuznosti (ac) kuželosečka ${}^1M_2^2$, jdoucí body $a_2, c_2, (M_1 X_{1,2})$. Tyto kuželosečky sečou se ještě ve dvou bodech mimo $a_2, (M_1 X_{1,2})$, jimž na M_1 odpovídají dva body hledaného místa.

Ježto spojnice bodu se sebou samým je neurčita patrně, že kuželosečka ${}^1U^2$ jde body a_1, b_1, c_1 . Označíme-li průsečíky ${}^1\alpha \equiv (\overline{b_2 c_2}, X_{1,2})$ (obr. 2), ${}^2\alpha \equiv (\overline{b_1 c_1}, X_{1,2})$ atd., tu 1U_2 jde bodem $\alpha_1 \equiv ({}^1\beta c_1, \overline{{}^1\gamma b_1})$ a obdobně určenými body β_1, γ_1 . Kuželose-

sečka ${}^2U^2$ jde body a_2, b_2, c_2 a body $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, kde na př. $\alpha_2 \equiv (\overline{{}^2\beta c_2}, \overline{{}^2\gamma b_2})$.

Odpovídající si uzly na těchto kuželosečkách tvoří projektivní řady, v nichž bodům $a_1 b_1 c_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ na ${}^1U^2$ odpovídají body $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 a_2 b_2 c_2$ na ${}^2U^2$. Obě kuželosečky protínají se v těchto bodech na základnici $X_{1,2}$ ježto padne-li jeden uzel na základnici, musí odpovídající uzel s ním sply-



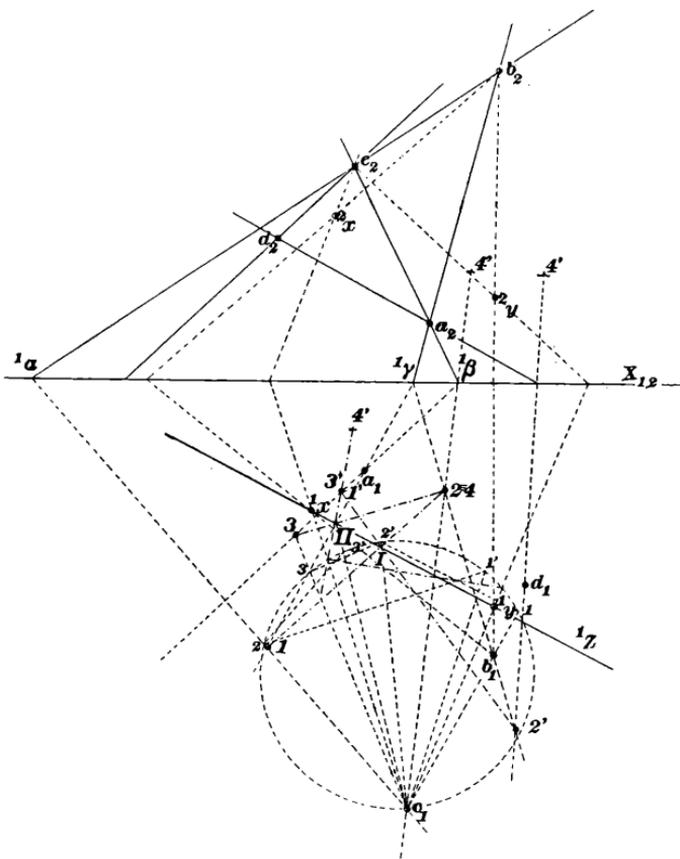
Obr. 2.

nouti, má-li býti splněna perspektivita obou svazků pro osu $X_{1,2}$. Průsečíky tyto mají tu vlastnost, že z nich odpovídající body $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ promítají se paprsky, jež tvoří s osou $X_{1,2}$ též dvojpoměr.

c) Budtež dány konečně čtyři páry odpovídajících si obrazů $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$ a hledejme příslušné uzly. Pro tři páry obrazů bodů a, b, c dostaneme kuželosečky ${}^1D^2, {}^2D^2$, jdoucí body $a_1 b_1 c_1$ resp. $a_2 b_2 c_2$, na nichž musejí býti hledané uzly. Podobně pro obrazy bodů a, b, d dostaneme odpovídající si kuželosečky ${}^1C^2, {}^2C^2$, jdoucí body $a_1 b_1 d_1$ resp. $a_2 b_2 d_2$. Tyto kuželosečky majíce vždy dva společné body a_1, b_1 v ${}^1\pi$ a a_2, b_2 v ${}^2\pi$, protínají se ještě ve dvou párech bodových ${}^1x, {}^1y$ resp. ${}^2x, {}^2y$, jež dávají dva páry řešení.

Z předchozího vyplývá následující řešení příček čtyř mimoběžek (obraz 3), jichž stopníky na rovině ${}^1\pi$ jsou

a_1, b_1, c_1, d_1 a na ${}^2\pi$ body a_2, b_2, c_2, d_2 . Stopníky hledaných přímek ${}^1x, {}^2x$ resp. ${}^1y, {}^2y$ dostaneme co uzly vyhovující předechoz úloze. Kuželosečku ${}^1D^2$ určíme body a_1, b_1, c_1 a body $1, 2$ na přímkách $\overline{a_1{}^1\gamma}$ a $\overline{b_1{}^1\gamma}$, kde ${}^1\gamma \equiv (\overline{a_2b_2}, X_{1,2})$ a jest-li obdobně



Obr. 3.

${}^1\alpha \equiv (\overline{b_2c_2}, X_{1,2}), {}^1\beta \equiv (\overline{c_2a_2}, X_{1,2})$, tu $1 \equiv (\overline{a_1{}^1\gamma}, \overline{{}^1\alpha c_1})$
 a $2 \equiv (\overline{b_1{}^1\gamma}, \overline{{}^1\beta c_1})$. Kuželosečka ${}^1C^2$ určena je body a_1, b_1, d_1 a body $1', 2'$ na těchže přímkách $\overline{a_1{}^1\gamma}, \overline{b_1{}^1\gamma}$. Průsečík $I \equiv (\overline{12}, \overline{1'2'})$ je na spojnici ${}^1Z \equiv \overline{{}^1x{}^1y}$ společných bodů kuželoseček ${}^1C^2, {}^1D^2$ mimo a_1, b_1 . Stejně určíme průsečíky $3, 4$ a $3', 4'$ kuželoseček ${}^1D^2, {}^1B^2$ s přímkami $\overline{{}^1\beta a_1}$ a $\overline{{}^1\beta c_1}$ a průsečík $II \equiv (\overline{34}, \overline{3'4'})$ je též na spojnici 1Z . Jsou čtyři kuželosečky ${}^1A^2, {}^1B^2, {}^1C^2, {}^1D^2$ jdoucí body ${}^1x, {}^1y$ a kombinací po dvou, lze tak pro přímkou

1Z obdržeti šest bodů. Průsečíky přímky 1Z s kuželosečkou na př. ${}^1D^2$, určenou body $a_1, b_1, c_1, 1, 2, 3$ jsou hledané body ${}^1x, {}^1y$, z nichž snadno již obdržíme ${}^2x, {}^2y$.

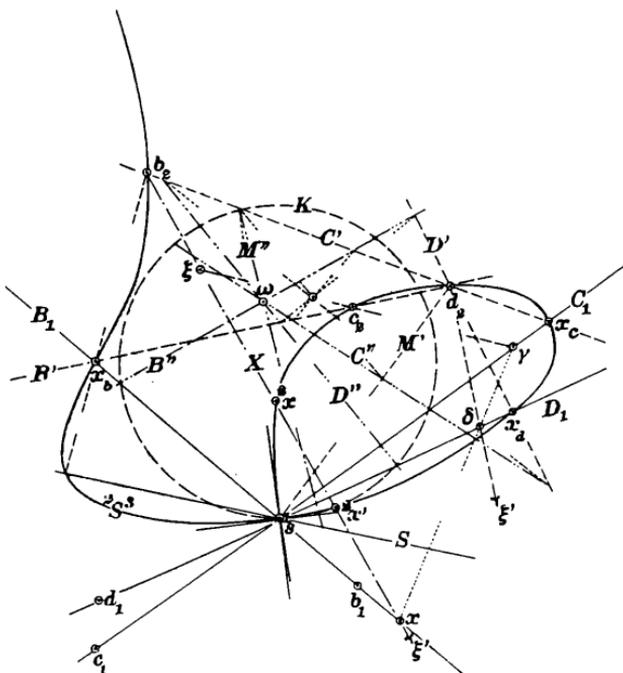
II. Druhý případ je ten, kdy není dána základnice $X_{1,2}$. Problém zde začíná pro tři páry odpovídajících si obrazů a končí pro šest párů.

a) Buďtež dány tři páry odpovídajících si obrazů b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2 . Libovolnému bodu 1s co uzlu v prvném obraze odpovídá ∞^1 uzlů 2s v druhém obraze. Třeba jen bod 2s určití tak, by svazky ${}^1s(b_1c_1d_1)$ a ${}^2s(b_2c_2d_2)$ byly perspektivní. Na libovolné přímce X (obr. 4), jdoucí bodem b_2 , dostaneme body tyto tím, že průsečíkem $x \equiv (B_1X)$, kde $B_1 \equiv \overline{{}^1sb_1}$, sestrojíme libovolnou příčku $x\gamma\delta$, jež protíná paprsky $C_1 \equiv \overline{{}^1sc_1}$, $D_1 \equiv \overline{{}^1sd_1}$ v bodech γ a δ . Spojnice $\overline{c_2\gamma}$, $\overline{d_2\delta}$ sečou přímku X v páru odpovídajících si bodů ξ, ξ' . Otáčí-li se $\gamma\delta$ kol bodu x , probíhají body ξ, ξ' dvě projektivní řady na X , jichž samodružné body ${}^2x, {}^2x'$ vyhovují podmínce. Body ty jsou též průsečíky přímky X s kuželosečkou X^2 , jež je vytvořena průsečíkem paprsků $\overline{c_2\gamma}$, $\overline{d_2\delta}$ a která prochází body c_2, d_2 a 1s . Otáčí-li se přímka X kol bodu b_2 , budou příslušné kuželosečky X^2 tvořiti svazek o základních bodech $c_2, d_2, {}^1s$ a v posledním bodě mají společnou tečnu S , jež s přímkou $\overline{c_2d_2}$ tvoří rozpadající se kuželosečku X_b^2 pro bod $x_b \equiv (\overline{c_2d_2}, B_1)$. Svazek (X^2) je projektivní s řadou bodů x na B_1 , jak patrně na př. z druhých průsečíků přímky D_1 s kuželosečkami (X^2), jež tvoří řadu perspektivnou s řadou bodů x dle středu c_2 .

Body ${}^2x, {}^2x'$ jsou tudíž na křivce $3^0 {}^2S^3$, jež jde body $b_2, c_2, d_2, {}^1s$ a sice v posledním má dvojný bod, ježto přímce $\overline{b_2{}^1s}$ co X odpovídá kuželosečka X^2 rozpadající se v přímky $\overline{c_2{}^1s}$ a $\overline{d_2{}^1s}$. Křivka ${}^2S^3$ jde též průsečíky $x_b \equiv (\overline{c_2d_2}, B_1)$, $x_c \equiv (\overline{d_2b_2}, C_1)$ a $x_d \equiv (\overline{b_2c_2}, D_1)$. Na libovolné přímce A , jdoucí bodem 1s je mimo dvojný bod 1s ještě jeden bod křivky ${}^2S^3$, jenž je v druhém průsečíku přímky A s kuželosečkou jdoucí body $b_2, c_2, d_2, {}^1s$ a z jejichž bodů se tyto body promítají dvojpoměrem $\equiv (B_1C_1D_1A)$. I lze body křivky této snadno lineárně zobraziti.

Rychleji sestrojíme křivku ${}^2S^3$ užitím (1,2) — značné paprskové přiřazenosti ve svazcích o středech v dvojném bodě 1s a v bodě křivky na př. d_2 .

Paprskům $B' \equiv \overline{d_2c_2}$, $C' \equiv \overline{d_2b_2}$, $D' \equiv \overline{d_2x_d}$ druhého svazku odpovídají páry paprskové v projektivní involuci o středě 1s , jež se s prvými protínají v bodech křivky ${}^2S^3$. Involuci tu protneme kružnicí K , jdoucí bodem 1s a na této dosta-



Obr. 4.

neme bodovou involuci o středě ω a páry odpovídající paprskům B', C', D' vyřaty jsou paprsky B'', C'', D'' svazku o středě ω . Doplněním projektivity svazků $\omega(B''C''D'' \dots) \wedge d_2(B'C'D' \dots)$ dostaneme další odpovídající si paprsky svazků ${}^1s, d_2$, a v jejich průsečících další body křivky ${}^2S^3$. Speciálně paprsku $M' \equiv \overline{d_2{}^1s}$ odpovídá v ω paprsek M'' protínající K v bodech tečen v dvojném bodě 1s atd. Dostáváme výsledek:

„Libovolnému bodu 1s co uzlu v poli π_1 odpovídá v poli druhém $\pi_2 \infty^1$ uzlu, jež jsou na křivce třetího stupně, jdoucí body b_2, c_2, d_2 a mající v bodě 1s dvojný bod.“

Výsledek tento vyplývá též z třetího Grassmannova⁶⁾ vytvoření křivky kubické, při němž přímky B_1, C_1, D_1 neprocházejí týmž bodem 1s a příslušná křivka je obecnou křivkou kubickou. Jak toto vytvoření lze převést v Chaslesovo a Cayley-Hesse-ovo ukázal Schroeter.⁷⁾

Jestliže bod 1s splyne s některým z bodů b_1, c_1, d_1 na př. b_1 , pak spojnice jeho se sebou samým je neurčita a odpovídá mu tudíž v poli π_2 celé bodové pole. Padne-li bod 1s na spojnici dvou základních bodů na př. $\overline{b_1c_1}$, pak příslušná křivka $^2S^3$ rozpadá se ve tři přímky, zde $\overline{b_2c_2}, \overline{^1sd_2}, \overline{b_1c_1}$. Jestliže 1s je na spojnici odpovídajících si bodů na př. $\overline{b_1b_2}$, tu příslušná křivka $^2S^3$ rozpadá se v tuto přímku a kuželosečku jdoucí body $c_2, d_2, ^1s$ a body $(\overline{b_2c_2}, \overline{^1sd_1}), (\overline{b_2d_2}, \overline{^1sc_1})$.

Kdyby body b_2, c_2, d_2 byly v téže přímce, pak se křivka $^2S^3$ rozpadá ve tři přímky a to $\overline{b_2c_2d_2}$ a přímky $^2S, ^2S'$ jdoucí bodem 1s , jež jsou samodružnými paprsky projektivních soumístitných svazků, kde paprskům B_1, C_1, D_1 odpovídají paprsky $\overline{^1sb_2}, \overline{^1sc_2}, \overline{^1sd_2}$.

Dány-li dva uzly $^1s, ^1s'$ budou jim v poli π_2 odpovídati dvě křivky třetího stupně $^2S^3, ^2S'^3$, jež mají mimo body b_2, c_2, d_2 společných ještě šest bodů a tedy:

„Promítneme-li tři body b_1, c_1, d_1 ze dvou bodů 1s a $^1s'$, dvěma svazky, tu existuje šest svazků paprskových, jdoucích odpovídajícími body b_2, c_2, d_2 , jež jsou s oběma prvými svazky perspektivní.“

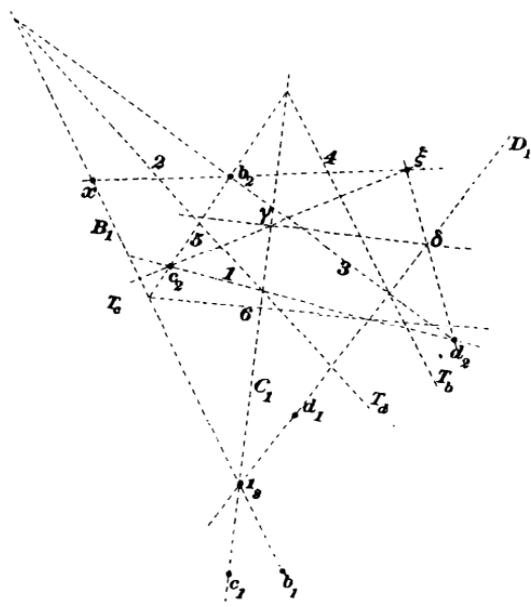
Obdobně určíme obálku základnice $X_{1,2}$, při zvoleném uzlu 1s . Stanovme tyto základnice, jež jdou bodem x na $\overline{B_1} \equiv \overline{^1sb_1}$. Na spojnici $\overline{xb_2}$ zvolíme libovolný bod ξ a tu spojnice $\overline{c_2\xi}$ a $\overline{d_2\xi}$ protínají C_1 a D_1 v bodech γ a δ a tu má $\overline{\gamma\delta}$ jíti bodem x , by to byla základnice (obr. 5). Spojnice $\overline{\gamma\delta}$ obalují, probíhá-li bod ξ přímku $\overline{xb_2}$, kuželosečku Ξ_2 , k níž lze vésti

⁶⁾ „Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Curven“, v Journal f. die reine und angew. Math. sv. 36 str. 178.

⁷⁾ Zurückführung der Grassmannschen Definitionen der Curven dritter Ordnung auf die von Chasles, Cayley und Hesse angegebenen Erzeugungsweisen“ tamtéž sv. 104.

bodem x dvě tečny, jež jsou základnicemi jdoucimi bodem x . Probíhá-li bod x přímkou B_1 , tvoří příslušné kuželosečky Ξ , řadu kuželoseček, jejíž základní tečny jsou: $C_1, D_1, \overline{c_2d_2}$ a $T_b \equiv (\overline{b_2c_2}, C_1)(\overline{d_2b_2}, D_1)$. Řada bodů $x \dots$ na B_1 je projektivní s řadou kuželoseček (Ξ_2).

Bodu 1s řady $x \dots$ odpovídá rozpadající se kuželosečka řady v pár bodový ${}^1s, (T_b, \overline{c_2d_2})$ a tedy křivka třetí třídy obalená tečnami z bodu x k odpovídající kuželosečce Ξ_2 , roz-



Obr. 5.

padá se v bod 1s a kuželosečku Ξ^2 , dotýkající se spojnic $\overline{c_2d_2}, \overline{d_2b_2}, \overline{b_2c_2}$ a přímkou T_b a obdobně sestrojěných T_c a T_d .⁸⁾

Tečny této kuželosečky jsou jednoznačně přiřazeny bodům křivky ${}^2S^3$ a naopak. Je-li bod 1s na některé straně trojúhelníka $b_1c_1d_1$, tu příslušná kuželosečka Ξ^2 se rozpadá, na př., je-li 1s na straně $\overline{b_1c_1}$ rozpadá se v body $(\overline{b_1c_1}, \overline{b_2c_2})$ a bod d_2 . Je-li bod 1s na některé spojnici odpovídajících si

⁸⁾ Že šest těchto přímek dotýká se téže kuželosečky Ξ^2 , plyne ze šestistranu Brianchonova, jehož strany očíslujeme: $\overline{c_2d_2} \equiv 1, T_d \equiv 2, \overline{b_2d_2} \equiv 3, T_b \equiv 4, \overline{b_2c_2} \equiv 5, T_c \equiv 6$, Brianchonův bod je 1s .

bodů, na př. $\overline{b_1 b_2}$, tu příslušná kuželosečka Ξ^2 rozpadá se též v pár bodový a to bod b_2 a bod b' na spojnici $\overline{c_2 d_2}$, který s bodem $(\overline{{}^1 s b_1}, \overline{{}^1 c_2 d_2})$ tvoří pár v involuci určené na $\overline{{}^1 c_2 d_2}$ páry $c_2(D_1, \overline{{}^1 c_2 d_2}), d_2(C_1, \overline{{}^1 c_2 d_2})$.

V případě, kdy b_2, c_2, d_2 jsou v téže přímce rozpadá se kuželosečka Ξ^2 v pár bodový na této přímce, vyfatý přímkami ${}^2 S, {}^2 S'$, jež jsou místem uzlů ${}^2 s$. Uzlům na ${}^2 S$ odpovídající základnice jdou bodem $({}^2 S', \overline{{}^1 b_2 c_2 d_2})$ a pro uzly na ${}^2 S'$ procházejí bodem $({}^2 S, \overline{{}^1 b_2 c_2 d_2})$.

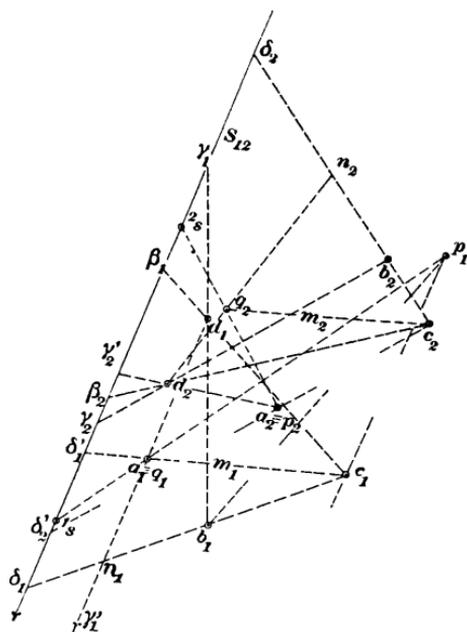
Bodům ${}^1 s$ roviny ${}^1 \pi$ odpovídají tak v poli ${}^2 \pi$ kuželosečky Ξ^2 , dotýkající se stran trojúhelníka $b_2 c_2 d_2$. A naopak libovolné kuželosečce Ξ^2 , dotýkající se stran trojúhelníka $b_2 c_2 d_2$ odpovídá zcela určitý bod ${}^1 s$ v poli ${}^1 \pi$. Myslíme-li si totiž dvě další tečny $X_{1,2}, {}^1 X_{1,2}$ této kuželosečky, tu dle I b) musí uzly ${}^1 s$ býti na dvou kuželosečkách, jdoucích body $b_1 c_1 d_1$ a tedy protínají se ještě v jediném dalším bodě ${}^1 s$. Probíhá-li bod ${}^1 s$ v ${}^1 \pi$ přímkou R , pak odpovídající kuželosečky Ξ^2 tvoří soustavu kuželoseček vepsaných $\mathcal{A} b_2 c_2 d_2$, z nichž se dvě dotýkají libovolné přímky. Všechny tyto soustavy mají společné tři páry rozpadajících se kuželoseček a to $b_2(\overline{{}^1 c_2 d_2}, \overline{{}^1 c_1 d_1}), c_2(\overline{{}^1 b_2 d_2}, \overline{{}^1 b_1 d_1}), d_2(\overline{{}^1 b_2 c_2}, \overline{{}^1 b_1 c_1})$, jež odpovídají průsečíkům přímek R se stranami trojúhelníka $b_1 c_1 d_1$. Mimo to každý tento systém má tři páry rozpadajících se kuželoseček v páry bodové, jež odpovídají průsečíkům přímky R se spojnicemi $\overline{{}^1 b_1 b_2}, \overline{{}^1 c_1 c_2}, \overline{{}^1 d_1 d_2}$. Dle Chasles-a⁹⁾ prochází tudíž bodem čtyři kuželosečky toho systému.

Dány-li dva uzly ${}^1 s$ a ${}^1 s'$, tu existuje jediná osa perspektivity $X_{1,2}$, na níž protínají se dva uzlové svazky prvního pole s odpovídajícími svazky uzlovými druhého pole. Tato přímka $X_{1,2}$ je čtvrtou společnou tečnou kuželoseček Ξ^2 a Ξ'^2 , odpovídajících bodům ${}^1 s$ a ${}^1 s'$ v poli ${}^2 \pi$, mimo strany trojúhelníka $b_2 c_2 d_2$.

b) Dány-li čtyři páry odpovídajících si bodů $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$, tu libovolně zvolenému uzlu ${}^1 s$ bude odpovídati obecně konečný počet uzlů ${}^2 s$. Určeme nejprve na libovolné přímce $S_{1,2}$ uzly ${}^1 s, {}^2 s$, z nichž promítají se čtveřiny

⁹⁾ Na př. Sturm „Liniengeometrie“ díl I. str. 25.

$a_1 b_1 c_1 d_1$ resp. $a_2 b_2 c_2 d_2$ perspektivními svazky. Je patrné, že v těchto uzlových svazcích přímka $S_{1,2}$ odpovídá sama sobě. Body na př. b, c, d určují v prostoru rovinu α , jejímž obrazem je kolineace mezi obrazy prvním a druhým bodového a paprskového pole v té rovině obsaženého. V této kolineaci uzlové body 1s a 2s si též odpovídají, jakožto obrazy průsečíku roviny α se spojnicí $S \equiv \overline{^1s^2s}$ a též uzlové paprsky si



Obr. 6.

odpovídají jako obrazy průsečnic roviny α s rovinami svazku o ose S . Je tudíž obrazová kolineace (α) , určující rovinu α , určena třemi páry $b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$ odpovídajících si bodů a samodružnou přímkou $S_{1,2}$. Odpovídá tudíž v kolineaci (α) průsečíku $\gamma_1 \equiv (S_{1,2}, \overline{b_1 d_1})$ bod $\gamma_2 \equiv (S_{1,2}, \overline{b_2 d_2})$, stejně odpovídají si obdobně sestrojené body $\delta_1 \delta_2$ a $\beta_1 \beta_2$. Bodu $q_1 \equiv a_1$ (obr. 6) jako prvému obrazu bodu q roviny α odpovídá bod q_2 v kolineaci (α) , který určíme na př. užitím průsečíků $m \equiv (\overline{q c}, \overline{b d})$ a $n \equiv (\overline{q d}, \overline{b c})$. Je totiž $(b_1 d_1 \gamma_1 m_1) = (b_2 d_2 \gamma_2 m_2)$ a $(b_1 c_1 \delta_1 n_1) = (b_2 c_2 \delta_2 n_2)$.

V průsečíku spojnic $\overline{c_2 m_2}$ a $\overline{d_2 n_2}$ je bod q_2 . Spojnice $\overline{a_2 q_2}$ je druhým obrazem prvního promítacího paprsku bodu a , jde

tudíž uzlem 2s . Uvažujeme-li podobně bod p roviny α , jehož druhý obraz $p_2 \equiv a_2$ a určíme prvý obraz p_1 , tu $a_1 p_1$ dá na $S_{1,2}$ uzel 1s . Pro bod 2s možno obdobným způsobem obdržeti ještě tři paprsky jím jdoucí, uvažujeme-li místo roviny α , některou z rovin $\beta \equiv (c d a)$, $\gamma \equiv (d a b)$, $\delta \equiv (a b c)$.

Body 1s a 2s lze obdržeti též co společný pár čtyř párů projektivních soumísných řad bodových na $S_{1,2}$. Body ${}^1s, {}^2s$ odpovídají si totiž v projektivitě $\beta_1 \gamma_1 \delta_1 \bar{\wedge} \beta_2 \gamma_2 \delta_2$, již určuje kolineace (α) na $S_{1,2}$, ale tytéž body odpovídají si v obdobně určené projektivitě stanovené na $S_{1,2}$ kolineací (β), nebo (γ), nebo (δ). Stačí ovšem uvažovati jen dvě tyto projektivity na př. stanovené kolineacemi (α) a (β), jež mají vedle společného páru $\beta_1 \equiv (S_{1,2}, c_1 \bar{d}_1)$ $\beta_2 \equiv (S_{1,2}, c_2 \bar{d}_2)$ ještě jeden pár společný, lineárně sestrojitelný. I dostáváme pro rovinnou geometrii větu:

„Strany odpovídajících si trojúhelníků dvou čtyřúhelníků určují na libovolné přímce tři páry odpovídajících si bodů projektivních řad a čtyři tak vzniklé projektivity mají společný pár, z jehož bodů promítají se čtyřúhelníky ty perspektivními svazky.“

Dostáváme tak, pro případ že $S_{1,2}$ je úběžnou přímkou roviny, syntetický důkaz a jinou jednodušší konstrukci případu uvažovaného dr. J. K l a p k o u¹⁰⁾ a ku které jinou cestou dospěl též L. H o f m a n n¹¹⁾.

Současně v této konstrukci obsaženo *jednoduché odvození Sylvestrova vytvoření lineárního komplexu*, daného pěti paprsky mimoběžnými $A B C D E$.

Jak známo¹²⁾ třeba jedním paprskem na př. E proložití dvě libovolné roviny ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ a určení jich nulové body 2s a 1s . Jsou-li a_1, b_1, c_1, d_1 stopníky paprsků A, B, C, D na rovině ${}^1\sigma$ a a_2, b_2, c_2, d_2 stopníky těchže paprsků na rovině ${}^2\sigma$, pak musí

¹⁰⁾ V pojednání „Poznámka ke konstrukcím tečen k průsečné křivce dvou ploch v bodě dotyku“ v Časopise pro pěst. mat. a fys. roč. LII. str. 336.

¹¹⁾ „Konstruktive Lösung der Massaufgaben in vierdimensionalen euklidischen Raum.“ Zprávy Vídeňské akademie roč. 130. (1921) str. 177.

¹²⁾ Na př. S t u r m: „Liniengeometrie“ díl I. str. 108, jakož i od téhož autora „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“ díl I. odst. 255.

platiti ${}^1s (a_1 b_1 c_1 d_1 E) \bar{\wedge} {}^2s (a_2 b_2 c_2 d_2 E)$. Promítneme-li útvary ty v rovinách ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ do téže průmětny π , tu je zde předchozí případ, jen s tím, že $S_{1,2} \equiv E$. Ostatní předchozí konstrukci lze zde odůvodnit následovně.

Roviny ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ protínají paprskovou lineární kongruenci, danou paprsky $BCDE$ v polích kolineárních, v nichž odpovídají si průsečíky s týmž paprskem kongruence, při čemž přímka E je samodružnou a na ní vytínají odpovídající přímky, na př. $b_1 c_1$ a $b_2 c_2$, odpovídající body projektivity stanovené na přímce E a v níž odpovídají si též uzlové body 1s a 2s rovin ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$. Přímky na př. ${}^1s c_2$ a ${}^2s c_1$, jsou polárami vzhledem k lineárnímu komplexu a tedy jako řídicí přímky určují lineární kongruenci, náležející komplexu. Tato lineární kongruence má s lineární kongruencí $BCDE$ téhož komplexu společnou soustavu přímek druhého stupně, jejíž stopníky na ${}^1\sigma$ jsou v přímce ${}^1s \overline{c_1}$ a na ${}^2\sigma$ v přímce ${}^2s \overline{c_2}$ a proto 1s a 2s odpovídají si ve vytčené projektivitě na E .

Stejně dostaneme na přímce E podobnou projektivitu stanovenou lineární kongruencí $ACDE$ a ježto mají společný jeden pár, vyfatý stranami $c_1 \overline{d_1}$ a $c_2 \overline{d_2}$, jsou ${}^1s, {}^2s$ druhým společným párem, při tom onen bod, jenž náleží řadě patřící k poli ${}^1\sigma$ je nulový bod 2s roviny ${}^2\sigma$.

„V orientované poloze dvou obrazů existuje při obrazech čtyř bodů na libovolné přímce jediný pár odpovídajících si uzlů.“

Výjimku činí strany X, Y, Z samodružného trojúhelníku kolineace $a_1 b_1 c_1 d_1 \leftrightarrow a_2 b_2 c_2 d_2$, které obsahují ∞^1 párů odpovídajících si uzlů ${}^1s, {}^2s$, jež si ve vytčené kolineaci odpovídají.

Kdyby uzly měly býti úběžnými body, pak jsou určeny jednoznačně obecně, dány-li obrazy čtyř bodů. Jde-li přímka $S_{1,2}$ některým obrazem, na př. a_1 , pak patrně ${}^1s \equiv a_1$ a bod 2s určí se stejně jako dříve a je to průsečík přímky $S_{1,2}$ s křivkou třetího stupně náležející bodu ${}^1s \equiv a_1$ vzhledem k soustavě tří bodů b, c, d podle II. a) a která má v a_1 dvojný bod. Spojuje-li přímka $S_{1,2}$ neodpovídající si body, na př. $a_1 b_2$, tu ${}^1s \equiv a_1$ a ${}^2s \equiv b_2$. Pro dvě polohy přímky $S_{1,2}$, jdoucí bodem a_1 splyne též ${}^2s \equiv {}^1s \equiv a_1$ a polohy ty jsou tečnami zmíněné křivky třetího stupně v jejím dvojném bodě a_1 .

Uvažujme libovolný bod 1s co uzel v poli ${}^1\pi$ a stanovme, kolik mu odpovídá uzlů 2s v poli ${}^2\pi$. Buďtež $A_1 \equiv {}^1s a_1$, $B_1 \equiv {}^1s b_1$, $C_1 \equiv {}^1s c_1$, $D_1 \equiv {}^1s d_1$ uzlové paprsky v prvním poli, jež se mají protínati s odpovídajícími uzlovými paprsky $A_2 \equiv {}^2s a_2, \dots$ v bodech téže přímky $X_{1,2}$. Paprsky A_1, B_1, C_1, D_1 stanoví jistý dvojpoměr $\delta = (A_1 B_1 C_1 D_1)$. Musí tudíž bod 2s býti na kuželosečce ${}^2K^2$, jdoucí body a_2, b_2, c_2, d_2 a z jejichž bodů promítají se body ty čtveřinami paprsků dvojpoměru δ . Kuželosečku tu stanovíme snadno sestrojením tečny T , na př. v bodě a_2 , pro níž platí $a_2(T, b_2, c_2, d_2) = \delta$. Zvolíme-li bod 2s v libovolném bodě kuželosečky ${}^2K^2$, nebudou odpovídající svazky uzlové obecně perspektivné, nýbrž jich průsečíky budou na kuželosečce L^2 , jdoucí body ${}^1s, {}^2s, (A_1 {}^2s a_2), (B_1 {}^2s b_2), (C_1 {}^2s c_2), (D_1 {}^2s d_2)$.

Probíhá-li bod 2s kuželosečku ${}^2K^2$, budou kuželosečky L^2 tvořiti svazek o základních bodech 1s a třech bodech x_2, y_2, z_2 na kuželosečce ${}^2K^2$. Poslední vyplývá z následujícího: Svazek ${}^1s(A_1 B_1 C_1 D_1 \dots)$ je projektivní s řadou bodovou $a_2, b_2, c_2, d_2 \dots$ na kuželosečce ${}^2K^2$ a tu nastává třikrát případ, že paprsek X_1 prvního svazku jde odpovídajícím bodem x_2 projektivní řady druhého stupně na ${}^2K^2$. Body x_2, y_2, z_2 dostaneme na př. v průsečících kuželosečky ${}^2K^2$ s kuželosečkou M^2 , jíž vytvoří svazky ${}^1s(A_1 B_1 C_1 D_1 \dots) \bar{\cap} a_2(T b_2 c_2 d_2 \dots)$, mimo společný bod a_2 .

Ve svazku kuželoseček L^2 nastává třikrát případ, že kuželosečka L^2 rozpadá se ve dvě přímky, a to ve spojnici bodu 1s s některým ze tří bodů x_2, y_2, z_2 a v spojnici zbývajících dvou bodů. Prvá spojnice je samodružným paprskem obou uzlových svazků a vytíná na ${}^2K^2$ příslušný uzel 2s , kdežto druhá spojnice je osou perspektivity obou uzlových svazků. Dostáváme tudíž výsledek:

„K libovolnému bodu 1s co uzlu v prvním poli přináležejí tři body 2s co uzly v druhém poli, které jsou na kuželosečce ${}^2K^2$, z jejichž bodů se čtveřina a_2, b_2, c_2, d_2 promítá týmž dvojpoměrem jako čtveřina a_1, b_1, c_1, d_1 z uzlu 1s .“

Stejná věta platí pro bod 2s pole ${}^2\pi$.

Spojnice bodů x_2, y_2, z_2 kuželosečky ${}^2K^2$ s bodem 1s stanoví na ${}^2K^2$ tři body, ${}^2s_x, {}^2s_y, {}^2s_z$, jež jsou uzly v poli ${}^2\pi$ a příslušné základnice jsou spojnice $y_2 z_2, z_2 x_2, x_2 y_2$. I musí spojnice na př. bodu a_2 kuželosečky ${}^2K^2$ s těmito body 2s_x,

${}^2s_y, {}^2s_z$ protínati strany $\overline{y_2z_2}, \overline{z_2x_2}, \overline{x_2y_2}$ ve třech bodech, jež jsou na spojnici ${}^1s a_1$, t. j. v jediné přímce. Toť věta vyslovená Steinerem a již dokázal prof. dr. Sobotka¹³⁾.

Mysleme si proloženu kuželosečku ${}^1K^2$ určenou body ${}^1s, a_1, b_1, c_1, d_1$, tu probíhá-li bod 1s tuto kuželosečku, zůstane dvojpoměr δ týž a tedy odpovídající trojiny bodů 2s probíhají budou kuželosečku ${}^2K^2$. Kuželosečka M^2 , jež vytíná na ${}^2K^2$ mimo bod a_2 body $x_2 y_2 z_2$, bude při tom probíhají svazek, jehož základními body jsou bod a_2 a tři body m_1, n_1, p_1 na kuželosečce ${}^1K^2$. Myslíme-li si totiž body $a_2, b_2, c_2, d_2, \dots$ na ${}^2K^2$ promítnuty z a_2 , tu svazek tento je projektivní s řadou bodovou $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$ na ${}^1K^2$ a třikrát opět nastane případ, že odpovídající prvky jsou incidentní. Ježto body x_2, y_2, z_2 jsou vyřaty na ${}^2K^2$ kuželosečkami M^2 svazku, jehož jeden základní bod je na ${}^2K^2$, tvoří na této trojiny kubické involuce. Strany trojúhelníků $x_2 y_2 z_2$, jež jsou osami perspektivity příslušných uzlových svazků, obalují involuční kuželosečku I^2 .

„Probíhá-li uzel 1s kuželosečku jdoucí body a_1, b_1, c_1, d_1 , obalují příslušné základnice (osy perspektivity) kuželosečku.“

Mezi body 1s pole ${}^1\pi$ a body 2s pole ${}^2\pi$ je příbuznost $[3, 3]$ značná. Výjimku tvoří v poli ${}^1\pi$ body a_1, b_1, c_1, d_1 a v poli ${}^2\pi$ body a_2, b_2, c_2, d_2 . Na př. bodu a_1 co 1s odpovídá ∞^1 bodů 2s , ježto spojnice a_1 s a_1 je neurčitou a tedy máme případ IIa) a tudíž bodu a_1 odpovídají body 2s na křivce třetího stupně ${}^2A^3$, jež má v bodě a_1 dvojný bod a jde body b_2, c_2, d_2 a průsečíky $(a_1 b_1, c_2 d_2)$, $(a_1 c_1, b_2 d_2)$, $(a_1 d_1, b_2 c_2)$. Body a_1, b_1, c_1, d_1 jsou hlavními body v poli ${}^1\pi$ a jim odpovídají křivky ${}^2A^3, {}^2B^3, {}^2C^3, {}^2D^3$. Stejně v poli ${}^2\pi$ jsou hlavními body a_2, b_2, c_2, d_2 a jim odpovídají hlavní křivky ${}^1A^3, {}^1B^3, {}^1C^3, {}^1D^3$.

Přijde-li bod 1s do průsečíku kuželoseček ${}^1K^2, {}^2K^2$, pak bod na př. x_2 splyne s tímto a tudíž dva uzly ${}^2s_y, {}^2s_z$ splynou s bodem tím. Oba projektivní svazky kuželoseček ${}^1K^2$ a ${}^2K^2$ vytvářejí průsečíky odpovídajících si kuželoseček, křivku čtvrtého stupně S^4 , jdoucí body $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ a ježto

¹³⁾ V pojednání: „Ke konstrukci rovnoosé hyperboly ze čtyř imag. bodů nebo tečen a jedné vlastnosti svazku kuželoseček.“ Rozpravy akademie roč. 1925.

odpovídají si též rozpadající se kuželosečky svazků, jde tato též 12 průsečíky na př. $(a_1 \overline{b_1}, a_2 \overline{b_2})$, $(a_1 \overline{b_1}, c_2 \overline{d_2})$ atd. Body křivky S^4 počítané jako 1s k poli ${}^1\pi$ mají tu vlastnost, že dva z odpovídajících bodů 2s v poli ${}^2\pi$ splývají s bodem tím a stejně uvažujeme-li body ty jako body 2s , dva odpovídající body 1s jsou v bodech těch. Jest-li bod 1s je na některé spojnici dvou základních bodů, na př. $a_1 \overline{b_1}$, pak jeden z odpovídajících bodů 2s je pro všechny body 1s té spojnice pevný a je v průsečíku $(a_1 \overline{b_1}, c_2 \overline{d_2})$, kdežto druhé dva jsou na $a_2 \overline{b_2}$. Kuželosečka j^2 pro body kuželosečky ${}^1K^2$, rozpadající se v přímkv $a_1 \overline{b_1}, c_1 \overline{d_1}$, rozpadá se v body $(a_2 \overline{b_2}, a_1 \overline{b_1})$, $(c_2 \overline{d_2}, c_1 \overline{d_1})$.

Co odpovídá řadě bodové 1Q bodů 1s pole ${}^1\pi$ v poli ${}^2\pi$? Bude to křivka ${}^2Q^x$ stupně x , jíž vyplují trojiny bodů 2s , odpovídající bodům přímkv 1Q . Ježto přímkv 1Q seče každou z hlavních křivek ${}^1A^3 \dots$ pole ${}^1\pi$ ve všech bodech, budou a_2, b_2, c_2, d_2 trojnými body křivky ${}^2Q^x$. Ježto přímkv 1Q seče kuželosečku ${}^1K^2$, jdoucí body a_1, b_1, c_1, d_1 ve dvou bodech, bude mít křivka ${}^2Q^x$ s odpovídající kuželosečkou ${}^2K^2$ šest společných bodů, mimo trojné body a_2, b_2, c_2, d_2 . Platí tudíž rovnice

$$2x = 4 \cdot 3 + 6, \text{ z níž } x = 9.$$

Odpovídá tedy přímkv v jednom poli křivka devátého stupně v druhém poli, jež má v základních bodech pole toho trojné body.

Jest-li přímkv ${}^1Q \equiv \overline{a_1 b_1}$, tu příslušná křivka ${}^2Q^9$ rozpadá se v křivky ${}^2A^3, {}^2B^3$, z nichž prvá má dvojný bod v a_1 a druhá v b_1 , prvá jde body b_2, c_2, d_2 , druhá a_2, c_2, d_2 , a obě jdou bodem $a_1 \overline{b_1}, c_2 \overline{d_2}$, v dvojnásob počítanou přímkv $a_2 \overline{b_2}$ a v přímkv $c_2 \overline{d_2}$.

Prochází-li přímkv 1Q jedním ze základních bodů, na př. bodem a_1 , tu křivka ${}^2Q^9$ rozpadne se v křivku $3^0 {}^2A^3$, mající v bodě a_1 dvojný bod, která jde body b_2, c_2, d_2 , a v křivku 6^0 , jež má v bodě a_2 trojné bod, v bodech b_2, c_2, d_2 dvojný body a další tři dvojný body v zbývajících průsečících přímkv 1Q s S^4 mimo a_1 .

Všechny křivky ${}^2Q^9$ mimo čtyřech trojných bodů a_2, b_2, c_2, d_2 mají ještě šest společných bodů v průsečících $(a_1 \overline{b_1}, c_2 \overline{d_2})$, atd. V průsečících přímkv 1Q s křivkou S^4 má křivka ${}^2Q^9$ čtyři dvojný body. Přímkv 1Q protíná křivku ${}^2Q^9$

mimo dvojně body na S^4 , jen v jediném bodě 2s , jemuž odpovídá jediný bod 1s ležící na přímce 1Q , jak vyžaduje dřívější výsledek.

Myslíme-li si dvě přímky 1P a 1Q v poli π , tu odpovídající křivky ${}^2P^9$, ${}^2Q^9$ mají míti mimo trojně body a_2, b_2, c_2, d_2 a 6 průsečíků $(\overline{a_1 b_1}, \overline{c_2 d_2}) \dots$ společny jen tři body, jež odpovídají uzlu $({}^1P, {}^1Q)$ v poli ${}^1\pi$. To je možné jen tak, že násobnost průsečíků a_2, b_2, c_2, d_2 je více než 9 a sice 18.

Libovolné kuželosečce ${}^1L^2$ pole ${}^1\pi$ odpovídá křivka ${}^2L^{18}$ stupně 18, jež má v základních bodech a_2, b_2, c_2, d_2 šestinásobné body a 14 dvojných bodů a sice šest v bodech $(\overline{a_1 b_1}, \overline{c_2 d_2}) \dots$ a osm v průsečících kuželosečky ${}^1L^2$ s křivkou S^4 . Jest-li ${}^1L^2$ přejde v kuželosečku ${}^1K^2$, jdoucí základními body a_1, b_1, c_1, d_1 , rozpadne se příslušná křivka v křivky ${}^2A^3, {}^2B^3, {}^2C^3, {}^2D^3$ a třikráte počítanou kuželosečku ${}^2K^2$, jdoucí body a_2, b_2, c_2, d_2 . Atd.

Předpokládáme-li, že čtyři body a, b, c, d dané svými obrazy jsou v prostoru v téže rovině ρ , pak odpovídající uzly vyplňují tytéž tři přímky v obou polích. Rovina ρ zobrazuje se totiž v kolineaci obou obrazů bodů a přímek té roviny, jež je dána odpovídajícími si čtveřinami $a_1 b_1 c_1 d_1 \leftrightarrow a_2 b_2 c_2 d_2$. V této kolineaci musí odpovídající si svazky kol uzlů ${}^1s, {}^2s$, jež si v této kolineaci též odpovídají, býti perspektivní a tedy spojnice ${}^1s^2s$ musí býti samodružnou přímkou kolineace. Přímky ty jsou tři a tvoří strany samodružného trojúhelníka této kolineace. Odpovídající si body 1s a 2s na těchto stranách tvoří projektivní řady a příslušná základnice jde protějším vrcholem trojúhelníka samodružného.

c) Dáno-li pět párů odpovídajících si bodů $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2, e_1 e_2$, pak v polích ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$ budou existovati jen křivky ${}^2S^x$ a ${}^1S^x$, na nichž musí býti uzly. Přímce 1Q odpovídá vzhledem k soustavě $bcde$ křivka ${}^2Q^9$, jež má v bodech b_2, c_2, d_2, e_2 trojně body. Libovolnému bodu 1s na 1Q odpovídá dále vzhledem k bodům a, d, e křivka 3^0 , jež jde body a_2, d_2, e_2 a protíná tudíž křivku ${}^2Q^9$ v $3 \cdot 9 - 2 \cdot 3 = 21$ bodech 2s , jimž odpovídající vždy jeden ze tří bodů ${}^1s'$ vzhledem k b, c, d, e bude na 1Q . Odpovídá tak libovolnému bodu 1s na 1Q 21 bodů ${}^1s'$.

Naopak, zvolíme-li $'s'$, bude mu vzhledem k a, d, e odpovídati křivka 3^0 , jež protíná ${}^2Q^9$ zase ve 21 bodech, jimž odpovídá tolikéž bodů $'s$ na 1Q . Dostáváme tak na přímce 1Q involutorní příbuznost [21], jež má 42 samodružných bodů.

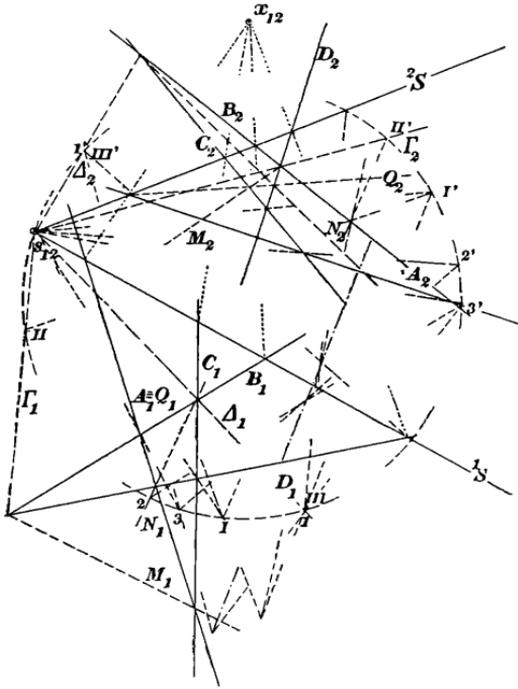
Takovému bodu samodružnému $'s$ odpovídají sice na ${}^2Q^9$ tři body $'s$, ale z nich třeba vzít jen onen, který je současně na kubické křivce odpovídající bodu $'s$ vzhledem k a, d, e . Pro takové dva body $'s$ a $'s$ jsou nejen svazky $'s$ ($b_1c_1d_1e_1$), $'s$ ($b_2c_2d_2e_2$), nýbrž i svazky $'s$ ($a_1d_1e_1$) a $'s$ ($a_2d_2e_2$) perspektivními a proto body ty vyhovují úloze. Bodu $'r \equiv (\overline{d_1e_1}, {}^1Q)$ odpovídá na ${}^2Q^9$ jeden bod v průsečíku $'r \equiv (\overline{d_1e_1}, \overline{b_2c_2})$, kdežto druhé dva jsou na $\overline{d_2e_2}$. Křivka kubická odpovídající bodu $'r$ v (ade) rozpadá se v přímky $\overline{ra_2}, \overline{d_1e_1}, \overline{d_2e_2}$ a tedy obsahuje též bodu $\overline{r_2}$. Bodu $'r$ vzhledem k $(bcde)$ odpovídá kterýkoliv bod na $\overline{d_1e_1}$ a tedy též bod $'r$. Náleží tedy též bod $'r$ ke koincidenčním shora uvedeným a proto místo uzlů v poli ${}^1\pi$ má s libovolnou přímkou 1Q společných 41 bodů a tvoří křivku ${}^1S^{41}$. Stejně v druhém poli ${}^2\pi$ je křivka ${}^2S^{41}$ téhož stupně. Křivka na př. ${}^2S^{41}$ jde všemi body a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 a sice má v těchto trojných bodech, ježto na př. bodu a_2 odpovídají vzhledem k $(bcde)$ tři body v poli ${}^1\pi$, jež jsou na křivce ${}^1S^{41}$.

Jest-li z pěti bodů $abcde$ čtyři, na př. $abcd$, jsou v téže rovině, pak jsou tři páry uzlů, jež úlohu tu řeší. Při kolineaci $a_1b_1c_1d_1 \leftrightarrow a_2b_2c_2d_2$, do níž zobrazuje se rovina $(abcd)$, odpovídá bodu e_1 počítanému k obrazu roviny té co bod p_1 bod p_2 v poli ${}^2\pi$. Ježto v prostoru je ep promítací prvý paprsek, bude e_2p_2 druhým uzlovým paprskem. Tento protíná strany samodružného trojúhelníka uvedené kolineace ve třech druhých uzlech $'s$, jimž odpovídají v kolineaci té uzly první na těchže stranách samodružného trojúhelníka.

d) Dána-li konečně soustava šesti bodů $abcdef$ svými obrazy, pak pro soustavu $bcdef$ dostaneme v poli ${}^1\pi$ křivku ${}^1S_a^{41}$ mající v bodech b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 trojných body a podobně pro soustavu $acdef$ křivku ${}^1S_b^{41}$ mající v a_1, c_1, d_1, e_1, f_1 trojných body. Křivky ty protínají se v $41 \cdot 41 - 4 \cdot 9 = 1645$ bodech, jimž odpovídá tolikéž bodů na ${}^2S_a^{41}, {}^2S_b^{41}$.

Předchozí úvahy schopny jsou dualisace a to nejen v rovině, ale i v prostoru. Jako prvky v prostoru uvažo-

jeme roviny α, β, \dots a zvolme v prostoru dva »středy promítání« t. j. dvě roviny ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ a »dvě průmětny« t. j. body 1p a 2p . Libovolná rovina α_1 protíná roviny ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ v přímkách, jež spojíme rovinami α_1 resp. α_2 s body 1p resp. 2p a tyto roviny jsou průměty roviny ve smyslu duálním v trsech 1p resp. 2p . »Uzly« jsou zde roviny ${}^2\sigma_1$ a ${}^1\sigma_2$ v trsu 1p resp. 2p , jež jdou průsečnicí (${}^1\sigma {}^2\sigma$). Průměty α_1, α_2 roviny α



Obr. 7.

protínají tyto uzlové roviny v přímkách, jež jsou v téže rovině jdoucí spojnicí ${}^1p {}^2p$.

Protněme oba trsy průmětné ${}^1p, {}^2p$ libovolnou rovinou σ , tu obrazem roviny budou průsečnice A_1, A_2 roviny σ s α_1 resp. α_2 , uzlové přímky 1S a 2S jsou průsečnice roviny σ s rovinami ${}^2\sigma_1$ a ${}^1\sigma_2$ a základním bodem je průsečík $x_{1,2}$ roviny σ se spojnicí ${}^1p {}^2p$. Orientace obou obrazů roviny spočívá v tom, že spojnice průsečíků $(A_1 {}^1S), (A_2 {}^2S)$ jde bodem $x_{1,2}$. Přímka zobrazuje se zde ve dva průmětné svazky paprskové, jichž odpovídající paprsky protínají uzlové paprsky 1S a 2S v bodech, jichž spojnice prochází základním bodem

$x_{1,2}$. Bod uvažován co trs rovin, jím jdoucích, má za obraz kolineaci dvou paprskových polí, v níž odpovídají si uzlové paprsky 1S a 2S a sice vždy ony dva jejich body, jež jsou na témže paprsku svazku o středu $x_{1,2}$. Průsečík $s_{1,2} \equiv ({}^1S, {}^2S)$ (obr. 7) je ve všech těchto kolineacích samodružným bodem.

I je nyní patrné, jak výsledky předchozí lze přenést do tohoto duálního útvaru. Tak v obr. 7 ukázáno, jak podle toho řeší se následující úloha:

»Dány dva čtyřstrany $A_1B_1C_1D_1$ a $A_2B_2C_2D_2$, a mají se protnouti přímkami 1S resp. 2S , jež jdou daným bodem $s_{1,2}$ tak, by vzniklé stejnohlé průsečíky byly na spojnicích jdoucích týmž bodem.«

Úloha ta řeší se duálně k úloze vyznačené v obr. 6. Roviny, jichž obrazy jsou v dvojčinách přímek B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 , protínají se v prostoru v bodě r , jenž má za obraz kolineaci určenou odpovídajícími si útvary $B_1C_1D_1s_{1,2} \leftrightarrow B_2C_2D_2s_{1,2}$. Uvažujeme-li přímkou A_1 co prvý obraz Q_1 roviny α trsu r , tu obdržíme druhý její obraz v přímce Q_2 odpovídající Q_1 v uvedené kolineaci. Roviny α, κ protínají se v téže přímce roviny ${}^1\sigma$ a proto jich druhé obrazy protínají se se na uzlové přímce 2S , jež jde též bodem $s_{1,2}$ a je tedy tím určena. Stejně lze obdržeti bod uzlové přímky 1S v průsečíku A_1 s prvým obrazem P_1 roviny π trsu r , jejíž druhý obraz je $P_2 \equiv A_2$.

Přímky ${}^1S, {}^2S$ jsou též druhým společným párem odpovídajících si přímek ve dvou párech projektivních svazků, majících známý jeden společný pár. Projektivity ty se dostanou spojením bodu $s_{1,2}$ se stejnohlými vrcholy trojúhelníků omezených obrazy na př. $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ a pak $B_1C_1D_1$ a $B_2C_2D_2$ atd.

Résumé.

Sur le problème de la projectivité pour la position orientée de deux images.

Par Jos. Klíma.

Projetons l'espace des points a, \dots d'un centre 1s sur le plan de projection $^1\pi$ et du centre 2s sur le plan de projection $^2\pi$. Si nous projetons ensuite les plans de projection encore d'un centre s sur un plan π , le point a aurait deux images a_1 et a_2 qui sont sur les rayons de deux faisceaux qui ont leurs sommets aux noeuds (points fondamentaux) 1s et 2s et qui se coupent sur la ligne fondamentale $X_{1,2}$. On dit que les images sont dans la position orientée. Ici on résout le problème de déterminer les noeuds $^1s, ^2s$ pour telle position orientée en connaissant les images des points.

Dans la I^{ère} partie on suppose qu'on connaît la ligne fondamentale $X_{1,2}$. Le problème commence pour les deux points a, b (les images a_1a_2, b_1b_2) et finit pour quatre points a, b, c, d (les images a_1a_2, \dots, d_1d_2).

a) Connaissant deux couples a_1a_2, b_1b_2 , il y a entre les plans ponctuels $^1\pi$ et $^2\pi$ des noeuds 1s et 2s une correspondance univoque de Steiner qui a pour les points fondamentaux en $^1\pi$ a_1, b_1 ($a_2b_2, X_{1,2}$) et en $^2\pi$ les points $a_2, b_2, (a_1b_1, X_{1,2})$.

b) Pour les trois couples a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 , il y a dans deux plans ponctuels deux coniques, qui contiennent les noeuds et enfin

c) si nous connaissons quatre couples des images a_1a_2, \dots, d_1d_2 on a deux résolutions pour les noeuds $^1s, ^2s$. De la construction des noeuds suit une construction des transversales communes à quatre gauches, données par leurs traces sur deux plans.

Dans la II^{ème} partie on ne connaît pas la ligne fondamentale $X_{1,2}$, le problème commence pour trois points, donnés par leurs images b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2 , et finit pour six points.

a) Les trois points b, c, d sont donnés par leurs deux images. Au noeud 1s dans $^1\pi$ correspondent dans $^2\pi$ points 2s qui sont sur la courbe du troisième degré qui passe par

les points b_2, c_2, d_2 et qui a au point 1s le point double. La ligne fondamentale $X_{1,2}$ enveloppe une conique Ξ^2 qui est inscrite au triangle $b_2c_2d_2$.

b) Pour quatre points $abcd$ on a sur quelconque droite $S_{1,2}$ une couple des noeuds $^1s, ^2s$, qu'on peut construire linéairement. Il en suit une construction simple de génération de Sylvester d'un complexe linéaire, connaissant cinq rayons du complexe. Au point arbitraire 1s correspondent trois points 2s qui sont sur la conique $^2K^2$, des points de laquelle les points a_2, b_2, c_2, d_2 se projettent par les rayons dont le rapport anharmonique est égal à celui par lequel se projettent les points a_1, b_1, c_1, d_1 du point 1s . Si le point 1s parcourt la conique $^1K^2$ qui passe par les points a_1, b_1, c_1, d_1 , les droites fondamentaux enveloppent une conique. A une ponctuelle 1Q des points 1s correspond une courbe du neuvième degré qui a aux points a_2, b_2, c_2, d_2 des points triples et quatre points doubles aux points communs de la droite 1Q et de la courbe S^4 qui est engendrée par les faisceaux projectifs des coniques aux points fondamentaux a_1, b_1, c_1, d_1 resp. a_2, b_2, c_2, d_2 . Si l'on suppose que quatre points $abcd$ sont au même plan, alors les noeuds sont sur trois droites qui font les côtés du triangle dont les sommets sont les points doubles de la collinéation plane $a_1b_1c_1d_1 \leftrightarrow a_2b_2c_2d_2$.

c) Pour les images des cinq points a, b, c, d, e existent dans les plans $^1\pi$ et $^2\pi$ les courbes du degré 41 sur lesquelles se trouvent les noeuds correspondants. Si quatre points des cinq points donnés tombent dans un même plan, on a trois solutions.

d) Pour le système de six points on obtient 1645 couples de noeuds.

Enfin il est montré comment on peut transférer les résultats réciproques non seulement au plan, mais aussi à l'espace. Il est résolu le problème suivant: Couper deux quadrilatères dont les côtés correspondent d'un certain ordre par deux droites, qui passent par un point donné de sorte que les ponctuelles respectives soient perspectives.

Multipolare Teilungen in chloralisierten Wurzeln.

Von Dr. B. NĚMEC.

Mit 7 Figuren im Text.

Vorgelegt am 5. Mai 1929

Ich habe unlängst eine Arbeit veröffentlicht (Němec 1926) in welcher ich multipolare Teilungen in den vielkernigen Riesenzellen der Gallen von *Heterodera radicola* an Beta-Wurzeln beschrieb. Ich habe auch darauf hingewiesen, daß solche Teilungen zu einer Reduktion der Chromosomenzahl führen müssen. Auf diesen Umstand hat übrigens schon Th. Boveri aufmerksam gemacht (1914), für chloralisierte Wurzelspitzen Kemp (1910).

In meinen Arbeiten über den Einfluß des Chloralisierens auf die sich teilenden Pflanzenzellen vertrat ich den Standpunkt, daß nach Behandlung mit Chloralhydrat polyploid gewordene Zellen zuweilen ihre Chromosomenzahl reduzieren können. Ich glaubte in dieser Weise einige Teilungsfiguren deuten zu können, in welchen entweder in großen Zellen, in welchen man eine polyploide Teilungsfigur erwarten konnte, eine normale diploide vorkam, oder Fälle, wo sich Chromosomen in der Aequatorialplatte in zwei parallelen Ebenen befanden. Die erste Art bezeichnete ich als direkte, die zweite als indirekte Reduktion. Diese Erklärung wurde jedoch meist nicht als zwingend bezeichnet, scheinbare Vierergruppen wurden als direkte Folge der Chloralwirkung nachgewiesen, welche mit einer Reduktion nichts zu tun haben.

Wenn ich auch nicht die Resultate meiner Untersuchungen an Seitenwurzeln, welche an chloralisierten Hauptwurzeln entstanden sind (Němec 1910), zu gunsten der Reduktion der Chromosomenzahl in polyploiden Zellen ins Treffen führen will, so muß ich doch auf Winklers Erfahrungen hinweisen,

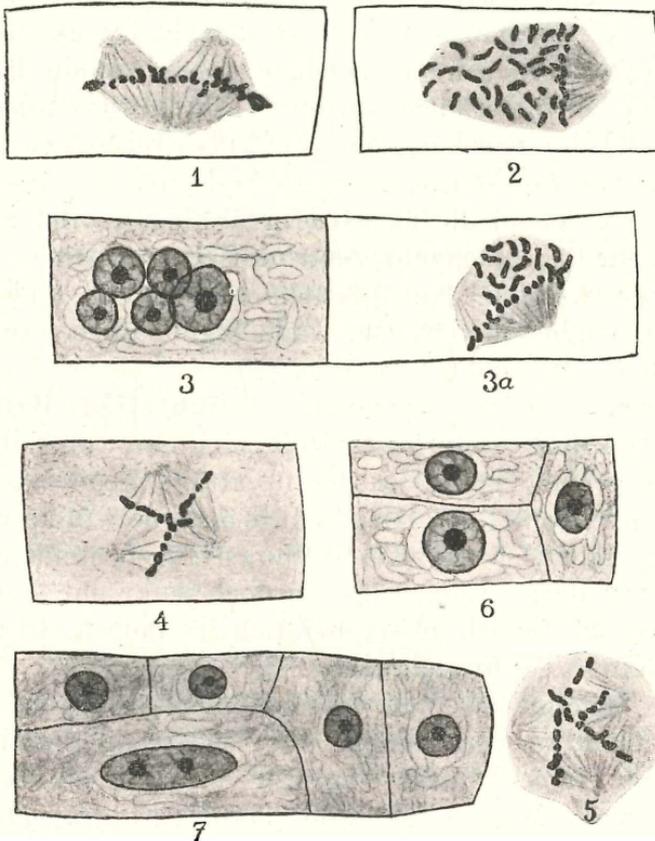
welcher an seinen Gigas Varietäten gelegentlich Rückschläge zur diploiden Stammform beobachtete. Da muß sicher eine Reduktion der Chromosomenzahl stattgefunden haben. Auf welche Weise dieselbe vor sich gegangen sein mag, wissen wir nicht.

Da multipolare Teilungsfiguren auffallend sind und sicher zu einer Reduktion der Chromosomenzahl führen müssen, wobei es sich jedoch keineswegs um eine Halbierung derselben handeln muß, so glaubte ich noch am ehesten solche Teilungen in polyploiden Zellen sicherstellen zu können, allerdings wenn sie überhaupt vorkommen.

Am sichersten erhält man polyploide Zellen durch wiederholtes Chloralisieren der meristematischen Gewebe. Weil man da bis oktodiploide Kerne erhält, sind auch Reduktionsteilungen zu erwarten. Ich habe die Erfahrung gemacht, daß in den Wurzelspitzen von *Vicia faba* zwar zahlreiche polyploide Zellen durch das Chloralisieren entstehen, der Teilungsmechanismus fungiert hier jedoch dann meist normal, wenigstens was die Kernteilung selbst betrifft. Viel mehr Abnormitäten hab ich seiner Zeit in mehrmals chloralisierten Wurzelspitzen von *Pisum sativum* gesehen und ich griff daher auch diesmal zu ihnen. Sie wurden dreimal hintereinander in Intervallen von 12 Stunden chloralisiert und 48 Stunden nach der letzten Chloralisierung fixiert.

Sie weisen eine große Menge von verschiedenen Abnormitäten auf, wie ich auf dieselben schon in meinem Buche »Das Problem der Befruchtungsvorgänge« (1910) hingewiesen habe. Ich will mich hier nicht mit der Entstehung der polyploiden Kerne durch Kernverschmelzung oder durch Einstellen der Prophasen mit längsgespaltenen Chromosomen eingehender befassen. Auch will ich nicht über die relative Größe der Kerne und Zellen sprechen. Hervorgehoben sei nur, daß es nicht selten zur Bildung von zwei ungleich großen Schwesterkernen kommt. Das ist eine Erscheinung, welche nur in mehrmals chloralisierten Wurzelspitzen vorkommt. Sie kommt^t wahrscheinlich durch ungleichmäßige Verteilung der Tochterchromosomen auf die beiden Pole zustande, wenn eben das Stadium ihres Auseinanderweichens durch das Chloralhydrat getroffen wurde. Ich habe eine Zelle gefunden, wo die beiden

ungleich großen Kerne in Teilung begriffen waren. Es handelte sich um zwei Aequatorialplatten, welche schön in der Schnittebene lagen. In einer Kernplatte konnte ich sicher 20, in der anderen 36 Chromosomen zählen. Die Zelle war also tetra-



Aus einer dreimal nacheinander chloralisierten Wurzelspitze von *Pisum sativum*. Fig 1, 2, 3a, 4, 5 multipolare Teilungen. Fig. 3, 6, 7 durch multipolare Teilungen entstandene Zellen.

diploid (oktoploid), die beiden Kerne enthielten zusammen 56 Chromosomen.

Mein Hauptaugenmerk war auf abnorme Kernplatten gerichtet. Ich suchte nach multipolaren Figuren, welche mehr als zwei Schwesterkernen Ursprung gegeben hätten, was mit einer Herabsetzung der Chromosomenzahl verbunden wäre. Meine Ausbeute ist zwar nicht reich gewesen, sie war aber dennoch positiv.

Am einfachsten lagen die Verhältnisse in Kernplatten, welche nicht eben, sondern gekrümmt waren (Fig. 1). Da kam es vor, daß an der konkaven Seite der Kernplatte die Spindel einheitlich war, an der Konvexen war sie geteilt, was darauf schließen ließ, daß sich hier zwei Chromosomengruppen und zwei Kerne bilden werden. In einige Fällen war die Kernplatte rechtwinkelig gebogen, was sowohl in der Seiten — als auch in der Flächenansicht (Fig. 2.) auffallend war. In solchen Fällen werden wohl ebenfalls drei Schwesterkerne entstehen, von welchen einer groß und mit voller Chromosomenzahl versehen, die zwei übrigen kleiner und mit verminderter Chromosomenzahl versehen sein werden.

Weiter wurden Kernplatten beobachtet, welche unregelmäßig mehrpolig waren. Ganz regelmäßige multipolare Figuren habe ich nicht gefunden.

In Fig. 3 ist eine vierpolige Teilungsfigur dargestellt. Es sind allerdings nur zwei Pole sichtbar, weil die zwei übrigen zu jenem Teile der Kernplatte angehören, welcher in der Schnittebene liegt. Hier könnte man der Meinung sein, daß es sich eigentlich um zwei Teilungsfiguren handelt, welche sich berühren, deren Längsachsen jedoch senkrecht zu einander stehen. Das ist jedoch nicht möglich in den in Fig. 4 und 5 dargestellten Teilungsfiguren.

Hier handelt es sich um dreipolige Figuren, obzwar dieselben nicht so regelmäßig sind, wie wenn die einzelnen Kernplatten einen Winkel von 120° miteinander schließen. Dennoch ist die Mehrpoligkeit der Teilungsfiguren ganz deutlich ausgeprägt. Die Figuren machen den Eindruck, wie wenn sie unter dem Einfluß einer Bipolarität der Zelle ständen, daher sie nicht regelmäßig radiär gebaut sind.

Jedenfalls führen solche Teilungen zur Erzeugung von mehr als zwei Schwesterkernen und somit auch zur Herabsetzung der Chromosomenzahl, wenn nicht in allen, so doch in einigen Kernen. Es ist wahrscheinlich, daß es auch Teilungsfiguren gibt mit noch mehr Polen, da man polyploide Zellen mit bis fünf ungleich großen Kernen trifft (Fig. 3 a). Diese Zelle ist mehrkernig, weil die Scheidewandbildung offenbar durch die letzte Chloralisierung verhindert wurde, doch weist die Anordnung der Scheidewände in anderen Zellen darauf hin,

daß mehr als eine Scheidewand simultan in der Zelle entstanden ist (Fig 6, 7.). Da nun die Kerne ungleich groß sind, läßt sich folgern, daß sie durch eine mehrpolige Teilung entstanden sind, etwa wie die oben beschriebenen es sind.

Wenn z. B. die in Fig. 6 dargestellte Zelle durch eine dreipolige Teilung entstanden ist, so liegt im vorderen Ende der Mutterzelle eine Zelle mit herabgesetzter Chromosomenzahl vor. Da nun jede dem Urmeristem näher gelegene Zelle eine größere Teilungsmöglichkeit hat, so könnte sie, nach dem die hinteren beiden Zellen ihre Teilungsfähigkeit schon verloren haben, sich noch weiter teilen und Zellen mit herabgesetzter Chromosomenzahl Ursprung geben. Da es nicht ausgeschlossen ist, daß ein solcher Vorgang auch im Urmeristem stattfindet, so könnte dadurch eine Rückkehr zur herabgesetzten Chromosomenzahl in der Wurzelspitze bewerkstelligt werden.

Die oben beschriebenen mehrpoligen Teilungsfiguren machen den Eindruck einer zufälligen Abnormalität. Das würde jedoch nichts ausmachen, da ja auch die Ausscheidung der polyploiden Zellen aus der Wurzelspitze keinen Eindruck einer völligen Regelmäßigkeit macht. Dennoch ist hervorzuheben, daß die Mehrpoligkeit nicht z. B. durch Platzmangel für eine allzubreite Kernplatte zustande kommt. Man findet nämlich neben mehrpoligen Figuren, die ziemlich selten sind, ganz normale polyploide bipolare Figuren, deren Kernplatte, wenn sie nicht Platz in der Querstellung findet, schräg orientiert ist, wobei jedoch die Bipolarität der Spindel nicht verloren geht. Wenn man in derselben Wurzel neben ganz normalen bipolaren polyploiden Kernteilungsfiguren auch mehrpolige polyploide sieht, so muß man folgern, daß die Mehrpoligkeit durch irgend welche spezifischen Verhältnisse in der Zelle hervorgerufen worden ist. Ob es sich um Vorgänge handelt, welche man als autoregulative ansprechen könnte, will ich nicht entscheiden. Strasburger hat seinerzeit die Bipolarität der vegetativen Teilungsfiguren und somit auch die Stellung der Scheidewand als Ausfluß korrelativer Beziehungen der sich teilenden Zelle zu den Nachbarzellen oder zum Organ überhaupt aufgefaßt. Das ist sehr wohl möglich, da ja die Sporen- und Mutterzellen, welche relativ selbständig sind, anfangs eine multipolare Figur entwickeln und

auch die Stellung der Scheidewände weist keine Beziehungen zu ihren Nachbarzellen auf. Ich glaube, daß sich diese Erklärung auch auf die Multipolarität der polyploiden Zellen anwenden ließe. Erstens stellen die polyploiden Zellen gewissermaßen ein fremdes Element in dem diploiden Gewebe der Wurzelspitze vor. Zweitens weist die Mehrpoligkeit und die unregelmäßige Stellung der Scheidewände in der Mutterzelle darauf hin, daß die Teilung nicht durch die normale Einheitlichkeit der Wurzelspitze beherrscht wird.

Auf der anderen Seite wäre es möglich die multipolaren Figuren als einen autoregulativen Vorgang aufzufassen, der durch die normalen diploiden Nachbarzellen in der polyploiden Zelle erzwungen wurde. Da jedoch Rückschläge zum normalen diploiden Zustande auch an Pflanzen vorkommen, welche nur aus polyploiden Zellen bestehen, scheint mir diese Erklärung nicht annehmbar zu sein.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß in den mehrmals chloralisierten Wurzelspitzen von *Pisum sativum* in polyploiden Zellen abnorme und mehrpolige Teilungsfiguren vorkommen, welche Kernen mit herabgesetzter Chromosomenzahl Ursprung geben. Auf diese Weise können polyploide Zellen eine Herabsetzung ihrer Chromosomenzahl erleiden und es wäre möglich, daß auf diese Art allmählich die polyploiden Zellen aus der Wurzelspitze verschwinden können. Das schließt nicht aus, daß daneben auch andere Vorgänge die Verminderung der polyploiden Zellen in der Wurzelspitze verursachen.

S u m m a r y.

The author has found in roots of *Pisum sativum* which have been several times treated with chloralhydrat multipolar mitotic divisions of the polyploid nuclei. In connection with such divisions the number of chromosomes is reduced.

LITERATUR.

- Boveri, Th. 1914, Zur Frage der Entstehung maligner Tumoren. Jena.
- Kemp, H. P. 1910, On the question of the occurrence of »heterotypical reduction« in somatic cells. Ann. of Bot. V. 24.
- Němec, B. 1910, Das Problem der Befruchtungsvorgänge. Berlin.
- „ „ 1926, Multipolare Teilungsfiguren und vegetative Chromosomenreduktion. Biol. Gen. Bd. II.
-

Tumoren an den Wurzeln der Pflaumen.

Von Dr. B. NĚMEC.

Mit 18 Figuren im Text.

Vorgelegt am 5. Mai 1929.

Zu den merkwürdigsten Pflanzenkrankheiten, welche durch Bakterien verursacht werden, gehören jene, wo an Pflanzen Geschwülste hervorgerufen werden. Als erste wurde die Geschwulstkrankheit der Ölbäume erkannt, welche durch *Bacterium Savastanoi* verursacht wird. Hierauf hat Erwin Smith nachgewiesen, daß an zahlreichen Pflanzen Geschwülste durch *Pseudomonas* (*Bacterium*) *tumefaciens* verursacht werden können. Diese Entdeckung wurde in Europa zunächst mißtrauisch aufgenommen, sie wurde da jedoch von J. Peklo völlig bestätigt. Es folgen zahlreiche Arbeiten, welche einerseits Smiths Resultate bestätigten, anderseits ergänzten. Auch die durch *Bacterium beticola* hervorgerufene Taschenkrankheit der Zuckerrübe gehört hierher. Es ist nicht ausgeschlossen, daß man noch andere Bakterien auffinden wird, welche geschwulstartige Neubildungen an Pflanzen verursachen.

Ebenso wie bei den parasitischen Pilzen, welche Pflanzenkrankheiten verursachen, können auch die bakteriellen Pflanzenkrankheiten in mehrere Typen gesondert werden, je nach dem, wo die Bakterien leben und nach der Art, wie sie auf die von ihnen befallenen Pflanzen einwirken. Zum ersten Typus könnte man Bakterien rechnen, welche die Zellen, mit denen sie in Kontakt kommen, nicht in kurzer Zeit tödten, sondern entweder an ihrer Oberfläche oder in ihrem Inneren leben und anfangs nur ihren physiologischen Zustand in verschiedener Richtung verändern. Auch wenn sie schließlich die Zellen tödten, so geschieht das erst nach einer längeren Zeit. So lebt und wirkt *B. tumefaciens*, welches nach meinen

Befunden im Inneren der Zellen lebt und dieselben zur reichlichen Teilung anregt, wodurch eben die Pflanzentumoren entstehen. Die zweite Gruppe würden Pflanzenkrankheiten vorstellen, wo die Bakterien interzellulär leben, ohne die Zellen früh zu tödten. Wenn wir unter die Krankheiten die Symbiose zwischen Bakterien und den Blättern einiger tropischer Rubiaceen einreihen könnten, ebenso eine ähnliche Symbiose bei *Ardisia* und *Dioscorea*, so wäre das ein Beispiel für diese zweite Gruppe. Denn in allen diesen Fällen bleiben die Bakterien in den Interzellularräumen und reizen die Nachbarzellen zu einem hypertrophischen Wachstum, seltener zu einer reichlicheren Teilung.

Der dritte Typus wären Pflanzenkrankheiten, wo die Bakterien die Zellen der Wirthspflanze früh tödten ohne in ihr Inneres einzudringen. Zu diesem Typus gehören die meisten Pflanzenkrankheiten, welche durch Bakterien verursacht werden.

Es ist bekannt, daß auch *Bacterium radicolica*, sowie der actynomyces-artige Mikroorganismus, welche in den Alnus-Knöllchen, sowie bei *Podocarpus* und *Myrica* leben, intrazellulär vorkommen. Was *B. radicolica* betrifft, so habe ich (Němec 1915) für *Serradella* bewiesen, daß es anfangs Infektionsfäden bildet, später jedoch interzelluläre Schleimfäden, dasselbe wurde für *Lupinus* von Milovidov (1926) und Dangeard (1926) nachgewiesen. Natürlich leben auch hier die meisten Bakterien intrazellulär. Auch für die durch *B. tumefaciens* verursachten Geschwülste haben Robinson & Walkden (1923) und Riker (1923) gezeigt, daß in ihnen Bakterien interzellulär als Stränge oder nestartige Anhäufungen leben. Es ist nicht ausgeschlossen, daß einige Pflanzentumoren bloß interzelluläre Bakterien enthalten.

In den Bakterienknöllchen der Leguminosen enthalten die Markzellen eine ungeheure Menge von Bakterien im Zytoplasma. Hingegen könnten die Bakterien in den Tumorzellen nach übereinstimmender Angabe jener Autoren, welche dieselben zytologisch untersucht haben, nur in geringer Zahl vorhanden sein. Smith (1920) sagt in dieser Beziehung: »Der tumor erzeugende Organismus erscheint nur in Inneren einiger proliferierender Zellen. Teilt sich die Zelle,

so gelangt der Organismus in die Tochterzellen, von denen er sich wenigstens in einigen vermehrt. In der Zelle ist er nur in relativ geringer Anzahl vorhanden, und infolge der körnigen Beschaffenheit des Protoplasmas kann er auch bei starker Vergrößerung nicht befriedigend unterschieden werden. Nach einer Impregnation mit Goldchlorid und der nachfolgenden Einwirkung von Ameisensäure erhielten wir eine dunkle, blau-schwarze Färbung einiger stäbchenförmiger Körperchen in den Tumorzellen, welche einige Zeit lang als intrazelluläre Bakterien aufgefaßt wurden, jetzt halte ich sie jedoch für Mitochondrien.« Die Mikrophotographien von Smith (Nr. 331 und 332) weisen Stäbchen sowie Körnchen auf, die stark gefärbt und gut sichtbar und nicht im ganzen Zytoplasma gleichmäßig verteilt sind. Es könnte auf Grund dieser Angabe sowie nach den Mitteilungen von Riker sowie Robinson und Walkden geschlossen werden, daß in den Pflanzentumoren innerhalb der Zellen überhaupt keine Bakterien vorhanden sind, sondern daß sie nur interzellulär leben. Die scheinbar in den Zellen vorkommenden Bakterien seien nur Mitochondrien.

Ich werde jetzt noch zur Besprechung der dritten Gruppe der Bakterienkrankheiten zurückkehren, welche ich eben erwähnt habe. Wie schon gesagt, können in diese Gruppe alle jene Fälle eingereiht werden, in welchen die Bakterien nicht innerhalb der Zellen, sondern an ihrer Oberfläche und interzellulär leben und durch die Produkte ihres Stoffwechsels die Zellen früh tödten. Aus den getöteten Zellen diffundieren dann in ihnen enthaltene Stoffe, die den Bakterien zur Ernährung dienen. Soweit bekannt, kommt diesen Bakterien die Fähigkeit zu, die mittlere Pektinlamelle der Zellwände aufzulösen, wodurch es zu einer Mazeration der Pflanzengewebe kommt. Smith ist der Meinung, daß diese Bakterien nicht fähig sind die Zellulosemembran aufzulösen, das sei auch die Ursache, warum sie für gewöhnlich nicht ins Zellinnere einzudringen vermögen. Zu solchen Krankheiten kann wahrscheinlich auch die Beulenkrankheit der Ölbäume gezählt werden. Denn das sie verursachende Bacterium *Savastanoi* lebt in den Beulen in Höhlungen, welche ursprünglich offenbar Interzellularräume waren, die sich später durch das Ab-

sterben von Nachbarzellen vergrößerten. Es entstehen so innerhalb des Pflanzengewebes Wunden, um die herum sich die Zellen reichlich teilen. Eben diese Teilung der Zellen führt zum Erscheinen von großen Beulen. Dieselben haben eine unregelmäßige Gestalt und wenn sie auch äußerlich den durch *B. tumefaciens* verursachten Geschwülsten ähnlich sind, so sind sie doch von denselben in mancher Hinsicht verschieden. Ob die durch *B. beticola* verursachten höckerigen Geschwülste der Zuckerrübe (pocketdisease) näher den Beulen der Ölbäume oder den *Tumefaciens*-Geschwülsten stehen, läßt sich noch nicht entscheiden (Brown 1928).

Die pathologischen Knollen der Ölbäume, verursacht durch *B. Savastanoi*, könnten eher mit durch Tiere verursachten Gallen verglichen werden, wo das parasitische Tier im Pflanzengewebe lebt und dasselbe zur Bildung einer Anschwellung usw. nötigt. Der Kallusbildung als Folge der ursprünglichen Verwundung kommt auch bei der Entwicklung der Galle eine große Bedeutung zu (W. Magnus).

Die Frage, ob in den Pflanzentumoren die Bakterien innerhalb der Zellen, oder nur interzellulär leben, hat mich schon seit einer längeren Zeit interessiert. Ich bin zur Überzeugung gekommen, daß man Bakterien innerhalb lebendiger Zellen nur dann auf Praeparaten gut erkennen kann, wenn man die Zellen mit einer Flüssigkeit fixiert, welche gleichzeitig die Mitochondrien fixiert. Wenn beide gleich gut fixiert sind, so ist es allerdings schwierig sie zu unterscheiden. Daher sind besonders Methoden geeignet, wo entweder die Bakterien gut, die Mitochondrien jedoch schlechter fixiert werden, oder wo beide gleich gut fixiert wurden, jedoch nach einer differenziellen Färbung von einander unterschieden werden können. Ich fixierte die Tumoren mit folgenden zwei Flüssigkeiten: A) 1% Chromsäure 100 ccm, neutr. Formalin 8 ccm. B) 1% Kaliumbichromat 50 ccm, 1% Chromsäure 50 ccm, neutr. Formalin 8 ccm. In der Flüssigkeit A werden die Bakterien sehr gut, die Mitochondrien nur mäßig gut fixiert. Es sind an ihnen im Vergleiche mit erprobten mitochondrialen Fixierungsflüssigkeiten z. B. Regaud, zuweilen Störungen festzustellen. Werden solche Praeparate mit Heidenhains Haematoxylin tingiert, so erscheinen die Bakterien

bei richtiger Differenzierung sehr distinkt schwarz gefärbt, wogegen die Mitochondrien viel schwächer, zuweilen nur schattenhaft tingiert erscheinen. Die Flüssigkeit B fixiert Bakterien ebenso gut wie Mitochondrien. Beide färben sich mit Heidenhains Haematoxylin fast gleich stark. Immerhin werden bei stärkerer Differenzierung die Mitochondrien merklich früher entfärbt als die Bakterien. Daß die Mitochondrialmethoden häufig launisch sind, ist jedem, der in dieser Richtung gearbeitet hat, geläufig. Zum Ausprobieren eignen sich besonders gut die Bakterienknöllchen der Leguminosen.

Außer dem Eisenhaematoxylin kann man die Bakterien auch mit Gram färben. Aber entscheidend sind Doppelfärbungen, z. B. jene, wie sie Milovidov ausgearbeitet hat (1928).

In dieser Mitteilung will ich die Resultate meiner Untersuchungen zusammenfassen, welche ich an Tumoren an Wurzeln (oder am sog. Wurzelhals) der Pflaumen angestellt habe. Bekanntlich kommen an Wurzeln oder an Stämmen einiger Obstbäume Geschwülste vor, welche meist von *B. tumefaciens* hervorgerufen werden (siehe die zitierte Literatur). Besonders häufig scheinen sie an Apfelbäumen und Pflaumen (*Prunus domestica* und *insititia*) zu sein. J. Smolák sagt in seiner Phytopathologie (1926) über solche Tumoren, daß sie am häufigsten auf Apfelbäumen, Birnbäumen und Kirschen erscheinen. An ganz dünnen Wurzeln können es nach seiner Angabe ganz kleine knöllchenartige Geschwülste von einem Durchmesser von nur einigen mm sein, welche an die bekannten Knöllchen an den Wurzeln der Leguminosen erinnern. Andererseits erscheinen an dickeren Wurzeln Neubildungen, welche die Größe einer Wallnuß oder sogar einer Faust haben. Wenn der Tumor im oberen Teile der Wurzel des Wurzelsystems erscheint, oder an der Grenze zwischen der Wurzel und dem Stamm, am sog. Hals, so hat er gewöhnlich größere Dimensionen, zuweilen bis wie ein Kindskopf. Smolák ist überzeugt, daß die Ursache dieser Geschwülste *Pseudomonas (Bacterium) tumefaciens* ist.

Ich verdanke mein Material der Freundlichkeit des Hr. Dir. Dr. J. Smolák. Ich erhielt Pflaumen aus Böhmen, Mähren und der Slowakei, welche am Halse oder auch an den

Wurzeln selbst verschieden große Tumoren trugen. Das Material bekam ich schon am Anfang des Winters und da waren die meisten Tumoren schon abgestorben. Aber es gab auch etliche lebendige, welcher Umstand dafür spricht, daß die Tumoren überwintern können. Vor einigen Jahren fand ich im Frühjahr an Wurzeln junger Apfelbäume lebendige Tumoren, welche daher ebenfalls überwintert haben.

Die an Pflaumenwurzeln von mir beobachteten Tumoren waren erbsen- bis wallnußgroß. Der größte Teil ihrer Substanz bestand aus einem kleinzelligen Parenchym, in welchem jedoch verschieden starke Gefäßbündel verliefen.

Ich will mich nicht mit der Schilderung der Anatomie der Gallen aufhalten, da ja eine andere Frage der Gegenstand meiner Untersuchung war, diejenige nämlich, ob überhaupt Bakterien in den Geschwülsten nachzuweisen sind, und zweitens, wo dieselben lokalisiert sind. In den von mir studierten Tumoren enthielten die Zellen ziemlich wenig Zytoplasma. Dasselbe bildete nur einen dünnen Wandbelag, in welchem sich auch der Kern befand. Alle Zellen waren ausnahmslos einkernig. Die Kerne waren linsenförmig oder in ein paar Fortsätze ausgezogen. In der Zentralvakuole befanden sich verschiedene Niederschläge, welche entweder kugelig und gelbbräunlich waren, was höchstwahrscheinlich Gerbstoffe sind. Daneben enthielten die Vakuolen sehr häufig feinkörnige, mit Haematoxylin schwarz tingierbare Niederschläge (Fig. 9 links von der Zellmembran). Da die Zellen so spärliches Zytoplasma enthalten, erscheinen sie, wenn man von den Niederschlägen absieht, bei schwacher Vergrößerung leer. Wenn wir etwas mehr von dem plasmatischen Inhalte sehen wollen, so müssen wir nur solche Stellen untersuchen, wo der Plasmabelag von der Fläche aus zu sehen ist. Es sind also tangentielle Schnitte in dieser Beziehung am geeignetsten. An solchen Schnitten lassen sich im Zytoplasma verschiedene Körperchen feststellen. Zunächst schwach gefärbte Fäserchen, welche häufig an einem Ende eine Aufbauschung aufweisen (Fig. 1. u. 2.), daneben aber kugelige oder ellipsoide Gebilde, welche in verschiedenem Grade stark gefärbt sind. (Fig. 5., 7., 8.) Die Fäserchen können als Mitochondrien betrachtet werden, welche entweder bei der Fixierung lädiert

und vakuolisiert wurden, oder irgend welche metaplasma-tische Stoffe bilden. Die kugeligen oder anders geformten Körperchen sind offenbar Leukoplaste, von denen einige Stärkekörner enthalten. Neben diesen Gebilden und den Kernen enthält das Zytoplasma der meisten Zellen nach Fixie-



Parenchymzellen aus einem Pflaumentumor
mit intrazellulären Bakterien.

rung mit Chromsäureformalin stark gefärbte Stäbchen, Fäden oder Körnchen, welche ein wenig dicker sind als die Mitochondrien und meist in Gruppen angehäuft liegen (Fig. 11, 13), oder zuweilen auch längere Stränge bilden (Fig. 6, 10).

Die kürzeren Stäbchen sind einfach, wenn sie länger sind, lassen sich an ihnen Einschnürungen sehen, so daß es angenommen werden könnte, daß sie aus einzelnen Gliedern bestehen. Zuweilen sind sie so angeordnet, daß man sie als verzweigt betrachten könnte (Fig. 2, 10). Aber es könnte sich auch um eine zufällige Anordnung der Stäbchen handeln.

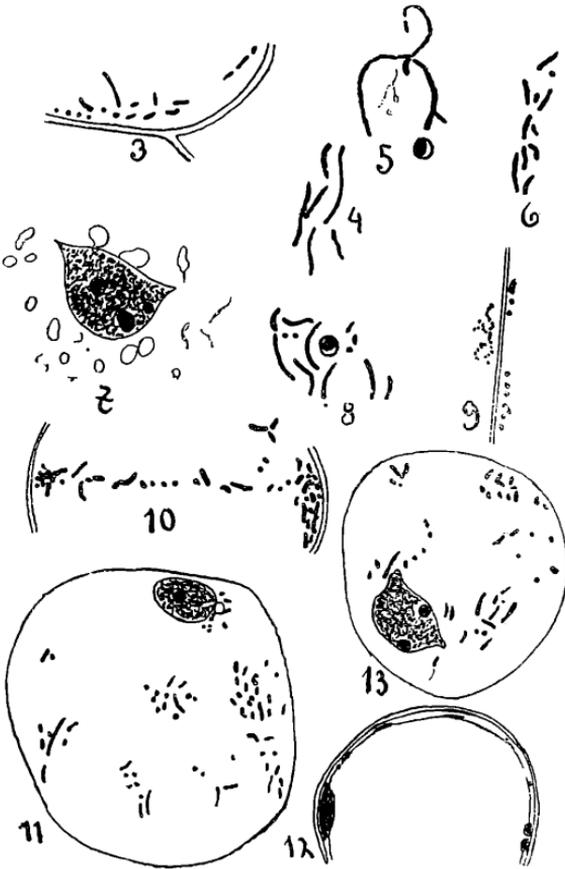
Diese Gebilde, welche sich viel intensiver tingieren als die Mitochondrien, können als Bakterien gedeutet werden. Erstens haben sie eine ziemlich gleichmäßige Gestalt, zweitens sind sie nicht diffus gleichmäßig im Zytoplasma verteilt, wie das meistens bei Chondriosomen der Fall ist, sondern bilden Gruppen und Stränge (Fig. 6, 10, 14, 15), was bei den Mitochondrien im Wandbelag nicht der Fall zu sein pflegt. Es ist natürlich, daß man alle diese Stäbchen nicht immer in ihrer ganzen Länge sehen kann, das geschieht nur bei jenen, welche in der optischen Ebene liegen. Jene, welche senkrecht zur optischen Ebene liegen, werden als Körnchen erscheinen, in schiefer Lage werden sie kürzer scheinen. Dadurch kann erklärt werden, daß man neben Stäbchen auch Körnchen trifft (Fig. 3, 10, 11, 13). An geeigneten Schnitten kann man sich überzeugen, daß diese Gebilde im Wandbelag dicht an der Zellmembran liegen (Fig. 3, 9, 12). Neben geraden gibt es auch schwach gekrümmte Stäbchen.

Dr. Milovidov hat einige Schnittserien aus meinem Materiale nach seiner differenziellen Methode gefärbt, wobei die Mitochondrien roth, die bakterienähnlichen Körperchen blau gefärbt erschienen. Auch das kann als Stütze meiner Ansicht angeführt werden, daß die fraglichen Gebilde etwas Anderes als Mitochondrien sind und daß sie höchst wahrscheinlich Bakterien vorstellen.

Diese Befunde stimmen ganz gut mit jenen von Smith überein. Auch seine Mikrophotographien (1920, Nr. 331, 332) zeigen intensiv gefärbte Körnchen und Stäbchen, welche nicht gleichmäßig im ganzen Zytoplasma zerstreut sind, sondern Gruppen an beschränkten Stellen im zytoplasmatischen Zellinhalte bilden. Wie schon hervorgehoben wurde, sind die Mitochondrien viel gleichmäßiger in der Zelle verteilt und eben aus diesem Grunde kann angenommen werden, daß man es in den fraglichen Gebilden mit Bakterien und nicht mit Mitochondrien zu tun hat. Die Figuren 1, 2, 10, 11, 13—15 zeigen, daß die Bakterien nicht in einer so ungeheueren Anzahl in den Zellen vorhanden sind, wie in den Knöllchen der Leguminosen, daß sie jedoch nicht so spärlich vorkommen, daß sie einer aufmerksamen Untersuchung entgehen könnten. Besonders in den jüngeren, der Peripherie näher gelegenen Zellen

(Fig. 11, 13) enthält der zytoplasmatische Wandbelag ziemlich viele Bakterien.

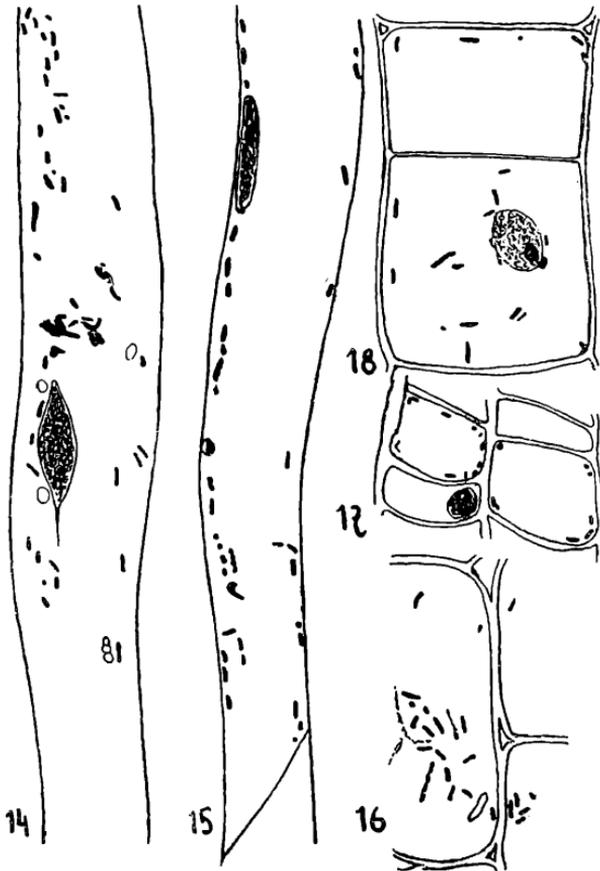
Die Frage, wo *B. tumefaciens* in den Tumoren vegetiert, hat auch Magrou (1926) untersucht. Nach seinen Befunden sind die Bakterien in den Tumoren an *Pelargonium*



Bakterien in den Zellen eines
Pflaumentumors.

zonale entweder ausschließlich oder in der größten Anzahl in den peripheren großen parenchymatischen Zellen vorhanden. Er tritt also für das intracelluläre Vorkommen von Bakterien ein. Auch in den von mir untersuchten Tumoren waren die Bakterien in den peripheren unter der Korkschiicht gelegenen Zellen relativ häufiger als in den inneren Zellen. Das ist auch aus dem Vergleiche der Figuren 1 und 2 mit

den Figuren 11 und 13 zu ersehen. Aber ich konnte Bakterien in allen Zellschichten der von mir untersuchten Tumoren feststellen. Also nicht nur in älteren Parenchymzellen (Fig. 1, 2), sondern auch in jüngeren Zellen an der Peripherie des Tumors (Fig. 11, 13), weiter in den langen prosenchymati-



Verschiedene Gewebezellen aus dem Pflaumentumor mit Bakterien.

schen Zellen der Gefäßbündel (Fig. 14, 15), in der Parenchymseide der Gefäßbündel (Fig. 16), in den Siebröhren und ihren Geleitzellen (Fig. 17) und schließlich auch in den meristematischen Zellen, welche in den Tumoren in einigen Gefäßbündeln als Interfaszikularkambium vorhanden sind (Fig. 18). Es enthalten daher alle Gewebearten der von mir

untersuchten Tumoren innerhalb der Zellen Bakterien oder bakterienähnliche Gebilde.

Ich versuchte es auch zu entscheiden, ob die Tumoren nicht Bakterien in ihren Interzellularräumen enthalten. Zunächst schien es mir, daß die Bakterienstränge, wie sie in Fig. 6 und 10 veranschaulicht sind, in Wirklichkeit interzelluläre Stränge sind. Aber bei eingehender Untersuchung und nachdem ich mit dem Materiale vertrauter wurde, kam ich zu Überzeugung, daß unsere Tumoren in den Interzellularräumen keine Bakterien beherbergen. Die Interzellularräume enthielten weder Körnchen noch Stäbchen, so daß man annehmen kann, daß sich hier alle Bakterien innerhalb der Zellen befanden. Es ist nicht ausgeschlossen, daß bakterielle Stränge entweder wie bei *Seradella* oder *Lupinus* erst in den älteren Stadien interzellulär erscheinen, oder, was wahrscheinlicher wäre, daß sie in den ganz jungen Tumoren vorwiegend interzellulär sind.

Es hing offenbar mit der Winterzeit zusammen, daß ich in den Tumoren keine Kernteilungen finden konnte. Ich kann daher nicht sagen, wie sich in denselben die Bakterien auf neue Zellen verbreiten. Es ist jedoch sicher, daß bei einer Zellteilung, auch wenn sich die Bakterien nicht so regelmäßig an den Polen der Teilungsfigur anhäufen würden, wie das Milovidov für die Knöllchen von *Lupinus* beschrieben hat, immer ein gewisser Teil der Bakterien in die Tochterzellen gelangen würde. Darum braucht für unseren Fall nicht angenommen werden, daß sich die Bakterien von Zelle zu Zelle durch die Zellwände verbreiten.

Polyploide Zellen habe ich in diesen Tumoren nicht gefunden, obzwar sie in anderen Tumefacienstumoren reichlich vorhanden sein können (Winge). Soweit ich auf Grund der Dimensionen der Zellen und ihrer Kerne schließen konnte, bestanden die Tumoren nur aus diploiden Zellen.

Summary.

Tumors on the roots of plumtrees.

The author has got plumtrees from several places of Czechoslovakia with tumors on their roots and he succeeded in showing that the tumors contain bacteria inside their cells. By injection of the juice from the tumors he has been able to produce new young tumors of the same kind as the original tumors have been. The tumors contain irregular vascular bundles, but they are rather of a parenchymatous character. They are composed of two kinds of cells. Some of them do not contain tannin, meanwhile the others contain much of this substance. The cytoplasm forms only a thin layer on the cellwall. The cytoplasmic film contains fibrillar mitochondria, leucoplasts and one nucleus. It is easy to demonstrate in tanninless cells in their cytoplasmic film bacteria well stained with haematoxylin and retaining their stain even when the mitochondria became colourless during the differentiation. The bacteria are rodshaped (Fig. 1, 2), forming sometimes strains (Fig. 10) or definite groups in the cells (Fig. 11, 12), they are very often arranged in threads (Fig. 4, 5, 8).

Bacteria in tumorcells of plumtrees never are abundant as in the nodules of the Leguminous plants. But they are also present in living cells of the vascular bundles, in their parenchymatic (Fig. 18) and prosenchymatic elements (Fig. 14, 15) and in the cambium (Fig. 17). Intercellular spaces never contained bacterial masses or threads, as they have been described by Riker and Robinson & Walkden.

As the bacteria differ in the tumors of plumtrees from true mitochondria, it is hardly possible to confuse both. In other plants it is rather possible and it will be necessary to distinguish them by differential staining, as Duesberg and Milovidov have done it.

As in other tumors polyploid cells very often occur (Winge), they never have been found in the tumors of plumtrees. It is therefore hardly possible to assume, that polyploidy is the main cause of a cancerous cellproliferation, as

it is possible to produce artificially tissues containing normal and polyploid cells but never after it a cancerous cellproliferation appears.

LITERATUR:

- Brown Nellie, A. 1928, Bacterial pocket disease of the sugar beet. Journ. of Agric. Res. V. 37. No 3.
- Magrou J. 1926, Le bacterium tumefaciens dans les tissue du cancer des plantes. Cpt. rend. de l' Acad. de Sc. T. 183.
- Melhus, J. E. 1926, Crowngall of apple nursery stock. Journ. Econ. Ent. 19.
- Milovidov P. 1928, Coloration différentielle des bactéries et des chondriosomes. Arch. d'anatomie mier., T. XXIV.
- Němec B. 1915, Über die Bakterienknöllchen von Ornithopus sativus. Bull. int. Acad. de Bohême.
- Němec B., Milovidov P. 1926, Bacteria in plant and human cells. Bull. intern. Acad. de Bohême.
- Němec E. 1928, Über Pflanzentumoren, Arch. f. Exp. Zellf., Bd. VI.
- Riker A. J. 1923, Some relations of the crowngall organism to its host tissue. Journ. Agr. Res. V. 26.
- Riker A. J. 1923, Some morphological responses of the host tissue to the crowngall organism. Journ. Agr. Res. V. 26.
- Riker and Keits, 1926, Studies of crowngall and wound overgrowth on apple nursery stock. Phytopathology V. XVI.
- Robinson and Walkden, 1923, A critical study of crowngall. Ann. Bot. V. 27.
- Siegler E. A. 1928, Studies on the etiology of apple crown gall. Journ. Agr. Res. V. 37.
- Smith E. F. 1920, Bacterial diseases of plants. Philadelphia and London.
- Smith and McCulloch, 1912, The structure and development of crowngall: A plant cancer. U. S. Dept. Agr. Bur. Plant. Ind. Bul. 255.
- Smith and Townsend, 1907, A plant tumor of bacterial origin. Science. V. 25.
- Smolák J. 1926, Rostlinná pathologie. III. vyd. Praha.
- Swingle B. & Morris, H. E. 1918, Crown gall injury in the orchard. Bull. 121, Agr. Exp. St.
-

Über den Einfluss der Bakterien auf die Entwicklung des pflanzlichen Kallus.

Von Dr. B. NĚMEC in Prag.

Mit 12 Photographien im Text.

Vorgelegt am 5. Mai 1929.

Friedemann und Magnus haben im Jahre 1915 eine Abhandlung veröffentlicht, in welcher sie die Resultate ihrer Untersuchungen über die Eigenschaften einiger Stämme von *Bacterium tumefaciens* mitteilten, besonders jener, welche es ihnen gelungen ist mit Bendix und Hassel aus eiterigen Entzündungen beim Menschen zu isolieren. Dabei benützte Magnus auch eine Methode, welche den Einfluß der betreffenden Bakterien auf die Entwicklung des pflanzlichen Kallus sehr schön demonstriert. Auf die frische Schnittfläche der Zuckerrübe wurde die Masse einer frischen Kolonie von *Bacterium tumefaciens* gebracht, worauf sich gezeigt hat, daß sich ein sehr üppiger Kallus an der Wundfläche entwickelte. Im gleichen Jahre veröffentlichten die genannten Autoren eine andere Arbeit, in der sie über weitere Versuche berichten, die zu denselben Resultaten führten. Diese Versuche sind noch überzeugender, da in demselben mit der Bakterienmasse nur ein beschränkter Teil der Wundfläche bestrichen wurde, worauf sich ein Kallus nur an jenen Stellen entwickelte, welche mit Bakterien bestrichen wurden, wogegen an der übrigen Wundfläche kein Kallus zum Vorschein kam.

In dieser Arbeit (1915 a) erwähnt Magnus auch die Frage, ob die Bakterien in das Innere der Rübenzellen eindringen und dieselben dann zur reichlichen Kallusbildung reizen. Er untersuchte mikroskopisch den Kallus, aber es ist ihm nicht gelungen, die Gegenwart der Bakterien in den Zellen festzustellen. Ja er meint, daß es kaum möglich sein wird durch

mikroskopische Untersuchung festzustellen, ob sich Bakterien in den Zellen befinden oder nicht. Er beruft sich auf Smith (1920), und meint, daß auch in Tumoren, welche sicher durch Bakterien veranlaßt wurden, ihr Nachweis innerhalb der Zellen sehr schwer, wenn nicht ganz unmöglich ist, da es schwer ist, dieselben von anderen Bestandteilen der Zelle zu unterscheiden. Er betont, daß die Mitochondrien nach einer Fixierung mit einer schwachen Flemmingschen Lösung eine den Bakterien sehr ähnliche Form aufweisen. Zwar enthalten die Tumorzellen relativ mehr Bakterien als die normalen Gewebe, aber das ließe sich leicht durch ihre erhöhte Stoffwechselfätigkeit erklären.

Blumenthal und Hirschfeld (1916, 1917) verwendeten zu ähnlichen Versuchen Scheiben, welche aus Möhrenwurzeln herausgeschnitten waren. Wenn sie die basale Wundfläche mit einer Bakterienmasse bestrichen haben, so erschien der Kallus an dem entgegengesetzten Ende der Scheibe. Die Verfasser erklären das in der Weise, daß die Bakterien durch die Scheibe bis ans andere Ende durchwachsen und hier eine Kallusbildung hervorrufen. Magnus (1918) hat jedoch bewiesen, daß ihre Erklärung nicht zutrifft, denn sie haben keine Rücksicht darauf genommen, daß Scheiben aus der Möhrenwurzel schon unter normalen Verhältnissen infolge ihrer Polarität an ihrem Apikalende einen schwächeren Kallus bilden als am Basalende. Blumenthal und Hirschfeld suchen auch zu beweisen, daß *Bacterium tumefaciens* ihre Fähigkeit eine Kallusbildung anzuregen auch auf andere Bakterienarten zu übertragen vermögen, welche einige Zeit zusammen mit ihm kultiviert wurden. Auch dieses Resultat bestreitet Magnus, indem er meint, daß die Verfasser auch hier den Umstand übersehen haben, daß schon unter normalen Verhältnissen, d. h. ohne Gegenwart von Bakterien, die Möhrenscheiben am basalen Pol einen stattlicheren Kallus bilden als am apikalen Ende.

Ich werde diese Arbeiten nicht weiter diskutieren, da es sich mir in meinen Versuchen um andere Fragen handelte. Ich versuchte die Methode von Magnus, welche sehr wertvoll ist, darum, weil ich es nochmals untersuchen wollte, ob die Bakterien, wenn sie eine reichlichere Kallusbildung her-

vorrufen, in das Innere der Zellen eindringen oder nicht. Ich habe geglaubt, daß es mir leichter als Magnus sein wird diese Frage zu lösen, da ich unterdessen einige bequeme Methoden zur Fixierung der Bakterien ausprobiert habe. Wenn man Objekte, welche mit Chromsäureformalin oder mit Kalium-



Fig. 1.

Dekapitierte Kohlrabiknolle, deren Wundfläche mit *Bact. tumefaciens* an einer Hälfte (links) bestrichen wurde. Von der Fläche gesehen. 2:1.

bichromat - Chromsäure - Formalin (Němec 1926, Milovidov 1928) fixiert wurden, mit Eisenhämatoxylin, Gram oder bloß mit heißem Gentianaviolett färbt, so lassen sich in den Zellen ziemlich leicht die Bakterien nachweisen.

Zu meinen Versuchen benützte ich Kohlrabiknollen, weiter die rübenförmigen Wurzeln der Zuckerrübe und Turnipsknollen. Die Versuche wurden im Winter im Gewächshause angestellt und da reagierte die Zuckerrübe sowie der Turnips ziemlich schwach, hingegen bildeten die Kohlrabiknollen (*Brassica oleracea gongyloides*) sehr schnell einen mächtigen Kallus an den Schnittflächen. Ich habe mich daher schließlich nur an Kohlrabi beschränkt. Zu den Versuchen wurden Pflanzen mit noch spröden, unverholzten Knollen genommen, welche zum Zwecke der Samengewinnung überwintert wurden. Am besten bewährte sich die Sorte Dvorský.

Den größten Teil des verwendeten Materials widmete dem Institut die Firma V. Dvorský — Prag — selbst, wofür ich ihr auch an dieser Stelle bestens danke.

Zunächst wurde zu den Versuchen eine alte, im Institut geführte Kultur von *Bacterium tumefaciens* verwendet. Die Kultur war schon sehr schwach virulent, denn nach einer Injektion von *Pelargonium* gab sie fast keinen Anlaß mehr

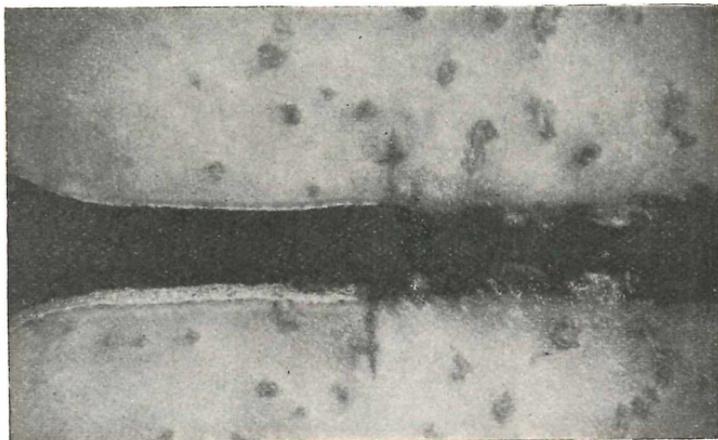


Fig. 2.

Mediane Längsschnitte durch eine dekapitierte Kohlrabiknolle, deren Wundfläche an der rechten Hälfte mit *Bact. tumefaciens* bestrichen wurde. 2:1.

zur Bildung von Geschwülsten. Das Bakterium wurde auf Agar kultiviert und die Kultur wurde mit einer Platinöse auf die frische Wundfläche gebracht und hier möglichst schonend zerrieben, so daß die gewünschte Fläche gleichmäßig mit den Bakterien beschmiert war. Die Pflanzenteile wurden dann meist ins Dunkle unter einen Zinksturz gestellt.

Ich werde einige Versuche eingehender beschreiben. Am 29. XI. 1926 wurde der Kohlrabiknolle der obere Teil etwa in der Höhe eines Sechstels der Längsachse durch einen Querschnitt abgeschnitten, auf die Hälfte der Wundfläche wurde die Bakterienmasse einer frisch angestellten Kultur von *Bacterium tumefaciens* gebracht. Die bestrichene Hälfte wurde von der unbestrichenen durch einen seichten Einschnitt getrennt. Schon am 2. XII., also am vierten Tage, erscheint an

der mit Bakterien bestrichenen Hälfte der Wundfläche der Kallus stärker entwickelt als an der anderen, mit Bakterien nicht bestrichenen Hälfte. Gleichzeitig (am 29. XI. 1929) wurde ein ähnlicher Versuch mit der Zuckerrübe und dem Turnips angestellt. Auch hier wurde die Hälfte einer durch

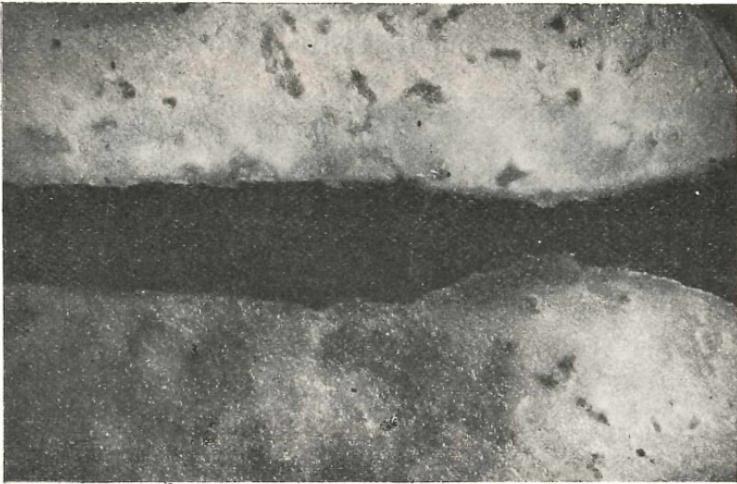


Fig. 3.

Mediane Längsschnitte durch eine dekapitierte Kohlrabiknolle, deren Wundfläche mit *Bact. tumefaciens* bestrichen wurde. Nach 12 Tagen wurde der Kallus samt einer etwa 2,5 mm dicken Gewebeschicht abgetragen, worauf sich unter der ursprünglich mit Bakterien bestrichenen Wundfläche wiederum ein stärkerer Kallus entwickelte.

einen Querschnitt hergestellten Wundfläche mit einer Kultur von *Bacterium tumefaciens* bestrichen. Beim Turnips war der Unterschied zwischen den beiden Hälften am 2. XII. schwach zu Gunsten der bestrichenen Fläche zu beobachten, bei der Zuckerrübe war noch kein Kallus angedeutet. Am 3. XII. war beim Kohlrabi der Unterschied zwischen der bestrichenen und unbestrichenen Wundfläche noch auffallender als er es am vorigen Tage war, beim Turnips ist der Unterschied ein wenig deutlicher, bei der Zuckerrübe gar keiner. Am 4. XII. ist der Unterschied zwischen den beiden Hälften der Wundfläche sehr auffallend. An der mit Bakterien bestrichenen Wundfläche ist der Kallus hoch und höckerig, an

der anderen Hälfte der Wundfläche gibt es nur Anfänge eines viel schwächeren Kallus. Am 6. XII. wurde der an den Wundflächen von Kohlrabi entwickelte Kallus von der Fläche sowie am medianen Längsschnitt photographiert (Fig. 1 und 2). An demselben Tage ist beim Turnips der Kallus an der bestrichenen Wundfläche höckerig, an der unbestrichenen glatt. Am 11. XII. beginnen beim Turnips einige Teile des an der bestrichenen Hälfte entwickelten Kallus ab-



Fig. 4.

Dekapitierte Kohlrabiknolle, deren Wundfläche an der linken Hälfte mit *B. proteus* bestrichen wurde. 2:1.

zusterben und zu faulen, an der anderen unbestrichenen Hälfte ist der Kallus zwar viel schwächer entwickelt, aber gesund.

Bei einigen Kohlrabiknollen wurde eine Hälfte der Wundfläche am 29. XI. 1926 mit *Bacterium tumefaciens* bestrichen, am 11. XII., wo die Unterschiede in der Mächtigkeit des Kallus schon sehr auffallend waren, wurde eine etwa 2,5 mm dicke Gewebeschicht unter dem Kallus am ganzen Querschnitt der Knolle samt dem Kallus abgetragen. Die Knollen wurden unter einen Zinksturz gebracht. Am 18. XII. ist der neue Kallus an der Wundfläche jener Hälfte, welche ursprünglich mit der Bakterienkultur bestrichen war, deutlich mächtiger entwickelt, als an der zweiten Hälfte. Der Unterschied wurde in den weiteren Tagen noch auffallender. Der Kallus hat aber einen anderen Charakter als ihn der erste Kallus hatte. Der neue Kallus ist nämlich glatt, an seiner

Oberfläche gibt es keine Höckerchen. Am 31. XII. ist der Kallus an jenen Hälften der Knolle, welche ursprünglich mit Bakterien bestrichen wurden, um einige mm höher als an der anderen Hälfte. Er ist noch immer glatt, ohne Höckerchen. Am 4. I. 1927 wurden diese Knollen median durchgeschnitten und die Flächen des Medianschnittes photographiert (Fig. 3).

In einem anderen Versuch wurden am 29. XI. 1926



Fig. 5.

Mediane Längsschnitte durch eine dekapitierte Kohlrabiknolle, deren Wundfläche an der rechten Hälfte mit abgetöteter Suspension von *B. tumefaciens* bestrichen wurde. 2:1.

Kohlrabiknollen dekapitiert und eine Hälfte der Wundfläche mit *Bacterium tumefaciens* bestrichen. Am 11. XII. wurde bei einer Knolle 2 mm, bei einer anderen 5 mm und bei der dritten 10 mm unter der ursprünglichen Wundfläche das Gewebe durch einen Querschnitt abgetragen. Im ersten Falle bildete sich an jener Hälfte der Wundfläche, welche ursprünglich mit der Bakterienmasse bestrichen wurde, ein viel mächtigerer Kallus als unter der zweiten Hälfte. Wurde das Gewebe 5 mm unter der ursprünglichen Schnittfläche abgetragen, so waren zwischen beiden Hälften ganz geringe Unterschiede festzustellen, wurde der Schnitt 10 mm unter ihr geführt, so gab es keine Unterschiede mehr. An beiden Hälften ent-

wickelte sich der Kallus in ganz gleicher Mächtigkeit.

Am 11. XII. 1926 wurde mit Kohlrabi der nachfolgende Versuch ausgeführt: Wiederum wurden die Knollen etwa ein cm unter dem Vegetationspunkt dekapitiert, eine Hälfte der Wundfläche wurde bei einigen mit *Bacillus proteus*, bei anderen mit *Bacterium tumefaciens* bestrichen. Außerdem wurde bei anderen Knollen die Hälfte der Wundfläche mit einer



Fig. 6.

Wundfläche einer Kohlrabiknolle, deren rechte Hälfte mit *B. proteus* bestrichen wurde. 2:1.

Wassersuspension von *Bacterium tumefaciens*, das durch Hitzeeinwirkung getötet wurde, bestrichen. Bei der vierten Gruppe wurde auf eine Hälfte der Wundfläche Nähragar ohne Bakterien aufgetragen. Am 16. XII. ist der Kallus an jenen Hälften der Wundfläche, welche mit *B. proteus* oder *B. tumefaciens* bestrichen wurden, bedeutend mächtiger als an den nicht bestrichenen Hälften. Durch den Einfluß von *B. tumefaciens* entwickelt sich ein höherer und mehr höckeriger Kallus, unter der Einwirkung von *B. proteus* bildet sich ein niedrigerer Kallus mit einer krustigen Oberfläche. Bei den Knollen, wo eine Hälfte der Wundfläche mit abgetötetem *B. tumefaciens* oder mit Nähragar ohne Bakterien bestrichen wurde, ist kein Unterschied in der Kallusgröße zwischen den beiden Hälften festzustellen. Nach weiteren zwei Tagen (am 18. XII.) ist der Unterschied zwischen beiden Hälften der Wundfläche bei Knollen, welche mit *B. proteus* bestri-

chen wurden, noch auffallender. Der Kallus ist struppig, nicht höckerig, wie unter dem Einfluß von *B. tumefaciens*. Beiderlei Knollen wurden photographiert (Fig. 4—7). Bei den Knollen, deren eine Hälfte der Wundfläche mit abgetöteten Bakterien (*B. tumefaciens*) oder mit Nähragar bestrichen wurde, ist kein Unterschied in der Mächtigkeit des Kallus zu sehen. Höchstens ist der Kallus da, wo auf die Wundfläche Nähragar



Fig. 7.

Mediane Längsschnitte durch eine dekapitierte Kohlrabiknolle, deren rechte Hälfte mit *B. proteus* bestrichen wurde. 2:1.

aufgetragen wurde, ein wenig mehr höckerig als an der anderen Hälfte.

Dieser Versuch beweist, daß nicht nur *B. tumefaciens*, sondern auch *B. proteus* die Wundfläche zur Produktion eines mächtigeren Kallus anregen kann. Daher wurden weitere Versuche unternommen. Am 18. XII. 1926 wurde bei einem Teile der Knollen eine Hälfte der Wundfläche mit einer Kultur von *Bacterium coli*, bei anderen mit *Bacterium megatherium* bestrichen. Am 21. XII. ist der Kallus an den mit diesen Bakterien bestrichenen Hälften der Wundfläche deutlich mächtiger als an den nicht bestrichenen entwickelt und immer auffallend unregelmäßig höckerig. An den nicht bestrichenen Hälften der Wundflächen ist der Kallus ganz

glatt. *Megatherium* bewirkt die Entwicklung eines mehr krustigen, *B. coli* eines mehr höckerigen Kallus. Am 31. XII. ist der Unterschied noch auffallender. Am 4. I. 1927 wurden Knollen, bei denen eine Hälfte der Wundfläche mit *B. megatherium* oder *coli* bestrichen wurde, photographiert (Fig. 6—10).

Am 4. I. 1927 wurde ein analoger Versuch, wie die vor-



Fig. 8.

Dekapitierte Kohlrabiknolle, rechte Hälfte der Wundfläche mit *B. coli* bestrichen. 2:1.

herigen waren, ausgeführt, die Wundflächen wurden mit Kulturen von *Bacterium radicum* und *B. mesentericus* bestrichen. Am 8. I. ist bei beiderlei Pflanzen der Kallus an den mit Bakterienkulturen bestrichenen Wundflächen bedeutend mächtiger als an den nicht bestrichenen Hälften. Am 8. I. sind die Unterschiede noch deutlicher. Beiderlei Pflanzen wurden photographiert (Fig. 11, 12).

Auch bei Knollen, deren eine Hälfte der Wundfläche mit *B. mesentericus* und *radicum* bestrichen wurde, wurde das Gewebe durch einen etwa 1,5 mm unter der ursprünglichen Wundfläche geführten Schnitt abgetragen. Nach 12 Tagen ist der Kallus unter der ursprünglich mit *B. mesentericus* bestrichenen Hälfte deutlich stärker entwickelt als an der zweiten Hälfte. Bei *B. radicum* läßt sich jedoch kein Unterschied feststellen.

Die mit *B. radicola* und *mesentericus* bestrichenen Wundflächen beginnen relativ früh abzusterben und zu faulen. Bei einigen Pflanzen beginnt das Absterben schon 8 Tage nach der Operation, bei anderen später. Pflanzen, welche sich im Dunkeln befinden, beginnen für gewöhnlich früher zu faulen als jene, welche am Licht gehalten wurden.

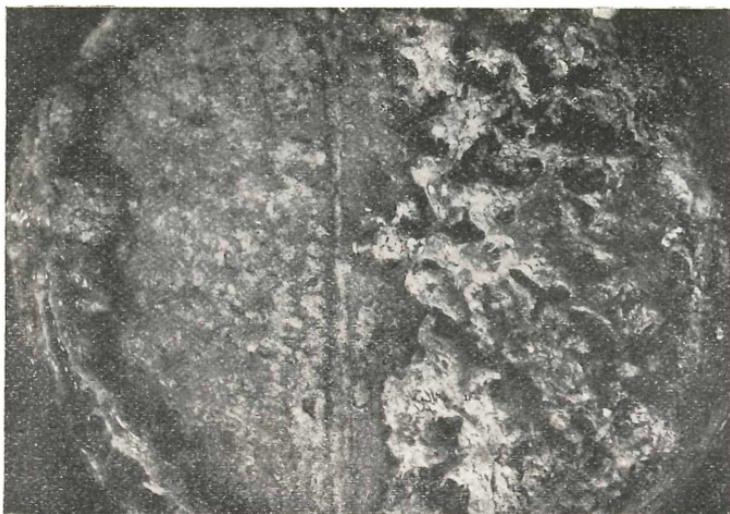


Fig. 9.

Dekapitierte Kohlrabiknolle, Wundfläche an der rechten Hälfte mit *M. megatherium* bestrichen. 2:1.

Haberlandt hat sehr interessante Versuche ausgeführt, wo auf die Wundflächen der Kohlrabiknollen Gewebebrei derselben Pflanze aufgetragen wurde. Durch das Gewebebrei wurde die Kallusbildung deutlich gefördert. Es wurden daher ähnliche Versuche unternommen. Am 7. I. 1927 wurde bei einigen Pflanzen die frische Wundfläche zunächst mit Leitungswasser abgewaschen, dann auf eine Hälfte der Wundfläche Gewebebrei aus derselben Pflanze aufgetragen. Einige Pflanzen wurden unter einen Zinksturz, andere unter Glasstürze gestellt. Am 10. I. ist äußerlich kein Unterschied zwischen beiden Hälften der Wundflächen festzustellen. Der unter dem Gewebebrei sich entwickelnde Kallus ist gleich groß wie an den nicht bestrichenen Hälften. Auch in den nachfolgenden Tagen ist kein Unterschied zu sehen. Aber

schon am 11. I. beginnt bei einigen Pflanzen, die sich im Dunkeln befanden, der Kallus unter der Breidecke abzusterben und zu faulen. Bei Lichtpflanzen beginnt das Absterben erst am folgenden Tage. Dieser Versuch wurde mit gleichem Resultate am 24. I. 1927 wiederholt. Bei einem Teile der Pflanzen wurde die Wundfläche mit dem Brei, beim anderen mit aus dem Brei ausgepreßtem Saft bestrichen. Ebenso wie im vor-

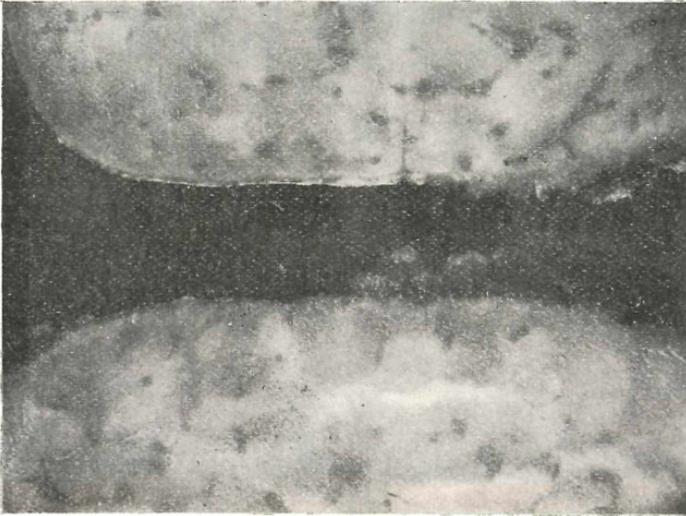


Fig. 10.

Mediane Längsschnitte durch eine dekapitierte Kohlrabiknolle, rechte Hälfte der Wundfläche mit *B. megatherium* bestrichen. 2:1.

herigen Versuch beginnt der Kallus an den bestrichenen Hälften der Wundfläche nach einigen Tagen abzusterben, auch hier übt das Licht auf diesen Vorgang einen verzögernden Einfluß aus. Das Absterben geht sehr schnell vor sich und nach einigen Tagen verändern sich die Knollen zu einer breiartigen Masse. Diese Versuche sind darum nicht entscheidend, weil ich den Kallus hier nicht mikroskopisch untersucht habe. Wenn es sich um die Teilungsintensität der Zellen handelt, so müssen die Kalli mikroskopisch untersucht werden, da gleich große Kallusbildungen nicht identisch sein müssen. Bei einem kann Hypertrophie der Zellen ohne Teilung, bei dem anderen Zellteilung ohne allzu starke Hypertrophie der Zellen vorherrschen.

Die Versuche, über welche soeben berichtet wurde, beweisen, daß nicht nur *B. tumefaciens*, sondern auch andere Bakterienarten (*proteus*, *coli*, *megatherium*, *mesentericus*, *radicicola*) die Wundfläche der Kohlrabiknollen zu einer mächtigeren Kallusbildung anregen. Dieser stimulierende Einfluß dringt auch in eine gewisse Tiefe unter die Schnittfläche, allerdings nur höchstens 5 mm tief. Dasz es sich hier um den Einfluß von lebenden Bakterien handelt, kann daraus ge-

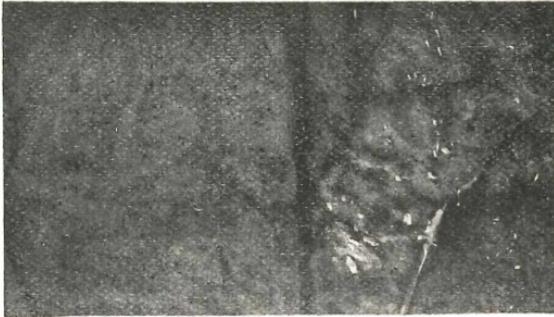


Fig. 11.

Wundfläche einer dekapitierten Kohlrabiknolle, deren rechte Hälfte mit *B. radicicola* bestrichen wurde. 2 : 1.

schlossen werden, daß eine an die Wundfläche gebrachte Suspension von abgetöteten Bakterien (*B. tumefaciens*) keine stimulierende Einwirkung ausgeübt hat. Auch Nähragar selbst reizt die Wundfläche zu keiner schnelleren Kallusbildung. Es handelt sich hier also um den Einfluß von lebenden Bakterien. Da stellt sich die Frage, mit welcher sich schon Magnus befaßte, ob die Bakterien nicht in die Zellen eindringen und sich nicht bis zu einer gewissen Entfernung von der Wundfläche entfernen. Das könnte allerdings vielleicht noch besser geschehen, wenn sich die Bakterien interzellulär verbreiten würden. Schließlich wäre es nicht ausgeschlossen, daß in das Gewebe unter der Wundfläche nur bestimmte Stoffwechselprodukte der Bakterien eindringen.

Ich habe, nachdem die obere Schicht der Wundfläche, welche mit *B. tumefaciens* bestrichen wurde, abgeschnitten wurde, Bakterienkulturen von der Substanz der neuen Wundfläche herzustellen versucht. Mit einer Platinnadel wurden

Stückchen des Gewebes von der frischen Wundoberfläche genommen und auf Nähragar gebracht. Ich bekam keine Bakterien, was beweist, daß das Gewebe steril war. Auch weitere Versuche beweisen, daß gesunde Kohlrabiknollen im Inneren steril sind, und sich daher zu Gewebekulturen sehr gut eignen würden.

Vielleicht ließe sich die Kallusstimulation durch die

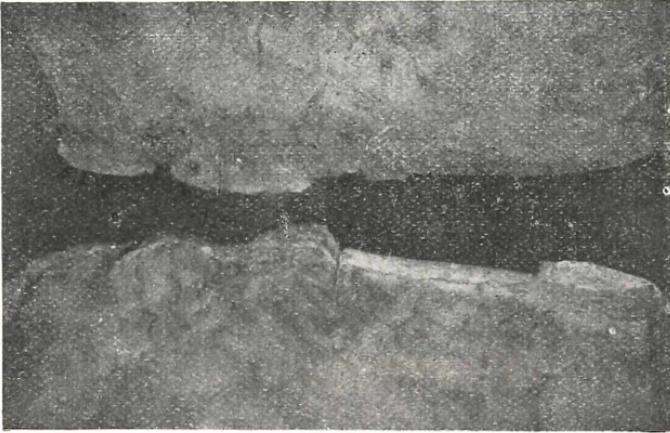


Fig. 12.

Mediane Längsschnitte durch eine dekapitierte Kohlrabiknolle, die linke Hälfte der Wundfläche mit *B. radiculicola* bestrichen. 2 : 1.

Einwirkung eines vom Bakterium ausgeschiedenen Stoffes, welcher in das Gewebe hineindiffundiert, erklären. Ein solches stimulierendes Agens haben Bechhold und L. Smith beschrieben (1927). Ein durch Chamberland L 5 — Kerzen erhaltenes Filtrat von *B. tumefaciens* enthielt keine mikroskopisch sichtbaren Gebilde, aber auch keine ultramikroskopischen Partikelchen, da es auch Ultrafilter passierte. Dennoch bewirkte dieses Agens Wucherungen auf der Gelbrübe, ebenso wie *B. tumefaciens* selbst. Die Verfasser bezeichnen das Agens als Tumefaciens-Plastin.

Des weiteren habe ich die Kalli mikroskopisch untersucht. Die Kalli wurden mit Chromformalin fixiert (Némec & Milovidov 1926, Milovidov 1928), und zwar sowohl Stücke solcher, welche durch Bakterien stimuliert wurden, als auch jener, welche ohne Bakterieneinfluß entstanden sind. Die

Schnitte wurden mit Heidenhains Haematoxylin gefärbt und in verschiedenem Grade differenziert. In den Zellen waren gut Plastiden sowie stäbchenförmige Mitochondrien zu sehen, nicht jedoch Bakterien, welche sich intensiver tingiert hätten als die Mitochondrien. Auch in den Interzellularräumen wurden keine Bakterien angetroffen, was wohl nach den Befunden von Robinson und Walkden (1927) nicht ausgeschlossen wäre. Ich kann zwar nicht apodiktisch behaupten, daß die Zelle des Kallus keine Bakterien enthalten, aber wahrscheinlich scheint es mir doch zu sein.

Ich fixierte auch Teile von Knollen, welche unter dem Einfluß von *B. mesentericus* und *radicicola* abgestorben sind. Es ist interessant, daß es auch hier nicht möglich war innerhalb der abgestorbenen Zellen die Gegenwart von Bakterien festzustellen. Sie wurden nur in der nächsten Nachbarschaft der Wundfläche getroffen und in Interzellularräumen, wohin die Bakterienmasse offenbar durch Kapillarität eingedrungen ist. Auf eine größere Entfernung von der Wundfläche verbreiteten sich jedenfalls die Bakterien auch in den Interzellularräumen nicht.

Es ist somit ersichtlich, daß die von mir benutzen Bakterien höchst wahrscheinlich nicht in das Zelleninnere einzudringen vermögen, ja daß sie sich auch nicht in den Interzellularräumen von der Wundfläche aus verbreiten. Ihr stimulierender Einfluß auf die Kallusbildung läßt sich offenbar der Einwirkung von Stoffen zuschreiben, welche von den lebendigen Bakterien produziert werden, wie es z. B. das Tumefaciens-Plastin von Bechhold und L. Smith ist. Dieselben können offenbar in das Pflanzengewebe hinein diffundieren. Das wäre nichts Überraschendes, da ja in den letzten Jahren bewiesen wurde, daß die sog. Wuchsstoffe im Pflanzengewebe ziemlich schnell auf relativ weite Entfernungen diffundieren können.

Einige Bakterien scheiden Stoffe aus, welche früher oder später die Zellen abtöden. So wirkt z. B. *Bacillus pyocyaneus*. Wenn man eine Suspension von dieser Art auf eine frische Wundfläche der Möhre bringt, so sterben die Zellen von der Wundfläche angefangen allmählich immer tiefer ab. Wird nur eine Hälfte der durch einen Querschnitt hergestell-

ten Wundfläche mit *B. pyocyaneus* bestrichen, so stirbt nur an dieser Hälfte das Gewebe ab. Ich untersuchte die abgestorbenen Partien mikroskopisch und fand, daß auch hier die Bakterien nicht in das Innere der Zellen eindringen, sondern nur an ihrer Oberfläche bleiben. Bekanntlich scheidet *B. pyocyaneus* Giftstoffe aus, und diese sind es, welche die Zellen abtöden.

ZUSAMMENFASSUNG.

Bakterien der Arten: *Bacterium tumefaciens*, *radicicola*, *coli*, *megatherium*, *mesentericus* und *proteus* verursachen, wenn sie an die frische Wundfläche der Kohlrabiknollen gebracht werden, eine mächtige Kallusbildung, welche viel rascher vor sich geht, als wenn sich der Kallus ohne Bakterien entwickelt. Dabei dringen die Bakterien nicht in das Innere der Zellen ein, sondern scheiden wahrscheinlich einen stimulierenden Stoff aus, wie ein solcher für *B. tumefaciens* von Bechhold und L. Smith als *Tumefaciens-Plastin* nachgewiesen wurde. Wenn die Bakterien auf die Wundfläche gebracht werden und nach einigen Tagen eine 1·5 höchstens 5 mm dicke Scheibe samt dem Kallus und dem Bakterienbelag entfernt wird, so entwickelt sich der neue Kallus dennoch unter jenen Partien der Wundfläche, auf welche ursprünglich die Bakterien aufgetragen wurden, deutlich mächtiger (*B. tumefaciens*, *mesentericus*), obzwar das Gewebe der neuen Wundfläche selbst steril ist. Das spricht eben dafür, daß aus den Bakterien Stoffe ins Gewebe diffundieren, welche es zu erhöhter Kallusbildung reizen. Auch *B. pyocyaneus*, welches auf frische Wundflächen der Möhrenwurzeln gebracht das Gewebe allmählich zum Absterben bringt, dringt nicht ins Zellinnere ein.

Summary.

The influence of Bacteria on the developement of calli:

A suspension of *Bacterium tumefaciens* brought on the cut surface of the bulbs of Kohlrabi stimulates a vigorous development of the callus. The author has found that *B. radicicola*, *coli*, *megatherium*, *mesentericus* and *proteus* are also stimulating the growth of the callus. The bacteria do not enter the cells.

LITERATUR:

- Bechhold H. u. Smith L. 1927, Das Tumefaciens-Plastin Zt. f. Krebsforsch. Bd. 25.
- Friedemann, Bendix, Hassel u. W. Magnus, 1925, Der Pflanzenkrebserreger (*B. tumefaciens*) als Erreger menschlicher Krankheiten. Zt. f. Hyg. u. Infkrankh. Bd. 80.
- Friedemann u. Magnus W. 1915, Das Vorkommen von Pflanzentumore erzeugenden Bakterien im kranken Menschen. Ber. d. d. bot. Ges. Bd. 33.
- Levine, M. 1925, Morph. changes in *Bacterium tumefaciens*, Science V. 42.
- Magnus W. 1918, Wund-Callus und Bakterientumore, Ber. d. d. bot. Ges. Bd. 36.
- Milovidov, P. 1928, Bactéries des tubercules radicaux de certains Légumineuses. Publ. Fac. de Sc. Univ. Charles Prague. Nr. 49.
- Milovidov P., 1928, Recherches sur les tubercules du Lupin. Rév. gén. de Bot. T. 40.
- Milovidov P., 1928, Sur les méthodes de double coloration du chondriome et des grains d'amidon. Arch. d. anat. micr. T. 24.
- Němec & Milovidov, 1926, Bacteria in plant and human cells. Bult. int. Acad. de Bohême.
- Vöchting H., Unters. z. exp. Anatomie u. Pathol. d. Pflanzenkörpers. Tübingen.

VII.

Sur la culture de la *Spirogyra* dans des suspensions bactériennes.

Par JAN KOŘÍNEK.

Présenté le 5. Mai 1929.

Dans notre travail: »De l'influence des microbes banaux du sol sur les plantes«, nous avons pu constater l'influence favorable des suspensions microbiennes ajoutées au sol sur la croissance des végétaux. Nous avons été surpris de constater le contraire en cultivant nos plantes (*Pisum sativum*) directement dans ces suspensions, ou dans le sable mouillé par ces suspensions microbiennes. Mais nous avons réussi à trouver la cause de cette anomalie: il s'agit des ions d'hydrogène. Les plantes supérieures en général ne supportent pas de basses concentrations de H-ions et les suspensions des microbes ont presque toujours une réaction sensiblement alcaline. Le pH de l'eau d'aqueduc de Prague laissée librement dans des cuvettes en verre ordinaire (la qualité du verre a naturellement aussi son importance) monte en peu de temps jusqu'à 8—8.2, mesuré à la température de 21° C. L'eau fraîche et froide grâce à la présence de CO₂ a son pH égale à 7.2—7.4.

Ce pH élevé des suspensions microbiennes ne peut pas exercer d'effet nuisible si les suspensions sont ajoutées au sol, parce que la terre a un pouvoir tamponnant grâce à ses carbonates, phosphates, acide carbonique etc. L'eau pure et le sable représentent des solutions mal tamponnées et il en résulte une influence nuisible des suspensions microbiennes alcalines.

Nous croyons avoir démontré, dans notre travail cité plus haut, que les microbes banaux, ajoutés au sol, constituent un aliment excellent pour les végétaux. Si nous voulons cultiver les plantes directement dans ces suspensions, il faut

abaisser artificiellement le pH en ajoutant de l'acide dilué.

Cette précaution est superflue pour les plantes aquatiques qui préfèrent la réaction alcaline. *Eloдея*, *Chara*, *Riccia*, *Wulfia*, *Callitriche*, *Cladophora* et *Spirogyra* ont poussé vigoureusement dans des suspensions microbiennes — sans addition d'acide indispensable pour les végétaux terrestres.

Nous avons étudié plus spécialement la nutrition de la *Spirogyra*, une algue assez difficilement cultivable au laboratoire. Elle y périt en effet dans un temps relativement court et c'est ce que *Benecke* (1925) a aussi constaté.

Nous nous sommes attachés à cultiver la *Spirogyra* et à mettre en lumière le rôle des ions H si important dans la nutrition des végétaux.

Nous ne citerons que les travaux qui nous concernent très étroitement. D'abord la publication de *V. Úlehla*. Cet auteur démontre que les eaux courantes sont caractérisées par un pH constant, tandis que les eaux stagnantes montrent, dans le courant de la journée, un changement de pH suivant la quantité de lumière. A la lumière, l'assimilation a lieu, CO₂ est consommé et il s'en suit une augmentation de pH. Pendant la nuit, CO₂ est dégagé et alors nécessairement le pH diminue. Font exception à cette règle les eaux stagnantes en contact avec des masses calcaires.

C'était le cas de la flaque où nous avons ramassé notre *Spirogyra* (il y en avait toujours au moins trois espèces à la fois). Cette flaque ne mesurait pas plus d'un mètre et n'avait pas plus de 25 cm de profondeur. Ses parois étaient formées par des rochers calcaires. Les *Spirogyres* s'y trouvent plus ou moins abondamment depuis très longtemps selon le témoignage des naturalistes de Prague.

Plus loin *Úlehla* démontre que la prospérité des algues dépend du pH et de sa constance. Il distingue des algues alcaliphobes et des algues acidophobes. D'après lui, les algues marines n'ont pas besoin d'un régulateur du pH de milieu parce qu'elles sont entourées d'une solution bien tamponnée. Au contraire les algues des eaux douces doivent nécessairement être munies d'un tel régulateur pour se protéger contre les variations quotidiennes du pH. Et ce régulateur, ce système tamponnant n'est autre que ce qu'on nomme »psi-

chohormies» c'est à dire les bactéries assimilatrices du fer, surtout une nouvelle espèce découverte par Ch o l o d n y j et appelé *Sideromonas*. Cette bactérie vit en épiphyte sur les algues en formant des colonies sur leurs parois muqueuses. Ensuite a lieu l'incrustation par le carbonate et l'hydroxyde de fer. Le terme »psychohormie« est du à Kützing. Úlehla a trouvé, sur son *Oedogonium* principalement: CaCO_3 , mais en outre: des ions C^- , Fe^+ et Fe^{++} . Ainsi, quand CO_2 commence à être en excès, une quantité de CaCO_3 se transforme en $\text{CaH}_2(\text{CO}_2)_2$ qui est soluble. Alors on ne peut pas regarder les psychohormies comme des épiphytes sans importance, mais comme de véritables symbiontes. L'auteur désigne ce phénomène sous le nom d'electrosymbiose. *Cladophora* n'est pas munie de psychohormies, mais elle se réfugie sur les coquilles des Mollusques et le CaCO_3 de son substratum lui sert de système tamponant. Le travail de Úlehla est fort intéressant et il faudrait lire l'original. Le résumé allemand pourrait faire croire que l'auteur a exagéré l'importance du pH pour les végétaux, mais dans le texte tchèque, on voit que l'auteur ne nie point l'importance des autres facteurs et qu'il croit au synergisme.

Une autre publication qui fut pour nous des plus intéressantes, est celle de *Tetsu Sakamura*. Cet auteur a constaté que *Spirogyra* rempli d'amidon et plongée dans l'eau distillée dégage des matières d'un caractère acide de manière que l'acidité du milieu la fait périr. D'après lui on peut remédier à cet inconvénient en ajoutant du CaCO_3 . Cette substance agit d'abord comme un tampon. Ensuite le Ca ion est antagoniste du H ion. Nous nous permettons une seule observation; l'auteur a plongé la *Spirogyra* dans 100 cm³ d'eau distillée. Il ne dit pas quelle quantité d'algue il a employé, mais nous croyons que la quantité d'eau n'était pas suffisante; nous y revindrons.

La technique.

La technique de nos expérimentations était très simple. nous avons cultivé notre algue dans des cylindres de 12 cm de diamètre. La quantité d'eau était 600 cm³. Les cultures étaient exposées à la lumière diffuse. Nous avons en général

employé l'eau d'aqueduc de Prague qui contient assez de calcium (177 mg dans un litre). Pour mesurer le pH nous avons employé la méthode colorimétrique de Clark et Lubs.

Nous employons toujours le mot *Spirogyra* sans déterminer espèce. Il nous était absolument impossible de le faire à cause de la copulation manquée. Nous savons que c'est un grand défaut de notre travail mais nous l'avons observé chez d'autres auteurs. Disons cependant à notre décharge: a) L'une de nos *Spirogyres* était très vraisemblablement *S. fluviatilis*. Outre celle-ci il y en avait au moins deux espèces — sûrement très communes — plus minces et toujours plus résistantes. Nous osons dire que les conditions oekologiques de toutes ces trois espèces étaient les mêmes ou au moins très emblables.

b) Nous ne voulons pas étendre nos résultats quant au problème du pH à toutes les plantes aquatiques; mais nous pensons pouvoir généraliser notre opinion sur utilité des bactéries pour peut-être tous les végétaux aquatiques. En plus des algues — déterminées ou non — que nous avons vu pousser dans nos cuvettes, plusieurs plantes supérieures se montraient favorisées par l'addition de microbes (*Wulfia*, *Elodea*, *Riccia*, *Callitriche*, *Chara*).

Les expériences.

Nous avons voulu savoir comment change le pH de l'eau seule, sans addition d'organisme. Ce changement est évidemment dû à l'influence de la température, à l'absorption de CO_2 et aux matières solubles du verre.

15. V. 1926	pH					
	15. V.	20. V.	26. V.		2. VI.	
			8 heures	15 heures	8 heures	15 heures
eau distillée	5.6	7.0	17°C 7.0	20°C 8.2	18°C 7.3	21°C 7.3
eau d'aqueduc	7.7	8.2	8.3	8.2	8.3	8.2

Nous voyons que le pH de l'eau elle — même subit des changements — à savoir il augmente a) parce que CO_2 se

dégage; b) parceque probablement les matières basiques du verre se dissolvent dans l'eau. Nous constatons aussi des variation quotidiennes du pH en fonction de la temperature.

Un fait interressent se manifeste quand on ajoute à l'eau des acides ou des bases. Nos avons ajouté à la même quantité d'eau 6 cm HCl $\frac{1}{10}$ N et 6 cm NaOH $\frac{1}{10}$ N.

18. VI.	pH		21. II. ajouté	pH	
	18. II.	20. II.		23. II.	26. II.
eau + 6 cm ³ HC $\frac{1}{10}$ N	6·7	7·0	2 cm ³ HC $\frac{1}{10}$ N	7·3	7·9
eau + 6 cm ³ Na OH $\frac{1}{10}$ N	8·8	8·2	„ Na OH „	8·2	8·2

Il semble que l'eau en contact avec le verre soluble et exposé à l'acide carbonique de l'air est tamponnée à pH 8·0—8·2. Mais c'est un problème purement physico-chimique et il ne nous est pas possible de nous en occuper malgré son importance pour la physiologie.

Spirogyra dans l'eau sans bactéries.

15. V. 1926	15. V. pH	20. V. pH	26. V.			2. VI.			8. VI.
			pH		Spirogyra pousse	pH		Spirogyra pousse	S. pousse
			8 heures	14 heures		8 heures	16 heures		
			17° C	20° C	18° C	21° C			
eau d'aqueduc .	8·2	8·7	8·6	8·9	++	8·6	9·1	++	++
» bouillie . .	8·4	8·7	8·5	8·7	++	8·5	8·6	+	—
» + la terre .	8·0	8·7	8·3	8·6	++	8·3	8·5	++	++
» + CaCO ₃	8·1	8·6	8·4	9·0	++	8·4	9·0	+++	++
» + MgCO ₃	8·2	8·4	8·4	8·6	+	8·5	8·7	—	—
» + CaCO ₃ + MgCO ₃	8·4	8·6	8·8	9·0	+	8·5	9·0	±	±
» + CaSO ₄	8·1	8·3	8·2	8·3	+	8·2	8·3	±	±
» distillée	6·6	8·8	8·9	8·8	++	7·9	8·7	+	+

Nous croyons pouvoir conclure de nos resultats: a) que l'eau distillée n'est pas toxique pour la *Spirogyra* — tant qu'elle ne contient pas de cuivre. La seule nuisibilité de l'eau distillée tient à l'absence de tampon, ce qui entraine des grandes varitations de pH. Le matin le pH diminue à cause de la

presence de CO_2 ; l'après-midi CO_2 étant assimilé, le pH monte. Ce manque de pouvoir tamponnant se manifeste quand CaSO_4 est ajouté.

MgCO_3 n'est pas favorable à l'algue; un certain tamponnement pourrait peut-être avoir lieu, mais l'eau contenant cette substance en abondance n'est pas une solution balancée.

Quand l'algue meurt, la décomposition s'en suit, alors que le phénomène du pH devient très compliqué. La complication augmente encore davantage quand les algues unicellulaires commencent à apparaître.

C'est en presence de CaCO_3 que la *Spirogyra* prospère le mieux; nous avons dit que nous avons recolté notre *Spirogyra* dans une flaque formée dans un massive calcaire. L'utilité de CaCO_3 ne tient seulement à son pouvoir tamponnant, mais encore à l'antagonisme possible du Ca^{++} et du H^+ (circonstance mentionnée par *Sakamura*).

Il y a des plantes supérieures pour lesquelles CaCO_3 est nuisible; mais *Mevius* a expliqué cette calcophobie. Il s'agit surtout d'action nocive de l'alcalinité de cette substance.

L'eau d'aqueduc de Prague contient assez de Ca; c'est peut-être la raison pour laquelle *Spirogyra* y pousse mieux que dans l'eau distillée. Le pH de cette eau laissée à elle-même, comme nous l'avons vu, est 8.2, ce qui est précisément la réaction de la flaque, où nous avons ramassé notre *Spirogyra*.

Spirogyra dans les solutions nutritives minérales.

15. V.	16. V. pH	17. V. pH	26. V.			2. VI.			8. VI.
			pH		∞ pousse	pH		∞ pousse	∞ pousse
			8 heures	14 heures		8 heures	16 heures		
Knop avec KH_2PO_4 normal	5.6	6.6	6.8	6.8	++	6.8	6.9	±	±
» dilué à 1/2	5.7	7.0	7.1	7.2	++	7.3	7.4	++	±
Knop avec K_2HPO_4 normal	6.9	7.4	7.6	8.9	+++	7.7	7.8	++	±
» dilué à 1/2	7.4	7.7	7.6	7.7	±	7.7	8.0	±	±
Crone normal	7.4	7.8	7.5	7.7	±	7.7	8.0	+	±
» dilué à 1/2	7.2	7.9	7.7	8.0	++	7.9	8.1	+	±

Si nous comparaisons ce tableau avec le précédent (*Spirogyra* dans l'eau) nous voyons que les solutions nutritives minérales ne sont pas très favorables à l'algue. Tout au plus le Knop avec K_2HPO_4 pourrait être regardé comme nutritif pour la *Spirogyra*; mais même dans ce milieu l'algue ne subsiste pas longtemps. Dans aucune des nos solutions le pH ne peut pas dépasser la valeur 8.0—8.2 que nous regardons comme optimum.

Il y a encore autre chose; toutes ces solutions sont destinées aux plantes supérieures (voire aussi leur réaction acide) et plus ou moins balancées pour chacune d'elles. La question se pose comme suit: si ces solutions sont aussi balancées pour une algue. Au cours de temps ce balancement peut devenir encore plus défavorable, parceque les composants de la solution peuvent être absorbés avec des différentes vitesses. C'est ainsi que nous nous expliquons que dans Knop avec K_2HPO_4 *Spirogyra* poussait d'abord bien mais après, elle a péri tandis que dans l'eau d'aqueduc, simple ou additionnée de $CaCO_3$, elle poussait toujours bien.

Il ne faut pas s'étonner que la *Spirogyra* ait supporté la réaction acide du Knop ordinaire. Cela ne saurait contredire aux résultats de V. Úlehla. Nous le répétons: rester vivant et pousser bien et longtemps sont deux choses différentes.

En résumé: Nos solutions nutritives minérales ne sont pas favorables à la *Spirogyra*.

Dépendance du pH de la quantité du milieu nutritif.

Sakamura écrit que les matières dégagées par la *Spirogyra* augmentent l'acidité de l'eau distillée de telle manière que l'autointoxication (Selbstvergiftung) s'en suit. Il recommande $CaCO_3$ pour remédier à cet inconvénient. L'auteur écrit qu'il a employé 100 cm³ d'eau distillée, mais il n'indique pas quelle quantité de *Spirogyra* il y a mise. La chose est de grande importance. Il est bien connu que, si nous employons une trop petite quantité d'algue et surtout de levure ou de bactéries, les organismes ne poussent pas. Nous ne voulons pas toucher à la question du »bios«. Au contraire, si nous employons de trop grande quantités d'algue et surtout quand

le milieu n'est pas bien tamponné, il y a de grandes variations du pH; celles ci peuvent être supportées pendant un certain temps, mais elles finissent par tuer l'algue.

Voici le tableau de nos résultats:

	exposé		Différence	Spirogyra pousse
	à l'obscurité 24 heures	à la lumière		
	pH			
100 cm ³ H ₂ O	7·9	8·9	10	±
600 „	8·2	8·5	3	+
100 „	8·0	8·8	8	±
+ CaCO ₃	8·1	8·3	2	+
600 „ „	7·9	8·3	4	±
100 cm ³ de sus- pension de mi- crobes	8·1	8·1	2	+++

Nous voyons de grandes variations du pH dans de petites quantités d'eau. Nous constatons l'action tamponnante du CaCO₃, mais la suspension de microbes semble être bien mieux tamponnée que l'eau additionnée de CaCO₃. Nous résumons: La quantité du milieu nutritif joue aussi son rôle.

Spirogyra dans les suspensions bactériennes.

Nous avons ajouté de la suspension de microbes dans des cuvettes où se trouvaient des plantes aquatiques (Wulfia, Callitriché, Elodea, Chara, Riccia). Nous avons été bien surpris de constater combien les plantes prospéraient. Nous avons choisi la *Spirogyra* pour mieux étudier ce phénomène.

Voici un tableau de résultats:

11 VI.	pH 14. VI.	pH 16. VI.	S. pousse	pH 21. VI.	S. pousse
eau d'aqueduc	8·5	8·7	+	8·7	+
„ + Ca CO ₃	8·3	8·6	+	8·6	+
suspensions micro- bienne	8·0	8·3	+++	8·5	+++

Nous voyons la différence entre ces trois milieux; dans la suspension de microbes on obtient toujours les meilleurs résultats. Nous croyons qu'il y a deux raisons à cela: a) la solution de microbes est bien tamponnée; malgré la vigoureuse croissance des algues, le pH n'est pas monté sous l'influence de l'assimilation chlorophyllienne comme dans l'eau ordinaire; b) les bactéries sont peu à peu autolysées (faute de nourriture) et les produits de cette autolyse servent probablement de nourriture à la *Spirogyra*. Peu importe la nature de la bactérie en suspension; celle ci n'a rien de spécifique. Les bactéries n'agissant pas comme des êtres vivants, mais les produits de leur autolyse représentent un tampon et servent en même temps à la nourriture des algues.

Voici une expérience où nous avons employé différentes bactéries:

19. IV.	pH 19. IV.	pH 21. IV.	pH 23. IV.	S. pousse	pH 4. V.	S. pousse
eau d'aqueduc	7.7	8.2	8.0	±	8.5	—
<i>B. vulgare</i>	7.7	7.8	7.8	+++	8.2	+++
<i>B. azotobacter</i>	7.7	7.9	7.9	+++	8.2	++
<i>Mycobac Friedmann</i>	7.7	7.2	7.2	+++	8.1	++
<i>B. tumefaciens</i>	7.7	7.9	8.2	+++	8.5	+++
<i>Micrococcus cinab-</i> <i>rensis</i>	7.7	7.8	7.9	+++	8.4	++++

Nous trouvons peu de différence dans nos cultures quant à la prospérité de la *Spirogyra*. Même dans la suspension à bas pH de *Mycobacterium Friedmann* l'algue poussait bien. *B. tumefaciens*, pathogène pour les plantes supérieures, s'est montré aussi utile pour la *Spirogyra*.

Nous avons cru pouvoir admettre que les bactéries, ajoutées aux suspensions, y jouaient le rôle de psychohormies — dans le sens de Kützing, Cholodnyi et Ulehla. Nous avons été obligés d'abandonner notre opinion parceque les bactéries tuées se sont montrées aussi utiles que les bactéries vivantes.

Voici le tableau de nos résultats:

15. II.	pH 15. II.	18. II.	20. II.	25. II.	S. pousse
B. tumefaciens vivant	7.6	7.8	7.9	8.1	+++
» mort	8.3	7.8	7.8	8.2	+++
Melange de microbes vivants	7.5	7.8	7.8	8.0	+++
» tués	8.7	7.9	7.8	8.0	+++

Les bactéries étaient tuées par la chaleur. »Mélange de microbes« veut dire que nous avons inoculé de grandes boîtes de Roux d'eau d'aqueduc ou d'eau où nous avons mis quelques morceaux de terre. Les suspensions de bactéries tuées ont d'abord un pH élevé qui diminue peu à peu et, au bout d'un certain temps, la réaction est partout la même. Les petites différences tiennent peut-être à des erreurs d'observation.

Il faut comprendre ainsi l'utilité des microbes tués: Il est vrai qu'ils ne peuvent pas succomber directement à l'autolyse — tous leurs enzymes étant tués —, mais dans le traité de Reynolds, nous trouvons l'explication de ce phénomène (la bibliographie y est citée). Se sont d'abord les microbes vivants qui s'autolysent et les produits de cette autolyse déterminent ensuite la bactériolyse des microbes tués.

15. V. 1926	pH 16. V.	pH 17. V.	pH 20. V.	S. pousse	pH 2. VI.	S. pousse
Bactéries	7.7	7.9	8.4	+++	8.2	+++
Feuilles coupées en morceaux	7.7	7.7	7.8	±	8.0	—
Papier à filtres	7.7	8.1	8.2	+	8.2	—
Levures	8.2	7.9	8.0	++	7.0	±
Peptone	8.2	8.1	7.9	±	7.9	±
Viande	8.2	7.6	7.7	—	7.9	—
Amidon	8.2	8.3	8.8	++	8.8	++
Dextrose	7.9	7.9	8.0	—	8.2	—

Il est bien connu que les algues aiment la nourriture organique. On peut voir sans aucune analyse que les matières organiques sont en abondance dans la flaque où nous avons ramassé notre Spirogyra (cadavres d'animeaux). Il est connu qu'on peut cultiver des algues vertes — même à l'obscurité — sur des milieux usuels en bactériologie. On peut citer la sym-

biose des algues vertes et des pontes des grenouilles et des poissons. Benecke a trouvé des *Diatomées* sans chlorophyle, pour lesquelles la heterotrophie est indispensable.

Nous avons essayé quelques matières organiques, mais nous n'avons presque jamais obtenu de bons résultats, au moins en comparaison avec suspensions bactériennes.

Dans la nature il peut arriver que des feuilles d'arbres tombent dans la flaque; certainement la quantité des feuilles y joue son rôle. Mais dans notre expérience l'action de feuilles s'est montré nuisible. Peut être que les feuilles ont absorbé beaucoup de l'oxygène dissout dans l'eau (elles étaient seulement coupées en grands morceaux et pas tuées). Quant au papier à filtrer, on trouve dans la bibliographie qu'on peut ainsi desempoisonner des solutions toxiques pour les organismes. Nos résultats ont été mauvais.

Parmi les matières hydrocarbonées l'amidon se montrait favorable. Il est peu probable qu'il puisse agir comme matière insoluble. Il était décomposé par les microbes. On ne sait si ce sont les produits de cette décomposition, ou les bactéries qui se sont d'abord multipliées et secondairement ont subi l'autolyse.

La pepton, les levures, la viande succombent à la putréfaction et sont décidément nuisibles à la *Spirogyra*.

Alors il faut avouer que les bactéries mises en suspension, se sont montrées les plus utiles de tout pour notre algue. Mais le fait le plus curieux est que cette action favorable des suspensions bactériennes s'est manifesté seulement à la lumière. A l'obscurité les bactériens étaient nuisibles.

11. VI. Suspension des bactéries	pH 12. VI.	pH 14. VI.	pH 16. VI.	S. pousse	pH 21. VI.	S. pousse
à la lumière	8.0	7.9	8.3	+++	8.5	+++
à l'obscurité.	7.9	7.8	7.7	±	7.6	-

Il faut avouer que les bactéries à l'obscurité sont plus nuisibles que l'eau pure ou l'eau additionnée de CaCO₃.

Nous ne pouvons expliquer ce phénomène.

R e s u m é.

Les suspensions microbiennes constituent un excellent milieu de culture pour la *Spirogyra*. Les microbes ajoutés en grande quantité succombent à l'autolyse et les produits de celle-ci tamponnent le milieu et servent probablement à la nutrition en même temps. L'absorbtion des matières organiques dissoutes dans l'eau est bien connue chez les algues vertes et elle a été démontrée même pour les animeaux aquatiques (Pütter, Spärck, Hykeš, Kříženecký). Il n'y a pas d'action spécifique de la bactérie. Celles-ci ne jouent pas le rôle des psychohormies. Les bactéries tuées sont de même utilité que les vivantes; les produits d'autolyse de microbes vivants sont en état de bactériolyser les microbes tués. L'action favorable des bactéries se manifeste seulement à la lumière; à l'obscurité elles sont nuisibles. Les solutions inorganiques sont loin d'être aussi favorable que les bactéries. Les autres matières inorganiques sont en général nuisibles.

Nous pouvons recomender les suspensions microbiennes (n'importe lesquelles) pour maintenir la *Spirogyra* vivante aux laboratoires.

Les ions d'hydrogène jouent un grand rôle dans la nutrition de *Spirogyra*. Ils ne sont tout comme le démontrent Benecke et Úlehla; il faut toujours penser au synergisme de plusieurs facteurs. Notre *Spirogyra* a son optimum de pH à 8·0—8·2 aussi ne peut on pas la dire alcaliphobe (comme c'était le cas de la *Spirogyra*, avec laquelle travaillait Úlehla). Une extrême sensibilité des organismes végétaux aux pH est impossible; il y a des variations quotidiennes de pH grâce à l'assimilation et respiration des végétaux; le pH varie de la surface en profondeur (F. K n o c k e); des autres végétaux peuvent aussi causer des variations de pH. Si les autres conditions sont bonnes, l'algue supporte mieux le pH défavorable. On ne peut pas être surpris de trouver dans la bibliographie que la *Spirogyra* a été cultivée de pH 4·0—9·0. Nous insistons particulièrement sur ce fait: il faut distinguer des conditions physiologiques et des conditions oekologiques. Supporter un milieu et y pousser bien et longtemps, cela n'est pas la même chose. Plus pH reste voisin de l'optimum, plus

favorable est le milieu et plus long temps la plante s'y maintient. Mieux la solution est tamponnée, plus favorable elle est pour les organismes. On sait que les matières protéiques peuvent aussi tamponer le milieu; les produits d'autolyse microbienne constituent un excellent tampon contre la variation du pH.

Prague II, 433. Septembre 1926.

BIBLIOGRAPHIE.

- W. B e n e c k e: Über die Giftwirkung verschiedener Salze auf Spirogyra und ihre Entgiftung durch Calziumsalze. Berichte deutsch. bot. Gesell. XXV. 1907.
- W. B e n e c k e: Zur Frage nach den Bedingungen der Konjugation bei der Gattung Spirogyra. Flora, Goebel-Festschrift 1925.
- H. R. B o d e: Untersuchungen über die Abhängigkeit der Atmungsgröße von der H-Ionenkonzentration bei einigen Spirogyraarten. Jahrbücher f. wissen. Bot. Bd. 65. 1926.
- C l a r k e t L u b s: The determination of Hydrogenions. Philadelphia 1925.
- N. C h o l o d n y i: Die Eisenbakterien. Jena 1926.
- O. V. H y k e š: Ke snahám o nové pojetí výživy vodních ústrojenců; Biol. listy. IX. seš. 2.
- F. K n o c k e: Abhängigkeit der Entwicklung des Volvox aureus von äußeren Bedingungen. Botan. Archiv Bd. VI. 1924.
- J. K o ř í n e k: De l'influence de microbes banaux du sol sur les plantes. Public. de la fac. d. scien. Univ. Charles. Prague 1926.
- J. K ř í ž e n e c k ý: Über eine wachstumsteigernde Wirkung der im Wasser gelösten Nährstoffe bei den Wassertieren. Biologia Generalis. Vol. I.
- M e v i u s: Beiträge zur Physiologie kalkfeindlicher Gewächse. Pe-richte deut. Bot. Gesel. Bd. 60. 1921.
- D. R e y n a l s: Bactériophage et microbes tués. C. R. Soc. Biol. XCIV. 1926.
- T e t s u S a k a m u r a: Über die Selbstvergiftung der Spirogyren in destilliertem Wasser. The botanical Magazine Tokyo. XXXVI. 1926.
- R. S p ä r c k: On the foodproblem in relation to marine zoography. Copenhagen 1926.
- V. Ú l e h l a: Jak působí vodíkové ionty na některé nižší rostliny. Studia Mendeliana. Brno 1923.
-

Über die Sporenbildung bei *Hydnotria Tulasnei*.

Von Dr. B. NĚMEC.

Mit zwei Photographien und einer Tafel.

Vorgelegt am 17. Ma 1929.

Mitte Juli 1926 fand ich an einem grasbewachsenen Weg in einem Fichten- und Tannenwald bei Vyžlovka (südöstlich von Prag) Fruchtkörper der Tuberazee *Hydnotria Tulasnei* Berk. et Br. Sie ragten ein wenig mit der Oberfläche aus der Erde hervor. Die Fruchtkörper stimmten sehr gut mit ihrer Beschreibung in den Pilzbüchern überein, nur waren die meanderförmigen Windungen ihrer Oberfläche nicht so auffallend, wie sie zumeist gezeichnet werden (z. B. bei V e l e n o v s k ý, České houby 1920, p. 906, Fig. 179, 4). Ihre äußere Form ist aus der Fig. 1, die inneren nach außen mündenden Gänge in Fig. 2 zu sehen. Der Habitus entspricht am besten der Originalabbildung von *Tulasne*.

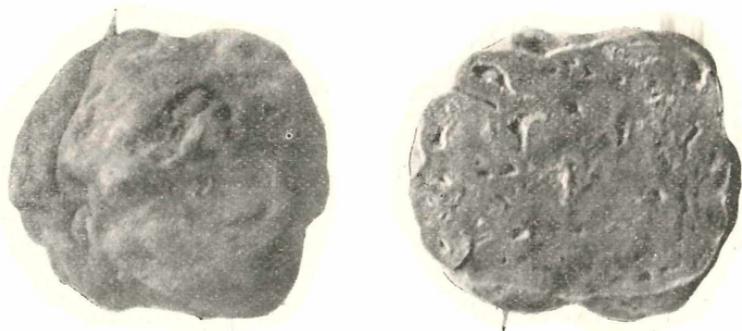
Die Fruchtkörper enthielten Schläuche in verschiedener Entwicklungsstufe. Die meisten Schläuche besaßen Sporen, welche der äußeren Form nach schon ausgebildet waren, daneben gab es auch Schläuche mit reifen Sporen, durch die gelbbraune Farbe ihrer äußeren Membran auffallend. Weiter fanden sich aber auch Schläuche mit nur einem Kern, sowie ihre verschiedenen weiteren Entwicklungsstufen.

Einen Teil des Materials fixierte ich in Chromsäureformalin (100 ccm 1% Chromsäure, 8 ccm Formalin), im Jahre 1927 wurden Paraffinschnitte hergestellt, welche mit Heidenhains Haematoxylin gefärbt wurden. Im ganzen erwies sich das Material als sehr gut fixiert, es traten nur in reifenden Sporen Schrumpfung auf.

Mich interessierte in erster Reihe die Sporenbildung in den Schläuchen. Dieselben liegen palissadenartig zwischen

den septierten Paraphysen und sind meist senkrecht zu den Gängen orientiert. Außerdem liegen andere subhymenial. Sie enthalten immer Sporen, welche kugelig und mit einem dicken, grobhöckerigen Epispor versehen sind.

Schon die jüngsten Stadien der Asci, welche ich gefunden habe, waren einkernig. Der Kern war groß und von mehreren dunkel gefärbten Körperchen umgeben (Fig. 1). Er teilt sich dann dreimal hintereinander, wobei die Kerne immer



Fruchtkörper von *Hydnotria Tulasnei*. Fig. 1 von der Oberfläche, Fig. 2. am Querschnitt. Vergr. 2:1. Photo B. Němec.

kleiner werden (Fig. 2, 3). Immer erschienen sie von den erwähnten Körperchen umgeben, die jedoch vor der freien Zellbildung verschwanden. Die acht Kerne trugen an einer halsförmigen Verlängerung ein dunkel färbbares Körperchen, von welchem aus in der üblichen Weise die Abgrenzung der Spore vom Epiplasma vor sich ging (Fig. 4, 5). Dies sei hier ausdrücklich hervorgehoben, weil Schussnig (1921) für *Tuber aestivum* die Sporen in einer ganz anderen Weise entstehen läßt. Sehr häufig liegt das sog. Centrosom während der Abgrenzung der Spore in der plasmatischen Wandschicht des Ascus (Fig. 4). Zu dieser Zeit enthält das Zytoplasma keine dunkel färbbaren Körperchen. Hierauf teilt sich der primäre Sporenkern, offenbar mitotisch, weil ich ein Stadium, wo er entwickelte Chromosomen besaß, beobachten konnte. Die so entstandenen zwei Kerne teilen sich nochmals, offenbar wiederum mitotisch, da ich zweikernige Sporen, deren Kerne Chromosomen enthielten, gesehen habe. Jetzt enthält die junge Spore vier Kerne, ein homogen fixiertes Zyto-

plasma mit einigen Vakuolen und winzigen dunkel tingierbaren Körnchen (Fig. 6). Das Epiplasma enthält keine stark tingierbaren Körnchen.

Im weiteren Verlaufe erscheint in der Nähe einer jeden Spore je ein kugelförmiges, stark tingierbares Körperchen, welches anfangs frei neben der Spore (Fig. 7, 8) liegt, später sich jedoch derselben anlegt. Unterdessen haben sich die Sporen mit einer feinen, jedoch deutlichen Membran umgeben. Sobald sich das Körperchen an die Spore legt, wird es an der Berührungsstelle abgeplattet (Fig. 9—12).

Solche kugelige Körperchen, welche jeder Spore anliegen, wurden schon beschrieben. Dittrich (1898) fand sie in den Schläuchen von *Helvella infula*. Er hat sie als einen Nebennukleolus bezeichnet, da sie in der Tat äußerlich einem Nukleolus gleichen. Lagarde (1906) fand ganz ähnliche Gebilde in den Ascis von *Lachnea Woolhopeia* und zeichnet einen Ascus (Taf. IV, Fig. 14), welcher acht junge Sporen enthält, jeder liegt ein rundes, intensiv gefärbtes homogenes Körperchen an. Er betont ausdrücklich, daß nur einige Asci diese Gebilde enthalten, daß die meisten keinen äußeren Nukleolus aufweisen. Über das weitere Schicksal dieses Körperchens gibt Lagarde nichts an.

Hingegen ist es mir gelungen den weiteren Entwicklungsgang der Sporen zu verfolgen und die Bedeutung des fraglichen Nebennukleolus klarzulegen. Das Körperchen wächst und tritt in eine immer engere Berührung mit der Spore. Wogegen es anfangs an der Berührungsseite nur schwach abgeplattet war, wird es hier später konkav (Fig. 12, 13) und sitzt schließlich kappenförmig der Spore an (Fig. 15—19). Von der Fläche gesehen weist es einen kreisförmigen Umriß auf (Fig. 11, 14).

Diese Stadien hat E. d. Fischer gesehen und gezeichnet (1897). In Fig. 205 F zeichnet er einen Ascus mit jungen Sporen, deren jeder ein kappenförmiges Gebilde aufsitzt, in Fig. 205 E zeichnet er eine junge Spore mit einem etwas größeren kappenförmigen Gebilde.

Unterdessen ist die ursprüngliche Sporenmembran deutlicher geworden, sie färbt sich stärker (Fig. 15, 17), zuweilen sind an ihr winzige, unregelmäßig verteilte Körnchen zu se-

hen (Fig. 16, 19). Die Spore, welche bisher rund war, erscheint jetzt unregelmäßig geformt (Fig. 15—19), das ist jedoch, wie ich glaube, eher eine Folge der Fixierung. Es handelt sich nämlich höchst wahrscheinlich um eine Schrumpfung infolge eines ungleichmäßigen Eindringens der Fixierungsflüssigkeit oder des Alkohols. An der konkaven Berührungsfläche der Kappe und der Spore erscheinen in der sonst homogenen Substanz der ersteren Vakuolen (Fig. 14, 18, 19) und der Umriß der Berührungsfläche wird unregelmäßig. Die Substanz der Kappe umfließt mehr und mehr die Spore (Fig. 20, 21), bis dieselbe von der Kappensubstanz ringsherum umgeben wird. So entstand um die Spore herum eine neue Membran, die Anlage des Exospors. Aber die neue Membran ist nicht an allen Seiten der Spore gleich dick. An jener Seite, wo die Kappe zuerst erschien, ist die Anlage des Exospors am dicksten, am gegenüberliegenden Pol ist sie am dünnsten (Fig. 22, 23). An fixierten Praeparaten ist eben diese Hälfte der Spore häufig verkrümmt, offenbar eine Folge der Schrumpfung.

Die äußere Fläche der Exosporanlage war bis jetzt ganz glatt. Es treten nun in derselben zahlreiche Vakuolen auf, welche zwischen einander anfangs Lamellen lassen (Fig. 24, 25), später jedoch zum großen Teile verschmelzen. Die äußere und innere Wand des Exospors bleibt jedoch durch zahlreiche Stäbchen verbunden (Fig. 25, 27, 29), welche häufig in Gruppen zusammenliegen. Hierauf beginnt sich an einigen Stellen in den Vakuolen eine dunkel färbare Substanz anzusammeln und eben an diesen Stellen wölbt sich die äußere Wand des Exospors höckerig hervor (Fig. 28), offenbar durch Anwachsen der Vakuolen. Bisher war die Substanz der Exosporanlage farblos, mit Heidenhains Haematoxylin färbte sich nur die eben erwähnte Substanz in den Höckerchen sowie die Stäbchen dunkler. Im weiteren Verlaufe der Entwicklung wird das ganze Exospor braungelb und sein innerer Bau läßt sich nicht mehr deutlich verfolgen.

Aber auch an ganz reifen Sporen ist das Exospor an einer Seite der Spore viel dicker, als an der anderen, wo es auch an einer beschränkten Fläche keine Höcker besitzt. Das Exospor verleiht also der Spore einen asymmetrischen Bau.

Im Protoplasten der Sporen lassen sich noch immer vier Kerne feststellen.

Besprechung der Resultate.

Die acht Sporen der *Hydnotria*-Schläuche bilden sich in derselben Weise wie bei den übrigen Ascomyceten dadurch, daß um jeden Kern herum durch eine zarte Plasmahaut das zugehörige Zytoplasma ausgeschnitten wird. Vorher erschienen im Zytoplasma des Ascus färbbare Körnchen, welche besonders um den Kern herum sich anhäuften (Fig. 1, 2). Sie wurden häufig bei den Ascomyceten gefunden und verschiedenartig gedeutet. Sie werden meist als metachromatische Körperchen bezeichnet (Guilliermond 1904). Daneben kann der Ascus noch Öltröpfchen, Glykogen sowie andere Gebilde, die ich nicht näher besprechen will, enthalten. Gleich nach der Abgrenzung der Sporen vom Epiplasma enthält dasselbe bei *Hydnotria* keine geformten Körperchen. Dann erscheint neben jeder Spore je ein kleines Kügelchen, über dessen Ursprung ich nichts zu sagen weiß. In einigen wenigen Fällen schien es mir, daß es zunächst aus einer Gruppe von Körnchen besteht, welche dann zusammenfließen. Jedenfalls sind dann die Körperchen, welche die Anlage des Exospors vorstellen, kugelig. Aus ihrer Gestalt kann gefolgert werden, daß sie flüssig sind. Sie können getrost als Produkt des Epiplasmas angesehen werden, denn aus den Sporen sind sie nicht herausgetreten. Sie vergrößern sich und kommen in Berührung mit der Spore, worauf sie sich an der Berührungsstelle abplatteln. Das kann leicht so erklärt werden, daß sich hier die Oberflächenspannung des flüssigen Gebildes vermindert hat. Vielleicht wirkt auf seine Substanz die Spore lösend oder entmischend ein. Dafür spricht die Tatsache, daß sich in der Substanz der Exosporanlage an der Berührungsfläche mit der Spore Vakuolen bilden.

Aber schon die Berührung der Exosporanlage mit der Spore kann eine Verminderung der Oberflächenspannung an dieser Stelle hervorrufen, in dem Falle nämlich, wenn sie zueinander eine größere Adhäsion besitzen als zu dem sie umgehenden Medium, d. h. zu dem Epiplasma. Dann muß die

Exosporanlage schließlich die ganze Spore umfließen, ähnlich wie eine Amöbe einen Fremdkörper. Es kann hier ohne Weiteres die Erklärung appliziert werden, welche R h u m b l e r (1898) für die Aufnahme fester Nahrungsstücke in eine Amöbe durch Umfließen angewendet hat. Ich werde hier den betreffenden Absatz aus der zitierten Abhandlung anführen, da er ganz gut auf unseren Fall paßt (l. c. p. 200): »Kommt mit dem zähflüssigen Leib einer Amöbe ein fester Körper in Berührung, der zu den Substanzen der Oberflächenschicht der Amöbe eine größere Adhäsion besitzt als das umgehende Medium, so muß an der Berührungsstelle die Oberflächenspannung der Amöbe herabgemindert werden, und ein Pseudopodium wird, sich dem Fremdkörper durch die Adhäsion dicht anschmiegend, nach dem Fremdkörper vorfließen. Da bei der Anschmiegung immer neue Teile der Amöbenoberfläche mit dem Fremdkörper in Berührung gebracht werden, so muß unter fortgesetzter Herabminderung der Oberflächenspannung an den Berührungsstellen die Anschmiegung eine vollständige, allseitige werden, d. h. der Fremdkörper muß von der Amöbe vollständig umflossen werden, und zwar nicht nur von rechts und links, sondern von allen Seiten, auch von oben und unten her.«

Wenn nun die flüssige Exosporanlage die Spore umflossen hat, so sollte man erwarten, daß sie dieselbe gleichmäßig umgeben wird, was jedoch nicht der Fall ist. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die Substanz der Exosporanlage sogleich nach dem Umfließen der Spore zähe geworden ist, so daß die exzentrische Lage der Spore erhalten bleibt. Wäre dieselbe gelatineartig, so ist immer noch das Auftreten von Vakuolen im Exospor begreiflich. Wir haben gesehen, daß ziemlich früh in der Substanz der Exosporanlage Vakuolen erscheinen, ihre Vakuolisierung erreicht den höchsten Grad, nachdem die ganze Spore umflossen worden ist.

Bis hierher läßt sich der Vorgang der Exosporenbildung ziemlich einfach mechanistisch erklären. Die weitere Differenzierung des Exospors ist schon viel komplizierter. Zunächst die Bildung der Stäbchen, dann die Ablagerung der dunkelfärbaren Substanz in den Höckerchen. Die Höckerbildung läßt sich durch das Anwachsen einzelner Vakuolen erklären.

Zusammenfassung.

Die Sporen werden bei *Hydnotria Tulasnei* in den Asci in der für die Ascomyceten charakteristischen Weise angelegt. Sie werden früh vierkernig und besitzen eine feine Membran, das Endospor. In der unmittelbaren Nähe einer jeden Spore erscheint ein kugeliges, homogenes Körperchen, welches offenbar flüssig ist. Es wächst, legt sich an die Spore an und umfließt dieselbe schließlich ganz, was sich auf Grund der Oberflächenkräfte mechanistisch erklären läßt. Jedoch wird gleich darauf seine Substanz zähe. Sie umgibt die Spore nicht gleichmäßig. Das Exospor bleibt daher an einer Seite der Spore bedeutend dünner als an der anderen. Hierauf wird seine Substanz vakuolisiert, einzelne Vakuolen wachsen stark heran und verursachen die Höckerbildung des Exospors. Es treten dann im Exospor Stäbchen auf, welche die äußere mit der inneren Wand verbinden. In den Vakuolen wird unter den Höckern eine spezifische Substanz abgelagert. Die Entwicklung des Exospors bei *Hydnotria* bietet das Beispiel einer unstreitbaren Apposition einer neuen Membran, d. h. des Exospors an das primäre Endospor. Die Substanz des Exospors wird außerhalb der Spore im Epiplasma gebildet und umfließt erst nachträglich die schon mit einem Endospor versehene Spore.

Summary

The development of spores in Hydnotria Tulasnei.

Asci of *Hydnotria Tulasnei* contain eight spores. They are at first surrounded only by a thin endospore. On one side of every young spore appears a round body in close contact with the endospore. The round body enlarges, surrounds finally completely the spore and becomes the exospore of the spore. So the exospore develops by a pronounced apposition.

LITERATUR:

- Dittrich G. 1898, Zur Entwicklungsgeschichte der Helvellineen. Cohns. Beitr. z. Biol. d. Pfl. Bd. 8.
- Eftimiu P. 1929, Remarques sur la Karyokinèse de quelques Ascomycetes. Le Botaniste. S. XX.
- Fischer Ed. 1897, Tuberineae. Die nat. Pflanzenfam. I., 1.
- Gäumann E. 1926, Vergleichende Morphologie der Pilze. Jena.
- Guilliermond A. 1904, Contribution a l'étude de la formation des asques et de l'épiplasma des Ascomycetes. Rev. gén. de Bot. XVI.
- Lagarde J. 1906, Contribution a la connaissance des Discomycetes charnus. Thèse Burg.
- Rhumbler L. 1898, Physikalische Analyse der Lebenserscheinungen der Zelle. I. Arch. f. Entw. Mech. Bd. VII.
- Schussnig B. 1921, Ein Beitrag zur Cytologie von *Tuber aestivum* Vitt. Sitzb. d. Kais. Ak. Wien, mat. nat. Kl. Bd. 130.
- Velenovský K. 1920, České houby, Praha.

Tafelerklärung.

Alle Figuren beziehen sich auf die Sporenbildung bei *Hydntria Tulasnei*. Fixierung in Chromsäure-Formalin, Färbung mit Heidenhains Haematoxylin. Zeiss Apochr. 2 mm, K. OK. 6.

Fig. 1. Kern eines eukernigen Ascus.

Fig. 2. Kern eines zweikernigen Ascus mit einem Zentrosom.

Fig. 3. Kerne eines vierkernigen Ascus.

Fig. 4. 5. Sporenabgrenzung.

Fig. 6. Zwei vierkernige junge Sporen.

Fig. 7. Kugelige Gebilde neben den jungen Sporen.

Fig. 8. Die kugelige Exosporanlage legt sich der Spore an.

Fig. 9. 10. Die Exosporanlage wird abgeplattet.

Fig. 11. Spore mit einer Exosporanlage von der Fläche gesehen.

Fig. 12.—19. Die Exosporanlage vergrößert sich und bildet eine Kappe an der Spore. 14, Exosporanlage von der Fläche gesehen, 16, 19, an der Sporenmembran (Endospor) erscheinen Körnchen.

Fig. 20.—23. Die Exosporanlage umfließt die Spore.

Fig. 24., 25. Im Exospor erscheinen Vakuolen.

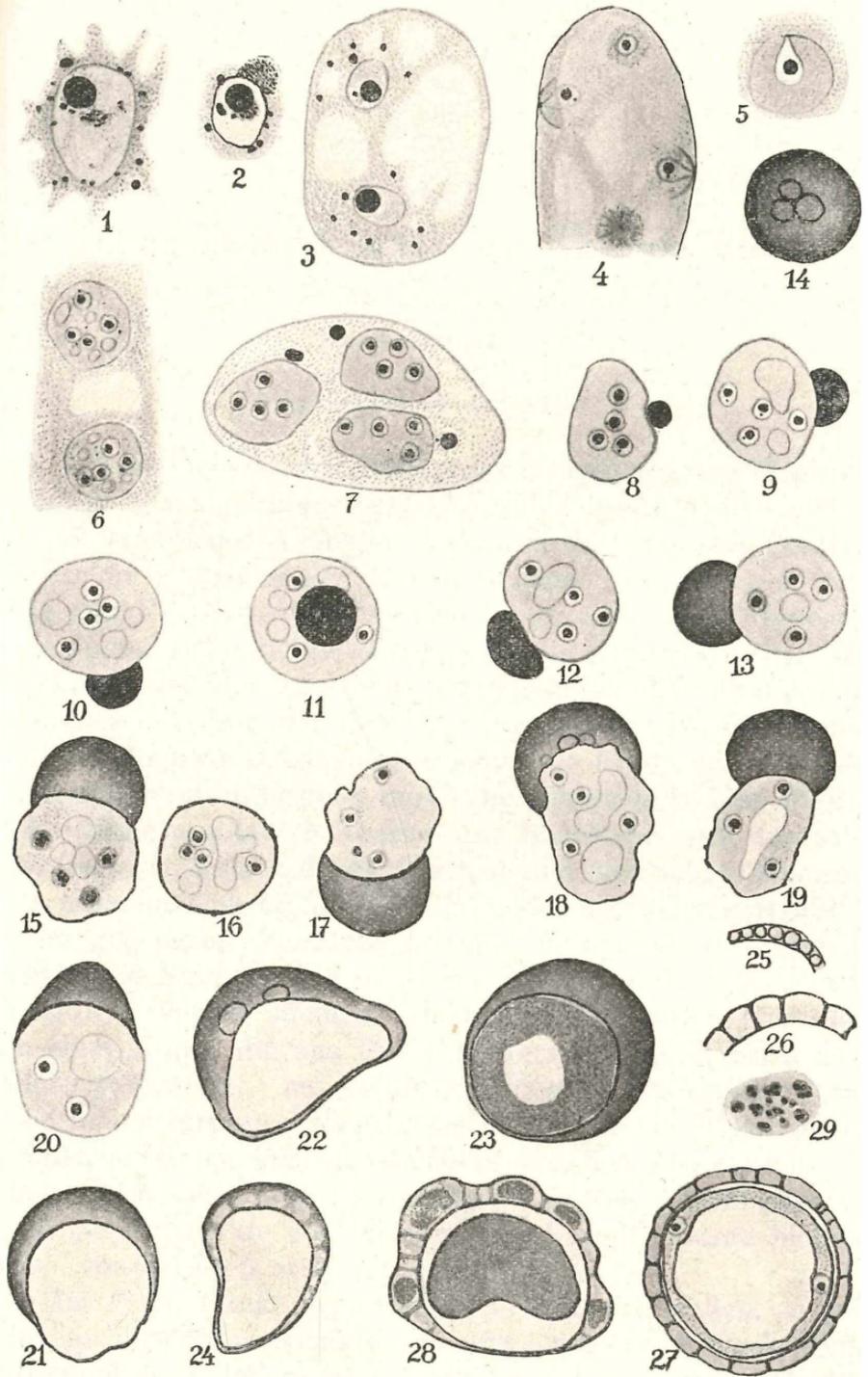
Fig. 26. Stäbchen im Exospor.

Fig. 27. Spore mit noch nicht höckerigen Exospor.

Fig. 28. Spore mit höckerigem Exospor.

Fig. 29. Stäbchengruppen im Exospor von der Fläche gesehen.

B. Němec: *Sporenbildung bei Hydnotria.*





IX.

Einige Bemerkungen zur Theorie der elementaren Konstruktionen.

Von J. SOBOTKA.

Vorgelegt den 20. Juni 1929.

1. Eine theoretische Erledigung der sogenannten Mascheronischen Konstruktionen gab A. Adler in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 1890 und dann in dem Buche: Theorie der geometrischen Konstruktionen 1906, worin er mit Hilfe des Prinzips der Inversion zeigt, daß alle Aufgaben, welche unter Benützung von Geraden und Kreisen lösbar sind, sich auch unter ausschließlicher Benützung von Kreisen allein lösen lassen. Wählt man den Grundkreis k der Inversion mit dem Mittelpunkte O beliebig, so geht jede Figur, die aus Geraden und Kreisen besteht, durch die Inversion in eine Figur über, welche aus lauter Kreisen und höchstens noch aus solchen Geraden, welche durch O gehen und sich selbst entsprechen, zusammengesetzt ist. Da nun, wie Adler näher ausführt, die zu gegebenen Punkten, Geraden und Kreisen inversen Punkte und Kreise durch bloße Benützung von Kreisen allein konstruiert werden können, so ist hiedurch jede Konstruktion einer Figur, die aus Punkten, Geraden und Kreisen zusammengesetzt ist, auf Konstruktionen zurückgeführt, in welchen nur Kreise auftreten. Da jedoch in der Figur auch Geraden auftreten können, welche durch den Mittelpunkt O gehen, so hat man noch zu zeigen, wie in der ursprünglichen Figur Schnittpunkte von Kreisen und Geraden durch bloßes Legen von Kreisen ermittelt werden.

Ist P ein Punkt der durch O gehenden Geraden, so erhält man ihre Schnittpunkte mit einem gegebenen Kreis vom Mittelpunkte M , indem man zu M den symmetrischen Punkt M' in bezug auf (OP) konstruiert, wodurch auch der zu dem

gegebenen Kreise in bezug auf (OP) symmetrisch liegende Kreis, also auch die Schnittpunkte beider gegeben sind.

Den Schnittpunkt von (OP) mit irgend einer Geraden p erhält man dadurch, daß man zu p den inversen Kreis p' und zu diesem den in bezug auf (OP) symmetrisch liegenden Kreis p'' ermittelt. Die Kreise p' , p'' schneiden sich außer in O noch in einem Punkte, dessen inverser Punkt der Schnittpunkt von p mit (OP) ist. Der praktische Wert solcher Konstruktionen leidet aber daran, daß die auftretenden Kreise, welche die verlangten Schnittpunkte liefern, sich oft unter sehr kleinen Winkeln schneiden, außerdem die Konstruktionen oft kompliziert sind, weshalb man trachten muß sie durch einfachere zu ersetzen.

Dadurch werden verschiedene Konstruktionen veranlaßt.

2. Ist ein Kreis s mit dem Mittelpunkte S gegeben und will man mit dessen Benützung den Schnittpunkt einer beliebigen Geraden q mit einer Geraden, welche einen gegebenen Punkt Q mit S verbindet, konstruieren, so ermittelt man nach Adler den Mittelpunkt G des zu q inversen Kreises q' . Bezeichnen wir mit L den von S verschiedenen Schnittpunkt der Geraden (SQ) mit diesem Kreise und schneidet dieser die Gerade (SQ) unter kleinem Winkel, so konstruiere man in bekannter einfacher Weise auf SG einen Punkt G' derart, daß $\overline{SG'} = n \cdot SG$, worin n eine geeignet gewählte ganze Zahl ist, beschreibe um G' als Mittelpunkt den Kreis, welcher durch S geht und konstruiere auf (SG) den Punkt G_0 , für welchen $\overline{SG_0} = 2 SG'$, ferner den zu G_0 symmetrisch liegenden Punkt G_0' in bezug auf (SQ) und den zu S symmetrisch liegenden Punkt S' in bezug auf (G_0G_0') , sowie den zu S' inversen Punkt S'' . Der um S'' als Mittelpunkt beschriebene durch S gehende Kreis schneidet (SQ) noch in dem leicht zu ermittelnden Punkte U' ; alsdann ist der Punkt U auf (SQ) für den $SU = n \cdot SU'$ der verlangte Schnittpunkt von (SQ) mit der Geraden q .

Denn, wenn man mit l den Schnittpunkt von (G_0G_0') mit (SQ) bezeichnet, so ist $Sl = n \cdot SL$; ferner ist U' der zum

Punkte 1 inverse Punkt, und folglich ist $SU' = \frac{1}{n} \cdot SU$.

Was die Konstruktion eines inversen Punktes E' zu einem gegebenen E in bezug auf den gegebenen Kreis s anbelangt, so kann man im Falle, daß E innerhalb von s liegt, die Zahl n so bestimmen, daß der Punkt E_0 , für den auf der Geraden (SE) die Strecke $SE_0 = n \cdot SE$ ist, außerhalb S und nahe an s liegt, dann läßt sich die Konstruktion des zu E_0 inversen Punktes E_0' mit Sicherheit durchführen und $\overline{SE'} = n \cdot \overline{SE_0'}$.

Liegt aber E außerhalb s in einer Entfernung von S , für welche die den Punkt E' liefernde Konstruktion von Adler Kreise ergibt, die sich unter zu kleinem Winkel schneiden, so beschreibe man um E als Mittelpunkt den durch S gehenden Kreis, welcher s in P_1, P_2 schneiden möge und konstruiere in bekannter Weise den Mittelpunkt P_0 der Strecke P_1P_2 und alsdann übertrage man auf SE die Strecke $\overline{SP_0}$ nach P_0E' um so den Punkt E' zu erhalten. Dieses Übertragen läßt sich jedoch bei zu kleinem SP_0 nicht mit Sicherheit durchführen. In diesem Fall kann man auf s geeignet einen Punkt H annehmen und zur Geraden (EH) den inversen Kreis h konstruieren. Ist H_0 dessen Mittelpunkt, so konstruiere man auf (SH_0) die Strecke $H_0H' = SH_0$ und dann den zu H' symmetrisch liegenden Punkt H'' in bezug auf (SE), sowie endlich den Mittelpunkt der Strecke $H'H''$, welcher der gesuchte Punkt E' ist.

3. Bei der Konstruktion des in bezug auf s inversen Kreises a' zu einem gegebenen Kreise a vom Mittelpunkte A handelt es sich darum den Mittelpunkt B' von a' zunächst zu ermitteln. Da gilt der Satz:

»Konstruiert man zum Mittelpunkt S von s den inversen Punkt B in bezug auf a , so ist B' der inverse Punkt von B in bezug auf s .«

Adler hat diesen Satz unter der Voraussetzung bewiesen, daß S außerhalb des Kreises a liegt, welcher Beweis außerordentlich einfach ist. Ohne diese Einschränkung würde

der Satz von E. Daniele bewiesen.¹⁾ Dieser Beweis läßt sich bemerkenswert vereinfachen und ist im engen Zusammenhang mit unseren Konstruktionen. Es seien also a , a' zwei in bezug auf s inverse Kreise A , B' ihre Mittelpunkte. Zu irgend einem Punkte C auf a ist invers ein Punkt C' auf a' ; es liegen also C , C' auf einer Geraden, welche durch S geht. Diese Gerade trifft a noch in einem Punkte C_1 und a' noch in einem Punkte C'_1 , welche gleichfalls zu einander invers sind in bezug auf s . Zwei inverse Kreise sind in ähnlicher Lage, für den Mittelpunkt der Inversion als Ähnlichkeitspunkt. In der sich ergebenden Ähnlichkeit zwischen a und a' entspricht dem Punkte C_1 auf a der Punkt C' auf a' ; es ist also $C'B' \parallel C_1A$. Dem Kreise b , welcher durch die Punkte A , C , C_1 geht, entspricht invers ein Kreis b' durch C' , C'_1 , der dem Kreise b auch in der soeben erwähnten ähnlichen Lage entspricht. Folglich entspricht in dieser Lage dem Punkte A von b ein Punkt auf der durch C' zu (C_1A) gezogenen Parallelen, der auf dem Ähnlichkeitsstrahl (SA) liegt, somit der Punkt B' . Es geht also der Kreis b' durch den Mittelpunkt B' von a' . Der Kreis b treffe die Gerade (SA) noch in Punkte B und der Kreis b' treffe dieselbe Gerade noch in A' . Da in unserer Ähnlichkeit dem Punkte A der Punkt B' entspricht, so entspricht dem Punkte B der Punkt A' ; infolgedessen sind die Punktepaare A, A' ; B, B' invers in bezug auf s . Nun ist der Kreis b invers zu der Geraden (SC) in bezug auf den Kreis a , da er durch ihre Schnittpunkte mit a und durch den Mittelpunkt von a geht; also entspricht dem Punkte S von (SC) invers der Schnittpunkt B von SA mit b . Es ist also tatsächlich B der inverse Punkt von S in bezug auf a und der Mittelpunkt B' von a' der inverse Punkt von B in bezug auf s , wodurch die Richtigkeit unseres Satzes dargetan ist. Umgekehrt ist A' der inverse Punkt von S in bezug auf b' und A der inverse Punkt von A' in bezug auf s . Dies liefert die bekannte Konstruktion des Mittelpunktes B' und des Kreises a' .

¹⁾ In »Fragen der Elementargeometrie« von F. Enriques II. Teil 1907. 549—50. Es möge bemerkt werden, daß diejenigen Konstruktionen, die hier zu Rate gezogen, aber nicht erläutert werden, sich in den beiden hier angeführten Werken vorfinden.

Den Punkt B kann man auch folgendermaßen erhalten:

Wir konstruieren die vierte Ecke J des Parallelogramms $C'C_1AJ$, dessen Seite $C'J$ die Gerade (SA) im Punkte B' schneidet. Konstruieren wir also den zu S in bezug auf $(C'J)$ symmetrisch gelegenen Punkt I und zu I den inversen Punkt I' in bezug auf s , so ist der Kreis, welcher I' zum Mittelpunkte hat und durch S geht, invers zu Geraden $(C'B')$; er geht durch C und trifft b noch im Punkte B . Diese Konstruktion ist vorteilhaft, wenn b die Gerade (SA) unter kleinen Winkeln schneidet.

4. Wenn die Schnittpunkte eines Kreises d mit einer Geraden $e = (E_1E_2)$ nicht reell sind, so werden sie als die Doppelpunkte einer elliptischen Involution Σ auf e ermittelt. Die Konstruktion der Paare dieser Involution läßt sich leicht auf die vorangehenden Konstruktionen zurückführen. Mit Hilfe der gegebenen Punkte E_1, E_2 konstruieren wir den zum Mittelpunkt D von d in bezug auf e symmetrisch liegenden Punkt D_1 und legen um D_1 als Mittelpunkt den mit d gleichen Kreis d_1 . Zu D_1 konstruieren wir den inversen Punkt D_1' in bezug auf d und legen den durch D gehenden Kreis mit D_1' als Mittelpunkt; auf diesem Kreise ermitteln wir den zu D diametral gegenüberliegenden Punkt P' . Dieser ist also der inverse Punkt desjenigen Punktes P , in welchem sich die Geraden $(DD_1), (E_1E_2)$ schneiden. Ferner konstruieren wir auf (DD_1) den Punkt Q so, daß $P'Q = DP'$ wird und zu Q den inversen Punkt Q' in bezug auf d . Dieser Punkt ist Mittelpunkt der Strecke DP ; man bekommt also den Punkt P , indem man $Q'P = DQ'$ macht, was mit Hilfe des Kreises g , welcher Q' zum Mittelpunkt hat und durch S geht, geschieht. Dieser Kreis schneidet d in zwei Punkten H, K , welche auf der durch P' gehenden Polare von P in bezug auf d liegen. Es ist nun P der Mittelpunkt der Involution Σ und die Schnittpunkte F_1, F_2 von e mit dem Kreise h , welcher P zum Mittelpunkt hat und die Punkte H, K enthält, bilden das symmetrische Paar derselben, weil PH, PK die durch P gehenden Tangenten an d sind. Dieser Kreis schneidet d_1 in den zu H und K symmetrisch liegenden Punkten H_1, K_1 in bezug auf e . Die Punkte F_1, F_2 werden dann als Mittelpunkte der

auf h liegenden Bogen HH_1 , KK_1 ermittelt. Um zu irgend einem Punkte M_1 auf e den in Σ zugehörigen Punkt M_2 zu erhalten, konstruieren wir zu M_1 den inversen Punkt M_1'' in bezug auf h und dann den zu M_1'' symmetrisch liegenden Punkt in bezug auf P , welcher mit M_2 zusammenfällt, weil ja Σ aus den Schnittpunkten von h mit (D_1D_2) durch Rechtwinkelinvolutionen projiziert werden.

Sind zwei Kreise d , f mit ihren Mittelpunkten gegeben, die sich nicht reell schneiden, und will man die Involution, welche ihre imaginären Schnittpunkte darstellt, erhalten, so wird man zunächst die Potenzgrade dieser Kreise suchen. Zu dem Ende legen wir geeignet einen Kreis, welcher d in den reellen Punkten A_1, A_2 und f in den reellen Punkten B_1, B_2 trifft. Zu den Geraden (A_1A_2) , (B_1B_2) konstruieren wir alsdann die inversen Kreise in bezug auf den gewählten Hilfskreis, welche sich außer im Mittelpunkte des Kreises noch in einem Punkte schneiden, zu dem wir den in dieser Inversion entsprechenden Punkt N konstruieren. Dieser gehört bereits der Potenzlinie e an, und wir können den zu N symmetrisch liegenden Punkt N_1 in bezug auf die Zentrale der Kreise d, f ermitteln, wodurch $e = (NN_1)$ bestimmt ist. Dadurch ist die Konstruktion auf die Lösung der vorher durchgeführten Aufgabe zurückgeführt.

5. Hat man in den Steiner'schen Konstruktionen, wo ein fester Kreis und sein Mittelpunkt vollständig gegeben sind, die Schnittpunkte zweier Kreise a, b , von denen die Mittelpunkte A, B und von jedem noch je ein Punkt M auf a , N auf b beliebig gegeben sind, so ist es vorteilhafter, als in der üblichen Weise, die Potenzgerade von a und b wie folgt zu ermitteln. Man sucht den Mittelpunkt L der Strecke MN , fällt dann von M die Senkrechte auf (AL) und von N die Senkrechte auf (BL) ; beide schneiden sich in einem Punkt der Potenzgeraden, welche senkrecht zu (AB) ist. Bringt man a mit dem festen Kreis in ähnliche Lage, so entspricht dieser Potenzgeraden eine Gerade l , deren Schnittpunkte mit dem festen Kreis umgekehrt die Schnittpunkte der Kreise a, b liefern. Schneidet l den festen Kreis nicht reell, so kann man linear die Involution der auf l liegenden in bezug auf ihn konjugierten Punkte ermitteln, welcher Involution durch die ähn-

liche Lage auf der Potenzlinie eine Involution entspricht, welche die imaginären Schnittpunkte von a und b zum Ausdrucke bringt.

Bei der Konstruktionsmethode, die sich eines Lineals mit Parallelkanten bedient, wird man die Konstruktion der Schnittpunkte der Kreise a, b gleichfalls darauf zurückführen, daß man zuerst ihre Potenzgerade ermittelt und die fraglichen Punkte als Schnitte dieser Geraden mit einem der beiden Kreise sucht. Diese Potenzgerade erhält man nach demselben Vorgang wie zuvor. Man konstruiert L in bekannter Weise, fällt dann die Senkrechte von M auf (AL) etwa in der Weise, daß man das Lineal so legt, daß eine Kante desselben die Punkte M, A verbindet; es schneide dann die zweite Kante die Gerade (AL) im Punkte 1 . Man kann dann das Lineal in eine zweite Lage bringen so, daß eine Kante desselben durch A , die zweite durch 1 geht. Dadurch bekommt man die zu (AM) in bezug auf (AL) symmetrisch liegende Gerade. Konstruiert man in gleicher Weise die zu (MN) in bezug auf (AL) symmetrisch liegende Gerade, so schneiden sich beide so erhaltene Geraden in einem Punkte, dessen Verbindungsgerade mit M normal zu (AL) ist. Selbstverständlich könnte man statt A und L beliebige zwei Punkte auf (AL) wählen. In gleicher Weise konstruiert man die Senkrechte von N auf (BL) . So bekommt man einen Punkt der Potenzlinie, welche als die durch ihn gehenden Senkrechte auf (AB) gleichfalls in der soeben beschriebenen Weise erhalten wird.

Die Konstruktion versagt für den Fall, wenn die Entfernung zweier Punkte H_1, H_2 , welche zu verbinden sind, größer ist als die Kantenlängen des Lineals. In einem solchen Falle muß man auf solchen Strecken zwei Punkte ermitteln, deren Entfernung diesen Nachteil nicht besitzt. Da kann man in bekannter Weise ein Parallelogramm konstruieren, welches die Strecke H_1H_2 als Diagonale hat so, daß die Endpunkte K_1, K_2 der zweiten Diagonale so nahe einander liegen, daß sie mit Hilfe des Lineals verbunden werden können.

Wir können deshalb die Strecke K_1K_2 halbieren. Der

Mittelpunkt R dieser Strecke ist zugleich Mittelpunkt der Strecke H_1H_2 . Dann ist die Gerade (H_1H_2) durch R und einen der Punkte H_1, H_2 festgelegt. Wenn jedoch die Strecke H_1R größer ist als die Kantenlängen des Lineals, so legt man dieses mit einer Kante an die Gerade (K_1K_2) an und bekommt die Schnittpunkte K_1', K_2' der zweiten Kante mit den Geraden $(H_2K_1), (H_2K_2)$ oder $(H_1K_1), (H_1K_2)$. Die Gerade, welche den Schnittpunkt von (K_1K_2') und (K_2K_1') mit R verbindet schneidet $(K_1'K_2')$ in einem Punkte S der Geraden (H_1H_2) , welche durch R und S hinreichend konstruktiv bestimmt ist.

Um nun die Schnittpunkte eines durch einen Punkt M und den Mittelpunkt A gegebenen Kreises a mit einer Geraden p zu ermitteln, können wir auch den folgenden Weg einschlagen: Wir errichten in A die Senkrechte (1) zu (AM) , legen dann das Lineal mit einer Kante an (1) und ziehen längs seiner zweiten Kante die Gerade (2) , welche (AM) im Punkte M' schneiden möge, worauf wir zu (1) und (2) die durch M gehende Parallele ziehen, welche die Gerade p im Punkte P_1 schneiden möge. Hierauf bringen wir (AP_1) mit (2) in P_1' zum Schnitt und ziehen durch P_1' die Parallele p' zu p , wozu wir die zu (2) in bezug auf (1) symmetrisch liegende Gerade $(2')$ benützen, indem wir den Punkt $(2'.p)$ mit P_1' durch eine Gerade verbinden, deren Schnittpunkt mit (1) wir weiter mit dem Punkte $(2.p)$ verbinden, wodurch wir eine Gerade erhalten, welche $(2')$ in einem Punkte trifft, welcher der Geraden p' angehört. Wir bezeichnen mit d die Entfernung der Kanten unseres Lineals. Der Kreis a ist mit dem konzentrischen Kreis a' , dessen Halbmesser gleich d ist in ähnlicher Lage, in welcher dem Punkte M der Punkt M' und der Geraden p die Gerade p' entspricht. Die Senkrechte vom Punkte M' auf die Gerade (AP_1') trifft die Senkrechte von A auf p' im Pole A' der Geraden p' in bezug auf a' und man kann das Lineal auf zweifache Art so anlegen, daß eine Kante durch A , die zweite durch A' geht; diese zweite trifft p' im Schnittpunkt V' resp. V_1' von a' mit p' . Es treffen somit die Geraden (AV') , (AV_1') die Gerade p in ihren Schnittpunkten V_1, V_1' mit a .

Diese Konstruktion versagt jedoch, wenn AA' größer ist als die Kantenlänge des Lineals. In diesem Falle führt die von Adler l. c. angegebene zum Ziele; sie ist auch einfacher. Dieselbe ist jedoch nicht anwendbar, wenn die Schnittpunkte von a mit p nicht reell sind. Die hier ermittelte ist aber auch in diesem Falle brauchbar. Führt man nämlich durch A' irgend eine Gerade und durch A die zu ihr senkrechte Gerade, so treffen beide p' in einem Paar in bezug auf a' konjugierter Punkte. Dadurch entsteht auf p' eine elliptische Involution, welche den Schnitt von (AA') mit p' zum Mittelpunkt hat. Projiziert man diese Involution von A auf p , erhält man eine Involution, deren Doppelpunkte auf a liegen.

Will man diese Aufgaben mit Benützung eines beweglichen rechten Winkels lösen, so kann man die Potenzgerade der Kreise a, b , welche durch ihre Mittelpunkte und je einen Punkt M , resp. N gegeben sind nach gleichem Vorgang ermitteln wie im Vorangehenden; die Durchführung der Konstruktion ist hier einfacher.

Um nun die Schnittpunkte des Kreises a mit einer gegebenen Geraden p zu ermitteln, kann man von A die Senkrechte auf p fällen und ihre Schnittpunkte G, H mit dem Kreise a in bekannter Weise ermitteln. Liegt der Schnittpunkt K von p mit (GH) innerhalb der Strecke GH , so legt man den rechten Winkel in die Ebene der Konstruktion so, daß seine Schenkel durch G und H gehen und daß sein Scheitel auf p zu liegen kommt. Liegt aber der Punkt K außerhalb der Strecke \overline{GH} , so ermittelt man den zu ihm in bezug auf G und H harmonischen Punkt K' , in welchem man die Senkrechte g zu (GH) errichtet. Die Schnittpunkte der Geraden p mit a sind dann die Doppelpunkte der auf ihr liegenden Involution konjugierter Punkte in bezug auf a . Die Paare dieser Involution werden durch Paare von zueinander normalen Geraden ausgeschnitten, von denen eine durch A , die zweite durch K' geht; das symmetrische Paar erhält man mit Hilfe von g .

R é s u m é.

Quelques remarques concernant la théorie des constructions élémentaires.

Le mémoire des considérations sur les constructions élémentaires de Mascheroni, de Steiner, sur les constructions à l'aide d'une règle aux côtés parallèles et sur les constructions à l'aide d'un angle droit mobile.

Bakterien in den Fruchtkörpern einiger Ascomyzyten.

Von Dr. B. NĚMEC

Mit 11 Figuren im Text.

Vorgelegt am 28. VI. 1929

Bei der allgemeinen Verbreitung der Bakterien auf der Erdoberfläche, in der Luft, im Boden und Wasser, ist es natürlich, daß sie auch auf der Oberfläche der Pflanzen zu erwarten sind. Tatsächlich hat Düggeli in sehr eingehenden Untersuchungen gezeigt, daß die Gefäßpflanzen an ihrer Oberfläche Bakterien tragen, insbesondere tritt neben *Bacterium herbicola* häufig das ubiquistische *Bacterium fluorescens* auf. Bei zytologischen Untersuchungen über einige Discomyceten wurden mir Stäbchen auffallend, welche ich in der Ascus-Schicht zwischen den Schläuchen und Paraphysen traf und welche die Form und Größe der Bakterien hatten. Ich verfolgte daher eingehender ihr Vorkommen und diese Mitteilung ist das Resultat meiner Untersuchungen.

Ich wollte mich zunächst auf eine einfache Weise überzeugen, wie weit Bakterien bei den verschiedenen Arten der Discomyzyten verbreitet sind. Es wurden Fruchtkörper verschiedener Ascomyzyten durchschnitten, die frische Schnittfläche wurde an ein reines Deckfläschen angedrückt, oder das Deckfläschen wurde mit der Schnittfläche mehrmals gerieben. Das Deckgläschen wurde staubfrei trocken gelassen, dann mehrmals durch die Gasflamme gezogen und der Ausstrich wurde dann mit Karbolfuchsin oder mit Gentionviolett gefärbt. In den meisten Fällen zeigten sich am Deckgläschen zahlreiche Bakterien. Sie waren stäbchenförmig, von einheitlichem Aussehen, so daß sie den Eindruck einer Reinkultur

hervorriefen. In den letzten vier Jahren konnte ich so das Vorkommen von Bakterien in, oder an nachfolgenden Arten feststellen: *Sclerotinia tuberosa*, *Humaria sublimbata*, *Discina venosa*, *pallida*, *Acetabula sulcata*, *Pustularia vesiculosa*,

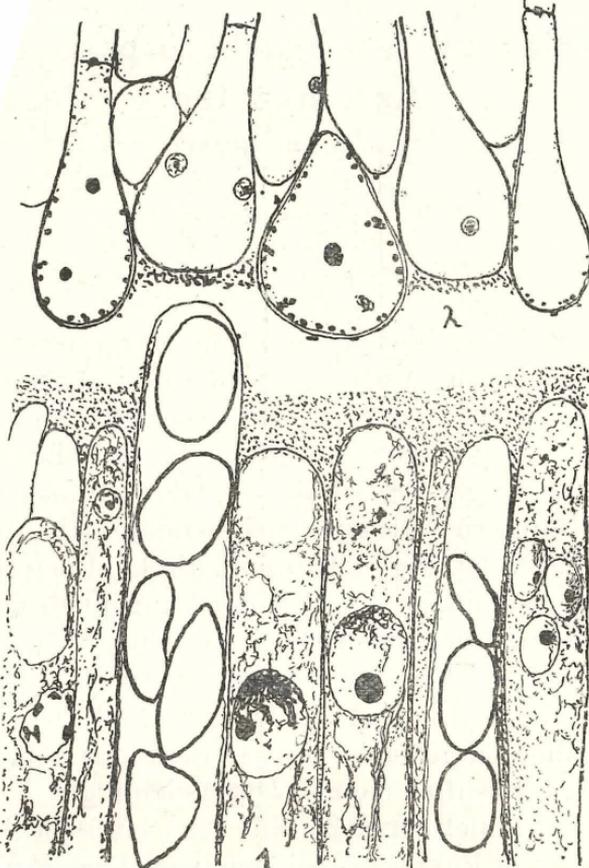


Fig. 1. Hymenium von *Helvella pallescens* mit einer Bakterienschicht. Fig. 2. Äussere Zellenschicht des Fruchtkörpers mit Bakterien.

Lachnea scutellata, *Helvella pallescens*, *Gyromitra esculenta*, *gigas*; *Verpa bohémica*, *Morchella esculenta*, *conica*, *rimosipes*.

An einigen Beispielen werde ich zeigen, wie die Bakterien an und in den Fruchtkörpern lokalisiert sind. Erstens findet man sie fast allgemein in großer Menge an der Oberfläche des Hymeniums. Dieselbe ist ja häufig mehr oder weniger schleimig und der Schleim enthält zahlreiche Bakterien. Dittrich (1908) macht auf die leichte Verschleimung der

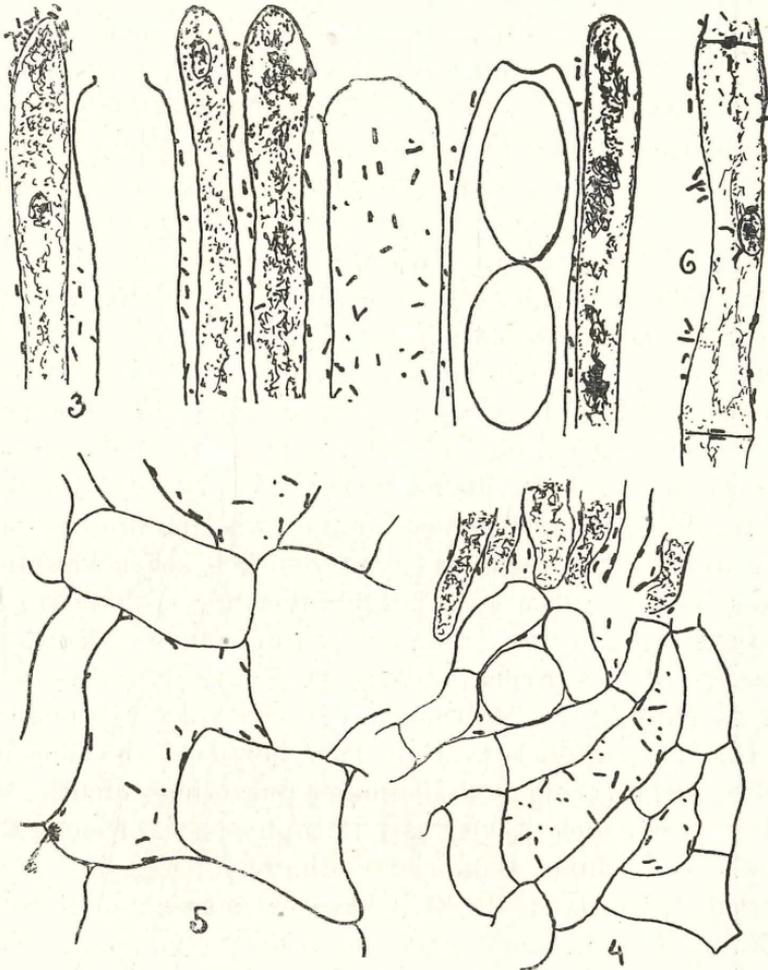
Zellen bei den Helvellineen aufmerksam, aber auch sonst ist das Epithecium sehr häufig von schleimiger Beschaffenheit. »In dieser schleimigen Masse leben meist eine Unmasse Bakterien, die einen raschen Zerfall des Fruchtkörpers herbeiführen« (G ä u m a n n 1926, p. 306). Sie bildet an Querschnitten durch das Thecium an seiner Oberfläche eine deutliche Schicht, welche vollständig mit Bakterien erfüllt ist (Fig. 1).

Man könnte meinen, daß diese Verhältnisse nur für Fruchtkörper gelten, welche erst eine längere Zeit nach dem Sammeln im Laboratorium untersucht wurden. Das ist jedoch nicht der Fall. Im Jahre 1924 erschienen in meinem Garten in Vyžlovka bei Prag im Juli zahlreiche Fruchtkörper von *Helvella pallescens* und *Discina pallida*. Ich konnte sie daher in ganz frischem Zustande untersuchen oder fixieren. Sie enthielten an der Oberfläche ihres Theciums zahlreiche Bakterien, ebenso wie auch anderwärts an und in ihren Fruchtkörpern.

Bei *Helvella pallescens* war das Thecium mit einer deutlichen Bakterien-schicht bedeckt (Fig. 1), aber die Bakterien drangen auch in beträchtlicher Menge zwischen die Schläuche und Paraphysen, wo man sie ganz deutlich sehen konnte. In geringer Menge waren sie im Hypothecium vorhanden, hingegen bedeckten sie fast in einer kontinuierlichen Schicht die äußere Fläche des Fruchtkörpers (Fig. 2). Bei dieser Art waren es ganz kurze Stäbchen oder fast kokkenförmige Gebilde. *Discina pallida* besitzt an der Oberfläche des Theciums keine so ausgesprochene schleimige Bakterien-schicht. Dafür waren zwischen den Asken und Paraphysen zahlreiche deutlich stäbchenförmige Bakterien vorhanden (Fig. 3), welche meist den Membranen dieser Elemente angeschmiegt waren. Die Bakterien drangen auch in die Subhymenialschicht (Fig. 4), waren im Plektenchym besonders reichlich in den Interzellularräumen vorhanden (Fig. 5, 6) und man traf sie dann auch an der äußeren Fläche des Fruchtkörpers (Fig. 7, 8).

In unserem Gewächshause erschien vor Jahren in großer Menge eine *Humaria*, welche wir damals als *H. sublimbata* bestimmt haben. Die Fruchtkörper waren in schwacher Flemmingscher Lösung fixiert. An Schnitten, welche mit Heidenhains Haematoxylin gefärbt waren, wurden auch hier zwi-

schen den Sporenschläuchen (Fig. 9) und Paraphysen, an der unteren Oberfläche (Fig. 10) sowie im Plektenchym in den Interzellulärräumen zahlreiche stäbchenförmige Bakterien festgestellt (Fig. 11).



Discina pallida. Fig. 3 Ascusschicht, Fig. 4 Subhymenial-
schicht, Fig. 5, 6 inneres Gewebe mit stäbchenförmigen
Bakterien.

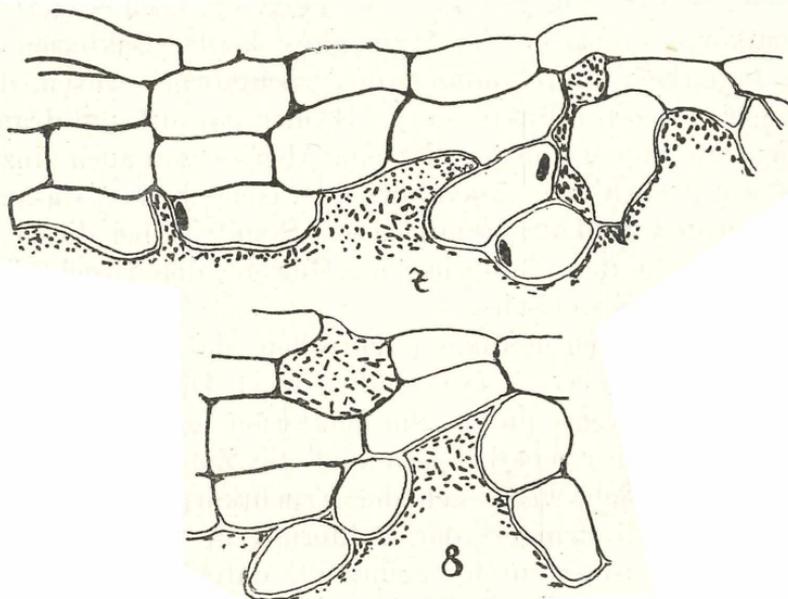
Es entsteht da sogleich die Frage, was für eine Bedeutung diesen Bakterien zukommt. Sind es nur zufällige Eindringlinge, Epiphyten, oder handelt es sich um irgend eine Symbiose? Zunächst mußte die Frage beantwortet werden, ob dieses Zusammenleben von Bakterien und Pilzen bei den

untersuchten Arten ein ständiges ist, oder ob es nur zuweilen vorkommt. Zu diesem Zwecke eignete sich sehr gut ein in unserem Glashause jedes Frühjahr regelmäßig an Sägesphähen auftretender Ascomyzet, nämlich *Discina venosa*. Nach V e l e n o v s k ý (1920, p.861) tritt diese Art sehr selten im Frühling in Kiefernwäldern auf. Ich habe alle Entwicklungsstadien zur Verfügung gehabt. Die jüngsten, noch eingerollten Fruchtkörper besaßen im Hymenium keine Bakterien. Je älter und flach ausgebreiteter die Fruchtkörper waren, desto häufiger traten die Bakterien im Hymenium auf und drangen in das Gewebe verschieden tief ein. Aber es gab auch einzelne ganz ausgewachsene Fruchtkörper, welche keine Bakterien zwischen den Schläuchen aufwiesen. Somit ist bei dieser Art das Auftreten der Bakterien im Gewebe der Fruchtkörper nicht ganz obligatorisch.

Manche Beobachtungen sprechen dafür, daß es sich auch bei anderen Arten so verhalten wird. Die eigentliche Invasion der Gewebe durch die Bakterien geschieht erst bei ausgewachsenen Fruchtkörpern und die Zahl der Eindringlinge steigert sich, wenn sich der Fruchtkörper seinem Ende nähert. Das Eindringen der Bakterien in das Gewebe der Fruchtkörper ist dadurch begünstigt, daß derselbe ziemlich ungenügend gegen das Äußere geschützt ist. Er besitzt keine äußere Zellschicht, welche eine lückenlose Bekleidung bilden würde. Die Endzellen der Hyphen, welche die sterile Oberfläche der Fruchtkörper bekleiden, sind zwar häufig keulenförmig angeschwollen (Fig. 2), aber sie lassen zwischen einander freie Spalten, durch welche die Bakterien leicht eindringen können. Auch in anderen Fällen führen Interzellularen bis an die Oberfläche der Fruchtkörper (Fig. 7, 8). In dem Gewebe (Trama) selbst gibt es zahlreiche Interzellularräume. Dazu kommt noch, daß die Membranen der Hyphen nicht selten verschleimen, bis sie ein »magma mucilagineum« bilden. Schleimige Substanzen können auch an der Oberfläche der Fruchtkörper vorkommen (vergl. Fig. 18 von L a g a r d e 1906, welche sich auf *Galactinia ampelina* bezieht).

Gute Gelegenheit bietet erst recht das Hymenium zum Eindringen von Bakterien. Das Ende der Paraphysen ist häufig verschleimt, dieselben schließen nicht ganz dicht an-

einander, jedenfalls nicht so dicht, daß in der schleimigen Masse Bakterien nicht ins Innere des Hymeniums eindringen könnten. Außerdem wird der Zusammenschluß der Zellen am Thecium durch die sich entleerenden und entleerten Schläuche durchbrochen. Jeder abgestorbene entleerte Ascus bildet eigentlich eine Wunde, wo die Bakterien einen leichten Weg



Discina pallida. Fig. 7 u. 8 äussere Zellschichten des Fruchtkörpers mit Bakterien.

ins Hymenium finden. Zwar kann diese Stelle durch die sie umgebenden Paraphysen geschlossen werden, der Verschuß ist jedoch unvollständig. So ist das reife Hymenium die beste Eingangspforte für die Bakterien, welche tatsächlich am häufigsten hier angetroffen werden können.

Bekanntlich werden die Sporen der Discomyceten aus den Schläuchen mit Gewalt ejakuliert. Wenn nun das Thecium bei zahlreichen Discomyceten mit einer Bakterienmasse bedeckt ist, so wäre es leicht möglich, daß die Sporen Bakterien an ihrer feuchten Oberfläche mitnehmen. Das konnte ich wirklich feststellen. Die Versuche wurden in folgender Weise angestellt. Falck hat gezeigt, daß das Ausschleudern der Sporen durch eine plötzliche Steigerung der Beleuchtung ausgelöst werden kann. Es wurden daher über die Fruchtkörper

einiger Ascomyceten in umgekehrter Lage Petri-Schalen mit Agar gestellt und das Ganze auf einige Zeit (eine bis mehrere Stunden) durch einen Zinksturz verdunkelt. Hierauf wurde der Zinksturz gehoben, nach 5 bis 10 Minuten die Petrischale bedeckt und der weiteren Eintwicklung überlassen. Bald erschienen an der Agarschicht Bakterienkolonien. Sie bildeten immer Gruppen, besonders wenn sich die Agarschicht in großer Nähe des Fruchtkörpers befand. In jeder Kolonie befand sich eine oder mehrere Sporen, so daß es sicher war, daß auf den Agar die Bakterien durch die Sporen gebracht wurden. Außerdem befanden sich am Agar auch sterile Sporen, d. h. solche, um welche herum sich keine Bakterien entwickelt haben. So wurden Kolonien aus den Fruchtkörpern von *Morchella conica*, *Gyromitra esculenta* und *Discina venosa* gewonnen. Alle Kolonien erwiesen sich als *Bacterium fluorescens*.

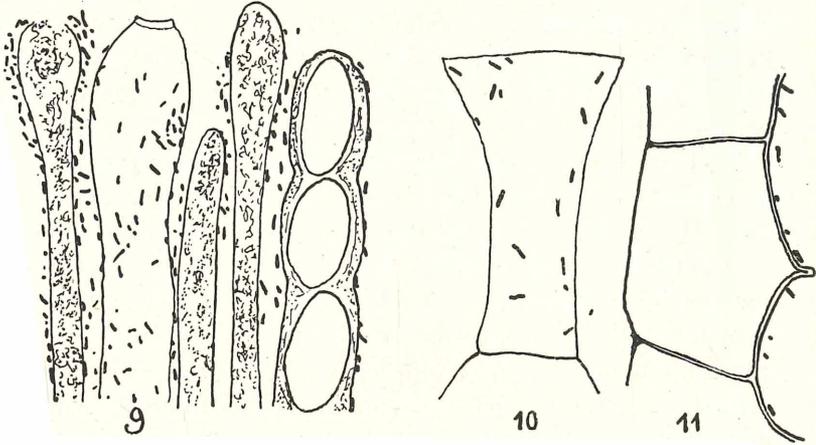
Außerdem wurde einfach von der Oberfläche auf Dextrosepeptonagar abgeimpft. Auch wurden die Fruchtkörper zerschnitten und aus dem inneren Gewebe abgeimpft. In den meisten Fällen erhielt ich Kolonien von *B. fluorescens*, ziemlich häufig erschein auch ein anderes, in milchig weißen Kolonien wachsendes Bakterium, welches vielleicht ein farbloses *B. herbicola* Düggeli war.

Bacterium fluorescens ist ein Ubiquist und auch Düggeli hat es als epiphytisches Bakterium an Pflanzen sehr häufig angetroffen. Somit bildet unser Befund keine Ausnahme von der Regel. Auch ist es jetzt schon wahrscheinlich, daß es sich im Vorkommen dieses und offenbar auch der anderen Bakterien an und in Fruchtkörpern der Ascomyzyten nicht um eine Symbiose, sondern eher um einen sehr verbreiteten, fast konstanten Epiphytismus handelt. Dafür spricht auch der Umstand, daß man neben infizierten auch Fruchtkörper findet, welche im Hymenium keine Bakterium enthalten. Schließlich beobachtete ich, daß sterile Sporen ebenso schnell zu keimen beginnen wie solche, welche in einer Bakterienkolonie liegen.

In abgeschnittenen und in mäßig feuchter Luft sich befindlichen Fruchtkörpern der Ascomyceten vermehren sich die Bakterien sehr schnell. Sie füllen alle Interzellularräume der Fruchtkörper aus, verwandeln die Membranen und endlich

den ganzen Fruchtkörper zu einer schleimigen weichen Masse. Das geschieht aber bei absterbenden Pilzen auch in der Natur.

Ich habe dieses Jahr in großer Menge *Verpa hohemica* in einem feuchten humosen Mischwalde bei Oslany (Slowakei) beobachten können. Es war am 24. Mai, wo ich die Lokalität besuchte. Zahlreiche Fruchtkörper waren noch turgeszent und steif, wogegen andere schon schlaff waren mit



Humaria sublimbata. Fig. 9 Ascusschicht, Fig. 10 Zelle aus dem inneren Gewebe, Fig. 11 äussere Zellschicht mit Bakterien.

einem herabgesenkten Hut, welcher schmierig weich und offenbar schon in Zersetzung begriffen war. Zwischen beiden Zuständen gab es alle Übergänge. Die noch gesunden und turgeszenten Fruchtkörper enthielten an der Oberfläche des Hymeniums sowie zwischen den Schläuchen etliche Bakterien, wogegen die alten Fruchtkörper förmlich zu einer Bakterienmasse umgewandelt waren. Ein einfacher Ausstrich gab ein Praeparat, wo das Gläschen fast lückenlos mit Bakterien bedeckt war.

Wir sehen, daß die Fruchtkörper der Discomyzeten an ihrer Oberfläche zahlreiche Bakterien tragen können. Darin stimmen sie mit grünen Pflanzen überein. Aber die Bakterien können auch in das Innere der Fruchtkörper einbringen, was ihnen durch das Fehlen eines festgefügteten Hautgewebes ermöglicht wird. Besonders leicht dringen sie in das Hyme-

nium zwischen die Asci und Paraphysen, was ihnen durch die freie Lage dieser Schicht, durch das lockere Gefüge ihrer Elemente und durch das Absterben von zahlreichen Schläuchen nach dem Herauswerfen der Sporen ermöglicht wird.

Solange der Fruchtkörper wächst, oder gesund ist, werden die Bakterien in Schranken gehalten. Sie stellen unschädliche Epiphyten vor. Wird der Fruchtkörper alt und sinkt seine Vitalität, oder wird er abgeschnitten und befindet sich unter Umständen, welche seine Vitalität abschwächen, so beginnen sich die Bakterien stark zu vermehren und bewirken wohl ein Absterben der Hyphen sowie eine Zersetzung des Fruchtkörpers.

In der Literatur werden mehrere Fälle von Vergiftungen mit Morcheln und Lorcheln angeführt. Es wird häufig in praktischen Pilzbüchern geraten vor dem Zubereiten diese Pilze abzubrühen und das Wasser abzugießen. Es ist aber sicher, daß diese Pilze meistens ohne jedwede Vorkehrung zubereitet und ohne Nachteil gegessen werden. Es ist nicht ausgeschlossen, daß die giftigen Stoffe in diesen Pilzen durch die Zersetzungstätigkeit der Bakterien entstehen. Frische und junge Pilze werden wohl harmlos sein, in älteren und sich zersetzenden Pilzen können durch die Tätigkeit der Bakterien giftige Stoffe entstanden sein.

Ich untersuchte auch einige Basidiomyzeten. Die obere Fläche ihrer Fruchtkörper ist meist mit verschiedenen Mikroorganismen besetzt, aber sie sind besser gegen das Eindringen der Bakterien ins Innere geschützt als das Hymenium der Discomyceten. Zwischen den Basidien sowie im inneren Gewebe der Fruchtkörper fand ich in gesunden Fruchtkörpern mikroskopisch keine Bakterien. Das schließt allerdings nicht aus, daß man bei bakteriologischer Untersuchung dennoch feststellen könnte, daß das Gewebe nicht steril ist. Jedenfalls enthalten die Fruchtkörper der Basidiomyceten, solange sie frisch und nicht zu alt sind, Bakterien nicht in einer so großen Menge und Regelmäßigkeit wie die untersuchten Discomyceten. Untersucht wurden *Boletus bulbosus*, *rufus*, *variegatus*, *Thelephora terrestris*, *Rhizopogon luteolus*. Auch im Inneren der Thalli einiger Flechten (*Peltigera canina*, *aphthosa*, *Parmelia parietina*, *Evernia prunastri*) wurden

bei mikroskopischer Untersuchung keine Bakterien angetroffen. Bei *Peltigera canina* untersuchte ich eingehend die Apothecien, aber zwischen den Schläuchen und Paraphysen wurden keine Bakterien entdeckt.

Zusammenfassung.

Bei zahlreichen Discomyceten wurden an der Oberfläche ihrer Fruchtkörper, aber auch in ihren inneren Geweben Bakterien vorgefunden. Besonders reichlich und häufig sind sie im Hymenium vertreten. Auf seinem Thecium bilden sie zuweilen eine förmliche Schicht. Die Bakterien trifft man schon an frischen, gesunden und noch wachsenden Fruchtkörpern. In älteren oder abgeschnittenen Fruchtkörpern vermehren sie sich außerordentlich stark und bewirken schließlich ihre Zersetzung. Schon Sporen können mit Bakterien behaftet sein. Es handelt sich meistens um *Bacterium fluorescens*, das auch an grünen Pflanzen sehr verbreitet ist. Obzwar die Bakterien schon von der Sporenkeimung an mit dem Pilz vergesellschaftet sein können, kann man hier kaum von einer obligaten Symbiose sprechen. Vielmehr läßt sich das Zusammenleben der Bakterien mit den Pilzen als Epiphytismus bezeichnen, welcher für den Pilz ganz harmlos ist, solange er gesund und stark ist, der jedoch durch starke Vermehrung der Bakterien zu seinem Tode und Zersetzung führt, wenn der Pilz älter oder abgeschwächt wird. Jedenfalls vermehren sich die epiphytischen Bakterien auf den Fruchtkörpern der Discomyceten während ihrer Entwicklung, wie das für grüne Pflanzen Burri (1903) und Dügge li (1904) annehmen.

Summary.

Bacteria on the fruit-bodies of some Discomycetes.

The author has investigated bacteria growing on the surface of some Discomycetes. Nearly in every case he has been able to demonstrate the presence of bacteria on the fruit-body. They penetrate even between the asci and hyphae

into the hymenium and some times into the intercellular spaces of the whole fruit-body. It is generally *Bacterium fluorescens* and a colorless *Bacterium*, probably a variety of *B. herbicola* Düggeli. The bacteria very often adhere already to spores ejaculated from the asci, but the spores also germinate without contact with bacteria. The presence of bacteria in the *Discomycetes* is not a regular phenomenon. It is rather an accidental epiphytisme, without any reciprocal relation beneficial to both symbionts.

LITERATUR:

- Beijerinok M. W. u. Rant, A. 1906, Wundreiz, Parasitismus und Gummifluss bei den Amygdaleen. Cbt. f. Bakt. II. Bd. 15.
 Burri R. 1903, Die Bakterienvegetation auf der Oberfläche normal entwickelter Pflanzen. Cbt. f. Bakt. II. Bd. 10.
 Dittrich G. 1908, Zur Entwicklungsgeschichte der Helvellineen. Beitr. z. Biol. d. Pfl. Bd. 8.
 Düggeli M. 1904, Die Bakterienflora gesunder Samen und daraus gezogener Keimflänzchen. Cbt. f. Bakt. II. Bd. 12.
 Düggeli M. 1925, Die Bakterienflora auf Alpenpflanzen. Verh. d. schweiz. Naturf. Ges. 106. Jhrvers.
 Gäumann E. 1926, Vergleichende Morphologie der Pilze. Jena
 Lagarde J. 1906 Contribution à la connaissance des *Discomycètes charnus*. Thèse, Burg.
 Velenovský, K. 1920, České houby. Praha.
-

Sur une espèce particulière de groupes d'involutions planes de Cremona.

Par B. BYDŽOVSKÝ.

Présenté le 26 août 1929.

1. Introduction. Parmi les involutions crémoniennes planes symétriques — c. à d. celles dont tous les points principaux sont du même ordre — les involutions du 5^e ordre à six points principaux quadratiques sont caractérisées par la propriété que le groupe de leurs points principaux n'est pas un groupe de six points tout à fait général. Il y a une autre circonstance qui mérite d'être signalée et qui les distingue des involutions symétriques d'ordre plus élevé, à savoir de celles de Geiser (du 8^e ordre) et de Bertini (du 17^e ordre). Dans son grand mémoire »Sopra alcune involuzioni piane«, Lomb. Ist. Rend. (2) 16 (1883), p. 89-190, Bertini donne une démonstration du fait qu'il n'y a qu'une seule involution du 8^e ordre à sept points donnés du 3^e ordre et il démontre que l'analogue a lieu pour l'involution du 17^e ordre. Il en suit qu'un groupe de transformations de Cremona ne peut pas contenir deux involutions de Bertini. En effet, s'il en contient une, c'est un groupe reproduisant un système linéaire de sextiques hyperelliptiques aux mêmes huit points doubles, lesquels sont points principaux de l'involution; c'est ce qui résulte de la classification des groupes finis de transformations de Cremona donnée par S. Kantor¹ (et A. Wiman²). Par ces huit points une seule involution de Bertini est déterminée. L'analogue a lieu pour l'involution de Geiser.

En ceci, les involutions symétriques du 5^e ordre diffé-

¹) „Theorie der endlichen Gruppen etc.“ Berlin.

²) „Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene“. Math. Ann. 48 (1897), p. 195.

rent de celles de Geiser et de Bertini. Je ferai voir, dans ce qui suit, qu'on peut choisir un groupe de six points principaux de sorte que plusieurs involutions du 5^e ordre soient déterminées par ce groupe. Il s'ensuivra l'existence de groupes contenant plusieurs involutions symétriques du 5^e ordre; c'est l'étude de ces groupes qui fait l'objet du présent travail.

Pour ne pas interrompre, par des renvois, les considérations qui vont suivre, je rappelle succinctement les propriétés des involutions symétriques du 5^e ordre³⁾. Les six points principaux d'une telle involution 1, 2, 3, 4, 5, 6 ne sont pas situés sur une conique; donc, ils déterminent six coniques différentes, qui sont les coniques principales. Si la conique principale contient le point principal correspondant, celui-ci sera nommé point principal de la première espèce; si elle ne le contient pas, il sera nommé point principal de la deuxième espèce. Il existe deux espèces d'involutions symétriques du 5^e ordre:

a) Involution de la première espèce, possédant six points principaux de la première espèce, disposés en trois couples de sorte que la conique principale relative à un point d'un couple ne contient pas le deuxième point du même couple. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cette involution est que les trois couples de points principaux soient situés sur trois droites concourantes. Nous dirons qu'en ce cas les six points principaux se trouvent dans la première position caractéristique.

b) Involution de la deuxième espèce, possédant quatre points principaux de la deuxième espèce et un couple de points principaux de la première. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cette involution est que les points du couple soient points de contact de la droite qui les joint avec deux coniques du faisceau déterminé par les quatre points principaux de la deuxième espèce. Nous dirons qu'en ce cas, les six points principaux se trouvent dans la deuxième position caractéristique.

³⁾ Je les ai réunies dans mon mémoire „Sur les involutions symétriques du 5^e ordre“, Rozpravy II. třídy České Akademie, t. XXXVIII, n. 2.

Le problème se pose d'examiner à quelles conditions un groupe de six points peut se trouver de plusieurs manières dans l'une ou l'autre position caractéristique ou même dans les deux. Dans le présent travail je me bornerai à traiter l'involution de la deuxième espèce laquelle donne lieu à des résultats relativement simples. J'examinerai en même temps les sextiques invariantes par rapport aux groupes qu'on va trouver.

2. Deux involutions de la deuxième espèce ayant les mêmes points principaux. Premier cas. Soient $1, 2, 3, 4$ les points principaux de la deuxième espèce, $5, 6$ ceux donnant un couple de points de la première espèce. Soit J l'involution possédant ces points principaux. Nous nous demandons, si ces deux points peuvent posséder la deuxième position caractéristique d'une seconde manière. S'il en est ainsi, il existe une seconde involution J' ayant les mêmes points principaux, disposés, bien entendu, d'une autre manière. La correspondance $H \equiv JJ'$ est une homographie. En effet, d'abord, c'est une correspondance uniunivoque. De plus: à une droite p correspond par J une courbe du 5^e ordre C_5 ayant les six points $1, \dots, 6$ pour points doubles; à C_5 correspond, par J' , une droite p' , puisque

$$5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = 1.$$

Pour J' les deux points principaux $5, 6$ ne peuvent être plus, tous les deux, des points de la première espèce. Deux cas se présentent: les points $5, 6$ peuvent être pour J' tous les deux des points de la deuxième espèce, ou bien un seul d'eux devient point de la deuxième espèce. Étudions d'abord le premier cas.

Si les points $5, 6$ sont de la deuxième espèce pour J' , deux des points $1, 2, 3, 4$ doivent être de la première espèce; on peut supposer que ce soient les points $1, 2$. Au point 1 correspond, par J , la conique k_1 , si l'on désigne, d'une manière générale, par k_i la conique ne contenant pas le point i . A k_1 correspond par J' , évidemment, le point 2 . Au point 2 correspond, par J , la conique k_2 , à cette conique correspond par J' le point 1 . Donc, pour H les points $1, 2$ sont un couple involutive. On trouve le même résultat pour $5, 6$.

Au point 3 correspond par J la conique k_3 , à cette conique par J' le point 3, puisque ce point est de la deuxième espèce. Donc, ce point est point uni pour H et il en est de même pour le point 4. Donc, l'homographie H possède les deux points unis 3, 4 et deux couples involutives 1, 2; 5, 6, d'où il suit que les droites 12 , 56 se reproduisent par H . Leur point d'intersection S est encore un point uni de H . Cette homographie est, évidemment, une involution ayant le centre S et dont l'axe est la droite 34 . Il reste à examiner, si six points ayant cette position particulière peuvent posséder, en même temps, la deuxième position caractéristique.

Choisissons arbitrairement les points 1, 2; 5, 6; par-là le point S est déterminé et, de même, l'axe de l'involution H . En effet, cet axe est la droite joignant les points I, I' , ces deux points étant déterminés de sorte que

$$\begin{array}{ll} \text{d'une part} & (12SI) = -1 \quad \text{sur la droite } \overline{12}, \\ \text{d'autre part} & (56SI') = -1 \quad \text{sur la droite } \overline{56}, \end{array}$$

Choisissons encore le point 3 arbitrairement sur $\overline{I I'}$ et soit P l'intersection de $\overline{56}$ avec $\overline{23}$. Déterminons sur $\overline{56}$ un point Q tel que $(56PQ) = -1$. Je dis que la droite joignant les points 2, Q coupe $\overline{I I'}$ au point 4. En effet, on se rend facilement compte que, par suite de cette construction, les points 5, 6 sont points de contact des coniques du faisceau (1234) avec la droite $\overline{56}$. Car le couple 5, 6 divise harmoniquement, non seulement la conique composée $\overline{13, 24}$, mais encore $\overline{12, 34}$, puisque le couple S, I' divise harmoniquement les points du couple 5, 6.

Donc, par les points 1, . . . , 6, ainsi construits, une involution J de la deuxième espèce est déterminée, pour laquelle les points 5, 6 sont de la première, les points 1, . . . , 4 de la deuxième espèce. Il s'agit seulement de savoir, si le groupe des six points, ainsi déterminé, possède la seconde position caractéristique d'une deuxième manière.

Pour résoudre cette question, considérons la conique k_2 . Projetons, du point 4, les quatre points 1, 3, 5, 6 sur la droite $\overline{56}$; on obtient les points $Q', I', 5, 6$. Si l'on projette du point 1 les trois points 3, 5, 6, on obtient les points $P, 5, 6$. Il en suit que, le point X étant déterminé sur $\overline{56}$ de manière que

$$(Q'I'56) = (XP56),$$

$\overline{1X}$ est la tangente de la conique considérée au point 1. Or, par application de H :

$$(Q'I'56) = (Q'I'65).$$

On obtient ainsi l'équation

$$(Q'I'65) = (XP56).$$

Il suit de là:

$$\frac{Q6}{I'6} : \frac{Q5}{I'5} = \frac{X5}{P5} : \frac{X6}{P6} \text{ ou } \frac{Q6}{Q5} : \frac{I'6}{I'5} = \frac{X5}{X6} : \frac{P5}{P6}$$

d'où
$$\frac{Q6}{Q5} : \frac{P6}{P5} = \frac{X5}{X6} : \frac{I'5}{I'6}$$

c. à d.
$$(QP65) = -1 = (XI'56).$$

Par conséquent, $X \equiv S$, c. à d., $\overline{1S}$ est la tangente cherchée. Donc, le point 1 — et les mêmes conclusions ont lieu pour le point 2 — est point de contact de la droite $\overline{12}$ avec une conique du faisceau (3456). Donc, il existe une involution J' de la deuxième espèce pour laquelle les points 1, 2 sont de la première, les points 3, 4, 5, 6, de la deuxième espèce. Énonçons le résultat acquis:

Si les six points principaux d'une involution de la deuxième espèce se reproduisent par une homologie involutive de la manière décrite plus haut, il existe une deuxième involution de la même espèce, ayant les mêmes points principaux, avec cette différence que les points principaux de la première espèce de l'une sont points principaux de la deuxième espèce pour l'autre, et inversement.

3. Le groupe G_4 respectif. Les deux involutions J, J' qui viennent d'être trouvées et l'homologie H forment un groupe G_4 . En effet, on a $JJ' \equiv H$, d'où $J'J \equiv H$, puisque H est une involution; et, d'une manière analogue

$$JH \equiv HJ \equiv J', \quad J'H \equiv HJ' \equiv J.$$

Il est facile de déterminer tous les points qui sont invariants pour toutes les transformations du groupe. On sait⁴⁾ que pour J , les droites $\overline{2}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{24}, \overline{34}, \overline{56}$ se reproduisent une à une, la dernière identiquement; pour J' il en est de même des droites $\overline{34}, \overline{35}, \overline{36}, \overline{45}, \overline{46}, \overline{56}, \overline{12}$, dont la dernière se

reproduit identiquement. Donc, pour les deux involutions et par suite aussi pour H les droites $\overline{2}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$ se reproduisent et, par conséquent, aussi leurs trois points d'intersection à savoir les points S, I, I' . Il n'y a pas, évidemment, d'autres points invariants, ni d'autres droites invariantes. Il est intéressant de remarquer qu'il y a des coniques invariantes par rapport au groupe. On sait⁴⁾ que, pour J , chacune des coniques du faisceau (1234) se reproduit, tandis que pour J' , les coniques de ce faisceau s'échangent, en général, deux à deux. Si, cependant, une d'entre elles se reproduit aussi par J' , elle est invariante aussi pour H , et l'inverse a encore lieu. Or, on voit facilement qu'il y a une seule conique contenant les points 1, 2, 3, 4, qui soit, en même temps, invariante par rapport à H ; c'est celle pour laquelle S et $\overline{34}$ sont pôle et polaire. Cette conique est déterminée par sa tangente en 3, qui est la droite $\overline{S3}$. Sa tangente au point 4 est la droite $\overline{S4}$. Une considération analogue montre que la conique contenant les points 3, 4, 5, 6 et ayant au point 3 la tangente $\overline{S3}$ (et, de même, au point 4 la tangente $\overline{S4}$) est invariante pour le groupe tout entier. Enfin, les coniques du faisceau (1256) sont échangées deux à deux, par J aussi bien que par J' . Toutes les coniques de ce faisceau sont invariantes par rapport à H . Toute conique de ce faisceau, invariante par rapport à J , l'est, par suite de ce qui vient d'être remarqué, aussi pour J' . Pour trouver la conique de ce faisceau qui se reproduit par J , il suffit de remarquer que cette conique doit couper la droite $\overline{34}$ suivant un couple de points conjugués harmoniques par rapport au couple I, I' de points unis de J . Par conséquent, les deux points I, I' sont conjugués par rapport à la conique cherchée. Donc, la polaire du point I' contient I , et comme elle contient, ce qui est évident, aussi le point S , la droite SI est la polaire du point I' par rapport à la conique. Donc, celle-ci est déterminée par les points 1256 et par la tangente $1I'$. De plus, les droites $2I, 5I', 6I'$ sont ses tangentes aux points respectifs.

4) Voir le mémoire cité dans la note 3).

On a trouvé, ainsi, trois coniques invariantes par rapport aux transformations du groupe. Les deux premières se touchent aux points 3, 4. La dernière coupe les deux premières aux points qui correspondent, respectivement, aux points principaux 1, 2; 5, 6. Ainsi, la conique k_1 coupe au même point la conique invariante du faisceau (1234) et la conique invariante du faisceau (1256), et ainsi de suite, pour les coniques k_2, k_5, k_6 . On a trouvé ainsi le théorème:

Les deux coniques invariantes des faisceaux (1234), (3456) sont coupées par les coniques principales k_1, k_2, k_5, k_6 , en dehors des points principaux, en quatre points. Ces quatre points sont situés, avec les points 1, 2, 5, 6, sur une conique qui est, elle-même, invariante pour le groupe.

4. **Sextiques invariantes pour G_4 .** L'ensemble des trois coniques invariantes pour G_4 forme une sextique invariante, ayant les points principaux pour points doubles. Nous allons déterminer, plus généralement, toutes les sextiques ayant ces 6 points doubles, invariantes pour le groupe G_4 .

Rappelons ce qui a lieu, sous ce rapport, pour l'involution J^5). Toute sextique aux points doubles 1...6 et passant par quatre couples de cette involution est, en général, invariante; si, cependant, ces quatre couples se trouvent sur une quintique — invariante, d'ailleurs — aux points doubles 1, 2, 3, 4 et passant simplement par 5, 6, une seule sextique invariante passe par ces couples. Elle est déterminée par ce qu'elle coupe la droite $\overline{34}$ en deux points divisant harmoniquement le couple I, I' . La quintique en question contient le point I , le point $II \equiv (\overline{13}, \overline{24})$ et le point $III \equiv (\overline{14}, \overline{23})$. Remarquons que le point I se reproduit, les points II, III s'échangent par H .

Prenons deux couples arbitraires $X_1, X_2; Y_1, Y_2$ de l'involution J . Les couples $X'_1, X'_2; Y'_1, Y'_2$ qui leur correspondent, respectivement, par J' , sont encore des couples de J , puisque les deux involutions J et J' sont commutatives. Les huit points, ainsi obtenus, forment donc, d'abord, quatre couples de J ; ils forment, en même temps, quatre couples de J' , à savoir

⁵⁾ V. mon. mémoire cité ci-dessus, note ³⁾.

$$X_1, X'_1; X_2, X'_2; Y_1, Y'_1; Y_2, Y'_2$$

et quatre couples de H , à savoir

$$X_1, X'_2; X_2, X'_1; Y_1, Y'_2; Y_2, Y'_1.$$

Ces huit points ne se trouvent pas sur une quintique aux points doubles $1, 2, 3, 4$, et passant simplement par les points $5, 6$. Car une telle quintique K_5 , contenant les quatre couples en question, est nécessairement invariante pour H , puisque la quintique qui lui correspond par H la coupe aux points $1, \dots, 6$ et aux points de ces couples, ce qui donne, en tout, 26 intersections. Cette quintique contient les points I, II, III . La droite $\overline{56}$ la coupe encore en trois points dont un est nécessairement point uni pour H . Si c'est p. ex. le point I , la droite $\overline{34}$ coupe K_5 en six points et en est une partie; donc, il existerait une quartique, invariante, elle aussi, pour H , ayant pour points doubles $1, 2$, passant simplement par $3, 4, 5, 6, II, III$ et contenant les points des quatre couples considérés.

Or, toute quartique du système déterminé par les points doubles $1, 2$ et les points simples $3, 4, 5, 6, II, III$ est invariante par rapport à J . En effet, une cubique invariante pour J , quelconque — elle appartient⁶⁾ à un faisceau à la base $1, \dots, 6, I, II, III$ — la coupe encore en deux points ξ, ξ' tels que la congruence ait lieu (α_i désigne le paramètre elliptique du point i sur la cubique, et ainsi de suite):

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_{II} + \alpha_{III} + \xi + \xi' \equiv 0$$

Mais comme

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_6 + \alpha_I + \alpha_{II} + \alpha_{III} \equiv 0$$

il suit de la congruence précédente

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_I + \xi + \xi' \equiv 0.$$

Mais

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_I \equiv 0,$$

$$\text{donc } \alpha_1 + \alpha_2 \equiv -\alpha_I$$

et l'on obtient

$$-2\alpha_I + \xi + \xi' \equiv 0.$$

Ceci veut dire⁷⁾ que ξ, ξ' sont les points d'un couple de l'involution J . Donc, la quartique étant coupée par une cubi-

⁶⁾ V. mon mémoire cité ci-dessus p. 12.

⁷⁾ V. mon mémoire cité ci-dessus, p. 12.

que invariante quelconque en un couple de l'involution J , elle est elle même invariante.

Toute quartique de ce système est déterminée, d'une manière univoque, par deux points ultérieurs et elle contient les deux couples de J déterminés par ces deux points. Il suit, de ce qui précède, que cette quartique devrait contenir, de ce fait, encore les deux couples qui correspondent aux couples donnés par J' . Cela signifie que toute quartique du système considéré serait invariante par rapport à H . Mais ceci n'est pas vrai, puisqu'on peut demander qu'une quartique du système contienne deux points de la droite $\overline{59}$ ne formant pas un couple de H .

En définitif, on voit qu'en général, les huit points qu'on obtient en appliquant l'involution J' à deux couples de J , ne sont pas situés sur une quintique de l'espèce considérée; par conséquent, d'après le théorème mentionné plus haut, toute sextique aux points doubles $1, \dots, 6$ et contenant simplement les points $X_1, X_2; Y_1, Y_2; X'_1, X'_2; Y'_1, Y'_2$ est invariante pour J . Mais, puisque ces huit points donnent, comme il a été remarqué plus haut, quatre couples de l'involution J' , ces mêmes sextiques sont invariantes par rapport à J' et, par conséquent, par rapport au groupe entier G_4 . Nous avons ainsi démontré le théorème:

Toute sextique aux points doubles $1, \dots, 6$ et passant par deux couples arbitraires d'une involution du groupe G_4 , ainsi que par les deux couples qui leur correspondent par une autre involution du groupe, est invariante pour le groupe G_4 tout entier.

5. Sextiques hyperelliptiques invariantes pour G_4 . Dans l'espèce de sextiques figurant dans le théorème qui vient d'être énoncé rentrent les sextiques ayant deux points doubles ultérieurs qui sont points unis d'une involution du groupe et sont reproduits séparément ou échangés par une autre involution du groupe.

a) Si l'on considère d'abord les points unis de J , on voit que le couple des points II, III a cette propriété (il n'en est pas de même du couple I, II etc.) Donc:

Toutes les sextiques du système linéaire, déterminé par

les huit points doubles $1, \dots, 6, II, III$, sont invariantes par rapport au groupe tout entier.

b) Les points analogues à II, III dans l'involution J' donnent un résultat analogue, qu'il serait inutile d'énoncer.

c) Pour H il n'existe pas de couple de points unis qui ait la propriété demandée et qui conduirait, en même temps, à une sextique non dégénérée.

Donc, il n'y a qu'une espèce de sextiques hyperelliptiques invariantes pour le groupe G_4 . Le théorème ci-dessus contient la condition nécessaire pour l'invariance d'une telle sextique. Pour l'énoncer d'une manière simple, faisons remarquer que, d'après le résultat du num. 2., on peut construire le groupe spécial des points $1, \dots, 6$ aussi de la manière suivante: choisissons arbitrairement les points $1, 2, 3, 4$ et considérons les sommets I, II, III du triangle diagonal appartenant à ce quadrangle. La droite $\overline{34}$ est l'axe, le point d'intersection S des droites $12, \overline{II III}$ est centre de l'involution H . Choisissons une droite arbitraire par S ; les points de contact des coniques du faisceau (1234) avec cette droite sont les points $5, 6$. En effet, on se rend facilement compte que le point 4 est lié aux points $1, 2, 3, 4, 5, 6$ par la construction donnée au num. 2. Donc, on peut énoncer le résultat suivant:

Les points doubles d'une sextique hyperelliptique, invariante par rapport à G_4 , sont les sommets d'un quadrangle, deux sommets diagonaux de ce quadrangle et les deux points de contact des coniques circonscrites au quadrangle considéré avec une droite passant par le point d'intersection de la droite, joignant les deux sommets diagonaux, avec le côté du quadrangle passant par le troisième.

Il est évident que cette propriété est suffisante pour l'invariance de la sextique par rapport à un G_4 , car le groupe de points ainsi défini donne lieu aux involutions telles que J, J', H .

6. Impossibilité d'une troisième involution. Il n'est pas possible que les six points principaux se trouvent dans la deuxième position caractéristique d'une troisième manière, de sorte que $3, 4$ soient les points principaux de la pre-

mière espèce. En effet, s'il en était ainsi, les deux points 3, 4 seraient points de contact des coniques du faisceau (1256) avec la droite $\overline{34}$. Mais ces coniques sont les couples de droites $\overline{15}, \overline{26}$; $\overline{16}, \overline{25}$ et leurs points doubles seraient les points 3, 4. Donc, les six points principaux seraient alignés, trois à trois, ce qui est exclu, car l'ordre de l'involution se réduirait.

7. Deux involutions de la deuxième espèce ayant les mêmes points principaux. Deuxième cas. En second lieu, on peut se demander, si les six points principaux peuvent posséder la deuxième position caractéristique d'une seconde manière, mais de sorte qu'un seul point du couple 5, 6 soit point principal de la deuxième espèce, p. ex. le point 6. Par conséquent, un seul point du quadruple 1, 2, 3, 4 devra être point principal de la première espèce. Supposons donc que les points 4, 5 soient les points principaux de la première espèce. Si l'involution respective J' existe, composons-la avec J . Il est évident, tout d'abord, que la transformation $T \equiv J.J'$ est une homographie, toute ligne droite étant transformée par T en une ligne droite. Étudions de plus près cette homographie. Au point 4 correspond par J la conique k_4 , à celle-ci par J' le point 5, donc, au point 4 correspond par T le point 5. On trouve de même que par T correspond au point 5 le point 6, au point 6 le point 4; quant aux points 1, 2, 3, ceux-ci se reproduisent séparément. Donc, si T existe, c'est une homographie périodique, à la période 3, aux points unis 1, 2, 3 et dont les points 4, 5, 6 donnent un cycle. Comme ces trois points ne sont pas alignés, on voit que T ne peut pas être une homologie.

Pour décider, si ce cas est possible, prenons les points 1, 2, 3 pour sommets du triangle de référence. Une homographie à la période trois, dont ces points sont points unis, est exprimée, comme on sait, par les équations :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha x_1' : \alpha^2 x_2' : x_3' \quad (1)$$

où $\alpha = \sqrt[3]{1}$. Prenons le point 4 pour point (1, 1, 1); alors les points 5, 6 doivent avoir, respectivement, les coordonnées

$$1, \alpha^2, \alpha ; 1, \alpha, \alpha^2$$

Les droites $\overline{45}$, $\overline{56}$, $\overline{64}$ sont exprimées, respectivement, par les équations

$$\begin{aligned}x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 &= 0 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 + \alpha x_2 + \alpha^3 x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Il s'agit de savoir, tout d'abord, si les coniques k_4 , k_5 , k_6 satisfont aux conditions de contact qui leur sont imposées par le fait qu'elles doivent figurer comme coniques principales. La conique k_5 , p. ex., a l'équation

$$x_1 x_2 + \alpha^2 x_2 x_3 + \alpha x_3 x_1 = 0.$$

La polaire du point 5 par rapport à cette conique est

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = 0$$

ce qui est bien la droite $\overline{46}$. Il en suit que la conique k_5 touche la droite $\overline{56}$ au point 6 et la droite $\overline{45}$ au point 4. Donc, on a d'abord le théorème suivant:

La conique, contenant les trois points unis d'une homographie à la période trois et passant par deux points d'un cycle de cette homographie périodique, est touchée, en ces points, par deux droites passant par le troisième point de ce cycle.

Par conséquent, la conique k_6 touche la droite $\overline{56}$ au point 5 et la droite $\overline{64}$ au point 4; la conique k_4 touche la droite $\overline{45}$ au point 5 et la droite $\overline{64}$ au point 6.

Il en suit, tout d'abord, qu'en effet, les points 1, ..., 6 étant choisis de la manière décrite plus haut, les coniques k_4 , k_5 , k_6 remplissent les conditions qui leur sont imposées; par conséquent, les deux involutions J , J' ainsi que leur produit $T \equiv JJ'$ existent. Mais on voit de plus que la droite $\overline{64}$ est touchée par deux coniques du faisceau (1235) aux points 4, 6, donc, il existe, en ce cas, une troisième involution J'' de la deuxième espèce, pour laquelle les points 1, 2, 3, 5 sont points principaux de la deuxième espèce, les points 4, 6 points principaux de la première.

Or, JJ'' est, évidemment, encore une homographie et on voit de suite qu'elle possède les points unis 1, 2, 3 et qu'aux points 4, 5, 6 correspondent respectivement les points

6, 5, 4 c. à d. $JJ'' \equiv T^2$ ou bien $J'' \equiv JT^2$. Il en suit immédiatement que les transformations

$$1, T, T^2, J, J', J''$$

forment un groupe métacyclique d'ordre six G_6 . En effet, on a d'abord

$$JJ' \equiv T, J'J \equiv T^2, JJ'' \equiv T^2, J''J \equiv T.$$

De plus $J' \equiv JT \equiv T^2J$, puisque $JT \cdot JT \equiv 1$; $J'' \equiv JT^2 \equiv TJ$; $J \equiv TJ' \equiv J'T^2$.

8. Les équations du groupe. En adoptant le système de coordonnées du paragraphe précédent, les coniques principales seront exprimées par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} k_1 &\equiv x_1^2 - x_2 x_3 = 0, & k_2 &\equiv x_2^2 - x_1 x_3 = 0, & k_3 &\equiv x_3^2 - x_1 x_2 = 0 \\ k_4 &\equiv x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0, & k_5 &\equiv x_1 x_2 + \alpha x_1 x_3 + \alpha^2 x_2 x_3 = 0 \\ & & k_6 &\equiv x_1 x_2 + \alpha^2 x_1 x_3 + \alpha x_2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Par J correspond au point O_i la conique k_i ; on en conclut facilement que les équations de J ont la forme

$$\varrho x_1' = k_2 k_3 l_1, \quad \varrho x_2' = k_3 k_1 l_2, \quad \varrho x_3' = k_1 k_2 l_3,$$

où l_i sont des formes linéaires. Or, la droite $\overline{O_2 O_3}$, p. ex., se correspond à elle-même; donc $x_1' = 0$ doit équivaloir à $x_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$; par-là, l_1 est déterminée à un facteur constant près et il en est de même pour l_2, l_3 ; les équations de J sont

$$\varrho x_1' = \varrho_1 x_1 k_2 k_3, \quad \varrho x_2' = \varrho_2 x_2 k_3 k_1, \quad \varrho x_3' = \varrho_3 x_3 k_1 k_2 \quad (2)$$

Pour déterminer les constantes $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, exprimons le fait qu'au point 1, 1, 1 correspond la conique $k_4 = 0$. En posant $x_i' = 1$ dans (2), on en tire

$$\varrho_1 x_1 k_2 k_3 = \varrho_2 x_2 k_3 k_1 = \varrho_3 x_3 k_1 k_2$$

et, par suite

$$\varrho_1 x_1 k_2 - \varrho_2 x_2 k_1 = 0$$

ce qui doit fournir, à un facteur linéaire près, l'équation

$$k_4 = 0.$$

Or, en substituant pour k_1, k_2 les expressions explicites respectives, on obtient

$$\varrho_1 x_1 (x_2^2 - x_1 x_3) - \varrho_2 x_2 (x_1^2 - x_2 x_3) = 0$$

ce qu' on peut écrire

$$x_1 x_2 (\varrho_1 x_2 - \varrho_2 x_1) + x_1 x_3 (x_2 - \varrho_1 x_1) + x_2 x_3 (\varrho_2 x_2 - x_1) = 0.$$

Pour obtenir le résultat demandé, il faut et il suffit que

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 1$$

En raisonnant de même sur

$$\varrho_2 x_2 k_3 - \varrho_3 x_3 k_2 = 0$$

on obtient

$$\varrho_3 = 1$$

Il en suit qu' on peut écrire les équations (2) sous la forme définitive:

$$\varrho x_i' = x_i : k_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

Nous en déduirons une conséquence qui nous sera utile dans ce qui suivra.

Comme $k_1 = 0$ est une conique principale contenant les points 2, ..., 6, on doit obtenir, en la transformant par J , une courbe du 10e ordre, composée de toutes les coniques $k_i = 0$ pour $i = 2, \dots, 6$. En substituant, d'après (3), dans l'équation

$$x_1^2 - x_2 x_3 = 0,$$

on obtient

$$x_1^2 k_2^2 k_3^2 - x_2 x_3 k_1^2 k_2 k_3 = 0$$

ce qui donne, d'abord, $k_2 = 0, k_3 = 0$ et puis

$$x_1^2 k_2 k_3 - x_2 x_3 k_1^2 = 0$$

ce qui doit se réduire à

$$k \cdot k_4 k_5 k_6 = 0$$

Ici, k est un facteur constant qu' on déterminera en comparant les coefficients d' un même terme dans les deux équations. Ainsi, p. ex., le terme $x_1^2 x_2^2 x_3^2$ a, dans la première équation, le coefficient $1 + 2 = 3$; dans la deuxième

$$k (\alpha^2 + \alpha + \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha) = 3 k (\alpha + \alpha^2) = -3 k.$$

Il en suit $k = -1$; donc, l'expression k_1 se change par J en

$$-k_2 k_3 k_4 k_5 k_6.$$

On trouve de même que k_2 et k_3 sont changées, respectivement, en $-k_1 k_3 k_4 k_5 k_6$ et $-k_1 k_2 k_4 k_5 k_6$.

Quant à k_4 , la conique

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0$$

se transforme en la courbe

$$x_1 x_2 k_1 k_2 k_3^2 + x_1 x_3 k_1 k_2^2 k_3 + x_2 x_3 k_1^2 k_2 k_3 = 0$$

c. à d. $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

et ce qui reste, à savoir

$$x_1 x_2 k_3 + x_1 x_3 k_2 + x_2 x_3 k_1 = 0$$

doit se réduire à

$$k_1 k_2 k_3 = 0$$

La comparaison des coefficients de $x_1^2 x_2^2$, p. ex., donne

$$k_1 = -1$$

ce qui fait voir que k_4 se change par J en

$$-k_1 k_2 k_3 k_5 k_6$$

et ainsi de suite pour k_5, k_6 . Si l'on désigne par k_i' les expressions k_i' transformées, on voit qu'il vaut, en général

$$k_i' = -k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 : k_i.$$

9. Les sextiques invariantes par rapport au groupe. Généralités. Une sextique invariante par rapport à J doit avoir aux points 1, . . . , 6 des multiplicités telles que leur somme S soit égale à 12, car en ce cas seulement l'expression

$$6 \cdot 5 - 2S$$

est égale à 6. Si, de plus, cette sextique doit être invariante aussi par rapport à T , ses multiplicités aux points 4, 5, 6 doivent être les mêmes, égales à m . Ce nombre est nécessairement supérieur à zéro; car si m était nul, les points 1, 2, 3 seraient des points quadruples, ce qui est exclu, si l'on se borne à des sextiques non dégénérées.

a) Si $m = 1$ et si m_1, m_2, m_3 signifient les multiplicités aux points 1, 2, 3, on doit avoir

$$m_1 + m_2 + m_3 = 9$$

ce qui entraîne nécessairement $m_1 = m_2 = m_3 = 3$, car toute autre solution de cette équation à racines entières positives conduirait, comme il est facile de s'en rendre compte, à une sextique dégénérée.

b) Si $m = 2$, on doit avoir

$$m_1 + m_2 + m_3 = 6.$$

Les solutions essentiellement différentes et admissibles à priori sont celles-ci;

$\alpha)$ $m_1 = 4, m_2 = 2, m_3 = 0$

$\beta)$ $m_1 = 4, m_2 = m_3 = 1$

$\gamma)$ $m_1 = m_2 = 3, m_3 = 0$

$$\delta) m_1 = 3, m_2 = 2, m_3 = 1$$

$$\varepsilon) m_1 = m_2 = m_3 = 2.$$

La dernière solution est symétrique et conduit à une sextique dont le genre est le plus élevé possible, à savoir 4.

c) Si $m = 3$, on doit avoir

$$m_1 + m_2 + m_3 = 3$$

et on a les solutions admissibles :

$$\alpha) m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 0$$

$$\beta) m_1 = m_2 = m_3 = 1.$$

La deuxième solution conduit à une sextique dont le genre est, dans les circonstances actuelles, le plus élevé possible, à savoir 1.

10. Les sextiques invariantes par rapport au groupe. a) **Premier cas.** Une sextique ayant les points O_i pour points triples est exprimée par une équation de la forme:

$$a_3 x_1^3 x_2^3 + a_2 x_1^3 x_3^3 + a_1 x_2^3 x_3^3 + b_2 x_1^3 x_2^2 x_3 + b_3 x_1^3 x_2 x_3^2 + \\ + c_1 x_1^2 x_2^3 x_3 + c_3 x_1 x_2^3 x_3^2 + d_1 x_1^2 x_2 x_3^3 + d_2 x_1 x_2^2 x_3^3 + e x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0.$$

Cette courbe devant contenir les points 4, 5, 6, on a

$$a_3 + a_2 + a_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_3 + d_1 + d_2 + e = 0$$

$$a_3 + a_2 + a_1 + b_2 \alpha^2 + b_3 \alpha + c_1 \alpha + c_3 \alpha^2 + d_1 \alpha^2 + d_2 \alpha + e = 0$$

$$a_3 + a_2 + a_1 + b_2 \alpha + b_3 \alpha^2 + c_1 \alpha^2 + c_3 \alpha + d_1 \alpha + d_2 \alpha^2 + e = 0$$

En ajoutant ces trois équations, on obtient

$$a_1 + a_2 + a_3 + e = 0$$

Les deux dernières équations donnent alors

$$\alpha (b_3 + c_1 + d_2) + \alpha^2 (b_2 + c_3 + d_1) = 0$$

$$\alpha^2 (b_3 + c_1 + d_2) + \alpha (b_2 + c_3 + d_1) = 0.$$

Comme le déterminant de ces deux équations est $\alpha^2 - \alpha \neq 0$, on a

$$b_3 + c_1 + d_2 = 0$$

$$b_2 + c_3 + d_1 = 0.$$

Si l'on substitue pour d_1, d_2, e les expressions qu'on tire des équations obtenues, l'équation de la sextique prend la forme

$$- a_3 x_1^2 x_2^2 k_3 - a_2 x_1^2 x_3^2 k_2 - a_1 x_2^2 x_3^2 k_1 + b_3 x_1 x_2 x_3^2 k_1 \\ - c_1 x_1 x_2^2 x_3 k_3 - b_2 x_1^2 x_2 x_3 k_3 + c_3 x_1 x_2 x_3^2 k_2 = 0$$

Appliquons les équations de l'involution J ; on obtient

$$a_3 \frac{x_1^2 x_2^2}{k_1^2 k_2^2 k_3} + a_2 \frac{x_1^2 x_3^2}{k_1^2 k_2^3 k_2} + a_1 \frac{x_2^2 x_3^2}{k_2^2 k_3^2 k_1} - b_3 \frac{x_1 x_2 x_3^2}{k_1^2 k_2 k_3^2} + \\ + c_1 \frac{x_1 x_2^2 x_3}{k_1 k_2^2 k_3^2} + b_2 \frac{x_1 x_2^2 x_3}{k_1 k_2^2 k_3^2} - c_3 \frac{x_1 x_2 x_3^2}{k_1 k_2^2 k_3^2} = 0$$

ou bien

$$a_3 x_1^2 x_2^2 k_3 + a_2 x_1^2 x_3^2 k_2 + a_1 x_2^2 x_3^2 k_1 - b_3 x_1 x_2 x_3^2 k_2 + \\ + c_1 x_1 x_2^2 x_3 k_1 + b_2 x_1^2 x_2 x_3 k_2 - c_3 x_1 x_2 x_3^2 k_1 = 0$$

ce qui fait voir que la sextique considérée se reproduit par J seulement, si $b_3 = c_1 = b_2 = c_3 = 0$, c. à d., si elle est exprimée par l'équation

$$a_1 x_2^2 x_3^2 k_1 + a_2 x_1^2 x_3^2 k_2 + a_3 x_1^2 x_2^2 k_3 = 0 \quad (4)$$

Si l'on applique la substitution (1), k_1 se change en $\alpha^2 k_1$; k_2 en αk_2 ; k_3 en k_3 . Comme $x_2^2 x_3^2$ se multiplie, par suite de la même substitution, par α , $x_1^2 x_3^2$ par α^2 et $x_1^2 x_2^2$ par 1, on voit qu'en définitif, l'équation (4) se reproduit par l'homographie T . On peut énoncer le résultat:

Toute courbe du système de sextiques (4), ayant les points 1, 2, 3 pour points triples, se reproduit par toutes les transformations du groupe G_6 .

11. Étude de la sextique invariante. Les tangentes de la sextique (4) au point triple

$$\left. \begin{array}{l} O_1 \text{ sont données par l'équation } \frac{x_2^3}{a_2} + \frac{x_3^3}{a_3} = 0 \\ O_2 \text{ » } \text{ » } \text{ » } \text{ » } \frac{x_3^3}{a_3} + \frac{x_1^3}{a_1} = 0 \\ O_3 \text{ » } \text{ » } \text{ » } \text{ » } \frac{x_1^3}{a_1} + \frac{x_2^3}{a_2} = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

ce qui veut dire que ces tangentes coupent les droites, joignant, deux à deux, les points triples, aux mêmes points que la cubique

$$\frac{x_1^3}{a_1} + \frac{x_2^3}{a_2} + \frac{x_3^3}{a_3} = 0$$

ou même la cubique plus générale

$$\frac{x_1^3}{a_1} + \frac{x_2^3}{a_2} + \frac{x_3^3}{a_3} + \frac{6}{m} x_1 x_2 x_3 = 0 \quad (6)$$

Mais ceci est, comme on sait, la cubique la plus générale ayant le triangle $O_1 O_2 O_3$ pour un triangle d'inflexions.

Nous avons trouvé, ainsi, une condition nécessaire pour une sextique à trois points triples se reproduisant par le groupe G_6 .

Inversement, soit donnée une sextique à trois points triples ayant la propriété qui vient d'être énoncée. Les points triples étant choisis pour sommets du triangle de référence, une cubique générale l'ayant pour triangle d'inflexion a bien l'équation (6). Il en suit que (5) donnent les tangentes aux points triples de la sextique considérée. Il est facile de faire voir qu'une sextique ayant ces tangentes aux points triples O_i a l'équation

$$a_1 x_2^2 x_3^3 + a_2 x_3^3 x_1^3 + a_3 x_1^3 x_2^3 + k x_1^2 x_2^2 x_3^3 = 0 \quad (7)$$

où k est un coefficient quelconque. Prenons un point simple de cette courbe pour le point 1, 1, 1; il en résulte

$$a_1 + a_2 + a_3 + k = 0, \text{ d'où } k = -a_1 - a_2 - a_3$$

L'équation (7) devient

$$a_1 x_2^2 x_3^2 (x_1^2 - x_2 x_3) + a_2 x_3^2 x_1^2 (x_2^2 - x_1 x_3) + a_3 x_1^2 x_2^2 (x_3^2 - x_1 x_2) = 0$$

c. à d.
$$a_1 x_2^2 x_3^2 k_1 + a_2 x_1^2 x_3^2 k_2 + a_3 x_1^2 x_2^2 k_3 = 0$$

ce qui est l'équation (4). Donc, la condition énoncée est suffisante. Nous pouvons énoncer le résultat:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une sextique à trois points triples se reproduise par un groupe tel que G_6 est celle que les points d'intersection des tangentes aux points triples avec les droites, joignant ces points deux à deux, forment le groupe complet des points d'inflexion d'une cubique.

Ajoutons que les sextiques considérées constituent un réseau; les courbes de ce réseau ne se coupent qu'aux points principaux, lesquels fournissent 30 intersections. Par un point général un faisceau de ces sextiques est déterminé; la base en est donnée par les points principaux avec les multiplicités prescrites et par les six points qu'on obtient en appliquant au point donné le groupe G_6 . Comme chaque courbe de ce faisceau est déterminée par un point ultérieur, on peut énoncer le théorème suivant:

Tout couple de groupes à six points, obtenus par l'application du groupe G_6 , est situé sur une sextique invariante du réseau (4).

12. Les sextiques invariantes par rapport à G_6 . Cas b) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Il s'agit de voir s'il y a de sextiques invariantes pour G_6 ayant les points 4, 5, 6 pour points doubles et, conformément aux cas α) et β), le point 1 pour point quadruple.

Une sextique ayant cette dernière propriété a une équation de la forme

$$x_1^2(a_2x_2^4 + b_2x_2^3x_3 + c_2x_2^2x_3^2 + d_2x_2x_3^3 + e_2x_3^4) + \\ + x_1(a_1x_2^5 + b_1x_2^4x_3 + c_1x_2^3x_3^2 + d_1x_2^2x_3^3 + e_1x_2x_3^4 + f_1x_3^5) + \\ + a_0x_2^6 + b_0x_2^5x_3 + c_0x_2^4x_3^2 + d_0x_2^3x_3^3 + e_0x_2^2x_3^4 + f_0x_2x_3^5 + g_0x_3^6 = 0$$

Appliquons à cette courbe la transformation T ; on trouve que cette sextique se reproduit par T si elle possède une des formes:

$$c_2x_1^2x_2^2x_3^2 + b_1x_1x_2^4x_3 + e_1x_1x_2x_3^4 + a_0x_2^6 + d_0x_2^3x_3^3 + g_0x_3^6 = 0 \quad (A)$$

$$a_2x_1^2x_2^4 + d_2x_1^2x_2x_3^3 + c_1x_1x_2^3x_3^2 + f_1x_1x_3^5 + b_0x_2^5x_3 + e_0x_2^2x_3^4 = 0 \quad (B)$$

$$b_2x_1^2x_2^3x_3 + e_2x_1^2x_3^4 + a_1x_1x_2^5 + d_1x_1x_2^3x_3^3 + c_0x_2^4x_3^2 + f_0x_2x_3^5 = 0 \quad (C).$$

Les courbes (B) et (C) contiennent simplement les points 2, 3, ce qui rentre dans le cas β). Donc, c'est seulement la courbe (A) qui rentre dans le cas α), mais, comme le point 2 doit être point double, il faut que $a_0=0$. Mais en ce cas la courbe (A) dégénère; nous ne considérons, en principe, que des sextiques simples.

Il nous reste à considérer les courbes (B), (C) au point de vue du cas β). La courbe (B) a au point O_2 la tangente

$$x_3 = 0.$$

au point O_3 la tangente $x_1 = 0$.

La conique k_3 qui correspond dans J au point O_3 , touche (v. num. 7.) la droite $\overline{O_2 O_3}$ au point O_2 , donc, elle n'y touche pas la sextique (B). Comme elle la coupe aux points $O_1, O_2, 4, 5, 6$, ce qui fait, en tout, 11 intersections, il existe un douzième point d'intersection, différent de O_2 . Par celui-ci doit passer, comme on se rend facilement compte, la courbe correspondant à la tangente de (B) au point O_3 , si cette courbe se reproduit, comme nous le demandons, par J . Mais la tangente en O_3 est la droite $\overline{O_2 O_3}$, ne coupant k_3 qu'au point O_2 . Donc, la courbe (B) ne peut pas se reproduire par J et une considération analogue fait voir que le même a lieu pour (C). Donc, le cas b) β) n'existe non plus.

Passons au cas γ). Une sextique ayant les points O_1, O_2

pour points triples sans contenir le point O_3 a l'équation de la forme :

$$a_0 x_3^6 + x_3^5 (a_1 x_1 + b_1 x_2) + x_3^4 (a_2 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2) + \\ + x_3^3 (a_3 x_1^3 + b_3 x_1^2 x_2 + c_3 x_1 x_2^2 + d_3 x_2^3) + x_3^2 (a_4 x_1^3 x_2 + b_4 x_1^2 x_2^2 + \\ + c_4 x_1 x_2^3) + x_3 (a_5 x_1^3 x_2^2 + b_5 x_1^2 x_2^3) + a_6 x_1^3 x_2^3 = 0$$

$$\text{où } a_0 \neq 0.$$

En y appliquant l'homographie T , on trouve facilement que cette courbe est invariante pour T seulement si son équation se réduit à la forme

$$a_0 x_3^6 + b_2 x_1 x_2 x_3^4 + a_3 x_1^3 x_3^3 + d_3 x_2^3 x_3^3 + b_4 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + a_6 x_1^3 x_2^3 = 0$$

Le fait que les points 4, 5, 6 sont points doubles de cette courbe se traduit par les relations

$$b_2 + 3a_3 + 2b_4 + 3a_6 = 0$$

$$b_2 + 3d_3 + 2b_4 + 3a_6 = 0$$

$$6a_0 + 4b_2 + 3a_3 + 3d_3 + 2b_4 = 0$$

desquelles on tire

$$b_2 = -2a_0 - a_3 + a_6, \quad b_4 = a_0 - a_3 - 2a_6, \quad a_3 = d_3$$

et l'équation ci-dessus prend la forme

$$k_3^2 (a_0 x_3^2 + a_6 x_1 x_2) - a_3 x_3^2 k_1 k_2 = 0$$

en employant la notation abrégée du num. 2.

Par l'involution J cette courbe se transforme en celle-ci:

$$k_3^2 (a_6 x_1 x_2 - a_3 x_3^2) + a_0 x_3^2 k_1 k_2 = 0$$

Les deux courbes ne sont identiques que pour

$$a_3 = -a_0;$$

donc, la sextique

$$a_0 x_3^3 (k_1 k_2 + k_3^2) + a_6 x_1 x_2 k_3^2 = 0$$

est invariante par rapport à T aussi bien que par rapport à J , donc, par rapport au groupe G_6 .

Toutes ces sextiques constituent un faisceau; il est facile de trouver les points de sa base. Ce sont, outre les points multiples 1, 2, 4, 5, 6 qui donnent 30 intersections, les points où la droite $\overline{13}$ rencontre $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{26}$ et les points où la droite $\overline{23}$ rencontre $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$; en tout, 36 intersections, ce qui détermine bien le faisceau.

On trouve, d'une manière analogue à celle appliquée auparavant qu'il n'y a que la courbe

$a_1x_1x_3^5 + c_2x_2^2x_3^4 + b_3x_1^2x_2x_3^3 + c_4x_1x_2^3x_3^2 + a_5x_1^3x_2^2x_3 + b_6x_1^2x_2^4 = 0$
 qui satisfasse aux conditions du cas δ) et qui soit, en même temps, invariante par rapport à T . Pour que le point $4(5,6)$ soit point double, il faut, de plus, que

$$\begin{aligned} a_1 &= -b_3 - a_5 \\ 2c_2 &= b_3 - c_4 + 2a_5 \\ 2b_6 &= -b_3 - c_4 - 2a_5 \end{aligned}$$

et la courbe prend la forme

$$\begin{aligned} b_3k_3[x_2^2(x_3^2 + x_1^2x_2^2) - 2x_1x_3^3] - c_4x_2^2k_3^2 + \\ + 2a_5k_2k_3(x_3^2 + x_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

c. à d. elle dégénère; donc, il n'existe pas de sextique propre invariante, correspondant au cas δ).

13. Les sextiques invariantes. Cas b) ε . Pour en passer au cas ε), une sextique ayant les points O_1, O_2, O_3 pour points doubles a l'équation

$$\begin{aligned} x_3^4(a_2x_1^2 + b_2x_1x_2 + c_2x_2^2) + x_3^3(a_3x_1^3 + b_3x_1^2x_2 + c_3x_1x_2^2 + \\ + d_3x_2^3) + x_3^2(a_4x_1^4 + b_4x_1^3x_2 + c_4x_1^2x_2^2 + d_4x_1x_2^3 + e_4x_2^4) + \\ + x_3(a_5x_1^4x_2 + b_5x_1^3x_2^2 + c_5x_1^2x_2^3 + d_5x_1x_2^4) + a_6x_1^4x_2^2 + b_6x_1^3x_2^3 + \\ + c_6x_1^2x_2^4 = 0. \end{aligned}$$

En appliquant l'homographie T , on trouve les trois types suivants de cette espèce, invariants pour T :

$$b_2x_1x_2x_3^4 + a_3x_1^3x_3^3 + d_3x_2^3x_3^3 + c_4x_1^2x_2^2x_3^2 + a_5x_1^4x_2x_3 + \\ + d_5x_1x_2^4x_3 + b_6x_1^3x_2^3 = 0 \quad (\text{A})$$

$$c_2x_2^2x_3^4 + b_3x_1^2x_2x_3^3 + a_4x_1^4x_3^2 + d_4x_1x_2^3x_3^2 + b_5x_1^3x_2^2x_3 + \\ + c_6x_1^2x_2^4 = 0 \quad (\text{B})$$

$$a_2x_1^2x_3^4 + c_3x_1x_2^2x_3^3 + b_4x_1^3x_2x_3^2 + e_4x_2^4x_3^2 + c_5x_1^2x_2^3x_3 + \\ + a_6x_1^4x_2^2 = 0 \quad (\text{C})$$

Pour que la courbe (A) admette 4, 5, 6 comme points doubles, les relations suivantes doivent être satisfaites:

$$\begin{aligned} b_2 + 3a_3 + 2c_4 + 4a_5 + d_5 + 3b_6 &= 0 \\ b_2 + 3d_3 + 2c_4 + a_5 + 4d_5 + 3b_6 &= 0 \\ 4b_2 + 3a_3 + 3d_3 + 2c_4 + a_5 + d_5 &= 0 \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} 3a_3 &= -2b_2 - c_4 - 2a_5 + d_5 \\ 3d_3 &= -2b_2 - c_4 + a_5 - 2d_5 \\ 3b_6 &= b_2 - c_4 - 2a_5 - 2d_5 \end{aligned}$$

et l'équation de la courbe (A) devient

$$b_2 (3x_1 x_2 x_3^4 - 2x_1^3 x_3^3 - 2x_2^3 x_3^3 + x_1^3 x_2^3) + c_4 (-x_1^3 x_3^3 - x_2^3 x_3^3 + 3x_1^2 x_2^2 x_3^2 - x_1^3 x_2^3) + a_5 (-2x_1^3 x_3^3 + x_2^3 x_3^3 + (A') + 3x_1^4 x_2 x_3 - 2x_1^3 x_2^3) + d_5 (x_1^3 x_3^3 - 2x_2^3 x_3^3 + 3x_1 x_2^4 x_3 - 2x_1^3 x_2^3) = 0.$$

Pour trouver ce qui correspond à cette courbe par l'involution J , considérons la courbe obtenue en égalant à zéro le coefficient de b_2 :

$$3x_1 x_2 x_3^4 - 2x_1^3 x_3^3 - 2x_2^3 x_3^3 + x_1^3 x_2^3 = 0 \quad (8)$$

C'est une sextique ayant les points 4, 5, 6 pour points doubles, les points O_1, O_2 pour points triples et le point O pour point double aux tangentes

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

Par J , cette sextique est transformée en une courbe du
5.6—2.6—4.4 = 2e

ordre, c. à d. en une conique u_2 . Cette conique doit contenir deux points principaux; en considérant les points d'intersection de la sextique avec les coniques principales, on trouve que ce sont les points O_1, O_2 . La conique ne peut couper la droite $\overline{O_1 O_3}$ en un second point. En effet, comme la conique principale k_3 touche la droite $\overline{O_3 O_1}$ au point O_1 , les deux points O_1, O_3 fournissent un couple de l'involution J sur la droite invariante $\overline{O_1 O_3}$. Donc, à tout point X de cette droite, distinct de $O_1 O_3$, correspond un point de la même droite, distinct de ces deux points. Si la conique u_2 coupait $\overline{O_1 O_3}$ en un point X différent de O_1 (et, bien entendu, différent de O_3), la sextique en question couperait la même droite en un point X' différent de O_1 et de O_3 , ce qui est exclu, puisque la droite $x_2 = 0$, étant tangente à la courbe au point O_3 , ne la coupe pas en dehors de ces deux points. Il en suit que $\overline{O_1 O_3}$ est tangente à u_2 au point O_1 ; on conclut de la même façon que $\overline{O_3 O_2}$ est tangente de u_2 au point O_2 et on a

$$u_2 \equiv x_3^2 - \lambda x_1 x_2 = 0$$

où λ est à déterminer. C'est ce qu'on fait facilement en remarquant que tout point de la droite $\overline{56}$ est point uni pour J et que u_2 coupe cette droite aux mêmes points (autres que les points principaux 5, 6) que la sextique. L'équation

de cette droite est

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

ses points d'intersection avec la sextique sont, outre les points doubles 5 $(1, \alpha^2, \alpha)$, 6 $(1, \alpha, \alpha^2)$, les points aux coordonnées

$$1, -2, 1; -2, 1, 1.$$

Pour que u_2 contienne ces points, λ doit avoir la valeur de $-1/2$ et on a

$$u_2 \equiv 2x_3^2 + x_1x_2 = 0$$

Or, nous savons qu'en appliquant J à (8) on obtient : trois fois les coniques k_1, k_2 , deux fois les coniques k_3, k_4, k_5, k_6 et simplement la conique u_2 , donc, le résultat de la substitution respective est

$$c \cdot k_1^3 k_2^3 k_3^2 k_4^2 k_5^2 k_6^2 (2x_3^2 + x_1x_2) = 0$$

où c est une constante numérique. Pour la déterminer, il suffit de comparer le coefficient d'un terme de cette équation au coefficient du même terme dans l'équation qu'on obtient si l'on substitue, d'après J , directement dans (8). Cette comparaison donne

$$c = 1.$$

Une considération analogue fait voir que le coefficient de a_5 en (A') se change par J en l'expression

$$k_1^2 k_2^3 k_3^3 k_4^2 k_5^2 k_6^2 (2x_1^2 + x_2x_3)$$

et le coefficient de d_5 en l'expression

$$k_1^3 k_2^2 k_3^3 k_4^2 k_5^2 k_6^2 (2x_2^2 + x_1x_3)$$

Quant à celui de c_4 , on sait que

$$\begin{aligned} - (x_1^3 x_3^3 + x_2^3 x_3^3 + x_1^3 x_2^3 - 3x_1^2 x_2^2 x_3^2) &= - (x_1x_2 + x_1x_3 + \\ &+ x_2x_3)(x_1x_2 + \alpha x_1x_3 + \alpha^2 x_2x_3)(x_1x_2 + \alpha^2 x_1x_3 + \alpha x_2x_3) = \\ &= -k_4 k_5 k_6 \end{aligned}$$

et ce produit se change par J — v. num. 8 — en

$$k_1^3 k_2^3 k_3^3 k_4^2 k_5^2 k_6^2.$$

En définitif, si l'on supprime le facteur commun, on voit que la transformée de (A') est

$$\begin{aligned} b_2 k_1 k_2 (2x_3^2 + x_1x_2) + c_4 k_1 k_2 k_3 + a_5 k_2 k_3 (2x_1^2 + x_2x_3) + \\ + d_5 k_1 k_3 (2x_2^2 + x_1x_3) = 0 \end{aligned}$$

et il s'agit de voir si cette courbe peut être identique à (A'). En mettant en proportion, respectivement, les coefficients

des termes $x_1 x_2 x_3^4$, $x_1^4 x_2 x_3$, $x_1 x_3^4 x_2$, $x_1^2 x_2^2 x_3^2$, on obtient les relations

$$\begin{aligned} 3b_2 &= k(2b_2 + c_4 - a_5 - d_5) \\ 3a_5 &= k(-b_2 + c_4 + 2a_5 - d_5) \\ 3d_5 &= k(-b_2 + c_4 - a_5 + 2d_5) \\ c_4 &= k(b_2 + a_5 + d_5) \end{aligned}$$

En ajoutant les trois premières, on obtient

$$\begin{aligned} b_2 + a_5 + d_5 &= kc_4 = k^2(b_2 + a_5 + d_5) && \text{c. à d.} \\ (k^2 - 1)(b_2 + a_5 + d_5) &= 0 \end{aligned}$$

La solution $b_2 + a_5 + d_5 = 0$ donne $c_4 = 0$ et de la première relation suit $k = 1$. Donc, cette solution rentre comme cas particulier dans l'une des solutions générales

$$k = 1, \quad k = -1.$$

Le cas $k = 1$ donne $c_4 = b_2 + a_5 + d_5$ ce qui résout toutes les relations (9). En ce cas, l'équation (A') prend la forme

$$\begin{aligned} b_2(x_1 x_2 x_3^4 - x_1^3 x_3^3 - x_2^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2) + a_5(-x_1^3 x_3^3 + \\ + x_1^4 x_2 x_3 - x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2) + d_5(-x_2^3 x_3^3 + x_1 x_2^4 x_3 - \\ - x_1^3 x_3^3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2) = 0 \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$b_2 x_3^2 k_1 k_2 + a_5 x_1^2 k_2 k_3 + d_5 x_2^2 k_3 k_1 = 0 \quad (10)$$

On se rend immédiatement compte qu'en effet cette sextique est invariante pour J et, par conséquent, pour G_6 , pour toutes les valeurs de b_2, a_5, d_5 .

Pour $k = -1$ on a d'abord

$$-c_4 = b_2 + a_5 + d_5;$$

les trois premières relations (9) donnent

$$\begin{aligned} 2b_2 - a_5 - d_5 &= 0 \\ 2a_5 - b_2 - d_5 &= 0 \\ 2d_5 - b_2 - a_5 &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire $b_2 = a_5 = d_5$, donc $c_4 = -3b_2$.

Dans ces conditions, (A') prend la forme

$$x_1^4 x_2 x_3 + x_1 x_2^4 x_3 - x_1 x_2 x_3^4 - 3x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0$$

c. à d.

$$x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3) (x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3) = 0$$

Cette sextique composée de six droites est, en effet, invariante pour J , donc, pour G_6 .

En définitif, il n'y a qu'une espèce de sextiques, invariante pour G_6 et satisfaisant aux conditions du cas ϵ) (A), définie par l'équation (10). Cette courbe est touchée en O par $O_i O_k$ et $O_i O_h$, i, h, k étant une permutation quelconque de trois éléments 1, 2, 3. Toutes ces sextiques constituent un réseau et ne se coupent qu'aux points principaux, ceux-ci présentant 30 intersections. Il en suit, comme au num. 11, que chaque couple de groupes à six points, obtenus par l'application de G_6 , détermine une courbe de ce réseau.

Traisons sommairement les courbes (B) et (C) du cas ϵ). Pour que la courbe (B) admette, comme points doubles, les points 4, 5, 6, les relations doivent avoir lieu

$$2a_4 = -b_3 - b_5, \quad 2c_2 = -b_3 - d_4, \quad 2c_6 = -d_4 - b_5$$

et l'équation prend la forme

$$b_3 x_3^2 k_1^2 + d_4 x_2^2 k_3^2 + b_5 x_1^2 k_2^2 = 0$$

dont la transformée est

$$b_3 x_3^2 k_2^2 + d_4 x_2^2 k_1^2 + b_5 x_1^2 k_3^2 = 0$$

Ces deux courbes sont essentiellement différentes, puisque la courbe primitive a pour tangentes au point O_1 la droite double

$$x_3^2 = 0$$

tandis que la courbe transformée a, au même point, pour tangentes la droite double

$$x_2^2 = 0.$$

Pour que la courbe (C) aient les points 4, 5, 6 pour points doubles, elle doit avoir la forme

$$c_3 x_3^2 k_2^2 + c_5 x_2^2 k_1^2 + b_4 x_1^2 k_3^2 = 0$$

c. à d. la forme de la transformée de (B). Donc, cette courbe non plus n'est invariante pour G_6 . Ainsi, le cas ϵ) est épuisé.

14. Les sextiques invariantes. Cas c). Il y a, en général, trois types de sextiques invariantes pour T ; je me borne à écrire les termes contenus dans les équations respectives:

$$(A): x_1^6, x_2^6, x_3^6, x_1^4 x_2 x_3, x_1 x_2^4 x_3, x_1 x_2 x_3^4, x_1^3 x_2^3, v_1^3 x_3^3, x_2^3 x_3^3, x_1^2 x_2^2 x_3^2$$

$$(B): x_1^5 x_2, x_2^5 x_3, x_1 x_3^5, x_1^4 x_3^2, x_1^2 x_2^4, x_2^2 x_3^4, x_1^3 x_2^2 x_3, x_1 x_2^3 x_3^2, x_1^2 x_2 x_3^3$$

$$(C): x_1^5 x_3, x_1 x_2^5, x_2 x_3^5, x_1^4 x_2^2, x_2^4 x_3^2, x_1^2 x_3^4, x_1^3 x_2 x_3^2, x_1^2 x_2^3 x_3, x_1 x_2^2 x_3^3.$$

Conformément au cas α) les termes x_1^6, x_1^5, x_2^6 devraient

manquer. En ce cas, la courbe (A) aurait le point O_2 pour point double, ce qui est exclu; les courbes (B) et (C) passeraient par le point O_3 , mais ceci est, de même, exclu, donc il n'y a pas de sextiques invariantes correspondant au cas α).

Conformément au cas β), les termes x_1^6, x_2^6, x_3^6 devraient manquer. En ce cas la courbe (A) aurait ces trois points pour points doubles, ce qui est exclu. Quant à la courbe (B), elle a au point O_1 la tangente $x_2=0$, au point O_2 la tangente $x_3=0$, au point O_3 la tangente $x_1=0$. Mais une telle sextique ne saurait se reproduire par J . En effet, considérons p. ex. le point O_1 . La tangente en ce point étant invariante pour J , elle doit couper la conique principale k_1 au même point que la sextique. Mais cette droite touche la conique au point O_3 , tandis que le douzième point d'intersection de k_1 avec notre sextique, celui qui fait que la transformée passe encore par le point O_1 , est O_2 . Donc, la courbe (B) ne peut se reproduire par J et il en est de même de la courbe (C). Le cas c) ne conduit à aucune sextique invariante.

Ainsi, la discussion des sextiques invariantes pour le groupe G_6 est terminée.

15 **Conclusion.** Nous avons trouvé qu'un groupe de six points peut se trouver dans la deuxième position caractéristique, définie plus haut, d'une double manière, ce qui donne naissance à un groupe du 4e ordre, ou même d'une triple manière, ce qui donne naissance à un groupe du 6e ordre. On voit, en même temps, que par ces deux cas, toutes les possibilités qui peuvent se présenter dans cet ordre d'idées sont épuisées.

XII.

Příspěvek ke geobotanickému prozkumu středního Polabí.

Napsal Doc. Dr. **Jaromír Klika.**

(Předloženo dne 1. října 1929.)

Nížina středního Polabí byla od předopizovské doby předmětem floristického výzkumu. Fytogeografický její výzkum zahájil univ. prof. dr. K. Domin (1.—5. Beitrag z. Kenntnis d. Phanerogamenflora v. Böhmen. — 1902—1909). Celkový ráz fytogeografický snažil se zachytiti v črtě, uveřejněné r. 1919. V mé studii fytogeografické (1922) je shrnuta ve všeobecné části literatura, týkající se výzkumu Polabí, všeobecné klimatické a geologické poměry tohoto kraje. Předmětem této studie sociologické jest vylíčení *geobotanických poměrů labských kyselky*, které jsou nám zachovány dnes již v pouhých zlomech.

Polabské kyselky (černavy)* jsou vlastně zbytky ramen starého řečiště Labe. Dlužno však připomenouti, že část jich byla i umělými hrázemi na čas přeměněna v rybníky (Hrabanov, Velenka). Tvorba rašeliny, zarůstání tůní dalo se v postglaciálu. Starší jsou podle pylových analys (Klečka, 1927) kyselky u Vrutice (nedaleko Mělníka), u Čečelic a Všetat, mladší u Hrabanova. Udržení spodní vody jest podmíněno tím, že se kyselky nalézají v kotlinkách pod kopci nebo pod opukovými hřbety, kde se spodní voda shromažďuje nad nepropustnými vrstvami jílu a slínu blízko povrchu nebo ve

*) Ponechávám název kyselky, který podobně jako černavy, jest název lidový, označující, že tyto louky dávají kyselé ostřicové seno. Samo sebou se rozumí, že nemá nic společného s reakcí půdní. Botanicky nejlépe pak označují je názvy společenstev, resp. svazů společenstev. Názvů obou jako synonym používá v krátkém popisu jejich již **V e l e n o v s k ý** (Mechy české 1897).

vlhčích letech i nad povrchem. Dlužno již předem zdůrazniti, že hlavním činitelem, podmiňujícím vznik různých asociací, jejich facies i sukcesi, jest *výška spodní hladiny vodní*. I mikrorelief při těchto poměrech hraje důležitou roli, jako vůbec při útvarech lučních (viz Domin: Problémy a metody rostlinné sociologie, 1923). Reakce vod a půdy jest vesměs alkalická (Prát-Novák, 1926).

Co se týče *makroklimatických podmínek*, jest průměrná teplota ledna -2.2° , července 19.5° . Rozdíly mezi nejnižší a nejvyšší teplotou $20-22^{\circ}$. Vodních srážek bývá 500—600 mm. Proudění vzduchu jest silnější než na horách. O makroklimatických poměrech teplotních poučí nás nejlépe publikace Gregorova (Tepelné poměry Československa, 1929).

Při zjišťování *mikroklimatických podmínek* omezil jsem se v r. 1928 na sledování maximálních a minimálních teplot v půdě od 5. května do 17. listopadu. V půdě vřetatských kyselků byly umístěny 2 teploměry, jeden v hloubce 5 cm, druhý 20 cm, teplota kontrolována v intervalu 7—8 dní. Abych mohl oceniti dobře získaná data, umístil jsem druhé dva teploměry v týchž hloubkách na stráni cecemínské (210 m), opukové, s jemně hlinitou půdou. Tato jest extrémně suchá. Nalézáme tu na straně jihozápadní fragmenty *Caricetum humilis*, přecházející místy vlivem spásání v *Brachypodietum pinnati*, jinde význačné fragmenty *Festucetum sulcatae*. Získaná data jsou sestavena v tabulku a v diagram, názornější, poučejší jest sledovati průběh rozdílu mezi maximem a minimem jednotlivých stanic.

Rozdíly maxim. a min. teplot během pozorování:

Kyselky:	28. IV. — 3. V. — 13. V. — 19. V. — 27. V. — 2. VI. — 9. VI. —
teploměr. č. 1.	19° 16° 12° 10.5° 10° 13.5°
teploměr. č. 2.	8.5° 14° 8° 5° 5° 5.5° 7.5°

— 16. VI. — 23. VI. — 4. VII. — 11. VII. — 18. VII. — 25. VII. — 13. VIII. —
14° 10° 14° 14.5° 16° 9.5° 8.5°
8° 5.5° 9° 4.5° 9° 7° 5.5°

— 12. VIII. — 19. VIII. — 25. VIII. — 1. IX. — 8. IX. — 15. IX. — 25. IX. —						
9·5°	9°	9°	7·5°	9·5°	6°	13°
5°	4°	5°	5·5°	6·5°	4·5°	8·5°

— 29. IX. — 13. X. — 20. X. — 30. X. — 17. XI.				
9·5°	11°	10·5°	16°	9°
5°	11°	8°	7·5°	6°

Cecemínská stráň.	28. IV. — 3. V. — 10. V. — 19. V. — 25. V. — 2. VI. —				
teploměr č. 3.	18°	15·5°	14·5°	11·5°	17°
teploměr č. 4.	15°	11·5°	10·5°	8·5°	14·5°

— 9. VI. — 16. VI. — 23. VI. — 4. VII. — 11. VII. — 18. VII. — 25. VII. —						
16·5°	20·5°	15°	22°	21·5°	27°	15·5°
12°	15°	16°	13·5°	13·5°	15°	? 5°

— 3. VIII. — 12. VIII. — 19. VIII. — 25. VIII. — 1. IX. — 9. IX. — 16. IX. —						
19°	11°	19·5°	15°	17°	17°	16°
11·5°	15°	13°	8°	10°	14°	7·5°

— 25. IX. — 29. IX. — 13. X. — 20. X. — 30. X. — 5. XI. — 17. XI. —						
18°	11°	15°	13°	11°	8·5°	7·5°
14°	7°	10°	9·5°	8°	0·5°	6°

Všimneme-li si průběhu teplot, tu vidíme, podle zkušenosti získané při pozorování na Karlštejnsku a Lounsku, že křivka maxim půdy sleduje vlastně průběh teploty povrchu půdy, jest vyrovnanější, ale účinek insolace jest znatelnější. Průběh nejvyšších teplot spadal do července, první období maximálních teplot bylo v první polovici června, druhé, související s nejvyšší teplotou, od počátku července do konce srpna. Vliv suchého a teplého (až abnormálního) léta se tu též krásně odráží. Na jaře a na podzim jsou přirozeně maxima teploty půdní vyšší než vzduchu.

V hloubce 5 cm jsou minima ve světlé minerální půdě (teploměr č. 3) jen o málo vyšší než minima v černé půdě kyselé (teploměr č. 1), průběh maximálních teplot jest přirozeně vyšší na cecemínské stráni. Difference maxim. a minim. teplot, zjišťovaných teploměrem č. 3, jsou mnohem větší než

v kyselkách, jsou tu na vápencové suché půdě větší extrémy v půdní teplotě.

V hloubce 20 cm jest průběh v obou případech vyrovnanější, minimální hodnoty sobě bližší a v maximálních teplotách vystupuje tu opět značný rozdíl mezi oběma stanovisky.

Co se týče půdní teploty kyselek, vidíme, že půdy tyto jsou přirozeně chladnější než světlé půdy minerální. Půda, promíšená četnými odumřelými zbytky organickými, prosycená vodou, brání teplu vnikati dovnitř. Značný vliv má souvislý pokrýv rostlinný, tvořící mocný drn, i ten zabraňuje vnikání tepla a zvyšuje povrchové vyzařování. Jest pravda ovšem, že černá půda intensivněji absorbuje teplo, ale v noci silněji je vyzařuje. Radí se půdy kyselek v tepelných svých poměrech k chladným půdám rašelin, kde poměry jsou ještě extrémnější. Při odvodňování se tyto poměry asi podobně jako u rašelin zhoršují, pouze tam, kde jest příměs písku nebo větší množství vápnité světlejší půdy, jsou poměry příznivější a tam se právě uchycují xerofilnější druhy.

A právě na těchto vlhkých a chladnějších půdách udržely se druhy typického sdružení sášinového a bezkolence. Chladnější půda jest též příčinou pozdního jara vegetace na kyselkách.

Na ráz společenstev měla značný vliv meliorace, odvodnění a přeměnění sousedních ploch v pole. Jí byla též podmíněna sukcese k suchým loukám i loukám kulturním, ona způsobila, že nalézáme místy pouhé fragmenty jednotlivých společenstev, různě se prostupující. Podobný význam má i pravidelné sekání (pouze ve Schoenetu prováděné jednou ročně), umožňující pronikati jednotlivým travinám do původních společenstev. Nejlépe nám vysvitne význam těchto asociací a fragmentů, srovnáme-li je s asociacemi, vyskytujícími se ve větší rozloze a zachovaleji ve Švýcarsku a ve Francii. Měl jsem příležitost jednak z autopsie při exkursích s dr. Braun-Blanquetem sledovati tyto poměry ve zmíněných územích, jednak mohl jsem se, a to hlavně, opřít o znamenitou monografii Kochovu (1926*) a práci Allorgeovu.**)

*) D. Vegetationseinheiten d. Linthebene unter Berücksichtigung d. Verhältnisse in d. Nordostschweiz. — 1926.

**) Les associations végétales du Vexin français. — 1922.

Vodní vegetace jest omezena jednak na koryta potoků a odvodňovacích stok, jednak na rybníčky, povstálé nebo rozšířené vypícháním rašelin. Tím si vysvětlíme, že vodní společenstva jevnosnubných jsou zastoupena pouze fragmentárně. K nejtypičtějším mechům těchto vod náleží *Hypnum scorpioides*, srážení vápence obstarávají některé druhy char (zejména *Chara foetida*, *Ch. fragilis*), tvořící ve vodách v nehlubších místech celé význačné louky. Též *Philonotis calcarea* přispívá k usazování vápence.

Ze svazu *Potamion eurosibiricum* (Koch, 1926) zastoupeno jest fragmentárně *Myriophylletto-verticillati-Nupharium*. Z význačných druhů v našich vodách nalézáme *Nuphar luteum* (Hrabanov), *Potamogeton natans*, *P. lucens*, *P. pusillus* (Hrabanov), je doprovázejí *Utricularia vulgaris*, *U. neglecta*, *P. coloratus*, *Ceratophyllum demersum*. Právě tato společenost odpovídá tichým vodám nehlubokých tůní. Přispívá ovšem též k rychlému usazování bahna.

K této asociaci přistupuje pruh více nebo méně vyvinutých společenstev, patřících k svazu *Phragmition communis*. Nejrozšířenější z nich jest společenstvo rákosin, *Scirpeto-Phragmitetum*, k němuž můžeme započítati řadu subasociací, považovaných různými autory i za samostatná společenstva. Pro Hrabanov jest význačná subasociace s *Cladium mariscus*. Význam její ocenil Allorge (1922): přispívá u drenážních stok i v rybníčcích k tvoření pevné země, hromadění humusu. Opětně u nás pouze fragmentárně zastoupená, jak svědčí snímky: Hrabanov, u rybníčku 300—500 m²: *Cladium mariscus* 3, *Phragmites* 2—3, *Scirpus maritimus* 1—2, *Carex Hudsonii* + (2); u odvodňovacího příkopu na Hrabanově 10 m²: *Cladium* 2—3, *Juncus lamprocarpus*, *Carex Hudsonii*, *Galium palustre*, *Mentha aquatica* 1, *Lythrum salicaria*. Na hlubších místech proniká *Cladium* do porostů *Scirpus lacustris*, *Heleocharis palustris*. *Cladium*, podobně i *Phragmites* nalezneme v následujících společenstvech ve *Schoenetum* a *Molinietum*, kde nám označují sukcesí.

Místy uplatňuje se *Scirpeto-Phragmitetum typicum* (se *Scirpus maritimus*, *Phragmites*, *Heleocharis palustris*), případně jednotlivé složky tvoří čisté porosty, z nichž *Scirpus maritimus*, *Phragmites* zasahují do hlubších vod. Na místech

vyrýpaných, po případě i na občasně vysychajícím dně se udrží *Scirpeto-Phragmitetum typhosum* (*Typha latifolia* 2, *Alisma plantago* +, *Galium uliginosum*, na vyvýšených sušších místech přistupují *Carex Hostiniana*, *Triglochin palustre*, *Agrostis alba*, *Mentha aquatica*). V občas vysychajících mělkých příkopech kyselek nalézáme *fragmenty* asociace *Glycerieto-*



Obr. 1. „Rybníček“ na Hrabanovských kyselkách, v pozadí porosty *Phragmitetum* s převládajícím *Cladium mariscus*. (viz text), v popředí *Carex elata*, budovatel nové pudy.

Sparganietum, vykazující již určité vztahy k *Bidentetum tripartiti*. K význačným druhům této asociace patří *Sparganium erectum* (vzácnější *S. simplex*), *Glyceria plicata*, *G. fluitans*, *Veronica beccabunga*, *Scrophularia alata*, které jsou doprovázeny dr. *Scirpus silvaticus*, *Caltha palustris*, *Ranunculus repens*, *Lythrum salicaria*, *Juncus articulatus*. Při nepatrné rozloze vodních ploch na kyselkách, vlivem drenáže i rýpání rašeliny se tyto fragmenty často prostupují a tvoří místy i dosti pestrou mosaiku. Na občasně vysychajících místech na Hrabanově přistupuje i *Calamagrostis stricta*.

K zmíněným asociacím připojuje se svaz *Magnocaricion*, zahrnující *Caricetum Hudsonii* (*elatae*) a *C. inflato-vesicariae*. U nás na kyselkách pouze první zastoupeno fragmentárně.

Největší úlohu dynamickou má tu vůdčí druh *Carex Hudsonii* (někde nahrazená nebo provázená *C. caespitosa*). Vniká jako přední pionýr i do předešlé asociace Scirpeto-Phragmitetum a přispívá nemalou měrou k budování pevné země. Příkladem uvádím snímek z Hrabanova (300 m² — 90—100%



Obr. 2. Scirpeto — Phragmitetum typhosum na Hrabanovských kyselkách (viz text).

pokryvnost): *Carex Hudsonii* 2.3, *Lythrum salicaria* 2.2, *Ranunculus repens* 2.2, *Galium palustre* 1, *Valeriana dioica* 1, k nim přistupují *Phragmites* 2.2, *Mentha aquatica*, *Scirpus lacustris*, *S. Tabernemontani*, *Cardamine pratensis*, *Potentilla anserina* 2.2, *Carex Goodenoughii*, *C. Oederi*, *C. vesicaria* (!), z keřů *Salix repens*, *S. aurita*. Z mečů bývají tu zástupci r. *Hypnum*, pokrývající podobně jako ve *Schoenetum* velké plochy (*H. intermedium*, *H. exanulatum*, *H. stellatum* etc.). Nutno připomenouti, že naše *Caricetum Hudsonii* jest odchylnou variantou od švýcarského. *Caricetum vesicariae*, k jehož věrným druhům Koch počítá *Carex pseudocyperus*, *C. riparia*, *Lysimachia thyrsiflora*, *Cicuta virosa*, *Oenanthe aquatica*, zdá se býti zastoupeno pouze v nepatrných fragmentech, nedovolujících bližšího studia.

Vývoj, který dnes pozorujeme na zbytcích tůní a ve vodních příkopech, jest v podstatě týž, jak se odehrával při zarůstání tůní, povstalých ze starých labských ramen. Vytvoří se pevná půda, již zaujme nejvýznačnější svaz společenstev, *Molinion coeruleae*. Tomu věnovány jsou příslušné statě ve zmíněných publikacích; kromě studie Schröterovy třeba připomenouti i práce Ruoffové (1922) a Scherrerovu (1925), obírající se výlučně tímto svazem.

Mezi tento svaz a *Magnocaricion* vkládá se na našich kyselkách nejtypičtější asociace, *Schoenetum nigricantis bohemicum*, vyžadující vlhčí půdy. Dlužno zdůrazniti, že ve vývoj i životní podmínky rušivě zasáhla lidská ruka. Nalézáme-li dnes místy na Hrabanově, podle sdělení Klečkova, *Schoenetum* i na místech sušších než *Molinietum caricetosum panicaceae*, jest to sekundární úkaz; *Schoenetum* udrželo se i tu za nepříznivých okolností a vývoj byl zvolněn, případně i zdržen. Vitalita význačných druhů této asociace jest značná. Ostatně fragmenty této asociace nalézáme velmi často v bezprostřední blízkosti odvodňovacích stok a má tu největší vitalitu. I jinde v přirozenějších podmínkách, na př. na Slovensku, ve Francii a ve Švýcarsku, přímo navazuje na *Magnocaricion* a voda po značnou část roku jest přímo pod povrchem.

Naše asociace liší se poněkud od typických švýcarských. K význačným druhům počítám v našich poměrech: *Schoenus nigricans*, *S. ferrugineus*, *Orchis palustris*, *Pinguicula vulgaris (bohemica)*, *Gentiana turfosa*, *Tofieldia calyculata*, *Taraxacum palustre*, *Polygala austriaca*, *Juncus subnodulosus*.

Snímky: (Tabule 2. str. 16—18.)

1. Hrabanov, 180 m, hluboká černá půda, 100 m²—100% pokryv., *Cladium mariscus*, podobně jako ve snímku 7, poukazuje na infraaquatický původ asoc. individua;
2. Vrutice u Mělníka; plochá půda hluboká, černá, krytá silnou vrstvou mechu, 100 m² (asoc. ind. značně homogenní na 1500 m²) 100%; typické asoc. ind.;
3. u stanice vrutické, 60 (120) m²—100%, na půdě sušší (bez mechů!);
4. u Vavřince u Všetat nedaleko železniční trati, hluboká

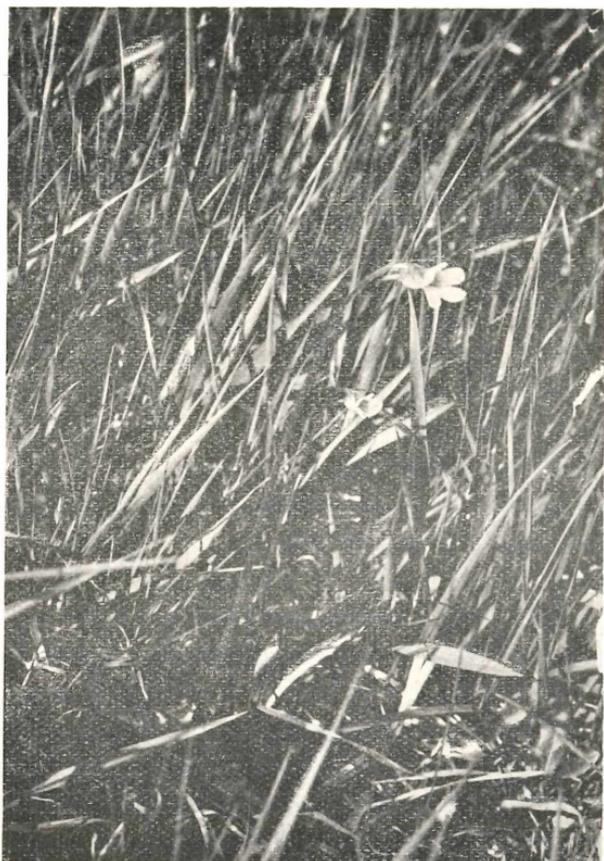
- černá půda, *Schoenus ferrugineus* má již sníženou vitalitu, řada význačných druhů již chybí; spalováno, 100 m²—80%;
5. Vrutická kyselka, hluboká černá půda, 50 m²—90%, mocně vyvinutá mechová vrstva, stadium připíná se na stadia po vypíchané rašelině;
 6. Hrabanov, jemná černá půda, silně vyvinutá rhizosféra, facies s *Carex Hostiniana*; PH 7·1; 100 m²—90%;
 7. tamtéž, černá, hluboká, vápenitá půda, ročně jednou sekáno, 100 m², 80—90%;
 9. tamtéž 300 m², 80—90%: černá hluboká půda, zřejmě sušší facie;
 10. Stará Lysá; 100 m²—100%; mazlavá vlhká až mokrá půda, význačná mechovitá vrstva (*Schoenetum ferruginei bohemicum typicum*), facies s *Juncus subnodulosus*, *Hydrocotyle*; sekáno;
 11. Stará Lysá; sušší, odvodněná půda, koseno, přimíšeny četné prvky kulturních luk.

Z mečů v individuích, jež jsou v plném rozvoji, jsou význačné *Drepanocladus intermedius*, *Campylium stellatum*, *Ctenidium molluscum*, *Scorpidium scorpioides* a j.

Tato asociace vyžaduje vlhké hluboké půdy, bohaté na uhličitán vápenatý; často nalézáme i typicky vytvořenou luční křídu. Nutno odlišiti jarní aspekt (V—VI), význačný rozkvětem většiny význačných druhů (*Schoenus*, *Pinguicula*, *Polygala austriaca*, *Tofieldia*, *Crepis succisifolia*, *Orchis palustris*) a ostřic, od letního (VIII, IX), kdy se v hnědi uplatňuje *Molinia*, *Rhinanthus serotinus*, *Gentiana turfosa*, *Parnassia*.

Celkově nutno zdůrazniti, že u nás nemusíme odloučiti jako samostatnou asociaci individua s převládajícím *Schoenus ferrugineus*. Liší se pouze tím, že v Čechách jest facií suchomilnější (ač ne vždy), do níž vstupují častěji druhy *Molinieta*. Od našeho typického *Schoenetum nigric. bohemicum* můžeme u nás odloučiti facii s *Cladium mariscus*, které poukazuje na infraaquatický původ těchto asocičních individuí. Zajímavá facie s *Juncus subnodulosus* (snímek 10) má některé druhy, patřící k *Juncetum subnodulosi* Koch 1926.

Na Slovensku podařilo se mně u Mošovců a Štubňanských Teplíc zjistiti *Schoenetum schoenetosum ferruginei* poněkud odchylného rázu. Sukcesi jeho bude nutno ještě sledo-



Obr. 3. *Pinguicula bohemica* na Hrabanovských kyselkách, význačný druh porostů šášinových.

vati. Jsou to infraaquatická asociční individua, význačná mechovou vrstvou.

1. Loučka u Mošovců 505 m, jílovito-písčitá, značně vlhká půda, PH 6-8: *Schoenus ferrugineus* 3.3, *Primula farinosa* 2.2, *Polygalla austriaca* 1; k nim přistupuje *Molinia* 1.2, *Briza* 1, *Phalaris* 2, *Agrostis vulgaris* +, *Eriophorum latifolium* 1; *Carex panicea* 1.2, *C. Davalliana* 2.2—3, *C. Hostiniana* + (2), *C. flava* +, *Juncus articulatus* +, *Valeriana dioica* 1, *Parnassia*

2.2, *Ranunculus acer* 1, *Lythrum salicaria* 1.2, *Cirsium palustre*, *Vicia cracca*, *Centaurea elatior*, *Equisetum palustre*, *Rhinanthus maior*, *Ononis spinosa*, *Hypnum stellatum* 2.

2. *Schoenetum schoenetosum ferruginei* u sv. Michala (Štubň. Teplice): černá půda téměř pod hladinou spodní vody, PH 7.2; půda kopečkovitá, *Schoenus* s význačnými druhy ve vlhčích prohlubeninách, *Molinia* se suchomilnějšími druhy na vyvýšeninách: *Schoenus ferrugineus* 2.2, *Primula farinosa* 1.2, *Pinguicula* 2.2, *Triglochin* 1.1, *Menyanthes* 2.2, k nim se přidružuje *Molinia* 2.2, *Carex Hostiniana* 2.2, *C. panicea* 2.2, *C. Davalliana* 1.2, *Linum catharticum* 1, *Potentilla tormentilla* 2.3, *Pedicularis palustris*, *Trifolium fragiferum*. Význačné jest *Hypnum stellatum* 4.5; 100 (1500) m²—100%.

Koch zařadil švýcarské *Schoenetum* do svazu *Caricion fuscae*. Rozlišuje jako geografické variety *Schoenetum nigrantis helveticum*, *S. s. ferr. subalpinum*. *Allorge* (1922) popsal *S. n. parisiense*, jež řadí mezi »associations des tourbières à Hypnacées« a označil je jako »Association à *Schoenus nigricans* et *Juncus obtusiflorus*«. Jest význačné několika atlantskými druhy. Naše *Schoenetum* jest blízké *Kochovu* a *Allorgeovu*. V jižní Francii může *Schoenus nigricans* podobně jako *Cladium mariscus* vystoupiti jako ubikvist v různých vodních společenstvech, tvoří s *Carex panicea* význačnou facii společ. *Caricetum elatae*. Od této facie dlužno však odlišiti zcela odchylnou asociaci, kterou prostudoval *Braun-Blanquet*, v níž jest *Schoenus nigricans* dominantním a provázen četnými halofyty. Jest ovšem zcela odlišná od všech předešlých, jak ukazuje již *Braunovo* označení této asociace »*Schoenus nigricans* — *Plantago crassifolia*« a zařazení do odchylného svazu.

Největší část povrchu kyselek zaujímají asociace, které *Koch* zařazuje do svazu *Molinion coeruleae*. Za význačné druhy pro tento svaz uvádí *Koch* *Molinia coerulea*, *Serratula tinctoria*, *Lysimachia vulgaris*, *Ophioglossum vulgatum*. Prvé tři jsou velmi hojně zastoupeny na našich kyselkách, poslední bylo mnou nalezeno na kyselkách vřetatských. *Molinietum* vyžaduje půdy bohaté na vápno, draslík, dostatečně vzdušné, černé a černohnědé (»černavy«). Důležitá jest opětně výška hladiny spodních vod. V létě bývá půda na povrchu vyschlá,

značně porosní. Molinietum našich kyselek možno přiřaditi k subasociaci *Molinietum caricetosum paniceae*, vývojově vázané k Schoenetum. Jest téhož rázu jako Kochova subasociace ve Švýcarsku. K význačným druhům patří *Molinia coerulea*, *Sanguisorba officinalis*, *Serratula tinctoria*, *Cirsium palustre*, *Gentiana pneumonanthe*, *Inula salicina*, k nim možno připočísti *Iris sibirica* (zjištěný mnou u Všetat). Koch uvádí ještě *Laserpitium prutenicum* a *Selinum carvifolia*. Mnohem větší výčet význačných druhů uvádí Scherrer ve své subasociaci *Molinietum molinosum*, jež by se však blížila našim suchomilnějším faciím nebo přechodním stadiím k sušším loukám. Koch rozlišuje *Molinietum* podle ubývající vlhkosti v *M. caricetosum Hostiniana*e (nejvlhčí subasociaci, přimykající se k Schoenetu), *M. caricetosum paniceae* (*Molinietum typicum*) a *M. caricetosum tomentosae*. Lze zjistiti v našich asociacích individuích určité náběhy k vytvoření *M. caric. Hostiniana*e, setkáváme se i s určitými diferenciálními druhy této subasociace. Nemožno však těchto fragmentů použiti. Některé diferenciální druhy třetí subasociace Kochovy určují u nás suchomilnější facie.

Snímky (Tabule 3. str. 19—22):

1. 210 m, u Staré Lysé, hluboká černá půda, 100 m²—90%;
2. u Vavřince blíže Mělníka, černohnědá jílovitá půda, 100 m²—100%;
3. Hrabanov u Lysé, 100 m²—80%, půda černá, hluboká;
4. Všetaty, hluboká, černá, vlhčí půda, 100 m²—100%;
5. Hrabanov, černavá hluboká půda 100 m²—100%;
6. St. Lysá, 75 m²—100%, odvodněno, náběh ke kulturním loukám;
7. kyselky u Přívor, pod šedou vrstvou hlíny bílá vápencová vrstva, 100 m²—100%;
8. kyselky u Čečelic, 100 m²—100%, hluboká půda, sušší facie; význačný výskyt *Dianthus plumarius*;
9. tamtéž, 100 m²—100%; význačná suchomilná facie;
10. kyselky u Přívor na vyvýšeném sušším místě, 100 m²—100%.

Snímek 1.—6. jest brán v aspektu jarním, 7.—10. v podzimním.

Louky jsou pravidelně dvakrát koseny, nedostatečně odvodňovány. Zásah lidský v partiích sušších podporuje šíření *Bromus erectus* a suchomilnějších druhů (*Campanula glomerata*, *Betonica officinalis*, *Daucus carota*, *Ononis spinosa*, *Picris hieraciifolia*, *Centaurea jacea*, *Campanula rotundifolia*, *Festuca ovina*). Tuto společnost můžeme označiti jako *Molinietum brometosum*. Xerofilní ráz může býti důkladnějším odůvodňováním stupňován. Jsou to již společenstva blízká *Mesobrometum brachypodietosum*. Blízké příbuzenství k *Molinietum* jest tu zřejmé. Blízká jsou švýcarskému *Mesobrometum*, ale svou chudobou liší se od Schererova *Brometum brometosum*.

K doplnění uvádím dva snímky tohoto společenstva.

1. Všetaty, 100 m²—100%; půda šedočerná, vespod šedá, bohatá, odvodněná: *Bromus erectus* 3.4, *Brachypodium pinnatum* 1.2, *Onobrychis viciaefolia* 1.2, *Tetragonolobus* 2.2, *Galium verum* 1.2, *Briza* 1, *Bupleurum falcatum* 1.1, *Ranunculus polyanthemus* 1, *Campanula glomerata* 1.2, *Ononis spinosa*, *Cirsium arvense*, *Cardamine pratensis*, *Plantago media*, *Poterium sanguisorba*, *Polygalla oxyptera*, *Crepis succisifolia*, *Reseda luteola*, *Potentilla opaca*, *Pimpinella saxifraga*, *Orchis militaris*, *Trifolium alpestre*, *Achillea collina*, *Centaurea jacea*.

2. U Vavřince, půda šedá, hluboká, vápenitá, 100 m²—100%: *Bromus erectus* 2.2, *Brachypodium pinnatum* 1.2, *Dactylis* 3.3, *Briza* 1.2, *Carex panicea* 1.2 (— v), *Poa trivialis* 1, *Carex hirta*, *Agropyrum repens*, *Carum carvi* 1, *Bellis perennis* 1, *Ranunculus polyanthemus* 1, *Achillea collina* 1, *Taraxacum officinale* 1—2, *Chrysanthemum leucanthemum* 1.2, *Trifolium repens* 2.2, *Lotus corniculatus* 1.2, *Potentilla repens* 1—2, *Leontodon autumnalis*, *Polygalla oxyptera*, *Orchis militaris*, *Convolvulus arvensis*, *Lychnis flos cuculli*, *Galium mollugo*, *Tetragonolobus*.

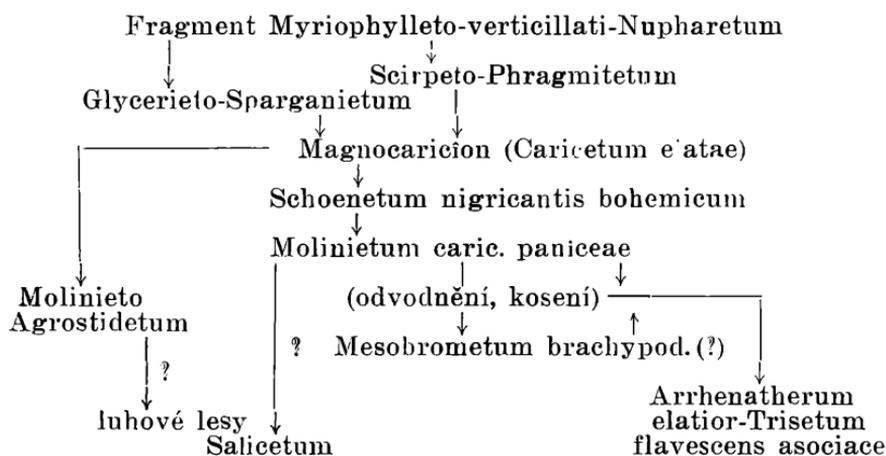
V podzimním aspektu přistupuje *Molinia*.

Z facií *Molinietum typicum* (= *M. caricetosum paniceae*) možno uvésti facií *Carex Davalliana*. Další vývoj *Molinieta* by vedl k *Salicetum*.

Místy setkáváme se s *Molinietem* zvláštního rázu. Jest to společenstvo, povstale zejména na místech, kde byla rýpána

rašelina. V půdě uplatňuje se i písek. Jako příklad uvádím z Hrabanova (100 m²—70%): *Molinia* 3.3, *Sanguisorba* +, *Lysimachia vulg.* 1—2, *Cirsium palustre* + 1, *Lythrum salicaria* 1—2, *Calamagrostis stricta* 1—2, *Agrostis vulgaris* 1, *Deschampsia caespitosa* 2, *Anthoxanthum* 1, *Potentilla tormentilla* 1, *Mentha aquatica* 1—2, *Centaurea jacea* + *Rhinanthus serotinus* +, *Potentilla reptans* 2, *Galium uliginosum* +. Tato asociace přímo navazuje na Magnocaricion. Označuji ji jako *Molinieto-Agrostidetum*, místy s facií *Calamagrostis stricta*. Tato asociace jeví tendenci přejítí v *Salicetum*, nalézáme v ní i dřeviny *Salix alba*, *S. caprea*, *Populus tremula*, označující možný směr další sukcese, jemuž ovšem brání zásah lidský.*)

Vzájemný poměr společenstev na středočeských kyselkách nám nejlépe znázorní následující schema:



*) Na nejlépe obhospodařovaných lukách nalézáme společenosti, které se blíží loukám typu *Arrhenatherum elatior-Trisetum flavescens*, kulturní typ, výhodný již při obhospodařování.

TABULKA I.

Měření teploty v půdě vřetatských kyselck (teploměr č. 1, 2) a na stráni ceceminské (teploměr č. 3, č. 4) v roce 1928.

Teploměr č. 1 v hloubce 5 cm			Teploměr č. 2 20 cm hl.			Teploměr č. 3 5 cm hl.			Teploměr č. 4 20 cm hl.		
Den	Min.	Max.	Den	Min.	Max.	Den	Min.	Max.	Den	Min.	Max.
5. V.	3°	22°	28. IV.	3-5°	12°	3. V.	4-5°	22-5°	3. V.	5°	20°
13. V.	35-5°	21-5°	5. V.	3°	17°	10. V.	8°	23-5°	10. V.	9°	20-5°
19. V.	9°	21°	13. V.	6°	14°	19. V.	6-5°	21°	19. V.	7-5°	18°
27. V.	9°	19-5°	19. V.	9°	14-5°	25. V.	9°	20-5°	25. V.	10°	18-5°
2. VI.	10°	20°	27. V.	9-5°	14°	2. VI.	10-5°	27-5°	2. VI.	10-5°	25°
9. VI.	8-5°	22°	2. VI.	10-5°	16°	9. VI.	10°	26-5°	9. VI.	11-5°	23-5°
16. VI.	11-5°	25-5°	9. VI.	10-5°	18°	16. VI.	12°	32-5°	16. VI.	13°	28°
23. VII.	9-5°	19-5°	16. VI.	12-5°	20-5°	23. VI.	10°	25°	23. VI.	11-5°	21-5°
4. VII.	11°	25°	23. VI.	11-5°	17°	4. VII.	13°	35°	4. VI.	13°	28-5°
11. VII.	10-5°	25°	4. VII.	12°	21°	11. VII.	12-5°	34°	11. VII.	13-5°	27°
18. VII.	11°	27°	11. VII.	18°	22-5°	18. VII.	14°	41°	18. VII.	17°	32°
25. VII.	13°	22-5°	18. VII.	13°	22°	25. VII.	18°	33-5°	25. VII.	22°	27°
3. VIII.	14°	23-5°	25. VII.	14°	21°	3. VIII.	14°	33°	3. VIII.	16-5°	28°
12. VIII.	13°	21-5°	3. VIII.	15°	20-5°	12. VIII.	12°	33°	12. VIII.	14°	28°
19. VIII.	12°	21°	12. VIII.	14°	19°	19. VIII.	12°	31-5°	19. VIII.	14°	27°
25. VIII.	12°	21°	19. VIII.	13°	17°	25. VIII.	14°	29°	25. VIII.	16°	24°
1. IX.	13-5°	21°	25. VIII.	14°	19°	1. IX.	12-5°	29-5°	1. IX.	14-5°	24-5°
8. IX.	12-5°	22°	1. IX.	14°	19 ^{1/2} °	8. IX.	11-5°	28-5°	8. IX.	13°	27°
15. IX.	11°	17°	8. IX.	11-5°	18°	15. IX.	11-5°	22-5°	15. IX.	14°	21-5°
25. IX.	6-5°	19-5°	15. IX.	11-5°	15 ^{1/2} °	25. IX.	6-5°	24-5°	25. IX.	8-5°	22-5°
29. IX.	6°	15-5°	25. IX.	8-5°	17°	29. IX.	8-5°	19-5°	29. IX.	10°	17°
13. X.	5°	16°	29. IX.	8-5°	13-5°	13. X.	4°	19°	13. X.	6°	16°
20. X.	3°	13-5°	13. X.	6°	15°	20. X.	3-5°	16-5°	20. X.	4-5°	14°
30. X.	5°	15°	20. X.	3-5°	11-5°	30. X.	6°	17°	30. X.	7°	15°
17. XI.	4°	13°	30. X.	6°	13-5°	17. XI.	5°	14-5°	17. XI.	7°	13-5°
			17. XI.	5-5°	11-5°			12-5°		5-5°	11-5°

TABULKA 2.

	Schoenetum nigricantis bohemicum										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Význačné druhy:											
<i>(Charakterarten — Charakteristisches)</i>											
Schoenus nigricans.....	3.3	.	3.3—4	.	1.2	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	3.3
S. ferrugineus.....	1.2	3.4	.	2.2
S. intermedium.....	1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	.
Orehis palustris.....	+	1	+
Pinguicula vulgaris (bohémica).....	+	+	+
Gentiana turfosa.....	+	+
Tofieldia calyculata.....	+	+
Juncus subnodulosus.....	2.2
Společnosti tékavé:											
<i>(Begleiter — Compagnes):</i>											
Carex panicea.....	2.3	2.2	1.2	.	3.3	2.2	2.3	2.3	3.3	2.3	3.2
C. Hostimiana.....	+	+	2.2	.	.	1.2	1.2	1.2	.	.	.
C. Davalliana.....	+	.	.	1.2	+
C. distans.....	+	.	.	.	+
C. Oederi.....	+	1.2
C. flava.....
C. Goodenoughii.....
Molinia coerulea.....	1.2	1.2	1.2	2.2	+	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	.
Phragmites communis.....	+	+	2	+	2	+	.	.	.	+	1—2
Briza media.....	+	+	.	1	1	+	1—2
Agrostis vulgaris.....	.	.	+
Juncus alpinus.....
Eriophorum latifolium.....	.	+
Potentilla tormentilla.....	2.2	2.3	2.3	2.2	1.2	2.2	2.2	1.2	1.2	1.2	.

	Schoenetum nigrantis bohemicum											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Náhodné druhy (Zufällige — Accidentelles):												
<i>Centaurea jacea</i>		+	+	2	+	2	1					
<i>Chrysanthemum leucanthemum</i>				1		.	+					
<i>Ranunculus acer</i>		+	+	+		.						
<i>Sanguisorba officinalis</i>				2		.						
<i>Lotus corniculatus</i>			1		1	
<i>Lythrum salicaria</i>		1				.					+	
<i>Anthyllis vulneraria</i>		1				.			1			
<i>Brunella vulgaris</i>			+			.						1
<i>Cirsium canum</i>			+			.						
<i>Dactylis glomerata</i>			+	2.2		.						
<i>Cladium mariscus</i>			+			.						
<i>Anthoxanthum</i>	+					.						1
<i>Bellis perennis</i>						
<i>Serratula tinctoria</i>				+		.						
<i>Filipendula vulgaris</i>						
<i>Holcus lanatus</i>	+					.						1
<i>Knautia arvensis</i>		+				.						
<i>Lathyrus pratensis</i>						+
<i>Medicago minima</i>				+		.						+
<i>M. falcata</i>				2		.						
<i>Plantago media</i>						
<i>Potentilla anserina</i>						
<i>Ranunculus bulbosus</i>						
<i>Thalictrum flavum</i>			1.2			.						+
<i>Trifolium mont. (pratense)</i>				2		.						(1)

	Molinietum caricetosum paniceae										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
<i>Rhynanthus serotinus</i> (major).....	+										
<i>Parnassia palustris</i>	2					(2)					
<i>Tetragonolobus siliquosus</i>		1,2	+	+	+	1-2				1-2	
<i>Trifolium montanum</i>		1				1	2,3	1		1-2	
<i>T. pratense</i>	1,2				1	+	1		+	1-2	
<i>Vicia cracca</i> (sepium).....	(+)										
<i>Agrostis vulgaris</i>											
<i>Betonica officinalis</i>											
<i>Brunella vulgaris</i>						+	1	1	1	1	
<i>Campanula glomerata</i>							1	1		1-2	
<i>C. rotundifolia</i> (patula).....							(+)	1	1	1	
<i>Galium boreale</i>		1						+	1-2	1-2	
<i>Chrysanthemum leucanthemum</i>	1										
<i>Lythrum salicaria</i>		+	+	+	+		1				
<i>Medicago minima</i>		1	+								
<i>Polygala vulgaris</i>		1,2	1						1		
<i>Succisa pratensis</i>							+		1-2		
<i>Valeriana dioica</i>	1		+	+							
<i>Bellis perennis</i>	1										
<i>Bromus erectus</i>								+		1-2	
<i>Eupleurum falcatum</i>								2,2			
<i>Caltha palustris</i>	+			+				1	1		
<i>Carex flacca</i>	1		+								
<i>Cirsium acaule</i>									1		
<i>Deschampsia caespitosa</i>											
<i>Eriophorum latifolium</i>											
<i>Filipendula</i> *vulgaris.....	+			+		1	1			+	
<i>Galium verum</i>	+					1				1-2	
<i>Gynadenia conopsea</i>			+	+							

R é s u m é.

Une contribution à l'étude sociologique des associations de la vallée de l'Elbe (Labe).

C'est une partie centrale de la vallée de Labe qui était déjà au commencement du XX^e siècle le sujet des études floristiques. On fait des études phytogéographiques de cette contrée (Velenovský, Domin, Klika).

Les tourbières à Hypnacées («kyselky» et «černavy»), qui forment, au point de vue botanique, la partie la plus intéressante de nos associations, sont aujourd'hui peu nombreuses. On les trouve près de Hrabanov (non loin de Lysá), près de Všetaty-Liblice et à Vrutice près de Mělník. C'est la présence d'une nappe d'eau tellurique limpide à circulation lente, riche en sels minéraux (carbonate de Ca principalement) qui favorisait la formation et l'accumulation de la tourbe et du sol. La réaction en est toujours alcaline. Aujourd'hui la hauteur de la surface d'eau souterraine est un des facteurs principaux qui provoquent la naissance de nos associations. Mais l'influence de l'homme (surtout le drainage) se fait valoir, les associations changent, puis disparaissent. Souvent ce sont seulement des fragments des associations originales qui survivent.

De même j'ai suivi le maximum et le minimum de température du sol au courant de l'année 1928. J'ai employé les thermomètres maximinimaux de Sixte installés dans la terre. J'en ai installé un à la profondeur de 5 cm, un autre à celle de 20 cm, dans le sol de nos prairies près de Všetaty, à une station du *Molinietum caricetosum paniceae*. Le sol y est profond, noir, sans pierres, riche en carbonate. En vue de comparaison, j'ai installé encore deux thermomètres de Sixte (no 3, 4) dans la même profondeur sur une colline à 210 m de hauteur. Le sol est sec, blanc, squelettique, créacé. Là il y a le *Caricetum humilis* et le *Brachypodietum pinnati*. La pente est située vers Sud-Est. En regardant la table no 1 (voir p. 15) nous pouvons constater que le sol noir et humide du *Molinietum* est plus froid que la terre blanche du *Brachypodietum*. C'est la quantité de débris organiques, puis la couleur noire et l'humidité du sol qui en sont la cause. Il est vrai

que l'eau empêche la naissance de températures extrêmes, de grandes différences entre le maximum et le minimum (voir p. 2—3, où il y a une table de différences des maxima et des minima de nos thermomètres au courant de l'année). Nous voyons le contraire à la seconde station (therm. no 3, 4; le diagramme, p. 15). La température plus basse du sol de nos prairies est la cause d'un retard de la saison printanière.

La végétation aquatique se trouve seulement dans les grands fossés de drainage ou dans des fosses qui restèrent après l'extraction de la tourbe. Ici le *Hypnum scorpioides*, puis le *Philonotis calcarea* appartiennent aux mousses les plus typiques. Les espèces différentes de *Chara* vivent dans les eaux les plus profondes, où elles jouent un rôle édificateur en sécrétant CaCO_3 (de même que le *Philonotis calcarea*).

Nous pouvons distinguer sur notre territoire les associations suivantes:

1. les fragments du *Myriophylleto-verticillati-Nupharetum* (voir p. 5);

2. le *Scirpetum-Phragmitetum* avec une facie à *Cladium mariscus* (voir p. 5) et une facie à *Typha latifolia* (*Scirpeto-Phragmitetum typhosum*, voir p. 6). Les espèces de cette association exercent à la fois le rôle destructeur envers l'association précédente et un rôle édificateur et conservateur envers celle dont elles font partie;

3. les fragments du *Glycerieto-Sparganietum* se tiennent dans les fosses peu profondes et souvent déséchées (voir p. 6);

4. les fragments du *Caricetum Hudsonii* (*Magnocaricion*) jouent un rôle très important dans la naissance du sol (voir p. 7);

5. le *Schoenetum nigricantis bohemicum* vient sur le sol déjà fixé, humide, noir. On y trouve souvent la couverture des mousses typiques (*Drepanocladus intermedius*, *Campylium stellatum*, *Ctenidium molluscum*, *Scorpidium scorpioides* etc.). Cette association ressemble beaucoup à celle de la Suisse (Koch 1926) et de la France (Allorge 1922). Nous voyons les espèces de cette association dans la table 2 (voir p. 16—18). Les relevés provenant de Hrabanov, de Všetaty et de Vrutice sont pris, pour la plupart, sur 100 m². Dans cette table je donne l'abon-

dance et la dominance de chaque espèce. Il faut distinguer l'aspect du printemps (la saison où on voit en fleur *Schoenus*, *Pinguicula*, *Tofieldia*, *Polygala austriaca*, *Crepis succisifolia*, *Orchis spec. div.*) de celui de l'automne. La présence du *Cladium* dans quelques relevés est le signe d'origine infraaquatique. Une facie à *Juncus subnodulosus* a déjà quelques espèces caractéristiques pour le *Juncetum subnodulosi* (Koch 1926). En Slovaquie, j'ai trouvé dans le Grand F'atra le *Schoenetum schoenetosum ferruginei* qui a une composition un peu différente (voir p. 10—11).

6. Le *Molinietum caricetosum paniceae* (qui appartient au *Molinion coeruleae*) couvre la plus grande partie de nos prairies. C'est une association qui suit le *Schoenetum* (voir le schéma de la succession p. 14); elle exige une terre plus sèche, poreuse, bien aérée, d'une couleur noire-brunâtre. Elle s'approche de la même association de la Suisse et même de celle de la France centrale (voir table 3). L'influence de l'homme, surtout le drainage, qui dessèche le sol, facilite la concurrence des espèces plus xérophiles. Nous voyons apparaître les associations qui s'approchent du *Mesobrometum brachypodietosum* (voir p. 00).

Le *Molinieto-Agrostidetum* (voir p. 14) s'empare de la terre après l'extraction de la tourbe.

Nous pouvons rencontrer dans notre territoire des prairies cultivées qui appartiennent déjà au type *d'Arrhenatherum-Trisetum flavescens*.

Le climax de nos tourbières, peut-être le *Salicetum* et l'*Alnetum*, nous manque presque complètement.

Le schéma (voir p. 14) nous donne la succession des associations.

XIII.

Flechten aus der Čechoslovakei.

Von Dr. M. SERVÍT.

Vorgelegt am 9. Oktober 1929.

I. Die Umgebung von Praha.

In den Jahren 1920 und 1926 unternahm ich eine Reihe von Exkursionen in die Umgebung von Praha (Prag), auf denen ich das meiste Material für diese Arbeit sammelte. Weiters erhielt ich zur Bearbeitung die von RNC J. Podzimek im Prager Gebiet gesammelten Flechten, sowie einen kleinen Teil des lichenologischen Materials Prof. Dr. Podpěras, welches sich im botanischen Institute der Universität in Praha befindet.

Auch diese Arbeit wurde mir durch das Entgegenkommen der botanischen Abteilung des Naturhistorischen Museums in Wien, des pflanzenphysiol. Institutes in München und des botan. Institutes in Berlin-Dahlem sehr erleichtert und ich bin den Herren Hofrat Dr. K. Keissler (Wien), Professor Dr. von Schoenau (München) und Dr. K. Schulz-Korth (Berlin-Dahlem) für die Einsendung des umfangreichen Vergleichsmaterials zu grossem Dank verpflichtet. Auch Herr Bernt Lynge aus dem Botanischen Museum in Oslo gebührt mein Dank für die Einsendung einiger Arten der Gattung *Aspicilia* zum Vergleiche.

Bei der Bearbeitung des Materials fand ich bei einigen lichenologischen Monographen, die mein Material bestimmten, wertvolle Unterstützung. Es sind dies H. Sandstede — Bad Zwischenahn (*Cladonia*), A. H. Magnusson — Göteborg (*Acarospora*), Dr. A. Hilitzer — Praha (*Parmelia*), B. Lynge — Oslo (*Physcia*), Dr. V. Gyelnik — Budapest (*Peltigera*), sowie H. Zschacke — Bernburg

(ein Teil der Verrucariaceae; publiziert wird derzeit jedoch nur *Staurothele Ambrosiana*).

Im folgenden führe ich eine Anzahl charakteristischer Standorte mit ihrer Flechtenvegetation an:

A. Charakteristische Standorte.

Lydit.

Šárkatal:

1. Abs. H. 270m, etwa in 45° geneigte Felsenwände beim Eingang in die Schlucht Džbán bei Liboc. Dem Lichte und dem Winde von W. voll exponiert. Substratfeuchtigkeit kaum vorhanden, nur in einigen Spalten scheint zeitweise etwas Wasser durchzusickern.

a) Neuere Steinflächen, nach Steinbruch: *Thyrea pulvinata*, *Collema rupestre*, *Lecanora gibbosa* f. *porinoidea*, *Lecanora umbrina*, *L. incusa* f. *caesiella*, *Parmelia molliuscula*, *Xanthoria parietina*, *Physcia nigricans*, *Ph. virella*.

b) Ursprüngliche Felsenoberfläche: *Lecanora gibbosa* f. *porinoidea*, *Parmelia molliuscula*, *P. prolixa*, *Rinodina oreina*, *Ph. caesia*, *Cladonia fimbriata* var. *ochrochlora*. Erde: *Lecidea uliginosa* var. *humosa*.

2. Fuß der gegen SW gerichteten Felsenwände beim Eingang in die Schlucht Džbán: *Lecanora gibbosa*, *Parmelia conspersa*, *P. glomellifera*, var. *grisea*, *P. physodes*, *P. molliuscula*, *P. prolixa*, *Rinodina oreina*.

3. An überhängenden Felsenwandpartien bedecken hier die Flechten nur etwa 10% der Steinoberfläche: *Parmelia conspersa* und *Rinodina oreina*.

4. Der Punkt 331 im Šárkatal besteht aus einer romantischen Lyditfelsenrippe, offen gegen WNO. Grundfeuchtigkeit kaum vorhanden: An überhängenden Wänden *Acarospora oxytona*, *Rinodina oreina* dagegen mehr an frei exponierten Felsenteilen; *Crocynia membranacea*, *Lecidea ostreata*, *Cladonia bacillaris*, *Cl. fimbriata* var. *ochrochlora*, *Cl. squamosa*, *Gyrophora hirsuta*, *Acarospora oxytona*, *A. fuscata*, *Lecanora orosthea*, *Parmelia furfuracea* f. *thamnodes*, *P. glomellifera*, *P. physodes* f. *platyphylla*, *Rinodina oreina*.

Auf dem Erdreich der Felsenstufen *Cladonia foliacea* var. *alcicornis*.

Schiefer.

A. H. 265, *Felsenblock neben dem Meyerhof Jenerálka*:

5. Senkrechte Nordwand, meist überhängend, Licht und Wind nur von N, Grundfeuchtigkeit sehr gering. *Buellia porphyrica*, *B. canescens* var. *euthallina*.

6. Stellenweise mehr Feuchtigkeit: *Verrucaria glauccella*, *Collema rupestre*, *Lecanora incusa* f. *elaeoplaca*, *Ramalina pollinaria* f. *humilis*, *Xanthoria fallax*, *Buellia punctiformis* var. *stigmatea*, *Physcia deminuta*.

7. Stufenweise ansteigender Westhang des Felsenblocks. Wenig Grundfeuchtigkeit: *Rhizocarpon disporum* var. *Montagnei*, *Cladonia foliacea* var. *alcicornis*, *Gyrophora hirsuta*, *Acarospora fuscata*, *Lecanora incusa* f. *olivacea*, *Parmelia glomellifera*, *P. molliuscula*, *P. prolixa*, *P. saxatilis*, *Xanthoria fallax*, *Buellia badia*.

8. Plateau des Felsens: *Umbilicaria pustulata*, *Parmelia molliuscula*, *P. prolixa*. Auf sandigem und schotterigem Boden: *Lecidea granulosa*, *Parmelia prolixa* var. *Pokornyi*, *Cetraria aculeata*.

Abs. H. cca. 270 m. Schlucht oberhalb der Ortschaft Všenory am Flusse Berounka:

9. Kleiner Felsen in der Schluchtsohle, am Bächlein, von Baum — und Gebüschkronen überdeckt, ohne direktes Licht und Wind, Substratfeuchtigkeit genug oder auch wenig (dann *Coniocybe furfuracea*): *Porina chlorotica*, *Coniocybe furfuracea*, *Baeomyces rufus*.

10. Am Fusse der gegen W gerichteten Lehne schütterer Eichenwald. Auf Steinen: *Lecidea latypiza*, *Buellia punctiformis* var. *stigmatea*, *Rinodina atrocinerea* var. *fatiscens*. Auf dem Boden: *Peltigera polydactyloides* f. *imbricatoides*, *Cladonia caespiticia*, *Cl. furcata*, *Cl. pyxidata* var. *chlorophaea*, *Cl. fimbriata*, *Cl. sylvatica* f. *pygmaea*.

11. Schiefergerölle unterhalb der kleineren Felsen, dem Lichte von W ausgesetzt, Steinchen ohne Kapillarverbindung mit Substrat: *Lecanora gibbosa*, *L. polytropa* f. *illusoria*, *Parmelia conspersa*, *P. glomellifera*, *P. molliuscula*.

12. Stufenartige kleinere Felsen, gegen W, voll beleuchtet

und teilweise auch dem Winde exponiert: *Dermatina perexigua*, *Diploschistes scruposus* f. *parasiticus*, f. *violarius*, *Crocynia membranacea*, *Rhizocarpon viridiatrum*, *Rh. geographicum* f. *contiguum*, *Cladonia pyxidata* var. *chlorophaea*, *Stereocaulon quisquiliare*, *Acarospora fuscata*, *Parmelia glomellifera*, *P. molliuscula*, *P. prolixa*, *Buellia punctiformis* var. *stigmatea*, *Lecidea grissella*, *L. fuscoatra* var. *Podpěrae*, *L. neglecta*, *Cladonia degenerans*, *Cl. caespiticia*, *Cl. foliosa* var. *alcicornis*, *Cl. papillaris*, *Baeomyces roseus*, *Lecanora incusa* f. *caesiella*, *Parmelia caperata* f. *sorediosa*, *P. physodes*, *P. Mougeotii*, *P. pannariiformis*, *Caloplaca caesiorufa*.

Diabas.

Die erste Gruppe der untersuchten Diabasfelsen und Steine bei Motol liegt an der ehemaligen westlichen Peripherie Prags, heute schon innerhalb der Grenzen Großprags; es sind dies Felsen, welche wohl schon bald verschwinden dürften:

13. Ein kleiner Felsen etwa 500 m nördlich von der Straße zw. Košiče und Motol. Licht und Wind von S, Grundfeuchtigkeit gering: *Dermatocarpon miniatum* var. *complicatum*, *Peltigera malacea* f. *polyphylla*, *Lecidea latypiza*, *Rhizocarpon disporum* var. *Montagnei*, *Stereocaulon quisquiliare*, *Acarospora badiofusca* var. *lepidioides*, *Lecanora Hoffmanni*, *L. Dominiana*, *L. frustulosa* var. *argopholis*, *L. albomarginata*, *L. incusa* f. *caesiella*, *Parmelia glomellifera*, *P. molliuscula*, *P. prolixa*, *P. conspurcata*, *Buellia saxatilis*.

14. Unterhalb einer Spalte, aus welcher zeitweise Feuchtigkeit heraussickert: *Dermatocarpon rufescens*, *D. miniatum* var. *complicatum*, *Acarospora badiofusca* var. *lepidioides*, *Lecanora albomarginata*.

15. Felsenpartie mit etwas mehr Substratfeuchtigkeit und teilweise im Gebüschschatten: *Cladonia pyxidata* var. *chlorophaea*, *Lecanora polytropa*, *L. muralis*, *L. incusa* f. *caesiella*, *Parmelia prolixa*, *Caloplaca tegularis*.

16. Plattform des Felsens, mit freiem Zutritt von Licht und Wind, mit etwas Feuchtigkeit: *Physcia grisea* var. *pityrea*. Auf einem Sandsteinstück: *Rinodina demissa*.

Ähnlicher stufenartiger Felsen *an der Straße vor Motol*. Gegen S frei exponiert, etwas Substratfeuchtigkeit wahrnehmbar:

17. Gerölle unterhalb des Felsens: *Lecanora alphoplaca*.

18. Etwa 2 m hohe Felsenwand: *Collema pulposum*, *Lecidea latypiza*, *Toninia coeruleonigricans*, *Acarospora badiofusca* var. *lepidioides*, *Lecanora umbrina*, *L. radiosa* var. *incanescens*, *Lecania erysibe* var. *Rabenhorstii*, *Parmelia prolixa*, *Caloplaca decipiens*, *Buellia punctiformis* var. *stigmatea*.

19. Abgerundete, aus dem Boden herausragende Diabaschollen unterhalb des Felsens. Das Gestein stark verwittert: *Diploschistes scruposus* f. *violarius*, *Acarospora badiofusca* var. *lepidioides*, *Lecanora Dominiana*, *L. umbrina*, *L. frustulosa* var. *argopholis*, *L. alphoplaca*, *Candelariella vitellina* f. *arcuata*, *Parmelia glomellifera*, f. *grisea*, *P. prolixa*, *Physcia ascendens*.

20. Gegen N gerichtete Wand *des Felsens mit Kreuz bei Motol*. Grundfeuchtigkeit wahrnehmbar: *Diploschistes scruposus* f. *bryophilus*, *Gyalecta ulmi*, *Lecidea neglecta*, *Bacidia umbrina* var. *psotina*, *Lecanora sulphurea*, *L. albomarginata*, *Parmelia molliuscula*, *Ramalina pollinaria* var. *humilis*.

Zwischen Moos und auf der Erde: *Cladonia sylvatica*, *Cl. pyxidata* var. *chlorophaea*, *Parmelia physodes*, *P. molliuscula* var. *hypoclysta*, *Cetraria muricata*, *Physcia muscigena*.

21. Kleinere Felsenwand, gegen S frei. Substratfeuchtigkeit sehr gering: *Diploschistes scruposus* f. *violarius*, *Lecidea latypiza*, *L. neglecta*, *Rhizocarpon viridiatrum*, *Acarospora badiofusca* var. *lepidioides*, *Lecanora Dominiana*, *L. Hoffmanni*, *Candelariella vitellina*, *Caloplaca aurantiaca* var. *diffracta*, *C. elegans*.

22. Kleiner feuchter Felsen an der neu bewaldeten *Lehne vor Motol*, gegen N frei exponiert: *Lecidea grisella*, *Lecanora conferta*, *Ramalina pollinaria* f. *humilis*, *Blastenia rupestris* var. *coniasis*. Dasselbst auf dem Boden *Catillaria chalybeia* f. *terricola*.

23. Abs. H. 240 m. Unterer Teil der Ostlehne *unterhalb Nová Ves im Prokoptal*. Das Diabasgestein stark zersetzt, gegen

SW frei. Substratfeuchtigkeit wenig: *Endocarpon pusillum*, *Dermatocarpon rufescens*, *Lecidea latypiza*, *L. testacea* f. *bohemica*, *Toninia coeruleonigricans*, *Rhizocarpon viridiatrum*, *Acarospora badiofusca* var. *lepidioides*, *Lecanora frustulosa* var. *argopholis*, *Caloplaca caesiorufa*.

Nur der untere Teil der Lehne besteht aus Diabas, der obere Teil ist aus Kalkstein. Ebensolche Verhältnisse herrschen auf dem folgenden Standorte:

24. Abs. H. 320 m. Diabasschollen am Abhänge *unterhalb der Kalksteinwände bei Sv. Jan pod skalou* (Sv. Ivan). Grundfeuchtigkeit vorhanden, etwa 80% des direkten Lichtes durch Baumkronen des Eichenhains zurückgehalten: *Diploschistes scruposus* f. *violarius*, *Collema pulposum*, *C. multifidum* var. *jacobaeifolium*, *Placynthium nigrum*, var. *triseptatum*, *Rhizocarpon geographicum* f. *contiguum*, *Bacidia muscorum* var. *protensa*, *Cladonia rangiformis* f. *foliosa*, *Lecanora contorta* var. *albocincta*, *L. Hoffmanni*, *L. subfusca* var. *campestris*, *L. radiosa* var. *incanescens*, *Candelariella vitellina*, *Parmelia glomellifera*, *P. moliuscula*, *Blastenia rupestris* var. *rufescens*, *Caloplaca variabilis*, *Rinodina Bischoffii* f. *subathallina*, *Physcia caesia*, *Ph. nigricans*.

25. Abs. H. 280. Niedrige senkrechte Wände im Haine des Westhanges der Kreuzanhöhe. Etwas Grundfeuchtigkeit vorhanden. Von direktem Lichte und Wind von W etwa 50% durch Bäume aufgehalten: *Gyalecta jenensis*, *Leptogium lichenoides*, *Lecidea lucida*.

26. Abs. H. 320 m. Auf dem Boden des Westhanges der Anhöhe mit Kreuz. Hain, mit Eichen, Linden. Boden mit beträchtlichem Humusgehalt, durch die Baumkronen nur teilweise beschattet. Wenig Grundfeuchtigkeit: *Collema pulposum*, *C. granuliferum*, *Leptogium byssinum*, *L. lichenoides*, *Solorina saccata*, *Peltigera praetextata*, *Cladonia chlorophaea* f. *pachyphylla*.

Kalkstein.

Anhöhe zw. Zlichov und Hlubočepy:

27. Abs. H. 250 m. Beim Baue der Eisenbahn vor vielen Jahren aufgedeckte niedrige, gegen S gerichtete Felsenwand. Substratfeuchtigkeit wohl wenig: *Staurothele Ambrosiana*, *Catillaria subgrisea*, *Biatorrella pruinosa* f. *macrotoma*, f. *inter-*

media, *Lecanora dispersa*, *Caloplaca variabilis*, *C. lactea* var. *aurea*.

Das Prokoptal :

28. Abs. H. 250 m. Niedrige Schollen am Abhang gegen SO oberhalb *Hlubočepy*. Stark trocken: *Verrucaria glaucina*, *Lecanora Hoffmanni*, *L. contorta*, *L. umbrina*, *L. muralis* var. *versicolor*, *L. radiosa*, *Buellia epipolia* var. *venusta*, *Physcia nigricans*.

29. Abs. H. 230 m. Niedrige Felsenrippe an einem Abhangsrücken gegen S oberhalb der Zementfabrik. Dem Lichte und Wind voll exponiert. Kalkstein mit Silikateinschlüssen, Grundfeuchtigkeit gering: *Diploschistes scruposus* f. *violarius*, *Bacidia muscorum* var. *protensa*, *Rhizocarpon viridiatrum*, *Acarospora Heppii*, *A. fuscata*, *Biatorrella simplex* var. *strepsodina*, *Lecanora Hoffmanni*, *L. subfusca* var. *campestris*, *L. sulphurea*, *L. polytropa* f. *illusoria*, *L. radiosa*, *Lecania erysibe* var. *Rabenhorstii*, *Candelariella vitellina*, *Parmelia glomellifera*, *P. prolixa*, *Buellia epipolia* var. *venusta*.

30. Abs. H. 230 m. Ein Felsen am Wege in der Talsohle, gegen S, von Laubbäumen teilweise beschattet, mit mehr Feuchtigkeit: *Diploschistes scruposus* f. *violarius*, *Toninia coeruleonigricans*, f. *opuntioides*, *Lecanora albomarginata*, *L. muralis* var. *versicolor*, *L. Garovaglii*, *Parmelia prolixa* var. *pannariiformis*.

31. Abs. H. 250 m. Senkrecht gegen N abfallende 5—6 m hohe Felsen in der Südlehne des Prokoptales hinter dem Wirtshause. Die Felsen ragen teilweise über die Baumkronen hervor. Licht und Wind nur von N. Stellenweise trocken stellenweise sickert etwas Feuchtigkeit auch im Hochsommer aus Spalten heraus.: *Verrucaria glaucina*, *V. myriocarpa*, *V. coerulea*, *Diploschistes albissimus*, *Catillaria chalybeia*, *Rhizocarpon concentricum*, *Lecanora crenulata* f. *dispersa*, *L. subfusca* var. *campestris*, *Lecania erysibe* var. *Rabenhorstii*, *Ramalina popullina* f. *humilis*, *Blastenia rupestris* var. *rufescens*, *Opergrapha saxicola*, *Gyalecta jenensis*, *Rinodina Bischoffii* var. *immersa*.

32. Dortselbst, wo mehr Feuchtigkeit: *Opergrapha saxicola*, *Lempholemma chalazanodes*, *Obryzum corniculatum*, *Peltigera rufescens*, *Blastenia rupestris* var. *coniasis*.

33. Abs. H. 230 m. Gegen S gerichtete Felsenwand im Prokoptale gegenüber der Ortschaft Klukovice. Direktes Licht und Wind nur von S. Etwas Substratfeuchtigkeit vorhanden: Am Fuß der Felsenwand: *Endocarpon pusillum*, *Dermatocarpon rufescens*, *Allarthonia lapidicola*, *Pecania coralloides*, *Collema multifidum* var. *marginale*, *Leptogium lichenoides* var. *pulvinatum*, var. *lophaeum*. *Catillaria athallina* f. *acrustacea*, *Toninia candida*, *T. coeruleonigricans*, f. *caulescens*, *Biatorella pruinosa* f. *illuta*, *Lecanora Hoffmanni*, *Lecania erysibe* var. *Rabenhorstii*, *Galoplaca lactea* f. *aestimabilis*, *C. variabilis*, *Rinodina Bischoffii* var. *immersa*.

34. Abs. H. 240 m. Kleiner Felsen mit Silicateinschlüssen oberhalb des Eisenbahneinschnittes bei Klukovice. Gegen NO. Etwas feucht: *Verrucaria myriocarpa*, *Opegrapha saxicola*. *Diploschistes scruposus* f. *violarius*, *Catillaria nigroclavata*, *Toninia tumidula*, *Lecanora crenulata*, f. *dispersa*, *Caloplaca Heppiana*, *Buellia porphyrica*.

35. Abs. H. 230 m. Flache kleine Felsen in der Talschle unterhalb der Ortschaft Nová Ves. Nicht beschattet, mehr Feuchtigkeit: *Collema multifidum* var. *jacobaeifolium*, *Acarospora cervina*, *Buellia epipolia* var. *venusta* f. *ocellata*, *Physcia caesia*, *Ph. nigricans*.

36. Abs. H. 250 m. Niedrige gegen S gerichtete Wand des Abhangsrückens vor Klukovice. Dem Licht und Wind von S voll exponiert, wenig Feuchtigkeit, Silikateinschlüsse: *Lecidea latypiza*, *L. vulgata*, *Lecanora frustulosa* var. *argopholis*, *L. muralis* var. *versicolor*, *Parmelia molliuscula*, *P. proluxa*.

Ortschaft Srbsko am Flusse Berounka:

37. Abs. H. 220 m. Kleiner aus dem Boden hervorragender Felsen an der Straße n. der Ortschaft. Exponiert gegen S, mehr Feuchtigkeit: *Sarcopyrenia gibba*, *Lecanora contorta*, *Caloplaca variabilis*.

38. Eine etwa 3 m hohe Felsenwand an der Straße etwas nördlicher. Gegen O. Stellenweise sickert das Wasser deutlich durch: *Sarcopyrenia gibba*, *Verrucaria rupestris*. *Allarthonia lapidicola*, *Collema furvum*, *Leptogium lichenoides*, *Placynthium nigrum* var. *fuscum*, *Peltigera rufescens*, *Lecidea vulgata*, *Lecanora contorta*, *L. Hoffmanni*, *L. dispersa*,

L. radiosa f. *farinosa*, *Lecania erysibe* var. *Rabenhorstii*, *Caloplaca variabilis*, *C. aurantiaca* var. *diffracta*, *Rinodina Bischoffii* var. *protuberans*.

39. Abs. H. 250 m. Felsen im bewaldeten Tal weiter nördlich, gegen S gerichtet, der Kalkstein weich, verwittert, stellenweise mehr Feuchtigkeit: *Thyrea pulvinata*, *Psorotichia Schaereri*, *Leptogium lichenoides* var. *pulvinatum*, *Placynthium nigrum* var. *fuscum*, *Leptogium turgidum*, *Peltigera rufescens* f. *incusa*, *Catillaria lenticularis* f. *pulicaris*, *Caloplaca lactea* f. *aestimabilis*.

Der Felsen mit Kreuz oberhalb Sv. Jan pod skalou:

40. Abs. H. 400 m. Gipfelfelsen, ungefähr horizontale Fläche, unbeschattet, dem Winde voll exponiert, sehr trocken: *Verrucaria lecideoides* var. *minuta*, *Psorotichia murorum*, *Lecidea subdiffracta*, *Acarospora macrospora*, *Lecanora crenulata* f. *dispersa*, *L. muralis* var. *albopulverulenta*, *L. radiosa*, *L. albescens*, *Candelariella vitellina*, *Caloplaca coronata*, *C. lactea* f. *aestimabilis*, *Buellia epipolia* var. *venusta* f. *ocellata*, *Rinodina Bischoffii* f. *euthallina*, f. *subathallina*, *R. lecanorina*.

41. Dortselbst, einige m hohe Wand gegen N, von Laubbaumkronen beschattet, wenig Feuchtigkeit: *Verrucaria coerulea*, *Catillaria lenticularis* f. *chalybeia*.

Da die meisten Standorte in einer absoluten Höhe von 200—300 m liegen, werden die Höhenzahlen im Weiteren bei ihnen nicht angeführt.

B. Systematischer Teil.

Ascolichenes

Pyrenocarpeae.

Verrucariaceae.

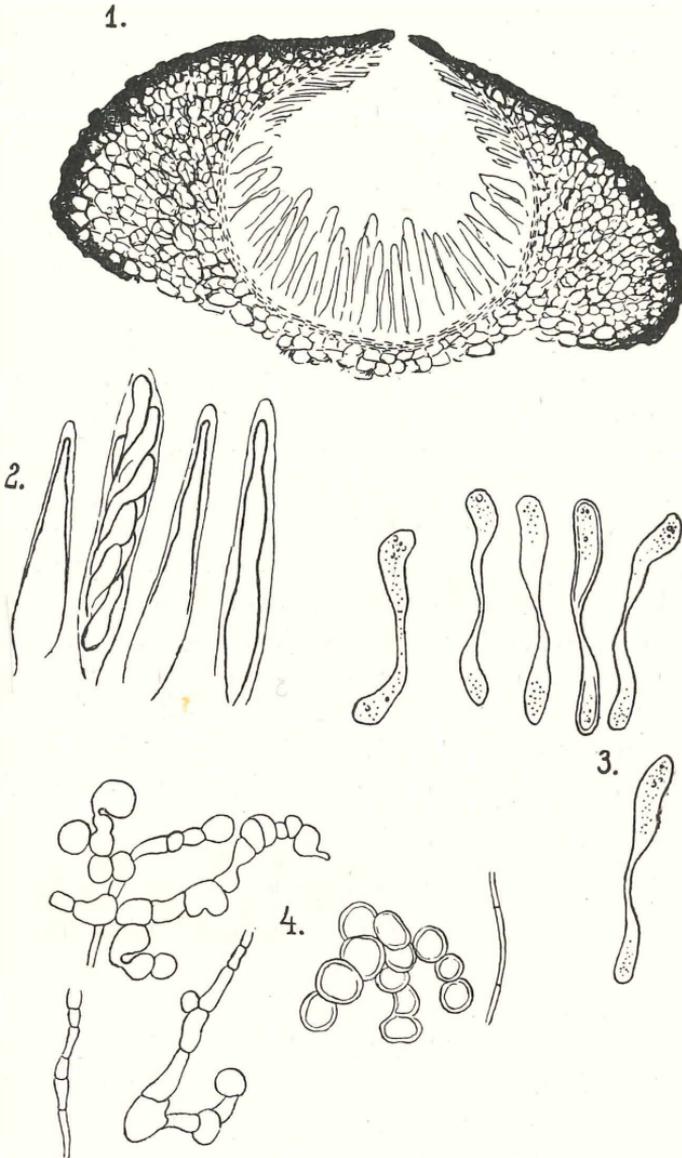
*Sarcopyrenia gibba**) Nyl. (Taf. I.)

Im Tal nördl. von Srbsko, auf flachem Kalkfelsen, sowie an einer Kalkfelsenwand etwas nördlicher vom Orte.

Die Flechte wächst in einem Gemenge von sterilen staubähnlichen Flechtenlagerteilchen (dazwischen namentlich *Lecanora contorta* und *Caloplaca variabilis*) und es ist nicht möglich zu entscheiden, was davon zu dem epilithischen Lagerteil der *Sarcopyrenia gibba* gehört. An entkalkten Schnitten sieht

*) Die Flechten mit fettgedruckten Namen sind neu für Böhmen.

man kleine Körnchen, ausgefüllt mit kleinen Gonidien, nach aussen bräunlich-schwärzlich begrenzt, die vielleicht als epi-



TAF. I.

lithischer Teil dieser Flechte angehören. Die Gonidien in diesen Körnchen sind rundlich, frischgrün, 4—8 μ gross. Unter den Früchten ist im Kalksteine ein dichtes Netz von Hyphen, die

grösstenteils den Charakter der Oelhyphen besitzen. Ausnahmsweise findet man kürzere Strecken von glatten Hyphen, die dann nur etwa $1\cdot6\ \mu$ dick sind. Die Oelzellen erreichen eine Grösse von $6 - 8\ \mu$.

Die Früchte stehen herdenweise, sie sind bis $0\cdot48\ \text{mm}$ gross, halbkugelig, schwarz, mitunter etwas ellipsoidisch verzogen. Ostiolum sehr klein, etwa $8\ \mu$ breit. Eine Frucht mit zwei Mündungen wurde beobachtet. (Siehe *Körber*: Parerga p. 345). Die Oberfläche wird von cca $20\ \mu$ dickem, unten deutlich eingebogenem Involucrellum gebildet; seine Oberfläche ist rau, nur um die etwas erhabene Mündung herum glatt. Zwischen dem Involucrellum und dem Perithezium ist ein meistens farbloses, dünnwandiges, paraplectenchymatisches Gewebe, mit trajectorisch gruppierten Zellen, die bis $18\ \mu$ lg., $11\ \mu$ br. sind. Ein ähnliches Gewebe befindet sich auch unterhalb des Peritheziums. Der an das Perithezium angrenzende Teil dieses Gewebes ist meistens farblos, doch manchmal auch schmutzig grünlich gefärbt (entsprechend der Beschreibung *Körbers* l. c. 345), oder sogar auch schwärzlich. In diesem Falle stimmt unsere Pflanze mit der Abbildung A. L. Smiths (British Lichens I. 1918 p. 486) überein. Das Perithezium erreicht eine Breite von $250\ \mu$ und eine Höhe von $200\ \mu$. Seine Wandung ist $7 - 10\ \mu$ dick, aus tangentialen, parallel laufenden, farblosen Hyphen (oder Paraplectenchym?) bestehend. Die Periphysen kleiden die obere Hälfte der Innenwand aus, sie sind $15 - 20\ \mu$ lg., $2\cdot5\ \mu$ dick. Die Paraphysen sind zerflossen. Die Schläuche sind zahlreich in der unteren Hälfte des Peritheziums, etwa $75\ \mu$ lg., $8\ \mu$ br., dünnwandig, in der Jugend fast zugespitzt, später fast walzenförmig. Die Sporen von bekannter eigenartiger Form, $30 - 34\ \mu$ lg, in der dünnen Mitte $1 - 2\ \mu$ dick, an einem Ende $3\ \mu$ br., am anderen bis $5\ \mu$ br. Protoplasma entweder gänzlich, oder nur an den Enden körnig. Durch J wird der Inhalt der Schläuche und der Sporen gelb bis rotbräunlich gefärbt.

Verrucaria calciseda DC.

Kalkstein in der Schlucht Koda bei Beroun (Podpěra).

V. coerulea DC.

Kalkstein im Prokoptal bei Praha und des Felsens oberhalb Sv. Jan pod skálou.

V. fuscella Ach.

Kalkstein bei Srbsko und in der Schlucht Císařská rokle bei Beroun (Podpěra).

V. glaucella Ach.

Schiefer bei Jenerálka im Šárkatala und im Prokoptal, Kalkstein im Prokoptal nächst dem Wirtshause und bei Klukovice, sowie am Südhange der Anhöhe Dívčí Hradý bei Praha.

Bei der Flechte vom letzten Standorte Pycniden. Dieselben sind in die kohlige untere Lagerschicht eingesenkt und treten mit dem Scheitel durch die Gonidienschicht an die Thallusoberfläche. Perifulcrum schwarz. Pycnokonidien stäbchenförmig oder schmal länglich, gerade oder leicht gekrümmt, 4—6 μ lg., 0·4—0·5 μ br.

V. lecideoides var. **minuta** Hepp.

Kalkstein des Felsens oberhalb Sv. Jan p. sk., 400 m.

V. muralis Ach.

Kleine Steinchen (Sandstein) auf dem Boden der Anhöhe Vidovle bei Praha.

f. *confluens* Mass.

Pläner der Anhöhe Na Viničkách bei Lysá n. L. (Podpěra).

V. myriocarpa Hepp.

Kalkstein im Prokoptale (Podpěra). Kalkstein nächst dem Wirtshause V Dalejích sowie nächst Klukovice im Prokoptale.

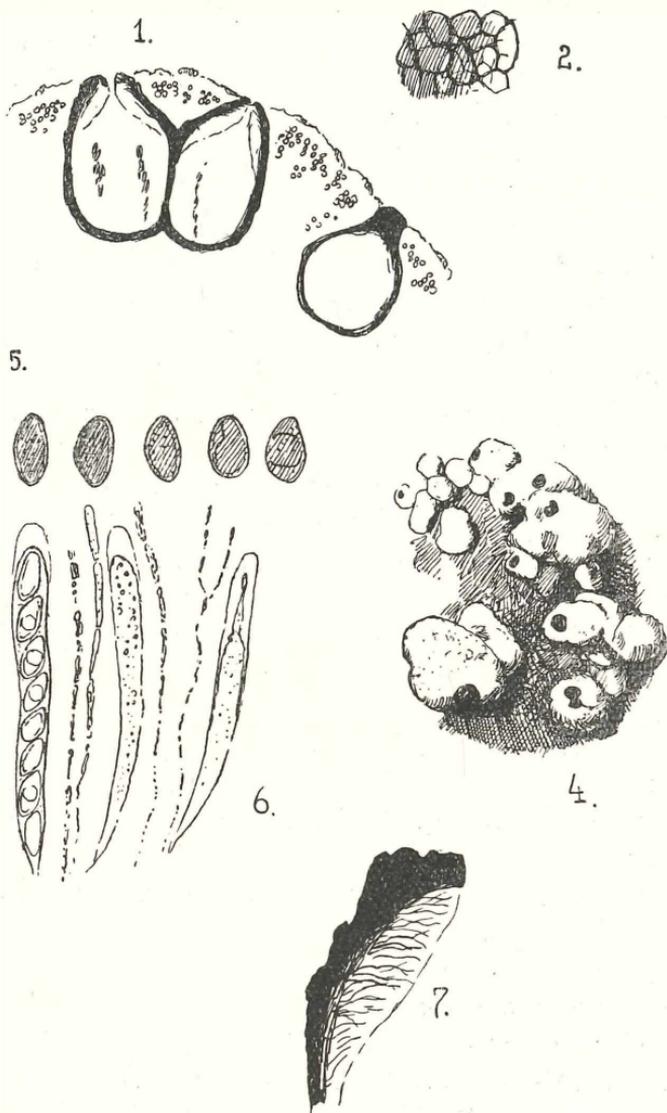
V. nigrescens Pers.

Kalkstein im Prokoptale (Podzimek) und in der Schlucht Císařská rokle bei Beroun (Podpěra).

V. Podzimekii spec. n. (Taf. II.)

Thallus epilithicus, albidus, e verrucis aut contiguus, aut discretis, dispersis constitutus. Protothallus indistinctus. Verrucae thallinae aut exacte hemisphaericae, aut diffformes, saepius 0·25 mm latae, sed una alteraque etiam usque 0·5 mm lata, 0·25—0·35 mm altae, superficiae inaequales aut pro parte minute rugosae, non laevigatae. Stratum exteriore corticis 10—15 μ altum, sordide violascens vel subincoloratum, corpusculis irregularis hyalinis farctum, elementis hyphosis haud perspicuis. Stratum gonidiale 40—100 μ altum, gonidiis paucis, pro parte irregulariter dispersis, pro parte irregula-

riter aggregatis, 7—10 μ latis. Medulla incolorata, ex hyphis ut in stratum gonidiale haud discernendis, dense contextis, materia subhomogena, granulata formantibus.



TAF. II.

Perithecia solitaria bina ut rarior plura in areolis singulis omnino immersa, solo vertice thallum aequantia, ellipsoidea, ovalo—oblonga vel rarior amphoraeformia, 260—300 μ alta,

130—140 μ lata integra, circumcirca nigra, sub microscopio infra fuliginea, 6—8 μ crassa, cellulosa, cellulis 6—10 μ latis, in parte superiore incrassata, carbonacea. Pars verticalis 0·08—0·12 mm lata, modice convexa, saepe corrugata et non rare difformia. Periphysis distinctis, copiosis gracillimis aut validioris, saepe flexuosis, 20—35 μ longis, 0·5—1·5 μ crassis. Paraphysis diffluentibus. Ascis cylindricis, leptodermaticis, vertice incrassatis, adultis 70—90 μ longis, 9—10 μ latis. Sporis uniserialiter dispositis, ellipsoideis vel fusiforme ellipsoideis, juniores incoloratis, demum fuscis vel olivaceofuscis, 11—14 (16) μ longis, (7) 8—8·5 μ latis. J solo contentus ascorum et sporarum junioribus lutescens.

Pycnoconidia non visa.

Quarzit des Nižbor (Podzimek).

Von dunkelsporigen Arten der Gattungen *Thrombium* und *Verrucaria* ist diese Art wohl gut verschieden. *Thrombium melaspermizum* Stnr besitzt endolithischen Thallus, auch *Verrucaria interlatens* Arn. und *V. phaeosperma* Arn. bilden wenig oder keinen epilithischen Thallus aus. *V. melasperma* Nyl (Herb. München) stimmt mit unserer Flechte in der Sporengröße überein, weicht jedoch durch das Substrat ab, sowie dadurch, dass das Perithezium mehr kugelig und nicht amphoridiumartig ist.

V. rupestris Schrad.

Kalkstein oberhalb Hlubočepy (Podzimek), zwischen Hlubočepy und Chuchle (Podpěra) und bei Srbsko.

V. sphinctrina Ach.

Kalkstein nächst Nižbor (Podzimek).

V. viridula Ach.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek).

Thelidium minimum (Mass.) Arn.

Schiefer in der Schlucht Koda bei Beroun (Podpěra).

Staurothele Ambrosiana (Mass.) Lettau.

Kalkstein oberhalb Zlíchov (Determ. Zschacke).

St. clopima f. *spadicea* (Wallr.) Zhlbr.

Kalkstein oberhalb Hlubočepy (Podzimek).

Dermatocarpaceae.

D. rufescens (Ach.) Th. Fr.

Schiefer bei Libšice (Podpěra). Kalkstein bei Nižbor (Podzimek), sowie nächst Klukovice im Prokoptale, Diabasfelsen bei Nová Ves im Prokoptale und bei Motol.

Die Flechte von Libšice weicht etwas ab durch konvexe, grünlichbraune Lagerschuppen, die hoch aufsteigen und sich dachziegelartig decken. An der Unterseite meistens Rhizinen. Habituell recht ähnlich der dalmatinischen Art *D. Latzeli* Zahl. Die Lageranatomie stimmt jedoch mit *D. rufescens* überein. Die amorphe Lagerdeckschicht ist 20—30 μ dick (siehe Zschacke: Davos.), Pyknokonidien sind gerade oder bogenförmig, an Enden etwas verdickt, 2,5—3,5 μ lg., 0,8 μ br. Sporen 15—18 μ lg., 6—7 μ br.

Habituell sehr ähnliche Formen sah ich im Naturh. Museum in Wien von der dalmat. Insel Uljan (leg. Baumgartner) und von Fiume (leg. Schuler), von Zahlbruckner ebenso zu dieser Art gestellt.

D. miniatum var. *complicatum* (Sw.) Th. Fr.

Diabas bei Motol.

Endocarpon pusillum Hedw.

Erde der Kalkfelsen bei Sv. Jan p. sk. und an der Mündung des Baches Kačák bei Srbsko (Podpěra). Ähnlich bei Klukovice und nächst der Kapelle im Prokoptale. Erde in Diabasspalten bei Nová Ves.

Die Oberrinde jüngerer Schuppen besteht aus einer 0—5 μ dicken amorphen farblosen Schicht und 20—30 μ dicker Schicht von oben bräunlichem, unten farblosem Paraplectenchym. Diese Schicht wird von 4—6 Lagen 7—10 μ lg., 6 μ br. Zellen gebildet. Die Gonidienschicht ist etwa 40—50 μ hoch und besteht aus vertikalen Gonidiengruppen. Einzelne Gonidien sind 5—8 μ lg., 4—6 μ br; Seiten- und Unterrinde kohlig. In der Nähe der Perithezien ist die scheinbar amorphe Schicht der Oberrinde bis 12 μ dick und überzieht auch den größeren Teil der Perithezienscheitel. Die paraplectenchymatische Schicht ist 30—40 μ hoch. Die Gonidienschicht bis 100 μ hoch, mit unregelmäßigen vertikal verzogenen Gonidiengruppen. Darunter noch eine Lage des paraplecten-

chymatischen Gewebes mit 8—10 μ breiten Maschen. Aus der Unterrinde treten dunkle, 2 μ dicke Hyphen heraus.

Pyrenulaceae.

Microthelia aterrима var. **dermatinoides** var. n.

A typo praesertim thallo granuloso et peritheciis fere omnino immersis differt.

Lydit der Černá skála bei Bohnice und Quarzit des Nižbor (Podzimek).

Durch das freundliche Entgegenkommen des Herrn Dr. von Schoenau (München) habe ich eine größere Anzahl von Arnolds Exsiccaten von *M. anthracina* mit dieser unscheinbaren Flechte vergleichen können.

Die Artzugehörigkeit dieser Proben aus niederen Lagen Böhmens mit den alpenländischen Exemplaren von *M. aterrима* scheint mir zweifellos zu sein. Es stimmt die Form der 2—4 zelligen, 13—16 μ lg., 6—8 μ br. Sporen überein, entsprechend auch der Abbildung Steiners (Annal. d. naturh. Mus. Wien 1994 p 136). sowie der paraplektenchymatische Lagerbau.

Die Lager überziehen jedoch nicht ganze Steinflächen zusammenhängend wie ein dunkler Farbenanstrich, sondern bilden entweder kleine, 2—10 mm breite rundliche Flecken, oder breiten sich zwar über größere Steinpartien aus, doch mit zahlreichen Unterbrechungen.

Der Thallus ist nicht durch Risse in \pm flache Feldchen zerfallen, sondern einzelne Feldchen schwellen bis kugelig an und ihr Zusammenhang lockert sich manchmal soweit, daß einzelne kugelige Lagerkörnchen voneinander getrennt auf dem Steine stehen und deutlich an *Dermatina perexigua* erinnern.

Wogegen bei den alpenländischen Exemplaren die Perithezien meistens deutlich, häufig bis zur Hälfte aus dem Lager hervortreten, und die Mündung \pm eingedrückt ist (am auffallendsten bei Arn. 1666), sieht man bei den böhmischen Proben nur die Perithezienscheitel aus dem Lager hervortreten.

M. marmorata (Krmp) Hepp.

Kalkstein bei Sv. Jan p. sk.

Porina chlorotica (Ach.) Müll. Arg.
Schiefer in der Schlucht oberhalb Všenory.

Mycoporaceae.

Dermatina perexigua (Arn.) Zahl.
Schiefer in der Schlucht oberhalb Všenory.
Stimmt habituell sowie anatomisch mit Arn. 866 (München) überein.

Coniocarpae.

Caliciaceae.

Coniocybe furfuracea (L.) Ach.
Schiefer in der Schlucht oberhalb Všenory.

Graphidineae.

Arthoniaceae.

Al. lapidicola (Tayl.) Zhlbr.
Kalkstein nächst Klukovice im Prokoptal sowie bei Srbsko.

Graphidaceae.

Opegrapha saxicola Ach. — *O. Mougeothii* Hedw. L. p. 60.
Kalkstein nächst dem Wirtshause und bei Klukovice im Prokoptal.

Chrysothricaceae.

Crocynia membranacea (Dicks.) Zhlbr.
Schieferfelsen bei Jenerálka und in der Schlucht oberhalb Všenory.

Cyclocarpineae.

Diploschistaceae.

Diploschistes albissimus (Ach.) DT.
Felsen bei Křivoklát (Podzimek). Kalkstein nächst dem Wirtshaus im Prokoptal, Diabas bei Chuchle, Motol und oberhalb Sv. Jan p. sk.
D. scruposus (Schreb.) Norm.
Lyditfelsen in der Schlucht Šárka (Podpěra), Kalkstein und Silikatader im Kalksteine im Prokoptale (Podzimek).
f. *bryophilus* (Ehrh.) Müll. Arg.
Moos der DiabASFelsen bei Motol und der Kalkfelsen nächst der Kapelle im Prokoptale.

f. *parasiticus* (Smrf) Zhlb.

Kalkfelsen rings um die Kapelle im Prokoptal und bei Klukovice, Schiefer bei Všenory, auf Cladonien.

f. *violarius* (Nyl.) Lettau.

Auf Gestein: Schiefer bei Máslovice (Podvěra), Diabas bei Karlík und Quarzit des Nižbor (Podzimek). Diabas bei Motol und bei Sv. Jan p. sk. Auf Erde, Moos und Flechten: Diabas bei Motol und Schiefer bei Všenory.

Die meisten dieser Flechten reagieren auch mit KOH gelb, welche Farbe später in einen tintenartigen, etwas violetten Klecks übergeht. Die Reaktion J + blau meistens deutlich.

Die violette Färbung nach CaCl_2O_2 bei f. *violarius* tritt erst nach dem Auswaschen der mit Chlorkalk betupften Stellen mit Wasser ein. Nach *Nylanders* Beschreibung des Thallus: »gleboso — diffractus, supra subcerebriformi — verrucosus, crassulus« wäre da ein stichhaltiger Unterschied gegenüber *D. scruposus*. vorhanden. Ich besitze auch ein französisches Exemplar von *D. violarius* (Puy-de-Dôme, leg. Brevière), welches der Diagnose *Nylanders* vorzüglich entspricht. Dasselbe finde ich bei der Flechte von Devesite in Süddalmatien (Naturh. Museum Wien, leg. Baumgartner, determ. Zahlbruckner). Dagegen fehlt dieser habituelle Charakter mancher zu *D. violarius* gestellten Flechte, z. B. Harmand Lothar. 766 bis, und die Abtrennung ist nur durch die violette Reaktion begründet.

Im Naturh. Museum in Wien habe ich violette Verfärbung durch Chlorkalk, wenigstens der Oberrinde nach Auswaschen mit Wasser, bei folgenden Exsiccaten gefunden: *Diploschistes scruposus*: Mougeot & Nestler 169, Massalongo Ital. 359, Harmand Lothar. 762, Herb. Lich. Fenn. 266, Lojka Hung. 113, Fl. exsicc. aust. hung. 348, Schaer. Helv. 289, *Urceol. scrup.* var. *terrestris*: Elenk. Fl. Ross. 44, f. *argillosus*: Flag. Alg. 140, f. *iridatus*: Massal. Ital. 151, var. *albus*: Krypt. exs. 2053.

Auch ich bin derselben Ansicht wie *Lettau*, daß die Reaktionen mit J und sonstigen Reagentien bei dieser Flechtengruppe als systematisches Trennungsmittel der Arten dieser Gruppe versagen. Es handelt sich bei diesen verschiedene Reaktionen aufweisenden Flechten wohl meistens nur um ver-

schiedene physiologische Zustände, die systematisch eigentlich nicht zu verwerfen sind. Ich habe bis jetzt nie nebeneinander und in denselben Vegetationsverhältnissen auf demselben Substrat *Diploschistes albissimus*, *D. scruposus*, *D. violarius* gesehen. Wohl wachsen diese Flechten häufig nahe beisammen, doch bevorzugt *D. violarius* die am intensivsten insolierten Stellen, *D. albissimus* dagegen eher Schatten. Das Nebeneinanderwachsen unter denselben Wachstumsbedingungen wäre ein Beweis, daß es sich wenigstens um Elementararten handelt, abgesehen von eventueller Differenzierung verschiedener Altersstadien (Siehe *Lettau*, Hedwigia LX).

Gyalectaceae.

Microphiale diluta f. *terrestris* (Rbh) Zhlbr.

Schlucht bei Všenory.

Gyalecta ulmi (Sw) Zhlbr.

Diabasfelsen bei Motol, auf Gestein und Moos (f. *musicola* und f. *saxicola*.)

Gyalecta jenensis (Batsch) Zhlbr.

Kalkader im Diabas bei Sv. Jan pod skalou und in schattigen und feuchteren Teilen des Kalkfelsens im Prokoptal hinter dem Wirtshause.

Pyrenopsidaceae.

Psorothichia Schaereri (Mass.) Arn.

Am Kalkfelsen nördl. von Srbsko.

Ps. murorum Mass.

Kalkstein bei Radotín (Podpěra) und oberhalb Sv. Jan p. sk.

Thyrea pulvinata (Schaer.) Mass.

Kalkfelsen nörd. von Srbsko. Lyditfelsen der Schlucht Džbán bei Liboc.

Peccania coralloides Mass.

In größerer Menge am Grunde der Kalkfelsenwand bei Klukovice.

Collemaeae.

Lempholemma chalazanodes Nyl.

Kalkhaltiger Boden des Nordabhanges der Anhöhe

Vidovle bei Praha und auf Moos des Kalkfelsens hinter dem Wirtshause im Prokoptal.

Collema multifidum var. *jacobaeifolium* (Schrank) Rbh.

Diabas oberhalb der Kapelle in Sv. Jan pod skalou, Kalkstein an der Straße zw. Srbsko und Hostín sowie bei Nová Ves.

C. rupestre (Sw.) Rbh.

Schieferfelsen bei Jenerálka und Lyditfelsen der Schlucht Džbán.

C. furvum (Ach.) DC.

Kalkfelsen im Tal n. von Srbsko.

C. granuliferum Nyl.

Oberhalb Sv. Jan p. sk.

C. glaucescens Hoffm.

Toniger Boden in der Schlucht bei Všenory.

C. pulposum Ach.

Erreich in Diabasspalten bei Motol, Waldboden bei Sv. Jan pod skalou.

Leptogium turgidum (Ach.) Leight.

Erde einer Felsenwand bei Srbsko sowie auf dem Boden am Südhang der Anhöhe Dívčí Hradý bei Zlíchov.

L. lichenoides (L.) Zhlbr.

Štěchovice (Podpěra), Moos und Erde eines Felsens n. von Srbsko, Diabasboden bei Sv. Jan pod skalou.

var. *pulvinatum* (Hoff.) Zhlbr.

Moos der Kalkfelsenwand bei Klukovice, ähnlich bei Srbsko und an der Straße zw. Srbsko und Hostín.

var. *lophaeum* (Ach.) Zhlbr.

Moos der Kalkfelsenwand bei Klukovice.

L. byssinum (Hoff.) Zhlbr.

Westhang der Kreuzanzhöhe bei Sv. Jan pod skalou. Häufig und teilweise auch fruchtend, 350—380 m.

L. tenuissimum (Dicks) Fr.

Diabasboden bei Sv. Jan pod skalou, 360 m.

Obryzum corniculatum (Hoff.) Tul.

Moos des Kalkfelsens hinter dem Wirtshause im Prokoptal.

Pannariaceae.

Placynthium nigrum (Huds.) Gray.

Bei Sv. Jan pod skalou.
 var. **fuscum** (Hepp) Trevis.
 Kalkfelsen nördl. von Srbsko.
 var. **triseptatum** (Nyl.) Hue.
 Diabas bei Sv. Jan p. sk.

Peltigeraceae.

Solorina saccata (Hoff.) Ach.

Ziemlich zahlreich beim Aufstiege von Sv. Jan p. sk. zum Kreuz. Wohl derselbe Standort, den *Mann* in Lichenum in Bohemia observatum dispositio, 1825, p. 69 angibt.

*Peltigera**) *canina* (L.) Willd.

Kalkboden in Prokoptal, toniger Boden in der Schlucht s. von Všenory.

P. Degeni Gyel.

Waldweg w. von Sv. Jan p. skalou.

P. horizontalis (Neck.) Hoff.

In der Umgebung von Křivoklát (Podzimek).

f. **lacinatula** Gyel.

Im Walde nächst dem Jägerhause V Herynkách bei Beroun.

P. malacea f. **polyphylla** Flot.

Diabasboden bei Motol.

P. polydactyla (Neck.) Hoff.

Kalkboden im Prokoptal.

P. polydactyloides Nyl.

In der Schlucht bei Všenory.

*) Das ganze *Peltigera*-Material ist von Dr. V. Gyelnik (Budapest) bestimmt worden.

Außer diesen *Peltigeren* der Prager Umgebung hat Dr. Gyelnik in meinem Material aus Böhmen noch folgende Arten und Formen festgestellt: *P. canina* f. *spongiosa*, f. *subnitens*, *P. Hazslinskyi*, *P. horizontalis* f. *muscorum*, *P. lepidophora*, *P. leptoderma*, *P. membranacea* f. *subfibrilloides*, *P. nitens*, *P. polydactyla*, f. *microcarpa*, f. *nervosa*, f. *cras-soides*, *P. polydactyloides* var. *Guineensis*, *P. praetextata* f. *bohemica* f. n., *P. rufescens*, f. *lacera*, *P. variolosa*, f. *crispa*, f. *microphyllina*, *P. venosa*, *P. Zopfi* f. *parisiensis*.

f. **imbricatoides** Gyel.

Schlucht von Všenory.

P. praetextata (Flot.) Zopf.

Waldboden des Kreuzberges bei Sv. Jan p. sk.

P. rufescens (Weis.) Humb.

Im Prokoptal, auf Diabasboden bei Sv. Jan p. sk. und an bemooster Kalkfelsenwand nächst Srbsko.

f. **rhizinosa** Gyel.

Schlucht Císařská rokle bei Beroun (Podpěra).

f. *incusa* (Flot.) Krb.

Bei Srbsko.

P. subcanina Gyel.

Waldabhang w. von Sv. Jan p. sk.

Lecideaceae.

Lecidea crustulata (Ach.) Sprgl.

Diabas bei Karlík (Podzimek), kleine Steinchen auf der Anhöhe Vidovle bei Praha, Sandstein nächst Liboc und Schiefer bei Všenory.

var. *soredizodes* Lamy.

Steinchen bei Křivoklát (Podzimek), entkalkte Plänersteinchen auf der Anhöhe Vidovle.

L. elaeochroma Ach.

Eichenrinde oberhalb Sv. Jan p. sk. 340 m.

L. fuscoatra (L.) Ach.

Diabas bei Radotín (Podpěra) und Sandstein bei Moto

Die Flechte vom letzteren Standort ist eine reduzierte Form eines stark insolierten Standortes. Die Oberrinde ist in äusserster dünner Schicht schwärzlich, darunter befindet sich eine 20 μ dicke farblose Schicht von unregelmässigen, flachgedrückten Zellen, dann eine weitere, cca 10 μ dicke gebräunte Schicht von rundlichen etwa 5 μ grossen Zellen. Diese Schicht reagiert rot auf CaCl_2O_2 . Darunter eine ähnlich gebildete farblose, 10–20 μ dicke Schicht. Die 30–60 μ dicke Gonidienschicht ist unterbrochen. Die Gonidien sind bis 14 μ gross. Das Mark besteht aus dicht nebeneinanderlaufenden farblosen Hyphen. Das Eigengehäuse an den Apotheziumseiten ist 30–35 μ breit, schwarz, das Hypothezium unten schwarz, oben violettschwärzlich, Hymenium 40

—50 μ hoch, oben violettschwärzlich. Sporen 9—12 μ lg., 5—6 μ br. Pycnoconidien sind gerade oder etwas gekrümmt, stäbchenförmig, 8—10 μ lg., 0'6—0'7 μ br.

var. **Podpěrae** var. n.

A typo differt thallo orbiculare, distincte squamuloso, squamulis periphericis adpressis, solo margine liberis, irregulariter crenulatis, in centro thalli aliquod in verrucis congestis, verrucis usque 1 mm latis substipitatis, usque 2 mm altis. Stratum infuscatum corticis superioris additio CaCl_2O_2 rubens, medulla KOH lutescens.

Auf Schiefer bei Libšice (Podpěra) und in der Schlucht von Všenory.

Der Thallusmorphologie zufolge ist die Flechte eher eine *Psora*, die anatomische Beschaffenheit sowie die Reaktion mit CaCl_2O_2 stimmt jedoch mit *L. fuscoatra* und *L. grisella* überein. Die Thallusfarbe ist nicht typisch braun und daher konnte diese Pflanze auch zu *L. grisella* gestellt werden. Das Hymenium bleibt meistens dauernd blau nach Jod, was jedoch auch sonst bei manchen Proben der *L. fuscoatra* und *L. grisella* vorzukommen pflegt. Durch das psoraähnliche Lager steht diese Flechte der *L. fuscoatra* var. *euthallina* Harm. nahe.

L. grisella Flk.

Diabas bei Karlík und Silikateinschlüsse im Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek), Diabas bei Motoly und bei Chuchle, Sandstein der Anhöhe Vidovle und Schiefer oberhalb Všenory.

Die Flechte von Chuchle weist auffallend hochgewölbte Apothecien auf. Die Thallusoberrinde ist 20—30 μ hoch, mit einer etwa 8 μ dicken farblosen Schicht. Die bräunliche zellige Lage ist 10—30 μ hoch und wird durch CaCl_2O_2 rot gefärbt. Die Gonidienschicht ist bis 100 μ hoch und besteht aus vertikal gezogenen Gonidiengruppen.

f. **biatorina** f. n.

A typo margine apotheciorum pallidiore differt.

DiabASFelsen bei Motol.

Das Gehäuse ist bei der typischen Form dunkel bis kohlschwarz. Bei der neuen Form ist es jedoch nur bräunlich

oder violettbräunlich und weich. Daher erscheint der Apothezienrand heller.■

L. latypaea Ach.

Schiefer bei Křivoklát (Podzimek).

L. latypiza Nyl.

Schiefer bei Libšice und Kalkstein bei Hlubočepy (Podpěra), bei Stará Troja und Křivoklát, Diabas bei Karlík (Podzimek), bei Motol, Sv. Jan p. skalou und bei Nová Ves, Schiefer bei Jenerálka, Silikatader im Kalkstein bei Klukovice und auf Sandstein in der Schlucht Džbán.

L. latypizodes Nyl.

Diabas bei Karlík (Podzimek).

L. macrocarpa (DC) Steud.

Sandstein auf der Anhöhe Vidovle bei Praha.

L. neglecta Nyl.

Lydit bei Bohnice und Quarzit des Nižbor (Podzimek), Sandstein der Anhöhe Vidovle, Schiefer der Schlucht bei Všenory und Diabas bei Motol.

L. vulgata Zhlbr.

Mauer bei Libšice (Podpěra), Kalkstein bei Srbsko und Silikateinschluß im Kalkstein bei Klukovice.

var. **atrosanguinea** (Hoff.) Zhlb.

Schiefer in der Schlucht Zahořanská rokle (Podzimek).

L. lucida Ach.

Diabas bei Sv. Jan p. sk.

L. granulosa (Ehrh.) Ach.

Steril auf Erde des Schieferfelsens bei Jenerálka.

L. subdiffracta (Arn.) Lettau.

Kalksteinfelsen mit Kreuz oberhalb Sv. Jan p. skalou. Diese Flechte stimmt mit Arnold 34 (Naturh. Mus. Wien) überein.

L. uliginosa f. **proletaria** (Th. Fr.) Hedl.

Toniger Erdboden bei Liboc.

var. *humosa* (Ehr.) Ach.

Sandboden der Anhöhe Vidovle bei Praha und Erde auf Lyditfelsen der Schlucht Džbán bei Liboc.

L. testacea f. *bohemica* Anders.

Diabasfelsen unterhalb Nová Ves im Prokoptale.

Zu dieser hübschen Form, die in Bezug auf die Lager-

farbe der f. *argillicola* B. de Lesd. nahezukommen scheint, gehören nach Anders (Botan. Arbeitsgemeinschaft. d. deut. Verb. f. Heimatf. u. H. i. d. Tschech. Rep. 1929, p. 322) auch sonstige Standorte dieser Art aus der Umgebung von Praha.

L. lurida (Dill.) Ach.

Mauer zw. Chuchle und Hlubočepy (Podpěra).

f. **pallescens** Grog.

Sv. Jan p. sk., Srbsko und Karlstein, überall auf Kalkstein (Podpěra).

Bei einer typisch braunen Flechte von Sv. Jan (vide Hedwigia L, p. 63) besteht die Oberrinde aus einer 8—12 μ starken Schicht aus wasserhellen, flachgedrückten, abgestorbenen Zellen. Darunter eine 10 μ dicke gebräunte Schicht aus dickwandigen Zellen, 4—6 μ lg., 5—5 μ br., dann folgt eine etwa 40 μ hohe, oben ähnlich gebaute farblose Schicht, unten in der Gonidiennachbarschaft aus deutlich unterscheidbaren Hyphen bestehend. Die Gonidienschicht ist etwa 80 μ hoch, die Gonidien 4—12 μ lg., 4—6 μ br., in vertikalen Reihen, Das Mark besteht aus farblosen, 1.5—2 μ dicken Hyphen, die sehr dicht nebeneinander liegen. Die Unterrinde wird aus horizontalverlaufenden gebräunten Hyphen gebildet. 6 μ dicke Hyphen treten aus der Unterrinde hervor.

Bei f. *pallescens* fehlt der gebräunte Streifen in der Oberrinde, sowie meistens auch die Deckschicht aus abgestorbenen Zellen. Bei unseren Flechten, sowie bei einem Exemplar aus Dalmatien (Dubrovnik leg. Latzel, determ. Zahlbruckner) ist die Oberrinde 40—45 μ hoch, deutlicher paraplectenchymatisch, mit einzelnen Zellen bis 13 μ lg., 8 μ br., weniger dickwandig. Ausserdem sind bei der dalmatischen Flechte die Markhyphen sichtlich dicker, die Gonidienschicht zusammenhängender.

L. ostreata (Hoff.) Schaer.

Pinus sylvestris und Schiefer in der Schlucht von Všenory, Schiefer bei Jenerálka.

Catillaria athallina f. **acrustacea** Arn.

Kalkstein bei Sv. Jan p. sk. (Podpěra) und am Fuße einer Kalkfelsenwand bei Klukovice.

C. chalybeia (Borr.) Mass.

Silikatader im Kalkstein nächst dem Wirtshause im Prokoptale.

Der anatomische Bau stimmt mit der folgenden f. *terrícola* überein, die Schläuche sind walzig-keulig, 40μ lg., 8μ br. mit oben dicker Wand. Die schwarzgrünen Paraphysenköpfe sowie die blaugrüne Schicht, aus welcher die Paraphysen und Schläuche entstammen, wird durch HNO_3 violett gefärbt. Sporen zweizellig, nicht eingeschnürt, $6-9 \mu$ lg., $2.5-3 \mu$ br. Pycnoconidien länglich, $2-2.8 \mu$ lg., $0.5-0.6 \mu$ br.

Ich habe die Flechte mit Anzi Lang. 448 (Nat. Mus. Wien) verglichen und sehr gute Übereinstimmung gefunden, nur ist der Thallus unserer Pflanze schwärzlich, ähnlich wie auch Arnold (Tyrol XX p. 356, XXII p. 77) angibt. Die Pycnokonidien sind nach Arnold (l. c.) »vix 2μ lg., 0.5μ lt.«

f. *terrícola* f. n.

Thallus crassiüsculus, inaequalis vel granulosis, sordide cinerascens.

Erde eines Diabasfelsens bei Motol.

Das Gehäuse schwarz, kohlig. Hymenium $50-55 \mu$ hoch, blaugrün. Paraphysen locker, mit 4μ großem schwarzem Kopfe, unten dukelblaugrün. Hypothezium $20-25 \mu$ hoch, schwarz, mit einem Stich ins Braunviolett. Darunter eine $40-60 \mu$ hohe, etwas heller rotbraune Schicht. Sporen $8-10 \mu$ lg., $3.2-3.4 \mu$ br. zweizellig.

C. subgrisea (Nyl.) Flag.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek) und zwischen Zlíchov und Hlubočepy.

Thallus seltener gelblich-grau, wie in Flag. Alg. 152 (Nat. Mus. Wien), meistens olivenbräunlich, aus dicht verwebten farblosen Hyphen und zahlreichen cca 10μ großen nahe an die Oberfläche heranrückenden Gonidien bestehend. Der Apothezienrand besteht aus radialen, in hellviolett gefärbtes Gewebe verschmolzenen Hyphen. Die radial gerichteten Zellen sind $5-15 \mu$ lg., $5-8 \mu$ br. Das Hypothezium ist violett-schwarz, in dünnen Schnitten paraplectenchymatisch, und geht unten in helleres Gewebe des Gehäuses über. Hymenium $50-60 \mu$ hoch, daher höher als bei Steiner (Verhandl. zool. Gesell. Wien LXI 1911 p. 48), übereinstimmend jedoch mit Flag. 152, durch J blau, dann schön

weinrot gefärbt. Paraphysen ziemlich verklebt, unten 1μ dick, oben dunkel violett oder schwärzlich, oder schmutzig grünlich, durch KOH wenig verfärbt, durch HNO_3 entweder schön violett gefärbt oder der Farbstoff zerfließt und verschwindet. Die Endzelle ist kugelig, 6μ groß, Schläuche keulig, bis 50μ lg., 12μ br., oben mit $4-7 \mu$ dicker Wand, durch J oben dauernd blau- oder violettschwarz. Die Sporen sind länglich, zweizellig, häufig an der Querwand eingeschnürt, meistens mit einer breiteren und kürzeren Zelle, $13-14 \mu$ lg., $4.5-5.5 \mu$ br.

Wohl wieder eine Flechtenart mit merkwürdigem Areal: Constantine in Algier (Flag. 152 und Catalog. p. 66), Bagnère (Nyl. Flora 1865 p. 73) und Italien (Steiner l. c.).

Catillaria nigroclavata (Nyl.) Zhlbr.

Kalkstein nächst der Kapelle im Prokoptal und Silikateinschluß im Kalkstein bei Klukovice.

Bacidia sabuletorum f. **ludens** (Stzb) Zhlbr.

Moos am Grunde der Kalkfelsenwand oberhalb Sv. Jan p. sk.

f. **dolosa** (Fr.) Zhlbr.

Moos auf dem Gipfelfelsen oberhalb Sv. Jan p. sk. 400 m,

B. fuscoviridis f. **hydrophila** (Stzb) Zhlbr.

Kalkstein bei Sv. Jan p. sk.

B. chlorococca var. **tristior** (Th. Fr.) Lettau.

Trockenfaules Holz bei Motol.

B. muscorum var. **protensa** (Krb) Zhlbr.

Moos und Erde der Kalkfelsen im Prokoptal, Moos auf Diabas oberhalb Sv. Jan p. sk.

B. umbrina var. **psotina** (Fr.) Th. Fr.

Diabas bei Radotín (Podpěra), Diabas bei Karlík und Schiefer in der Umgebung von Křivoklát (Podzimek). Lydit bei Liboc, Schiefer bei Jenerálka, oberhalb Všenory, Silikatader im Kalkstein im Prokoptal, Sandstein der Anhöhe Vidovle bei Praha, Diabas bei Motol und bei Chuchle.

var. *turgida* (Kbr) Th. Fr.

Schiefer in der Schlucht von Zahořany (Podzimek).

Toninia coeruleonigricans (Lightf) Th. Fr.

Erde der Kalksteine und Felsen bei Zlíčov, im Prokoptal,

nächst Klukovice, Erde auf Diabasfelsen bei Motol und bei Nová Ves.

f. **opuntioides** (Vill.) Nyl.

Sv. Prokop.

f. **glebosa** (Ach.) Stnr.

Bei Radotín, Libšice sowie im Prokoptal (Podpěra). Felsenwand nächst Klukovice.

f. **caulescens** Lettau.

Prokoptal und Radotín (Podpěra), Kalkfelsenwand bei Klukovice.

Die Flechte vom letzteren Standorte weist zahlreiche Pycniden mit bogigen, 13—15 μ lg. und 0.5 μ br. Pycnokonidien auf.

T. tumidula (Sm.) Zhlbr.*

Kalkfelsen nächst Klukovice.

Das Hymenium ist nur cca 50 μ hoch, die Paraphysen stark verleimt, köpfig, ähnlich wie der obere Teil des Hypotheziums olivengrün, KOH—. Sporen 12—15 μ lg, 4—4.5 μ br., ähnlich wie bei *Lettau* (*Hedwigia* LX p. 94) mit vier bis mehr »guttulae«, die nach Anwenden von KOH verschwinden, ohne Septen.

Lagerwarzen weiß oder leicht gelbbraunlich und mit glatter Oberfläche.

Bei der Durchsicht von 24 Stück verschiedener Exsiccate dieser Art aus der Botan. Abteilung des Naturh. Museums in Wien fand ich bei folgenden Exsiccaten eine ebensolche glatte Areolenoberfläche: Mödling in N. Oesterreich und mehrere Standorte des Karstgebietes im westlichen Jugoslawien. Teilweise rissig gesprungene Oberrinde weisen einige Exemplare von Mödling und von der Insel Krk auf. Schön chagrinartige Oberfläche haben die Exsiccate: Proben aus Algier (Flagey), Istrien und Dalmatien (Baugmartner), Schaer. L. H. 575, Anzi lt. sup. 245, Lojka Hung. 140, Mass. It. 29.

T. aromatica (Turn.) Maß.

Diabasfelsen bei Motol.

Stimmt mit Arn. 592 (Nat. Mus. Wien) überein.

*) Während des Druckes dieser Arbeit ist das Vorkommen dieser Art von Dr. Suza aus demselben Gebiet (Radotín) angezeigt worden.

T. candida (Web.) Th. Fr.

Kalksteine in der Schlucht Čísařská rokle bei Beroun (Podpěra), im Gebiet von Nižbor (Podzimek), am Fuße der Kalkfelsenwand bei Klukovice, und zw. Srbsko und Hostín.

Rhizocarpon ambiguum (Schaer.) Zhlbr.

Häufig an Diabasfelsen bei Radotín (Podpěra) und bei Chuchle.

Rh. concentricum (Davies) Beltr.

Schiefer bei Křivoklát (Podzimek) und Kalkstein nächst dem Wirtshause im Prokoptal.

Rh. disporum var. *Montagnei* (Fw) Zhlbr.

Kieselstein bei Chuchle (Podpěra), Diabas bei Karlík (Podzimek), Schiefer bei Jenerálka und Diabas bei Motol.

Das Epithezium durch KOH heller violett, ebenso nach Anwendung von HNO₃. Jüngere Sporen durch HNO₃ schön weinrot bis rotbraun. Epispor meistens deutlich, 6—12 μ dick.

Rh. eupetraeum (Nyl.) Arn.

Quarzit bei Nižbor (Podzimek).

Die Thallusreaktion: KOH \mp gelb, dann orangerot.

Rh. geographicum f. *contiguum* (Schaer.) Mass.

Diabas bei Radotín, Schiefer bei Slivenec und bei Libšice (Podpěra). Diabas bei Karlík und Schiefer in der Schlucht von Zahořany (Podzimek.) Diabas bei Sv. Jan p. sk. und Schiefer oberhalb Všenory.

Rh. viridiatrum (Wulf.) Krb.

Granulit des Nižbor und Schiefer bei Křivoklát (Podzimek). Schiefer bei Libšice (Podpěra). Diabasfelsen bei Chuchle und bei Motol, Schiefer in der Schlucht bei Všenory, Silikateinschluß im Kalkstein im Prokoptal.

Cladoniaceae.

Baeomyces rufus (Huds.) Rebert.

Sandiger Boden der Anhöhe Vidovle und toniger Boden in der Schlucht von Všenory.

B. roseus Pers.

Boden in der Schlucht von Všenory.

Cladonia *) *bacillaris* Nyl.

Punkte 281 und 331 im Šárkatala.

Cl. caespiticia (Pers.) Flk.

Boden in der Schlucht von Všenory.

Cl. degenerans (Flk) Sprgl.

Schlucht von Všenory.

Cl. fimbriata (L.)

Štěchovice (Podpěra), Všenory.

var. *ochrochlora* (Flk) Wain.

Křivoklát und Nižbor (Podziměk). Džbán bei Liboc
und Punkt 331 nächst Jenerálka.

f. **ceratodes** Flk.

Anhöhe Vidovle bei Praha.

Cl. foliacea var. *alcicornis* (Light.) Schaer.

Libšice bei Prag, Schiefer oberhalb Podhoří, Kralupy,
Šárka, Sv. Prokop (Podpěra). Džbán bei Liboc, Motol,
Schlucht oberhalb Všenory und bei Jenerálka.

var. *convoluta* (Lam.) Vain.

Radotín bei Prag (Podpěra).

Cl. furcata (Huds.) Schrad.

Schlucht von Všenory.

var. *palamaea* (Ach.) Nyl.

Abhang unter dem Punkte 281 im Šárkatala.

var. *pinnata* f. *foliolosa* (Del.) Wain.

Křivoklát (Podziměk).

var. *subulata* Flk.

Křivoklát (Podziměk).

Cl. gracilis (L.) Villd.

Oberhalb Dobřichovice (Podpěra).

Cl. papillaria (Ehrh.) Hoff.

Anhöhe Vidovle bei Praha und Schlucht oberhalb Všenory.

Cl. coccifera var. *pleurota* (Flk) Schaer.

Anhöhe Vidovle bei Praha.

Cl. pyxidata var. *chlorophaea* Flk.

Diabas bei Motol und die Schlucht von Všenory.

f. **pachyphylla** (Wallr.) Wain.

Sv. Jan p. skalou.

*) Alle hier angegebenen von mir und von Prof. Dr. Podpěra
gesammelten Cladonien wurden von H. Sandstede bestimmt.

var. *pocillum* (Ach.) Flot.

Kalkboden im Prokoptal und bei Srbsko (Podpěra).

Cl. rangiformis f. **variolosa** Sandst.

An der Straße zw. Srbsko und Hostín.

f. *foliosa* Flk.

Sv. Jan pod skalou.

var. *pungens* (Ach.) Wain.

Křivoklát (Dr. J. Gintl).

Cl. squamosa (Scop.) Hoff.

Punkt 331 im Šárkatal.

f. **murina** Scriba.

In Wäldern oberhalb Čenkov (Podpěra).

Cl. subrangiformis Sandst.

Bei Kralupy (Podpěra),

Cl. sylvatica (L.) Hoff.

Diabasboden bei Motol.

f. *pygmaea* Sandst.

Bei Všenory.

Cl. uncialis (L.) Web.

Punkt 331 im Šárkatal und auf der Anhöhe Vidovle.

Stereocaulon quisquiliare (Leers.) Hoff.

Diabasfelsen bei Motol und Schiefer in der Schlucht von Všenory.

Gyrophoraceae.

Gyrophora hirsuta (Sw.) Ach.

Lyditfelsen Černá skála bei Bohnice (Podzimek). Sandstein des Punktes 331 und Schiefer bei Jenerálka im Šárkatal.

Umbilicaria pustulata (L.) Hoff.

Schieferfelsen bei Jenerálka.

Acarosporaceae.

Thelocarpon intermixtulum Nyl.

Entkalkte Plänersteinchen auf der Anhöhe Vidovle.

Biatorrella clavus (DC) Th. Fr.

Quarzit bei Nižbor (Podzimek).

B. pruinosa f. **illuta** (Ach.) Oliv.

Kalksteine zw. Hlubočepy und Chuchle (Podpěra).

Bei Nižbor (Podzimek). Kalkfelsenwand nächst Klukovice.

f. **intermedia** (Krb) Lettau.

Kalksteine bei Zlíčov und zw. Srbsko und Hostín
f. **macroloma** (Fw) Lettau.

Kalksteine bei Zlíčov und nächst Klukovice.

B. simplex (Dav.) Branth.

Kalkstein bei Sv. Jan p. sk.

var. **strepsodina** (Ach.) Oliv.

Quarzit bei Nižbor und Schiefer der Schlucht von
Zahořany (Podzimek). Schiefer der Felsen oberhalb Vše-
nory, bei Liboc, Punkt 281 im Šárkatale und ein kleines Stück
Sandstein im Prokoptale.

B. moriformis (Ach.) Th. Fr.

Eichen bei Stará Huť nächst Beroun (Podzimek).

Das blaugrüne Epithezium wird durch KOH und HNO₃
nicht verfärbt.

B. pinicola (Maß.) Anzi.

Eine alte Weide im Walde bei Křivoklát (Podzimek).

*Acarospora**) *cervina* (Ach.) Mass.

Kalkstein zw. Klukovice und Nová Ves.

A. atrata Hue.

Quarzit des Nižbor (Podzimek).

A. badiofusca var. **lepidiodides** Wain.

Diabasfelsen bei Motol und in großer Menge an Dia-
basfelsen im Prokoptal unter Nová Ves.

Magnusson bemerkte zu diesen Exemplaren, daß sie
habituell von skandinavischen Flechten etwas abweichen,
anatomisch jedoch genau übereinstimmen. Auch die Proben
vom Petersteine im Gesenke sehen etwas abweichend von
diesen, in der Umgebung von Praha im Gebiete der
pontisch panonischen Flora auf Diabas vorkommenden
Pflanzen aus. Später hat RNC J. Podzimek diese Flechte
auch auf Diabas bei Karlík festgestellt (Siehe Podzimek:
Časopis Národ. Musea 1928 als *A. badiofusca*).

A. fusca B. d. Lesd.

Schiefer bei Libšice (Podpěra).

A. fuscata (Schrad.) Arn.

Quarzit des Nižbor (Podzimek), Sandstein der Anhöhe
Vidovle, Sandstein und Silikateinschlüsse im Kalkstein im

*) Mit einer einzigen Ausnahme sind alle hier angeführten
Acarosporen von A. H. Magnusson bestimmt.

Prokoptale, Schiefer oberhalb Všenory, Schiefer und Lydit bei Jenerálka im Šárkatala.

f. **subreagens** Magn. K. Svenska Vetensk. Handl. 13. 7. No. 4. p. 302.

Quarzit des Nižbor (Podzimek).

A. glaucocarpa f. **nuda** (Wain.) Magn.

Kalkstein im Prokoptal (Podzimek — determ. Servít).

A. Heppii (Naeg.) Krb.

Kalkfreies Steinchen oberhalb der Zementfabrik im Prokoptal.

A. macrospora (Hepp) Th. Fr.

Kalkfelsen oberhalb Sv. Jan p. sk. 400 m.

A. oxytona (Ach.) Mass.

Punkt 331 bei Jenerálka, auf Lydit.

A. praeruptarum Magn.

Schiefer bei Křivoklát (Podzimek).

A. umbilicata Bagl.

Quarzit des Nižbor (Podzimek).

A. veronensis Mass.

Schiefer in der Schlucht von Zahořany und Silikateinschluß im Kalk des Prokoptales (Podzimek).

Pertusariaceae.

Pertusaria amara (Ach.) Nyl.

Laubbäume bei Stará Huť nächst Beroun (Podzimek).

P. lactea (L.) Arn.

Schiefer in der Schlucht bei Zahořany (Podzimek).

Lecanoraceae.

L. cinerea (L.) Röhl.

Schiefer und Kieselstein in der Schlucht von Zahořany (Podzimek).

Im Lagermarke finde ich zwischen Strängen von aus walzenförmigen Zellen bestehenden Hyphen kugelige Gruppen rundlicher Zellen, die ein paraplektenchymatisches Gewebe bilden.

L. contorta (Hoff.) Stnr.

Kalksteine bei Srbsko und an der Strasse zw. Srbsko und Hostín und in Prokoptal.

var. **albocincta** Stnr.

Diabas bei Sv. Jan p. sk.

var. **cinereovirens** (Müll.) Zhlbr.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek), zw. Srbsko und Hostín.

L. conglomerans Nyl.

Schiefer bei Jenerálka.

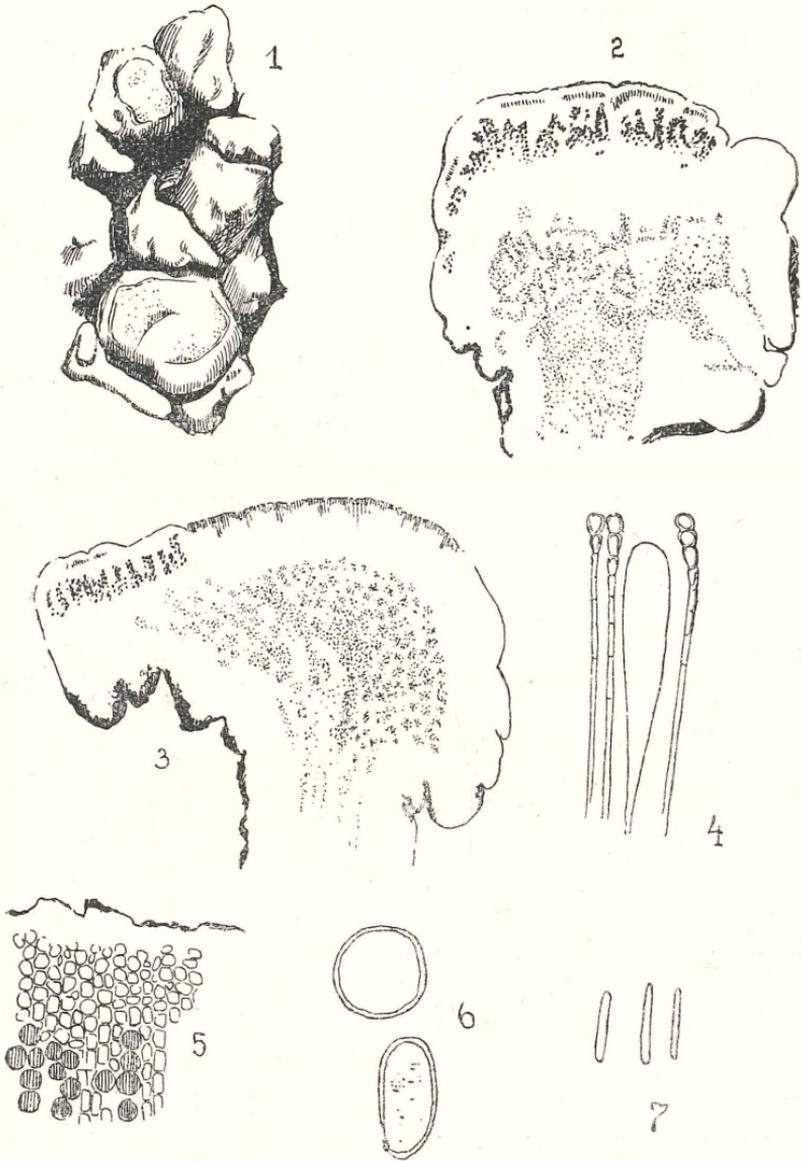
Die Thallusoberrinde ist 20 — 35 μ hoch, aus dünnwandigen meistens ellipsoidischen, etwa 9 μ lg., 8 μ breiten Zellen bestehend. Seitenberindung der Areolen ist vorhanden, ähnlich gebaut, doch dünner. Die Gonidienschicht ist 70 — 90 μ hoch, mit 7 — 11 μ grossen Gonidien, welche in vertikale, 20 — 30 μ breite Streifen geordnet sind. Das Mark ist farblos, in Mikrotomschnitten durchsichtig, aus dicht verflochtenen Hyphen bestehend. Die Hyphen in ellipsoidische, bis 12 μ lg., 8 μ br. Zellen gegliedert, dünnwandig. Das Exzipulum ist etwa 9 μ breit, ähnlich wie das Hypothezium aus farblosen, 2 μ dicken Hyphen verflochten. Die Paraphysen oben rosenkranzförmig gegliedert, das Endglied ellipsoidisch, 6 μ lg., 5 μ br. Die Schläuche sind dünnwandig, walzig-keulig, 110 — 130 μ lg., 21 — 23 μ br. Die Sporen liegen zweizeilig in den Schläuchen, sind eiförmig, 27 — 34 μ lg., 17 — 25 μ br. Pycnoconidien stäbchenförmig, 8 — 10 μ lg., 0'5 μ br.

Bei der Helsingforscher Flechte (Nyl. & Norrl. 531, Naturh. Mus. Wien), finde ich die 7 — 12 μ lg., 6 — 8 μ br. Zellen der 22 — 30 μ dicken Oberrinde mit etwas dickeren Wänden, deutlicher vertikal gereiht, d. h. die Hyphen der Oberrinde weniger verzweigt. Sie lassen sich auch besser zwischen den Gonidiensäulen verfolgen. Die Glieder der Markhyphen sind bis 10 μ lg., 8 μ br. Die Paraphysen sind deutlicher in ihrer ganzen Länge gegliedert. Sonst, namentlich auch im Habitus, stimmen beide Flechten vorzüglich überein.

L. Dominiana spec. n. (Taf. III.)

Thallus J —, KOH + luteus, demum sanguineus, $\text{CaCl}_2\text{O}_2 =$, KOH + $\text{CaCl}_2\text{O}_2 =$, luridus vel cervinus, madefactus olivaceo fuscus, rimoso-areolatus usque verrucoso-squamulosus, 0'8 — 1'5 mm crassus. Verrucae basi vulgo constrictae, subpedicellatae, 1 — 1'5 mm latae, contiguae, varie polygonatae vel subcrenolatae, rimis profundis separatae, in

superficie subplanae aut paulo convexae, aut inaequales, opacae.
 Protothallus indistinctus. Cortex superior incoloratus, solo



TAF. III.

pars superficiale tenuissima atroviolaceo colorata, 50—70 μ
 crassus, paraplectenchymaticus, cellulis 4—8 μ lg., 4—7 μ lt.
 Cortex lateralis verrucarum similis, sed tenuior, 20—40 μ

crassus. Stratum gonidiale 60 — 150 μ altum, interruptum, gonidiis subglobosis 4 — 11 μ lt. Stratum medullare incoloratum, sed granulis copiosis incoloratis obscuratum e hyphis leptodermaticis, copiosis, dense contextis articulatis formatum, articulis hypharum pro parte globosis, pro parte oblongis vel cylindricis.

Apothecia in verrucis solitaria, omnino immersa vel rarior paulo emergentia, a thallo pro parte tenuissime cincta. Discus usque 1'4 mm lt. saepe superficia superior verrucarum tota explendens, planus, saepe minute granulosus aut rimulosus, rarius paulo et irregulariter convexulus, atratus, saepe paulo caesiopruinosulus, madefactus haud dilutior. Excipulum in parte suprema cca 50 μ lt., in parte lateralis 15 — 25 μ lt., e hyphis tangentialibus, dense contextis, articulatis consistens, articulis 4 — 7 μ lg., 3 — 4 μ lt. Hypothecium incoloratum, ex hyphis tenuis dense intricatis consistens, 25 — 35 μ altum. Epithecium sordide olivaceum KOH sordide fuscescens, HNO₃ aeruginosum. Hymenium 160 — 190 μ altum, incoloratum, guttulis nullis, J coerulescens. Paraphyses copiosae, 1'3 μ crassae, in parte inferiore indistincte articulatae, in parte superiore moniliforme articulatae, articulis supremis globosis, 6 μ lt. Asci leptodermatici, cylindrico clavati. Sporis in ascis biserialiter dispositis, ellipsoideis, aut ovoideis aut oblongis vel rarior subglobosis 20 — 25 μ lg., 12 — 16 (19) μ lt. Pycnognidiis bacillaris 6 — 9 μ lg., 1 μ lt.

DiabASFelsen bei Motol.

Vor 20 Jahren sammelte ich dieselbe Flechte bei einer von Prof. Dr. Domin geführten Exkursion auf Diabas bei Chuchle südlich von Praha.

Die neue Art gehört in die Verwandtschaft von *L. intermutans*.

L. gibbosa (Ach.) Nyl.

Schiefer bei Křivoklát und in der Schlucht von Zahorany (Podzimek), bei Všeňory und auf Lydit der Schlucht Džbán.

f. **porinoidea** (Fw) Leight.

Lyditfelsen der Schlucht Džbán und Schiefer bei Jenerálka.

Im Vergleiche mit Flot. L. exs. sax. 303 (Herb. Dahlem) besitzen diese Flechten etwas dunkler gefärbtes Lager.

L. Hoffmanni (Ach.) Müll. Arg.

Schiefer bei Křivoklát (P o d z i m e k), Diabas bei Radotín (P o d p ě r a), bei Motol und bei Sv. Jan p. sk.

L. albescens (Hoff.) Flk.

Kalkfelsen oberhalb Sv. Jan p. sk., 400 m.

L. atra (Huds.) Ach.

Diabas bei Chuchle.

L. coarctata f. *cotaria* Ach.

Mauer bei Beroun (P o d p ě r a).

var. *elacista* (Ach.) Schaer.

Kleine Steinchen (Sandstein) auf der Anhöhe Vidovle bei Praha.

var. **glebulosa** (Sm.) Mudd.

Anhöhe Vidovle.

var. *ornata* f. **sorediosa** (B. de Lesd.)

Schiefer des Punktes 281 bei Jenerálka.

L. conferta (Duby) Grogn.

Diabas bei Motol.

L. crenulata f. **dispersa** Flk.

Kalkstein bei Radotín (P o d p ě r a), bei Klukovice, im Prokoptal, zw. Srbsko und Hostín, bei Sv. Jan p. sk.

L. dispersa (Pers.) Röhl.

Kalkstein bei Radotín (P o d p ě r a), Hlubočepy, Zlíchov, Klukovice, Steinchen auf der Anhöhe Vidovle.

L. epanora Ach.

Kieselstein bei Křivoklát (P o d z i m e k).

L. frustulosa var. *argopholis* (Ach.) Link.

Schiefer bei Libšice (P o d p ě r a), häufig an Diabasfelsen bei Motol und unterhalb Nová Ves im Prokoptale. Silikat-einschlüsse im Kalk bei Klukovice.

Das Hymenium dieser Flechten weist zahlreiche gelbe Tröpfchen auf.

L. orosthea Ach.

Schiefer bei Jenerálka.

L. polytropa (Ehrh.) Rbh.

Sandstein der Anhöhe Vidovle bei Praha und bei Motol.

f. *illusoria* (Ach.) Leight.

Silikateinschluss im Kalk bei Hlubočepy (Podzimek), auch sonst im Prokoptal, Schiefer oberhalb Všenory.

L. rupicola (L.) Zhlbr.

Kieselgestein auf dem Nižbor (Podzimek).

f. *sorediata* (Fw.) Zhlbr.

Diabas bei Karlík (Podzimek).

L. sarcopis (Whl) Röhl.

Entrindete Robinia bei Motol.

L. sulphurea (Hoff.) Ach.

Schiefer bei Libšice und Diabas bei Radotín (Podpěra).

Quarzit des Nižbor (Podzimek), Diabas bei Motol und bei Chuchle, Silikateinschluss im Kalksteine im Prokoptal,

L. subfusca var. *campestris* (Schaer.) Rbh.

Diabas bei Sv. Jan p. sk., Kalkstein und Silikateinschluss im Kalkstein im Prokoptal.

L. umbrina (Ehrh.) Röhl.

Lyditfelsen im Džbán bei Liboc, Kalkstein im Prokoptal und Diabas bei Motol.

Pycnoconidien sind jedoch nicht gefunden worden.

L. varia (Ehrh.) Ach.

Alte Weide in der Nähe von Křivoklát (Podzimek).

L. albomarginata (Nyl.) Cromb.

Kalkstein bei Hlubočepy und Schiefer bei Křivoklát (Podzimek), Kalkstein im Prokoptal (Podpěra), Hlubočepy und Sv. Jan p. sk., Schiefer bei Liboc und Diabas bei Motol.

L. alphoplaca (Whlb) Zhlbr.

Diabasfelsen bei Motol.

var. **polycarpa** (Th. Fr.) Zhlbr.

Diabasfelsen bei Sedlice nächst Lodenice (Podpěra).

Die Flechte ist nur auf Grund der Beschreibung, mamentlich bei *Th. Fries* (Lichenogr. Scand. p. 320) hierher eingereiht worden.

L. Garovaglii (Krb) Zhlbr.

Schiefer bei Křivoklát (Podzimek), eisenhaltige Ader im Kalkstein im Prokoptal.

Der angefeuchtete Thallus ist grünlich. Die Oberrinde 30–35 μ hoch, mit etwa 2 μ dicker, amorpher, farbloser

Deckschicht, sonst durch bräunliche Körnchen verdunkelt, unten farblos. Die Gonidienschicht ist fast zusammenhängend, die Gonidien 7—12 μ groß. Die Unterrinde etwa 20 μ dick, rotbraun. Die Endglieder der vertikal gerichteten Hyphen bilden ein unvollkommenes Paraplectenchym als äußerste Schicht. Stellenweise treten rotbraune bis 3 μ dicke Hyphen aus der Lagerunterseite heraus.

Bei Zhlbr. Lich. rar. 149 fehlt in der Oberrinde der unterste ungefärbte Teil fast vollkommen, die Gonidien sind bis 16 μ groß, häufig horizontal gestreckt, die Unterrinde zeigt eine kaum wahrnehmbare paraplectenchymatische Außenschicht.

L. incusa f. **olivacea** Suza, Časop. Morav. musea XXVII. p. 7. (Separ.)

Schiefer bei Křivoklát (Podzimek), Schieferfelsen nächst Jenerálka im Šárkatal, Lydit der Schlucht Džbán.
f. **caesiella** Suza, l. c.

Schiefer oberhalb Všenory, Lydit in der Schlucht Džbán, Diabas bei Motol.

Eine stark bleigrau bereifte Form, wie ich sie unter dieser Bezeichnung im Naturh. Museum in Wien gesehen habe.

f. **castanoplacoides** f. n.

Thallus robustior, castaneus.

Schiefer in der Schlucht von Zahorany (Podzimek).

Kastanienbraune Form mit meistens etwas robusterem Thallus, übereinstimmend habituell mit einer ungarischen Pflanze classischen Standortes von *Lecanora castanoplaca* Nyl. (= *Acarospora*).

f. **elaeoplaca** comb. n. — *Lecanora elaeoplaca* Nyl. in Flora 1881 p. 538.

Schieferfelsen nächst Jenerálka im Šárkatal.

Die Thallusfarbe ist heller, die Randlappen flacher, mehr glatt und enger angepreßt. Die Flechte Lojka's vom classischen Standort (Naturh. Mus. Wien) hat die Lappen etwas breiter, sonst übereinstimmend mit unserer Pflanze.

L. muralis (Schreb.) Rbh.

Diabas in der Schlucht bei Slivenec (Podpěra), Diabas und Sandstein bei Motol.

var. **albopulverulenta** (Schaer.) Rbh.

Kalkfelsen bei Srbsko und bei Sv. Jan p. sk. (Podpěra), Gipfel des Kreuzfelsens bei Sv. Jan p. sk., 400 m.

Habituell stimmen diese Flechten mit Anzi Lang. 271 (N. Mus. W.) überein, weniger mit Schaer. 334 (N. Mus. W.), wo namentlich auch die dicke Oberrinde auffällt. Sie ist 60—80 μ dick und durch Anwesenheit zahlreicher farbloser Körnchen undurchsichtig. Darunter eine cca 100 μ hohe Gonidienschicht, dann Mark, welches durch an Hyphen haftende Körnchen undurchsichtig ist. Bei Anzi 271 besteht die Oberrinde aus einer cca 40 μ hohen, farblosen durchsichtigen Lage abgestorbenen unregelmäßigen Paraplectenchyms, dann folgt eine etwa 20 μ dicke gelblichbräunliche Schicht undurchsichtigen Paraplectenchyms. Die Gonidienschicht ist etwa 70 μ hoch, darunter die Markschrift, ähnlich wie bei Schaerers Exsiccata. Die Haftthyphen sind in beiden Exsiccata bräunlich, 4 μ dick. Die Pycnidien bei Anzi am Außenrande der Areolen kugelig, 100 μ im Durchmesser, mit 10 μ dickem, fast farblosen Perifulerium, aus tangentialen Hyphen verflochten. Die Pycnoconidien sind stäbchenförmig, 7.5 μ lg., 0.6 μ br. Die Flechte von Sv. Jan hat 30—60 μ dicke, durch Körnchen undurchsichtige Oberrinde, 60—70 μ hohe Gonidienschicht und mit beiden Exsiccata übereinstimmende, etwas gebräunte Markschrift.

var. *diffracta* (Ach.) Rbh.

Diabas bei Karlík (Podzimek).

var. *versicolor* (Pers.) Th. Fr.

Kalkfelsen bei Klukovice.

L. radiosa (Hoff.) Schaer.

Kalkstein am Kreuz oberhalb Sv. Jan p. sk., 400 m und im Prokoptal, dort auch auf Silikateinschlüssen.

f. *farinosa* Hue.

Kalkstein nördl. von Srbsko.

var. *incanescens* Nyl.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podpěra), Diabas bei Motol und bei Sv. Jan p. sk.

Mit der Beschreibung gut übereinstimmend durch unregelmäßige Rosetten, Bereifung und kleine Pycnoconidien: 4—5.5 μ lg., 0.6—0.8 μ br. Vergleichsmaterial jedoch nicht gesehen.

var. *subcircinata* (Nyl.) Zhlbr.

Schlucht von Slivenec (Podpěra).

Lecania erysibe var. **Rabenhorstii** (Hepp) Mudd.

Kalkstein bei Sv. Jan p.sk., nördl. von Srbsko, an mehreren Stellen im Prokoptale, bei Klukovice und auf Diabas bei Motol.

Im Vergleich mit Mudd. Herb. L. Brit. No. 105 (Naturh. Mus. Wien.) ist der Thallus weniger staubig aufgelöst.

Candelariella aurella (Hoff.) Zhlbr.

Kalkstein bei Radotín (Podpěra), im Prokoptale bei Hlubočepy und auf Steinchen der Anhöhe Vidovle bei Praha.

O. vitellina (Ehrh.) Müll. Arg.

Diabas bei Radotín (Podpěra), bei Karlík, Schiefer bei Křivoklát und in der Schlucht von Zahořany, Quarzit des Nižbor (Podzimek), Diabas bei Motol, Erde und Silikateinschlüsse des Kalksteins im Prokoptal.

f. **arcuata** (Hoff.) Lettau.

Sandstein bei Radotín (Podpěra), Eichen und Schiefer bei Křivoklát (Podzimek), Diabas bei Motol.

f. *corruscans* (Ach.) Lettau.

Sandstein der Anhöhe Vidovle und Schiefer bei Jenerálka.

Parmeliaceae.

Candelaria concolor (Dicks) Wain.

Laubbäume bei Křivoklát (Podzimek.)

*Parmelia**) *caperata* (L.) Ach.

Schiefer in der Schlucht von Zahořany, Quarzit des Nižbor und Lydit des Felsens Černá skála bei Bohnice (Podzimek.)

f. *sorediosa* Müll. Arg.

Schiefer in der Schlucht von Zahořany (Podzimek), Schiefer bei Všenory.

P. conspersa (Ehrh.) Ach.

Schiefer in der Schlucht Zahořanská rokle Diabas bei Karlík, Lydit bei Bohnice (Podzimek), Schiefer bei Všenory und Punkt 281 im Šárkatale. Lydit in der Schlucht Džbán bei Liboc.

P. conspurcata (Schaer.) Wain.

Diabas bei Motol.

P. fuliginosa (Wib.) Nyl.

*) Alle hier angeführten Parmelien, insoferne sie von mir gesammelt worden sind, wurden von Dr. A. Hilitzer (Praha) bestimmt.

Schieferfelsen im Šárkatala (Podpěra), Quarzit bei Nižbor und Lydit bei Bohnice (Podzimek).

P. furfuracea f. *thamnodos* Wallr.

Schiefer beim Punkt 331 im Šárkatala.

P. glomellifera Nyl.

Schiefer bei Křivoklát und Quarzit bei Nižbor (Podzimek). Diabasfelsen bei Motol, bei Sv. Jan p. sk., Lydit der Schlucht Džbán sowie Schiefer daselbst, auch auf Erde in Felsenspalten, bei Jenerálka und bei Všenory.

var. *grisea* Anders.

Annäherungsformen auf Diabas bei Motol und in Spalten der Lyditfelsen der Schlucht Džbán.

P. molliuscula Ach.

Schiefer bei Křivoklát und in der Schlucht von Zahorany, Quarzit des Nižbor, Diabas bei Karlík nächst Dobřichovice, Lydit bei Bohnice (Podzimek). Diabas bei Motol, Schiefer bei Jenerálka und oberhalb Všenory, Lydit der Schlucht Džbán und Silikateinschlüsse im Prokoptal.

f. *hypoclysta* Nyl.

Diabas bei Motol.

P. Mougeotii Schaer.

Schieferfelsen in der Schlucht oberhalb Všenory.

P. pannariiformis (Nyl.) Wain.

Schiefer oberhalb Všenory.

P. proluxa (Ach.) Röhl.

Quarzit des Nižbor, Lydit des Felsens Černá skála bei Bohnice, Diabas bei Karlík (Podzimek). Schiefer bei Všenory, Lydit der Schlucht Džbán, Diabas bei Motol und Silikateinschlüsse im Kalkstein des Prokoptales.

var. *Pokornyi* (Krb.) Zhlbr.

Erde auf dem Schieferfelsen nächst Jenerálka.

P. physodes (L.) Ach.

Salix bei Křivoklát (Podzimek), auf Erde der Lyditfelsen des Džbán, Schiefer des Punktes 281 im Šárkatala und oberhalb Všenory, Diabas bei Motol und auf dem Boden der Anhöhe Vidovle.

f. *platyphylla* Ach.

Schiefer des Punktes 331 im Šárkatal.

f. *vittatoides* Mer.

Felsen bei Nižbor (Podzimek), auf dem Boden der Anhöhe Vidovle.

P. saxatilis (L.) Ach.

Felsenrücken bei Jince (Podpěra), Schiefer bei Jenerálka.

var. *Aizoni* Del.

Lyditfelsen der Černá skála bei Bohnice (Podzimek).

Pomphalodes (L.) Ach.

Felsenrücken bei Jince (Podpěra).

P. soreciata (Ach.) Röhl.

Quarzit des Nižbor (Podzimek).

Cetraria glauca f. *coralloidea* (Wallr.) Krb.

Felsenrücken bei Jince (Podpěra).

f. *ulophylla* (Wallr.) Krb.

Felsenrücken bei Jince (Podpěra).

C. islandica f. *subnigricans* (Nyl.) DT.

Nordabhang der Anhöhe Vidovle.

var. *tenuifolia* (Retz.) Wain.

Bei Srbsko (Podpěra).

Cornicularia tennissima (L.) Zhlbr.

Punkt 331 im Šárkatal.

var. *muricata* (Ach.) DT.

Nordabhang der Anhöhe Vidovle und Diabasboden bei Motol.

Usneaceae.

Ramalina pollinaria f. **humilis** Ach.

Kalksteinfelsen im Prokoptal (in Hedwigia L. p. 80 als f. *rupestris*).

Diabasfelsen bei Motol und Schiefer bei Jenerálka.

Caloplacaceae.

Blastenia fuscorubens (Nyl.)

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek).

Bl. rupestris var. *calva*. (Dicks.)

Kalkstein bei Sv. Jan p. sk. (Podpěra).

var. **coniasis** (Mass).

Diabas bei Motol und Kalkstein im Prokoptale.

var. *rufescens* (Hoff.) Zhlbr.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek), nächst der Kapelle im Prokoptal und Diabas bei Motol.

Bl. Siebenhaariana (Krb).

Kalkstein bei Sv. Jan p. sk. (Podpěra).

Bl. lamprocheila (DC) Flag.

Diabas bei Chuchle (Podpěra).

Abweichend von Arn. 1106 (Münch.) ist das Lager dicker und dunkler gefärbt.

Caloplaca aurantiaca var. **diffRACTA** (Mass.) Lojka.

Diabas bei Motol, Kalkstein nächst Srbsko.

C. caesiorufa (Nyl.) Flag.

Schiefer bei Křivoklát und in der Schlucht bei Zahořany (Podzimek), Diabas bei Nová Ves, Schiefer bei Všenory.

C. coronata (KrmP.) Stnr.

Kalkstein zwischen Chuchle und Hlubočepy (Podpěra), am Kreuz oberhalb Sv. Jan p. sk., 400 m.

C. citrina (Hoff.) Th. Fr.

Mauer in Libšice (Podpěra).

C. flavovirescens (Wulf.) Zhlbr.

Kalkfelsen oberhalb Sv. Jan p. sk.

C. fuscoatra (Bayrh.) Zhlbr.

Schiefer bei Jenerálka. Schiefer in der Schlucht von Zahořany und bei Křivoklát, Diabas bei Karlík (Podzimek).

C. lactea (Mass.) Zhlbr.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek).

f. **aestimabilis** Arn.

Kalkstein zw. Chuchle und Hlubočepy und in der Schlucht Čisařská rokle bei Beroun (Podpěra), am Fuss der Kalkfelsenwand bei Klukovice, bei Srbsko, an der Straße zw. Srbsko und Hostín, am Kreuze oberhalb Sv. Jan p. sk., 400 m und auf Diabas bei Sv. Jan.

f. **aurata** (Harm.)

Kalkstein bei Zlíchov.

C. variabilis (Pers.) Th. Fr.

Diabas und Kalkstein bei Sv. Jan p. sk., Kalkstein bei Zlíchov, Klukovice, Srbsko.

f. **fusca** Mass.

Čísařská rokle bei Beroun (Podpěra), bei Hlubočepy und auf einer Kalksteinader im Diabas bei Sv. Jan p. sk. Kalkstein bei Sv. Jan p. sk.

Die Flechte vom letzten Standort ist in mancher Beziehung ähnlich var. *submersa* Zahlbr. Sie weicht jedoch vom Original exemplar (Bosanka nächst Dubrovnik, leg. Latzel) habituell durch helle weißliche Thallusfarbe ab, auch ist das Epithezium weniger körnig, durch KOH sich kaum violett färbend und das Hymenium etwas niedriger.

C. vitellinula (Nyl.) Oliv.

Diabas bei Karlík, Schiefer bei Křivoklát und in der Schlucht von Zahořany (Podziměk).

C. decipiens (Arn.) Stnr.

Kalkstein bei Radotín und Pläner Na Viničkách bei Lysá (Podpěra), Kalkstein bei Hlubočepy (Podziměk), Einfriedungsmauer des Meyerhofes Perníkárka und Diabas bei Motol.

C. elegans (Link.) Th. Fr.

Diabasfelsen bei Motol.

C. aurantia (Pers.) Stnr.

Kalkstein bei Klukovice und bei Sv. Jan p. sk.

f. *centrifuga* Mass.

Kalkstein im Radotíner Tal bei Praha (Podpěra).

C. murorum (Hoff.) Th. Fr.

Kalkstein im Radotíner Tal (Podpěra).

C. tegularis (Ehrh.)

Diabas bei Motol, Lydit in der Einfriedungsmauer des Meyerhofes Perníkárka.

Theloschistaceae.

Xanthoria fallax f. *vulgaris* Anders.

Kalkstein bei Radotín (Podpěra), Schieferfelsen bei Jenerálka, Pappeln längs der Straße bei Lodenice.

f. *aurantiaca* Anders.

Diabas bei Motol.

X. parietina (L.) Th. Fr.

Kalkstein bei Tetín (Podpěra), Robinia pseudoacacia bei der Kapelle im Prokoptal, Lydit in der Schlucht Džbán.

Von allen 3 Standorten nur kümmerliche Proben. Wohl eine seltenere Art in der Prager Umgebung.

Buelliaceae.

Buellia punctiformis (Hoff.) Mass.

Eichen bei Všenory.

var. *chloropolia* Fr.

Laubbäume bei Křivoklát und Nižbor (Podzimek), Robinia bei der Kapelle im Prokoptal und nächst Motol.

var. *stigmatea* (Ach.) Stnr.

Granulit des Nižbor, Schiefer bei Křivoklát, Silikateinschluß im Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek), Schiefer bei Jenerálka, Diabas bei Motol und bei Chuchle

B. saxatilis (Schaer.) Krb.

Diabas bei Motol.

Der Thallus hat rundliche weißliche Sorale und auch sonst entspricht er habituell gut Schaer. 240 (Nat. Mus. Wien). Bei Arn. 1058 sieht der Thallus etwas abweichend aus, namentlich ist er dünner und die Areolenoberfläche glatter. Die Flechte von Motol hat folgende Thallusreaktionen: K \pm gelb, Ca \pm gelb, J —, Sorale Ca + gelb. Im Habitus und anatomischen Baue der Apothezien stimmen alle 3 Flechten vollkommen überein.

B. porphyrica Arn.

Diabas bei Karlík (Podzimek), Schiefer bei Jenerálka und Silikateinschlüsse im Kalkstein bei Klukovice.

B. ambigua Ach.

Schiefer bei Všenory.

B. alboatra (Hoff.) Th. Fr.

Schiefer bei Jenerálka.

B. epipolia Ach.

Silikatader im Kalkstein bei Radotín (Podpěra), Schiefer oberhalb Všenory, Kalkstein bei Klukovice.

var. *venusta* (Krb) Oliv.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek), zwischen Zlíchov und Hlubočepy und bei Sv. Jan p. sk.

f. **ocellata** (Mass.) Stnr.

Kalkstein bei Radotín (Podpěra), bei Klukovice und Nová Ves im Prokoptale und oberhalb Sv. Jan p. sk.

Die Kalilaugereaktion des Thallusmarkes ist bei diesen Flechten sehr verschieden, wie auch Steiner (Verhandl. zool.-bot. Gesellsch. Wien LXIX p. 63) angibt. Bei einigen Proben verfärbt sich das Mark schnell gelb und nachher blutrot, bei anderen wird es kaum rötlich. Die als f. *ocellata* angegebenen Flechten besitzen anfangs vertiefte, dann flache Apothezien.

B. canescens var. **euthallina** var. n.

A typo plagis minoribus, lobis brevibus sed distincte crassioribus differt.

Schieferfelsen bei Jenerálka im Šárkatala.

Etwa 1 cm breite Rosetten mit kürzeren, cca 2 mm langen, 0.5—0.7 mm breiten und dickeren Lappen, die weniger fest dem Substrate anliegen. Die Soredienbildung ist verschieden, entweder besitzt der Thallus nur einzelne rundliche Sorale mit körnigen Soredien, oder es sind ganze Steinflächen mit sorediös zersetzten Lagern überwuchert, in welchem Falle die Soredien staubig sind.

Die Oberrinde ist 12—17 μ dick, braun, paraplectenchymatisch, mit dünnwandigen etwa 5 μ großen Zellen. Die Deckschicht aus hyalinen krystallinischen Körperchen, wie ich sie bei französischen und dalmatinischen Exemplaren dieser Art finde, ist da nur durch einzelne Körnchen angedeutet. Auch die Punktierung der Rinde durch dunklere ultramikroskopische Körperchen (»inspers«) ist sehr undeutlich. Gonidien sind 5—12 μ groß, in 40—60 μ großen Gruppen, daher die Gonidienschicht nicht zusammenhängend. Das Mark aus schütterten, 2 μ dicken Hyphen. Die Lagerreaktionen: J —, KOH $\frac{+}{-}$ gelb, dann orangegelb, CaCl₂ O₂ $\frac{-}{+}$ oder $\frac{+}{-}$ etwas gelblich, KOH mit CaCl₂O₂ $\frac{-}{+}$. Kleine Sorale mit körnigen Soredien Ca + gelblich, staubige Soredien Ca —.

B. badia (Fr.) Krb.

Schieferfelsen bei Jenerálka.

Rinodia atrocinerea var. **fatiscens** Th. Fr.

Quarzit des Nižbor, Kieselgestein bei Bohnice, Schiefer bei Křivoklát und in der Schlucht von Zahořany (Podzimek), Schiefer in der Schlucht bei Všenory.

Größtenteils steril.

R. Bischoffii var. *immersa* Krb.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek), nächst Klukovice und an der Straße zw. Srbsko und Hostín.

var. *protuberans* Krb.

Kalksteine bei Srbsko, Sv. Jan p. sk. und bei Klukovice f. **euthallina** (Harm.)

Kalkstein bei Sv. Jan p. sk., Südhang der Anhöhe Dívčí Hradý oberhalb Zlíchov.

f. **subathallina** (Harm.)

Kalksteine bei Sv. Jan p. sk.

R. demissa (Flk.) Arn.

Schiefer bei Stará Troja (Podzimek), Sandstein bei Motol.

R. discolor f. *candida* Hepp.

Schiefer in der Schlucht von Zahořany (Podzimek).

R. lecanorina Mass.

Kalksteinfelsen bei Sv. Jan p. sk.

R. oreina (Flk.) Arn. (incl. *Mougeotiioides* (Nyl.) Zhlbr.)

Lydit des Punktes 331 im Šárkatal.

R. exigua (Krb.) Th. Fr.

Pappeln längs der Straße bei Lodenice, Eiche beim Kreuz oberhalb Sv. Jan p. sk.

Physciaeae.*)

Physcia adscendens (Fr.) Th. Fr.

Granitpfeiler nächst Meyerhof Jenerálka, Diabas bei Motol und Robinia bei Motol.

Ph. caesia (Hoff.) Nyl.

Lydit bei Stará Troja, Diabas bei Karlík, Laubbaumrinde nächst Křivoklát (Podzimek). Diabas oberhalb der Kapelle in Sv. Jan p. sk., Pläner bei Liboc, Sandstein bei Cibulka und Moos der Lyditfelsen der Schlucht Džbán.

Gemeinsam mit der sorediösen Normalform auf Kalkstein im Prokoptale eine abweichende Form, die gewissermaßen an *Ph. melops* erinnert, ohne Sorale und mit schmalen Lappen. Vielleicht dieselbe Form, welche Lettau (Hedwigia LII p. 253) von Muschelkalk in Thüringen erwähnt: »lobis magis discretis, elongatis, soralis paucis, fere candidis.«

*) Alle von mir gesammelten Flechten dieser Gruppe hat B. Lynge (Oslo) bestimmt.

Ähnlich schmallappige, sorediöse Pflanzen sind diejenigen von Diabas bei Sv. Jan, zu denen Lynge bemerkte: »Sie sind *Ph. teretiuscula* sehr ähnlich, aber bei jener Art sind die Lazinien doch noch etwas schmaler und mehr discretæ. Die Soredien sind bei vorliegender Pflanze auch mehr von dem globosen *Caesia*—Typus. Je mehr ich diese Pflanze beobachte, um so mehr glaube ich hier *Ph. caesia* zu sehen«.

Auch *Ph. caesia* f. *dendritica* Anders (Hedwigia LXIII p. 320) scheint der Beschreibung nach dieser Flechte nahe zu sein.

Der anatomische Bau des Thallus dieser sterilen Flechten weicht nicht bemerkenswert von der normalen *Ph. caesia* ab.

***Ph. dimidiata* (Arn.) Nyl.**

DiabASFelsen bei Motol, Schiefer bei Jenerálka (determ. Servít).

Ph. grisea (Lam.) Zhlbr.

Eiche am Kreuz oberhalb Sv. Jan p. sk. 400 m.

var. *pityrea* (Ach.) Lynge.

Mit der typischen Form, ferner DiabASFelsen bei Motol, Robinia an der Kapelle im Prokoptal, Pappel auf der Straße bei Lodenice.

Ph. muscigena (Ach.) Nyl.

Moos des DiabASFelsens am Eingang in Motol.

Ph. nigricans (Ach.) Stzb.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek) und im Prokoptal, Diabas oberhalb der Kapelle in Sv. Jan p. sk., Lydit in der Schlucht Džbán, Sandstein der Anhöhe Vidovle.

Ph. virella (Ach.) Mer.

Kalkstein bei Hlubočepy (Podzimek), Pappeln längs der Straße nächst Lodenice, Diabas bei Motol und Lydit der Schlucht Džbán.

ERKLÄRUNG DER ZEICHNUNGEN.

Taf. I. *Sarcopyrenia gibba* Nyl.: 1. Vertikaler Schnitt durch das Perithezium. 2. Schläuche. 3. Sporen. 4. Lagerhyphen.

Taf. II. *Verrucaria Podzimekii* Servit: 1. Vertikaler Schnitt durch eine Lagerwarze mit 3 Perithezien. 2. Paraplectenchym des Peritheziums. 4. Habitusbild. 5. Sporen. 6. Hymenium. 7. Oberer Peritheziumteil mit Periphysen.

Taf. III. *Lecanora Dominiana* Servit: 1. Habitusbild eines Lagerabschnittes mit 2 Apothezien. 2. Vertikaler Schnitt durch eine sterile Lagerwarze. 3. Vertikaler Schnitt durch eine fruchtende Lagerwarze. 4. Ein Schlauch mit Paraphysen. 5. Oberrinde und Gonidien. 6. Sporen. 7. Pycnoconidien.

 Résumé.

Les lichens de la Tchecoslovaquie.

I. Environs de Praha.

La partie A contenant les associations lichéneuses de 41 localités est suivie d'une énumération systématique des espèces et formes B. Les noms imprimés en grosses lettres désignent les lichens nouveaux pour la Bohême.

Découvertes plus intéressantes: *Sarcopyrenia gibba* (tabl. I.), *Staurothele Ambrosiana* et *Cattillaria subgrisea* sur les pierres calcaires comme les espèces des aréales plus au sud, et *Microthelia aterrима* (dans une variation nouvelle) sur les pierres siliceuses ainsi que *Acarospora badiofusca* var. *lepidioides* sur le diabas, espèces des plus hautes localités descendant là à la hauteur de 200–300 mètres.

Nouvelles espèces et formes: *Verrucaria Podzimekii* (tabl. II.), *Microthelia aterrима* var. *dermatinoides*, *Lecidea fuscoatra* var. *Podpěrae*, *L. grisella* f. *biatorina*, *Catillaria chalybeia* f. *terricola*, *Lecanora Dominiana* (tabl. III.), *L. incusa* f. *castanoplacoides*, *Buellia canescens* var. *euthallina*.

XIV.

Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen.

Napsal VLADIMÍR KOŘÍNEK

Vorgelegt am 12. Oktober 1929.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist der Kompositionstheorie der quaternären quadratischen Formen, welche von H. Brandt in einer Reihe von Untersuchungen¹⁾ entwickelt wurde, gewidmet. Bekanntlich können nicht zwei beliebige Klassen von quaternären quadratischen Formen miteinander komponiert werden. Falls es sich um primitive Formen handelt, was

¹⁾ Es sind das die folgenden Untersuchungen von H. Brandt:

- I. Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen. Journ. f. r. u. a. Math. 143, 1913, S. 108.
- II. Über ein Problem von A. Hurwitz quaternäre quadratische Formen betreffend. Math. Ann. 88. 1925, S. 211.
- III. Bilineare Transformation quadratischen Formen. Math. Ztschr. 17, 1923 S. 153.
- IV. Bilineare Transformation quaternären quadratischen Formen. Math. Ztschr. 20, 1924, S. 223.
- V. Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen. Math. Ann. 91, 1924, S. 300.
- VI. Hauptklassen in der Kompositionstheorie der quaternären quadratischen Formen. Math. Ann. 94, 1925, S. 168.
- VII. Über die Komponierbarkeit quaternären quadratischen Formen. Math. Ann. 94, 1925, S. 179.
- VIII. Über das assoziative Gesetz bei der Komposition der quaternären quadratischen Formen. Math. Ann. 96, 1926, S. 353.

Diese Abhandlungen werde ich weiter nur unter den betreffenden Nummern zitieren.

hier immer vorausgesetzt werden soll, müssen diese Klassen zu derselben Ordnung gehören und diese Ordnung muß noch gewisse Bedingungen erfüllen (sogenannte K-Ordnung sein). Aber auch dann lassen nicht jede zwei Klassen aus einer K-Ordnung eine Komposition zu. Ich vereinige deshalb alle Klassen aus einer vorgegebenen K-Ordnung, von denen sich zwei beliebige entweder unmittelbar oder mittels anderer Klassen durch Komposition verknüpfen lassen, in eine Gesamtheit, die ich Komplex nenne.

Zu zwei beliebigen Klassen eines Komplexes läßt sich also eine endliche Folge von Klassen aus dem Komplex bilden, so daß die erste der ausgewählten Klassen an der Spitze, die zweite am Ende der Folge steht, und zwei benachbarte Klassen in der Folge stets eine Komposition zulassen. Es stellt sich nun die Frage nach der Anzahl der Komplexe in einer K-Ordnung und nach der Weise, durch welche alle Klassen, die zu demselben Komplex gehören, zu charakterisieren sind. Diese Frage ist durch den 1. und 2. Satz aus § 2 gelöst. Es stellt sich heraus, daß alle Klassen eines Geschlechts immer zum selben Komplex gehören, und der 2. Satz bestimmt dann alle Geschlechter aus einem Komplex.

In diesem Paragraphen stelle ich in der Kürze die Hauptergebnisse der Brandtschen Untersuchungen zusammen. Im § 2 werden die Sätze, die das Resultat dieser Arbeit bilden, formuliert. Im § 3 beweise ich einige Hilfssätze über ternäre und quaternäre quadratische Formen. Dann folgt im § 4 Beweis des 1., im § 5 Beweis des 2. Satzes.

Eine primitive quaternäre quadratische Form schreibe ich immer in der Form

$$\sigma_1 A(x_i) = \sum_{i, k=0}^3 a_{ik} x_i x_k,$$

wo die a_{ik} ganze rationale Zahlen sind. σ_1 ist 1 oder 2, je nach dem eine Form erster oder zweiter Art vorliegt (eigentlich oder uneigentlich primitiv ist). Diese von der üblichen durch den Faktor σ_1 abweichende Schreibweise werde ich die ganze Arbeit durch behalten, weil nur die Form $A(x_i)$, nicht aber $\sigma_1 A(x_i)$ (für $\sigma_1=2$), in die Komposition eingeht. Die ternären Formen werde ich in der üblichen Weise ohne den Faktor σ_1 schreiben. Die Diskriminante der Form A ist

$$D = | a_{ik} | .$$

Die Klasse der Form A werde ich mit \mathbf{A} bezeichnen. Seien jetzt A, B, C drei quaternäre quadratische Formen von derselben Diskriminante. Dann sagen wir, die Form C entsteht durch Komposition der Form A mit B :

$$(1) \quad C(z_i) = A(x_j) B(y_k),$$

wenn eine bilineare Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten

$$z_i = \sum_{j, k=0}^3 m_{ijk} x_j y_k, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

existiert, die den folgenden Bedingungen genügt²⁾:

1. Die vierreihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} m_{000}, & m_{001} & . & . & . & . & . & m_{032}, & m_{033}, \\ m_{100}, & m_{101} & . & . & . & . & . & m_{132}, & m_{133}, \\ m_{200}, & m_{201} & . & . & . & . & . & m_{232}, & m_{233}, \\ m_{300}, & m_{301} & . & . & . & . & . & m_{332}, & m_{333}. \end{array} \right\|$$

sind ohne gemeinsamen Teiler.

2. Die Determinanten $\left| \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \right|$ und $\left| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right|$, die bis auf Vorzeichen gleich $[A(x_j)]^2$ und $[B(y_k)]^2$ sein müssen, sind positiv, d. h. die Substitution hat positive Signatur.

3. Die bilineare Substitution hat positive Art³⁾.

Die erste Bedingung ist bei primitiven Formen stets von selbst erfüllt. Was die dritte Bedingung betrifft, läßt sich folgendes bemerken: Alle bilinearen Substitutionen, die die Gleichung (1) vermitteln, lassen sich dem Vorzeichen der Halbdeterminante einer alternierenden bilinearen Form³⁾ nach in zwei Gruppen einteilen. Die Forderung, die bilineare Substitution sei positiver Art, bedeutet dann, daß man nur Substitutionen aus einer von diesen beiden Gruppen zuläßt. Weil sich das Vorzeichen der obigen Halbdeterminante ändert, wenn man die zwei Reihen der Unbestimmten (x_j) (y_k) miteinander vertauscht⁴⁾, so ist dadurch in (1) die Reihenfolge der zu komponierenden Formen A, B festgesetzt. Zwei For-

²⁾ Siehe H. Brandt V. S. 304.

³⁾ Was die Definition der Art einer bilinearen Substitution belangt, siehe H. Brandt II. S. 212 und IV. S. 229.

⁴⁾ H. Brandt IV S. 228 und V. S. 305.

men, die sich miteinander komponieren lassen, gestatten also allgemein nur eine der beiden Kompositionen AB oder BA . Dadurch wird eine Vereinfachung der über die Komposition geltenden Sätze erzielt. In der Gleichung (1) kann man jede der drei Formen in eine ihr äquivalente Form überführen und diese neuen Formen lassen wieder dieselbe Komposition zu. Man kann also auch von der Komposition der Klassen

$$(1') \quad \mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

sprechen. Die Klasse \mathbf{A} heißt mit \mathbf{B} (*rechtsseitig*) komponierbar, die Klassen \mathbf{A} , \mathbf{B} heißen *die zu komponierenden Klassen*, die Klasse \mathbf{C} *die komponierte Klasse*.

Damit eine Komposition im obigen Sinne überhaupt möglich sei, müssen die Formen A , B , C eine quadratische Diskriminante

$$D = d^2$$

und den Trägheitsindex $\varkappa = 0, 2, 4$, haben. Wir lassen den Trägheitsindex $\varkappa = 4$ (negativ definite Formen) außer Betrachtung. Dann müssen alle drei Formen gleichen Trägheitsindex haben. Wir setzen nun fest, daß für $\varkappa = 0$ d positiv, für $\varkappa = 2$ d negativ ist. Die drei Formen müssen noch weiter aus derselben Ordnung stammen und die Ordnungsinvarianten dürfen nicht beliebig sein, sondern müssen folgende Gestalt haben:⁵⁾

$$\varkappa \begin{pmatrix} t^2 o_3 & o_2 & o_3 \\ & 1 & \sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{für Formen erster Art,}$$

$$\varkappa \begin{pmatrix} t^2 o_3 & o_2 & o_3 \\ & 2 & 1, 2 \end{pmatrix} \quad \text{für Formen zweiter Art.}$$

Eine Form, die die eben angeführten Bedingungen erfüllt, nennt Brandt eine *K-Form*, die zugehörige Klasse und Ordnung, eine *K-Klasse* und *K-Ordnung*. Eine K-Form bzw. K-Klasse, die für $\sigma_1 = 1$ die Zahl 1 und für $\sigma_2 = 2$ die Zahl 2 darstellt, heißt eine *Hauptform* bzw. *Hauptklasse*. Ähnlich soll im folgenden ein Geschlecht, das Hauptklassen enthält, ein *Hauptgeschlecht* heißen. Eines der wichtigsten Ergebnisse von Brandt ist,⁶⁾ daß zu einer beliebigen K-Klasse

⁵⁾ H. Brandt V. S. 302.

⁶⁾ H. Brandt: VI. S. 166.

A stets eindeutig zwei Hauptklassen **H** und **H'** angebbar sind, so daß die Kompositionen bestehen

$$(2) \quad \mathbf{HA} = \mathbf{A}, \mathbf{AH}' = \mathbf{A}.$$

Im speziellen Falle kann auch $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$ sein. Die Klasse **H** bzw. **H'** nennt Brandt die zu **A** links bzw. rechts zugehörige Hauptklasse. Bezeichnet man mit $\bar{\mathbf{A}}$ die zu **A** entgegengesetzte Klasse, d. h. Klasse, die aus **A** durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante -1 entsteht, so existieren neben der obigen auch folgende Kompositionen⁷⁾;

$$(3) \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{H}, \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{H}'.$$

Nun lassen zwei K-Klassen **A**, **B** derselben Ordnung dann und nur dann die Komposition **AB** zu, wenn die zu **A** rechtsgehörige Hauptklasse mit der zu **B** linksgehörigen identisch ist (Kompositionskriterium).⁸⁾ In (1') sind dann die zu **A** und **C** links bzw. zu **B** und **C** rechts zugehörigen Hauptklassen miteinander identisch. Endlich sei noch über die entgegengesetzten Klassen bemerkt, daß neben (1') immer noch folgende Komposition besteht:

$$(1'') \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}.$$

Sei nun eine Hauptklasse **H** erster Art gegeben. Wenn **H** die Zahl 1 darstellt, so gibt es bekanntlich in **H** unendlich viele Formen der folgenden Gestalt:

$$H(x_i) = x_0^2 + uh(x_1, x_2, x_3),$$

wo u eine ganze positive Zahl und

$$h(x_1, x_2, x_3) = \sum_{ik=1}^3 h_{ik}x_ix_k$$

eine primitive ternäre quadratische Form ist. Die reziproke Form zu h werden wir durch

$$\mathfrak{h}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{ik=1}^3 \mathfrak{h}_{ik}x_ix_k$$

bezeichnen. Ähnlich läßt sich immer in einer Hauptklasse zweiter Art eine Hauptform der Gestalt

$$2H(x_i) = 2x_0^2 + 2x_0x_1 + h(x_1, x_2, x_3)$$

finden. Hier bedeutet

⁷⁾ H. Brandt V. S. 313.

⁸⁾ H. Brandt VII. S. 179.

$$h(x_1, x_2, x_3) = \sum_{ik=1}^3 h_{ik} x_i x_k$$

eine primitive oder imprimitive ternäre Form zweiter Art. Die Diskriminante der Form $2H$ sei D . Durch die Substitution

$$(4) \quad Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0 \\ 0, & \sqrt{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \sqrt{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

geht die Form $2H$ in die folgende

$$G(y_i) = y_0^2 + ug(y_1, y_2, y_3)$$

über, wo wieder u eine ganze positive Zahl und g eine eigentlich primitive ternäre Form mit der Koeffizientenmatrix

$$(5) \quad g = \begin{bmatrix} g_{11}, & 2g_{12}, & 2g_{13} \\ 2g_{12}, & 2g_{22}, & 2g_{23} \\ 2g_{13}, & 2g_{23}, & 2g_{33} \end{bmatrix}$$

ist. Die Form G und folglich auch ug hat $4D$ zur Diskriminante. Zwischen den Koeffizienten h_{ik} und g_{ik} bestehen folgende Gleichungen

$$(6) \quad \begin{aligned} ug_{11} &= 2h_{11} - 1, \\ ug_{ik} &= h_{ik} \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (i, k) \neq (1, 1). \end{aligned}$$

Man beachte, daß u stets ungerade sein muß. Die Reziproke der Form g bezeichne man noch

$$g = \sum_{ik=1}^3 g_{ik} x_i x_k.$$

§ 2. Die Komplexe in einer K-Ordnung.

Sei eine K-Ordnung vorgegeben. Wir nennen zwei Klassen **A** und **B** aus dieser Ordnung (in der Reihenfolge **A**, **B**) durch Komposition verknüpfbar, wenn es sich eine Folge von Klassen bilden läßt, die mit **A** anfängt, mit **B** endet, und in der jede Klasse mit ihr unmittelbar folgenden rechtsseitig komponierbar ist. Die so definierte Verknüpfbarkeit ist erstens symmetrisch. Denn sei

$$\mathbf{A}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \dots \mathbf{K}_n, \mathbf{B}$$

eine Folge, die \mathbf{A} mit \mathbf{B} verknüpft. Dann ist, vermöge § 1 (1''),

$$\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{K}_n}, \overline{\mathbf{K}_{n-1}}, \dots, \overline{\mathbf{K}_1}, \overline{\mathbf{A}}$$

eine Folge, die die entgegengesetzte Klasse $\overline{\mathbf{B}}$ mit der entgegengesetzten $\overline{\mathbf{A}}$ verknüpft. Die Gleichungen § 1 (3) zeigen, daß die Kompositionen $\overline{\mathbf{B}\mathbf{B}}$ und $\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}}$ existieren, es ist daher auch \mathbf{B} mit \mathbf{A} verknüpfbar. Zweitens ist die Verknüpfbarkeit transitiv, wie man unmittelbar einsieht. Sie ist auch reflexiv, wie aus § 1 (3) folgt.

Ich nenne einen *Komplex* die Gesamtheit von Klassen einer K-Ordnung, die folgende zwei Eigenschaften besitzt:

1. Zu jeder Klasse enthält die Gesamtheit auch alle mit ihr links- und rechtsseitig komponierbaren Klassen.

2. Je zwei Klassen aus der Gesamtheit sind durch Komposition verknüpfbar.

Wegen der ersten Eigenschaft ist ein Komplex die möglichst größte Gesamtheit von Klassen, die die zweite Eigenschaft besitzt. Ein Komplex enthält immer (infolge des Kompositionskriteriums) mit zwei miteinander komponierbaren Klassen auch die zugehörigen komponierten Klassen.

Eine K-Ordnung zerfällt in eine endliche Anzahl von Komplexen. Es ist klar, daß zwei Komplexe aus derselben K-Ordnung entweder keine Klasse gemeinsam haben oder identisch sind. Es stellt sich nun naturgemäß die Frage, wie sich die Komplexe einer K-Ordnung charakterisieren lassen, und wie die Klassen, die zu einem und demselben Komplex gehören, gekennzeichnet sind. Die erste Frage wird durch den folgenden Satz gelöst:

1. Satz. *Es seien \mathbf{H} und \mathbf{H}' zwei Hauptklassen derselben Ordnung. \mathbf{H} und \mathbf{H}' stammen dann und nur dann aus demselben Komplex, wenn sie zu demselben Geschlechte gehören.*

Weil zu jeder K-Klasse aus einem Komplex stets links zugehörige Hauptklasse existieren muß, ist ein Komplex durch das zugehörige Hauptgeschlecht vollständig charakterisiert.

Bevor ich an den 2. Satz näher eingehe, der die zweite Frage nach der Einteilung der Klassen einer K-Ordnung in einzelne Komplexe löst, stelle ich hier die Geschlechtscharaktere eines Geschlechts quaternären quadratischen Formen zusammen und führe für sie eine passende Bezeichnung ein.

Die einzelnen Geschlechtscharaktere einer n-ären quad-

ratischen Form findet man im Werke von P. Bachmann: Die Arithmetik der quadratischen Formen. I. Abteilung S. 473. (im folgenden nur als P. Bachmann zitiert) zusammengestellt.⁹⁾ Im Falle einer quaternären quadratischen Form sind nicht alle aus dieser Zusammenstellung sich ergebenden Charaktere unabhängig, sondern erweisen sich leicht die unter 4) und 5) angeführten Charaktere als durch die anderen schon bestimmt, so daß man sie weglassen darf. Ebenso ist der unter 2) angeführte Charakter¹⁰⁾

$$(-1)^{\frac{1}{2}(f'_m-1)}$$

für $o_m \equiv 1 \pmod{2}$ und der unter 3) angeführte

$$(-1)^{\frac{1}{8}(f''_m-1)}$$

für $o_m \equiv 2 \pmod{4}$ durch die anderen bestimmt.

Es bleiben uns daher nur noch die folgenden Charaktere übrig¹⁰⁾:

1. $\left(\frac{f'_m}{p}\right)$ für alle ungeraden Primzahlen p , die in o_m aufgehen,

2. $(-1)^{\frac{1}{2}(f'_m-1)}$ für $o_{m-1} o_m o_{m+1} \equiv 0 \pmod{4}$, $o_m \equiv 0 \pmod{2}$,

3. $(-1)^{\frac{1}{8}(f''_m-1)}$ für $o_{m-1} o_m o_{m+1} \equiv 0 \pmod{8}$, $o_m \equiv 0 \pmod{4}$.

Diese Charaktere sind noch nicht alle unabhängig, es ist aber für das folgende nicht nötig dieses System weiter zu beschränken.¹¹⁾

⁹⁾ Die dort angeführten Ergebnisse sind richtig, obzwar die Beweise dafür manche grobe Fehler enthalten. Siehe auch

H. Minkowski: Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten. Ges. Abh. I. S. 7.

¹⁰⁾ Die Bezeichnung ist dieselbe, die P. Bachmann l. c. benützt.

¹¹⁾ Alle diese Charaktere sind Charaktere im Sinne von H. St. Smith:

On the Orders and Genera of Quadratic Forms Containing more than Three Indeterminates. Proc. Roy. Soc. 13, 1864 S. 199, Papers I. S. 412., Proc. Roy. Soc. 16, 1867, S. 197, Papers I. S. 510,

Mémoire sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés. Papers II. S. 623,

d. h. sie kommen allen Zahlen $\frac{1}{\sigma_n} M_n$ bei, wenn M_n relativ prim zu

Bei einer K-Ordnung haben wir nach § 1 $o_1 = t^2 o_3$. p bzw. q seien beliebige ungerade Primzahlen aus o_2 bzw. o_3 . r sei eine beliebige ungerade Primzahl aus t , die nicht gleichzeitig in o_3 enthalten ist. Wir bezeichnen nun für das folgende die Charaktere einer K-Form folgendermaßen

$$\begin{aligned} \psi_q^{(1)} &= \left(\frac{f'_1}{q}\right) & , & & \psi_r^{(1)} &= \left(\frac{f'_1}{r}\right), \\ \psi_p^{(2)} &= \left(\frac{f'_2}{p}\right) & , & & \psi_q^{(3)} &= \left(\frac{f'_3}{q}\right). \end{aligned}$$

Bei einer K-Form sind nach dem vorangehenden alle diese Charaktere stets vorhanden. Falls noch Charaktere in bezug auf 4 und 8 existieren, so seien sie durch

$$\psi_4^{(n)} = (-1)^{\frac{1}{2}(f'_n - 1)}, \quad \psi_8^{(n)} = (-1)^{\frac{1}{2}(f'_n - 1)} \quad n = 1, 2, 3$$

bezeichnet. Bei einer Hauptklasse bezeichne ich die Charaktere auf gleiche Weise durch χ anstatt ψ . Weil eine Hauptform erster Art die Zahl 1, eine solche zweiter Art die Zahl 2 darstellt, so gilt immer von den Charakteren

$$(1) \quad \chi_q^{(1)} = 1, \chi_r^{(1)} = 1 \quad \text{für alle } q \text{ und } r$$

und, falls noch Charaktere in bezug auf 4 und 8 existieren,

$$(1') \quad \chi_4^{(1)} = 1, \quad \chi_8^{(1)} = 1.$$

Für den zweiten Satz ist von Wichtigkeit, daß neben einem Charakter $\psi^{(3)}$ immer ein Charakter $\psi^{(1)}$ in bezug auf dieselbe ungerade Primzahl, 4 oder 8 existiert. Der Leser möge sich dieser Tatsache an der Hand von der obigen Zusammenstellung der Charaktere vergewissern.

Nun läßt sich der 2. Satz folgendermaßen aussprechen:

2. Satz. *Sei eine K-Ordnung und darin ein beliebiges Hauptgeschlecht (durch seine Charaktere $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ bestimmt) gegeben.*

Die Klasse A aus dieser Ordnung ist dann und nur dann in dem durch das ausgewählte Hauptgeschlecht bestimmten Komplex enthalten, wenn sie folgende Geschlechtscharaktere besitzt:

$$1. \text{ Es ist } \psi_p^{(2)} = \chi_p^{(2)} \text{ für alle } p.$$

$$2. \text{ Es ist } \psi_q^{(3)} = \pm \chi_q^{(3)}, \psi_q^{(1)} = \pm \chi_q^{(1)} = \pm 1, \text{ für alle } q, \text{ wo}$$

o_n ist und sich eigentlich durch die n-te primitive Begleitform darstellen läßt. Der Charakterbegriff, den H. Minkowski l. c.) benützt, ist anders definiert. Siehe auch P. Bachmann S. 466.

gleichzeitig in beiden Gleichungen das obere oder das untere Zeichen gilt.

3. $\psi_r^{(1)}$ beliebig für alle r .

Wenn in der Ordnung noch Charaktere in bezug auf 4 und 8 vorhanden sind, dann gilt ähnlich:

$$\begin{array}{ll} 1'. \psi_4^{(2)} = \chi_4^{(2)}, & \psi_8^{(2)} = \chi_8^{(2)}. \\ 2'. \psi_4^{(3)} = \pm \chi_4^{(3)}, & \psi_4^{(1)} = \pm \chi_4^{(1)} = \pm 1, \\ \psi_8^{(3)} = \pm \chi_8^{(3)}, & \psi_8^{(1)} = \pm \chi_8^{(1)} = \pm 1, \end{array}$$

wo in der einzelnen Zeile gleichzeitig das obere oder das untere Zeichen gilt.

3'. $\psi_4^{(1)}$ oder $\psi_8^{(1)}$ beliebig, falls das betreffende $\psi_4^{(3)}$ oder $\psi_8^{(3)}$ nicht vorhanden ist.

Vollständigkeitshalber führe ich hier den folgenden Satz an:

3. Satz. In jedem Geschlecht einer K -Ordnung, für das

$$(2) \quad \psi_q^{(1)} = 1, \quad \psi_r^{(1)} = 1 \quad \text{für alle } q \text{ und } r,$$

und

(2') $\psi_4^{(1)} = 1, \quad \psi_8^{(1)} = 1$, falls solche vorhanden sind, gilt, gibt es immer Hauptklassen, d. h. Klassen, die die Zahl 1 (Formen erster Art) oder 2 (Formen zweiter Art) darstellen. Ein solches Geschlecht ist also ein Hauptgeschlecht im Sinne der Definition des § 1 S. 4.

Dieser Satz folgt leicht aus dem Beweise des 2. Satzes. Er läßt sich gewiß auch direkt ohne Heranziehung der Kompositionstheorie beweisen. Hieraus in Vereinigung mit dem 1. Satze folgert man den

4. Satz. Die Anzahl der Komplexe in einer K -Ordnung ist gleich der Anzahl der Geschlechter der Ordnung, die die Gleichungen (2) und (2') befriedigen, oder ist gleich der Anzahl der Geschlechter der Ordnung $\times \begin{pmatrix} o_2 & o_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ der ternären quadratischen Formen.

Die zweite Formulierung folgt leicht aus dem 3. und 4. Hilfssatze. Siehe die Bemerkung am Ende des Beweises des 4. Hilfssatzes.

§ 3. Einige Hilfssätze.

In diesem Paragraphen werden zuerst zwei Hilfssätze über die Ordnung der ternären Formen h oder g aus einer Hauptform bewiesen. Der 3. Hilfssatz bestimmt dann das

Geschlecht dieser Formen. Diese drei Sätze werden zuletzt zum Beweise des 4. Hilfssatzes benutzt, den wir in § 4 brauchen. Der Beweis des 4. Hilfssatzes gründet sich darauf, daß man immer eine Hauptform durch passende rationale Substitution in beliebige andere Hauptform desselben Geschlechts transformieren kann. Für eine Hauptform H werden in diesem Paragraphen durchwegs die Bezeichnungen aus § 1 S. 5, 6 angewandt.

1. Hilfssatz. Sei

$$H = x_0^2 + uh(x_1, x_2, x_3)$$

eine Hauptform erster Art der Ordnung

$$\kappa \begin{pmatrix} t^2 o_3 & o_2 & o_3 \\ 1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet u eine ganze positive Zahl, $h(x_1, x_2, x_3)$ eine ternäre primitive Form. Sei weiter h der Ordnung¹²⁾

$$\kappa' \begin{pmatrix} \Omega & \mathcal{A} \\ \tau_1 & \tau_2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\kappa = \kappa'$ und

$$t^2 o_3 = u = t^2 \mathcal{A}, \quad o_2 = \Omega, \quad o_3 = \mathcal{A}, \\ \sigma_2 = \tau_1, \quad \sigma_3 = \tau_2,$$

so daß man die Ordnung von H auch:

$$\kappa \begin{pmatrix} t^2 \mathcal{A} & \Omega & \mathcal{A} \\ 1 & \tau_1 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

schreiben kann.

Beweis. Die Gleichung für den Trägheitsindex $\kappa = \kappa'$ ist trivial. Sei $\sigma_2 H_2$ und $\sigma_3 H_3$ die zweite und dritte primitive Begleitform¹³⁾ der Form H . In der Bezeichnung des § 1, S. 5 ist

$$(1) \quad o_1 \sigma_2 H_2(x_1, x_2, \dots, x_6) = uh(x_1, x_2, x_3) + u^2 \Omega \mathfrak{h}(x_4, x_5, x_6).$$

Wegen der Primitivität der Form h gilt $o_1 = t^2 o_3 = u$. Die dritte Begleitform dividiert durch $o_1^2 = u^2$ hat die Gestalt

$$(2) \quad o_2 \sigma_3 H_3(x_0, x_1, x_2, x_4) = u \Omega^2 \mathcal{A} x_0^2 + \Omega \mathfrak{h}(x_1, x_2, x_3).$$

Wegen der Primitivität der Reziproken \mathfrak{h} ist $o_2 = \Omega$. Endlich

¹²⁾ Die Ordnungsinvarianten einer ternären Form sollen hier der Einfachheit halber stets positive Zahlen sein im Gegensatz zu einer von H. St. Smith in On the Orders and Genera of Ternary Quadratic Forms. Papers I. S. 456 und von P. Bachmann S. 40 getroffenen Festsetzung.

¹³⁾ Über den Begriff der Begleitform siehe P. Bachmann S. 389 u. 426.

aus der Gleichung zwischen den Diskriminanten der Form H und h

$$o_1^3 o_2^2 o_3 = u^3 \Omega^2 \mathcal{A}$$

folgt $o_3 = \mathcal{A}$.

Ist nun $\tau_1 = 1$, so folgt aus (1) $\sigma_2 = 1$, für $\tau_1 = 2$ ist \mathcal{A} , also auch u gerade¹⁴⁾, folglich ist $\sigma_2 = 2$. Umgekehrt folgt aus $\sigma_2 = 1$ bzw. 2, $\tau_1 = 1$ bzw. 2. Ähnlich folgt aus (2) $\sigma_3 = \tau_2$. Damit ist der 1. Hilfssatz bewiesen.

2. Hilfssatz. Sei H eine Hauptform zweiter Art der Ordnung

$$\chi \begin{pmatrix} t^2 o_3, & o_2, & o_3 \\ 2, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Form g aus § 1. S. 6 sei von der Ordnung

$$\chi' \begin{pmatrix} \Omega, & \mathcal{A} \\ 1, & \tau_2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist Ω gerade, u ungerade, $\chi = \chi'$ und

$$o_1 = u = t^2 \mathcal{A}, \quad o_2 = \frac{1}{2} \Omega, \quad o_3 = \mathcal{A}, \quad \tau_2 = \sigma_2 = 2.$$

Also sind auch t und \mathcal{A} ungerade.

Beweis. $\chi = \chi'$ ist wieder trivial. Die Koeffizientenmatrix der Hauptform zweiter Art können wir nach § 1 (6) in der Form

$$2H = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & h_{11}, & ug_{12}, & ug_{13} \\ 0, & ug_{12}, & ug_{22}, & ug_{23} \\ 0, & ug_{13}, & ug_{23}, & ug_{33} \end{vmatrix}$$

schreiben. Die Koeffizientenmatrix der Form g mit der Diskriminante $\Omega^2 \mathcal{A}$ ist durch § 1 (5) gegeben. Infolge der ersten der Gleichungen in § 1 (6) ist u ungerade. Wir führen noch die Bezeichnung

$$u^2 a = \begin{vmatrix} h_{11}, & ug_{12}, & ug_{13} \\ ug_{12}, & ug_{22}, & ug_{23} \\ ug_{13}, & ug_{23}, & ug_{33} \end{vmatrix}$$

ein. Der Vergleich mit § 1 (5) ergibt die Gleichung

$$(3) \quad u \Omega^2 \mathcal{A} = 8 a - \Omega g_{11}.$$

Die zweite Begleitform¹³⁾ H_2 von H besitzt die Koeffizientenmatrix

¹⁴⁾ H. St. Smith 12.) S. 456.

$$(4) \quad o_1 H_2 = \begin{bmatrix} ug_{11}, & 2 ug_{12}, & 2 ug_{13}, & ug_{12}, & ug_{13}, & 0 \\ 2 ug_{12}, & 2 ug_{22}, & 2 ug_{23}, & ug_{22}, & ug_{23}, & 0 \\ 2 ug_{13}, & 2 ug_{23}, & 2 ug_{33}, & ug_{23}, & ug_{33}, & 0 \\ ug_{12}, & ug_{22}, & ug_{23}, & . & . & . \\ ug_{13}, & ug_{23}, & ug_{33}, & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & . & . & . \end{bmatrix},$$

wo an den leeren Stellen die zweireihigen Unterdeterminanten von $u^2 a$ stehen. Es ist ersichtlich, weil die Form g primitiv ist, $o_1 = t^2 o_3 = u$, also t, o_3 ungerade.

Ähnlich haben wir für die Koeffizienten der dritten Begleitform dividiert durch $o_1^2 = u^2$:

$$(5) \quad o_2 2 H_3 = \begin{bmatrix} a, & \frac{1}{4} \Omega g_{11}, & \frac{1}{4} \Omega g_{12}, & \frac{1}{4} \Omega g_{13} \\ \frac{1}{4} \Omega g_{11}, & \frac{1}{2} \Omega g_{11}, & \frac{1}{2} \Omega g_{12}, & \frac{1}{2} \Omega g_{13} \\ \frac{1}{4} \Omega g_{12}, & \frac{1}{2} \Omega g_{12}, & \frac{1}{2} \Omega g_{22}, & \frac{1}{2} \Omega g_{23} \\ \frac{1}{4} \Omega g_{13}, & \frac{1}{2} \Omega g_{13}, & \frac{1}{2} \Omega g_{23}, & \frac{1}{2} \Omega g_{33} \end{bmatrix}.$$

Aus dieser Matrix folgt wegen der Primitivität der Form g und (3), daß der ungerade Bestandteil von Ω auch der ungerade Bestandteil von o_2 ist, und außerdem nur eine der drei Möglichkeiten $o_2 = \frac{1}{2}\Omega, \frac{1}{4}\Omega, \frac{1}{8}\Omega$ besteht. Nun ist die Diskriminante der Form $2 H \quad D = t^6 o_3^4 o_2$ und der Form $G \quad 4 D = u^3 \Omega^2 A$. Wegen $u = t^2 o_3$ folgt daraus

$$4 o_2^2 o_3 = \Omega^2 A.$$

Diese Gleichung ist mit $o_2 = \frac{1}{4}\Omega$ und $o_2 = \frac{1}{8}\Omega$ unvereinbar, weil o_3 ungerade sein muß. Es ist also $o_2 = \frac{1}{2}\Omega$ und $o_3 = A$, womit auch A als ungerade bewiesen ist. Aus der Matrix (5) folgt nun weiter wegen $o_3 = 2 \quad \tau_2 = 2$. Damit ist der 2. Hilfssatz bewiesen.

Mittels des 1. und 2. Hilfssatzes beweisen wir nun den

3. Hilfssatz. *Durch das Geschlecht einer Hauptform $\sigma_1 H$ ist das Geschlecht der ternären Form h ($\sigma_1 = 1$) oder g ($\sigma_1 = 2$) eindeutig bestimmt.*

Beweis. 1. Hauptformen erster Art. Aus der Gleichung (1) folgt, daß sich die Form h durch die zweite primitive Begleitform eigentlich darstellen läßt. Überdies ist $o_2 = \Omega$. Es ist also¹⁵⁾

¹⁵⁾ Für die Charaktere der quaternären Form siehe die in § 2 S. 8. gegebene Übersicht. Die Charaktere der ternären Formen sind in H. St. Smith l. c. 12) S. 468 tabellarisch zusammengestellt.

$$\left(\frac{\frac{1}{\tau_1} h}{p}\right) = \chi_p^{(2)} \quad \text{für alle } p.$$

Ähnlich folgt aus (2), daß sich die Reziproke \mathfrak{h} durch $\sigma_3 H_3$ eigentlich darstellen läßt, es ist also wegen $\sigma_3 = \mathcal{A}$

$$\left(\frac{\frac{1}{\tau_2} \mathfrak{h}}{q}\right) = \chi_q^{(3)} \quad \text{für alle } q.$$

Weil nun $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \tau_1$, $\sigma_3 = \tau_2$ ist, so zieht die Existenz eines Charakters der Form h oder \mathfrak{h} in bezug auf 4 oder 8 die Existenz des gleichen Charakters der Form H_2 oder H_3 nach sich, und der erste ist durch den letzten vollständig bestimmt. Der Simultancharakter der Formen h und \mathfrak{h} ist endlich durch die Existenzgleichung eines Geschlechts ternären Formen bestimmt.

2. Hauptformen zweiter Art. Man folgert ähnlich aus den Matrizen (4) und (5), daß sich die Form g durch $\sigma_2 H_2$ und die Form \mathfrak{g} durch $\sigma_3 H_3$ eigentlich darstellen läßt. Dann folgt gleich aus dem 2. Hilfssatze, daß die Charaktere der Formen g und \mathfrak{g} in bezug auf alle ungeraden Primzahlen aus Ω und \mathcal{A} durch die entsprechenden Charaktere der Formen H_2 und H_3 bestimmt sind. Es ist immer¹⁵⁾

$$(-1)^{\frac{1}{2}(g-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mathcal{A}+1)}$$

und

$$(-1)^{\frac{1}{8}(g^2-1)} = \chi_8^{(2)}$$

immer dann, wenn der Charakter der Form g in bezug auf 8 existiert und $\Omega \equiv 0 \pmod{8}$ ist. Ist nur $\Omega \equiv 4 \pmod{8}$, so ist

$(-1)^{\frac{1}{8}(g^2-1)}$ durch die Existenzgleichung eines imprimitiven ternären Geschlechts bestimmt. Damit ist der 3. Hilfssatz bewiesen.

Den 3. Hilfssatz benützen wir zum Beweise des folgenden Hilfssatzes:

4. Hilfssatz. *Seien \mathbf{H} und \mathbf{H}' zwei beliebige Hauptklassen desselben Geschlechts. Dann kann man immer zwei Formen, $\sigma_1 K$ in der ersten, $\sigma_1 K'$ in der zweiten Hauptklasse, finden derart, daß*

$$\sigma_1 K = \begin{bmatrix} m^2 k'_{00}, & mk'_{01}, & mk'_{02}, & k_{03} \\ mk'_{01}, & k_{11}, & k_{12}, & k_{13} \\ mk'_{02}, & k_{12}, & k_{22}, & k_{23} \\ k_{03}, & k_{13}, & k_{23}, & k_{33} \end{bmatrix}$$

und

$$\sigma_1 K' = \begin{bmatrix} k'_{00}, & k'_{01}, & k'_{02}, & k_{03} \\ k'_{01}, & k_{11}, & k_{12}, & mk_{13} \\ k'_{02}, & k_{12}, & k_{22}, & mk_{23} \\ k_{03}, & mk_{13}, & mk_{23}, & m^2 k_{33} \end{bmatrix}$$

ist. Hier ist m eine ganze positive zu $2D$ prime Zahl. k_{03} ist immer prim zu m . Es kann auch k_{22} prim zu m vorausgesetzt werden.

Beweis. Seien $\sigma_1 H, \sigma_1 H'$ Hauptformen aus \mathbf{H} und \mathbf{H}' in der Gestalt des § 1, S. 5 u. 6. Nach dem 3. Hilfssatz sind dann die ternären Formen h und h' ($\sigma_1=1$) bzw. g und g' ($\sigma_1=2$) gleichen Geschlechts. Es gibt nun nach einem bekannten Satze¹⁶⁾ eine Substitution

$$R' = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{11}}{m}, & \frac{\alpha_{12}}{m}, & \frac{\alpha_{13}}{m} \\ \frac{\alpha_{21}}{m}, & \frac{\alpha_{22}}{m}, & \frac{\alpha_{23}}{m} \\ \frac{\alpha_{31}}{m}, & \frac{\alpha_{32}}{m}, & \frac{\alpha_{33}}{m} \end{bmatrix}$$

mit rationalen Koeffizienten, dem kleinsten gemeinsamen zu $2D$ primen Nenner m und der Determinante $+1$, für die $hR' \rightarrow h'$ bzw. $gR' \rightarrow g'$ gilt.¹⁷⁾ Daraus folgt ersichtlich, daß für die ganzzahlige Substitution

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

¹⁶⁾ H. St. Smith l. c. 12) S. 480, P. Bachmann S. 127. Es wird zwar an den zitierten Stellen nur bewiesen, daß die betreffenden Substitutionen nur den Generalnenner prim zu 2Ω haben. Durch eine leichte Veränderung des dort angegebenen Verfahrens läßt sich aber beweisen, daß auch Substitutionen vorhanden sind, für die der Generalnenner prim zu $2N\Omega$ ist, wo N eine beliebig vorgegebene ganze Zahl ist. Wählt man nun $N=t^2$, so bekommt man die Behauptung.

¹⁷⁾ Wir werden der Kürze halber durch $FS \rightarrow F'$ die Tatsache ausdrücken, daß die Form F durch die Substitution S in die Form F' übergeht.

der Determinante $m^3 hR \rightarrow m^2 h'$ bzw. $gR \rightarrow m^2 g'$ gilt. Seien nun durch $\{1, m_1, m_1 m_2\}$ die Elementarteiler der Matrix R gegeben. Hier ist

$$(6) \quad m_1^2 m_2 = m^3.$$

Wir werden jetzt $m_1 = m_2 = m$ beweisen.¹⁸⁾ Es folgt aus der Theorie der Elementarteiler¹⁹⁾, daß die Substitution R in der Gestalt $R = \overline{U} \overline{M} \overline{V}$ geschrieben werden kann, wo \overline{M} die Diagonalmatrix

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & m_1, & 0 \\ 0, & 0, & m_1 m_2 \end{pmatrix}$$

und $\overline{U}, \overline{V}$ zwei ganzzahlige Substitutionen der Determinante $+1$ bedeuten. Wenn nun $\overline{h}, \overline{h}'$ zwei durch die Beziehung $h\overline{U} \rightarrow \overline{h}, h'\overline{V}^{-1} \rightarrow \overline{h}'$ bzw. $g\overline{U} \rightarrow \overline{h}, g'\overline{V}^{-1} \rightarrow \overline{h}'$ definierte, zu h und h' bzw. g und g' äquivalente Formen sind, so gilt $\overline{h} \overline{M} \rightarrow m^2 \overline{h}'$. Sei nun p eine Primzahl aus m und seien $p^{\lambda_1}, p^{\lambda_2}, p^\lambda$ die höchsten Potenzen von p , die in m_1, m_2, m aufgehen. Aus (6) folgt

$$(7) \quad 2 \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \lambda.$$

Es sei zuerst $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$. Es ist hier also $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Weil alle Koeffizienten der Form $m^2 \overline{h}'$ durch $p^{2\lambda}$ teilbar sein müssen, gelten folgende Kongruenzen

$$\overline{h}_{11} \equiv 0, \quad \overline{h}_{12} \equiv 0, \quad \overline{h}_{22} \equiv 0 \pmod{p},$$

wo mit $\overline{h}_{ik}, i, k = 1, 2, 3$, die Koeffizienten der Form \overline{h} bezeichnet sind. Aus diesen Kongruenzen folgt aber, daß die Diskriminante der Form \overline{h} und folglich auch D durch p teilbar ist, gegen die gemachte Voraussetzung. Deshalb ist der Fall $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ unmöglich. Sei zweitens $0 \leq \lambda_2 < \lambda_1$. Aus (7) folgt, daß $\lambda < \lambda_1 \leq \frac{3}{2} \lambda$ und $\lambda_1 + \lambda_2 < 2 \lambda$ ist. Es gelten daher die Kongruenzen

$$\overline{h}_{11} \equiv 0, \quad \overline{h}_{12} \equiv 0, \quad \overline{h}_{13} \equiv 0 \pmod{p}$$

und die Diskriminante D wäre wieder durch p teilbar. Auch dieser Fall ist also unmöglich und es bleibt nur $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ d. h. $m_1 = m_2 = m$ übrig.

Wenn es sich nun um Formen erster Art handelt ($\sigma_1 = 1$), so findet man leicht, daß die Substitution

¹⁸⁾ Für den Beweis vergleiche H. Brandt VII. S. 181.

¹⁹⁾ P. Bachmann S. 297.

$$S = \begin{bmatrix} m, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ 0, & \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ 0, & \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

mit der Determinante $m^4 HS \rightarrow m^2 H'$ tut. Weil R die Elementarteiler $\{1, m, m^2\}$ hat, so berechnet man leicht die Elementarteiler der Substitution S auf $\{1, m, m, m^2\}$. Handelt es sich zweitens um Formen zweiter Art, so gilt nur zuerst in der Bezeichnung des § 1 S. 6 $GS \rightarrow m^2 G'$. Weil $gR \rightarrow m^2 g'$, m ungerade, so folgen aus der Tatsache, daß in g g_{11} , in $m^2 g'$ $m^2 g'_{11}$ der einzige ungerade Koeffizient ist, die folgenden Kongruenzen für α_{ik}

$$(8) \quad \alpha_{11} \equiv 1, \quad \alpha_{12} \equiv 0, \quad \alpha_{13} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Die Substitution $\bar{S} = ZSZ^{-1}$ (Z durch § 1 (4) gegeben) bewirkt $\bar{H}\bar{S} \rightarrow m^2 \bar{H}'$ und hat folgende Gestalt:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} m, & \frac{m - \alpha_{11}}{2}, & -\frac{\alpha_{12}}{2}, & -\frac{\alpha_{13}}{2} \\ 0, & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ 0, & \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ 0, & \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Infolge von (8) hat sie ganzzahlige Koeffizienten und ihre Elementarteiler berechnet man leicht wieder auf $\{1, m, m, m^2\}$.

Es existiert also immer eine ganzzahlige Substitution, die $\sigma_1 H$ in $m^2 \sigma_1 H'$ überführt und die Elementarteiler $\{1, m, m, m^2\}$ hat. Ich werde sie der Einfachheit halber weiter durch S bezeichnen. Sie kann in der Form¹⁹⁾ $S = UMV$ geschrieben werden, wo M die Diagonalmatrix

$$M = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & m, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & m^2 \end{bmatrix}$$

und U, V ganzzahlige Substitutionen der Determinante $+1$ sind. Definieren wir die zu $\sigma_1 H, \sigma_1 H'$ äquivalente Formen $\sigma_1 K, \sigma_1 K'$ durch die Beziehungen $\sigma_1 H U \rightarrow \sigma_1 K, \sigma_1 H' V^{-1} \rightarrow \sigma_1 K'$, so gilt $\sigma_1 K M \rightarrow m^2 \sigma_1 K'$. Wenn man nun die Transformationsgleichungen zwischen den Koeffizienten k_{ik} der Form $\sigma_1 K$ und k'_{ik} der Form $\sigma_1 K'$, $i, k = 0, 1, 2, 3$ aufstellt, so findet man, daß $\sigma_1 K$ und $\sigma_1 K'$ die im Hilfssatze angegebene Gestalt

haben müssen. Es ist ersichtlich k_{03} prim zu m , weil $2D$ und m teilerfremd sind.

Ähnlich findet man, daß durch jede Primzahl p aus m , die in k_{11} oder k_{22} aufgeht, k_{12} nicht teilbar sein darf, und umgekehrt, wenn p in k_{12} aufgeht, weder k_{11} noch k_{22} p als Teiler enthalten. Ist nun k_{22} nicht teilerfremd zu m , so überführe man $\sigma_1 K$ und $\sigma_1 K'$ in andere Formen durch die Substitution

$$T = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & \varrho, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

ϱ bestimmt man folgendermaßen:

für Primzahlen p aus m , die gleichzeitig in k_{11} und k_{22} aufgehen, sei

$$\varrho \equiv 0 \pmod{p},$$

für Primzahlen p aus m , die nur in k_{11} oder k_{12} aufgehen, sei

$$\varrho \equiv 0 \pmod{p},$$

für Primzahlen p , die nur in k_{22} aufgehen, sei

$$\begin{aligned} k_{11}\varrho + 2k_{12} &\equiv 0 \\ \varrho &\equiv 0 \end{aligned} \pmod{p}.$$

Man kann allen diesen Kongruenzen gleichzeitig genügen. Die neuen Formen, die durch T entstehen und die wir wieder mit $\sigma_1 K$ und $\sigma_1 K'$ bezeichnen, haben gleichfalls die im Hilfssatze angegebene Gestalt, wie man leicht bestätigt, und außerdem ist hier k_{22} teilerfremd zu m .

Aus dem Beweise entnimmt man noch folgende Tatsache: Wenn die ternären Formen h und h' bzw. g und g' des gleichen Geschlechts sind, so lassen sich die mittels dieser Formen gebildeten Hauptformen $\sigma_1 H$ und $\sigma_1 H'$ immer durch eine rationale Substitution mit der Determinante $+1$ und mit einem zu $2D$ primen Generalnenner ineinander überführen. Weil eine solche Substitution das Geschlecht der Form nicht ändern kann, so sind stets H und H' gleichen Geschlechts. Es ist also auch das Geschlecht einer Hauptform H durch das Geschlecht der ternären Form h eindeutig bestimmt. Dadurch gemeinsam mit dem 3. Hilfssatze wird der 4. Satz gerechtfertigt.

§ 4. Beweis des 1. Satzes.

Daß die Bedingung des 1. Satzes nötig ist, kann direkt aus der Kompositionstheorie abgeleitet werden. Der Beweis, daß dieselbe hinreicht, ist viel umständlicher. Das wesentlichste dazu wird durch den 4. Hilfssatz geleistet.

1. Die Bedingung des Satzes ist nötig. Seien also \mathbf{H} und \mathbf{H}' zwei Hauptklassen aus demselben Komplex. Man kann laut der Definition des Komplexes § 2 S. 7 eine Reihe von Klassen

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n$$

aus dem Komplex finden derart, daß \mathbf{H} links zu \mathbf{A}_1 gehört, die Komposition

$$\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i+1} \quad i = 1, 2 \dots n-1$$

möglich ist und \mathbf{H}' rechts zu \mathbf{A}_n gehört. Dann gibt es mindestens eine Klasse \mathbf{A} aus dem Komplex, welche durch die Komposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n$$

entsteht, wie leicht aus dem Kompositionskriterium folgt. Ihr links bzw. rechts zugehörige Hauptklasse ist \mathbf{H} bzw. \mathbf{H}' . Es bestehen also neben den Kompositionen in § 1 (2) auch die Kompositionen (3) daselbst. Wenn man von den Klassen zu den Formen übergeht, so kann man schreiben

$$(1) \quad H(z_i) = \underline{A}(x_j) \overline{A}(y_k),$$

$$(2) \quad \overline{H}'(v_i) = \overline{A}(y_j) A(x_k)$$

(\overline{A} entgegengesetzt zu A). Es gibt also eine bilineare Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten

$$(3) \quad z_i = \sum_{j, k=0}^3 m_{ijk} x_j y_k,$$

welche $H(z_i)$ in $A(x_j) \overline{A}(y_k)$ überführt. Die Form \overline{A} stellt immer eigentlich Zahlen dar, die zu $2D$ prim sind. Es sei m eine solche Zahl und

$$(4) \quad m = \overline{A}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

die zugehörige Darstellung. Wenn man in (3) $y_k = \eta_k, k=0, 1, 2, 3$ einsetzt, wird die bilineare Substitution zu einer linearen Substitution \overline{S} mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante m^2 ²⁰⁾, die $H(z_i) \overline{S} \rightarrow mA(x_j)$ bewirkt. Wir dividieren nun

²⁰⁾ Die Determinante ist positiv wegen der 2. Bedingung, der eine Komposition genügen muß. Siehe § 1 S. 3.

alle Koeffizienten in \overline{S} durch \sqrt{m} und bekommen so die Substitution S mit der Determinante $+1$ und mit den Koeffizienten von der Form

$$\frac{S_{ik}}{m^{1/2}}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3$$

wo S_{ik} ganze Zahlen bedeuten. Es gilt $H(z_i)S \rightarrow A(x_j)$.

Auf gleiche Weise gelangen wir von der bilinearen Substitution

$$v_i = \sum_{jk=0}^3 n_{ijk} y_j x_k,$$

welche die Komposition in (2) vermittelt, zu der linearen Substitution R mit der Determinante $+1$ und den Koeffizienten von der Form

$$\frac{r_{ik}}{m^{1/2}}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3$$

(r_{ik} ganze Zahlen). Es gilt $H'(v_i)R \rightarrow A(x_k)$. Die inverse Substitution R^{-1} zu R hat die Koeffizienten von der Form

$$\frac{r_{ik}}{m^{3/2}}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3$$

(r_{ik} ganze Zahlen). Folglich hat die Substitution $T = SR^{-1}$ die Koeffizienten von der Form

$$\frac{t_{ik}}{m^2}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3$$

(t_{ik} ganze Zahlen) und überführt die Form H in H' . Der kleinste gemeinsame Nenner der Koeffizienten in T ist ein Teiler von m^2 , also prim zu $2D$. H und H' sind deshalb von derselben Ordnung und demselben Geschlecht.

2. Die Bedingung ist hinreichend. Seien also \mathbf{H} und \mathbf{H}' zwei Hauptklassen desselben Geschlechts. Nach dem 4. Hilfssatze gibt es in \mathbf{H} und \mathbf{H}' zwei Hauptformen K, K' mit dort angegebenen Koeffizienten. Wir konstruieren nun eine Form A aus derselben Ordnung, zu der K links und K' rechts zugehörig ist. Damit wird die Behauptung bewiesen.

Die Konstruktion der Form A erfolgt folgendermaßen. Wenn man die Diskriminante $D = d^2$ der Form $\sigma_1 K \bmod m$ ausrechnet, so bekommt man die Kongruenz

$$(5) \quad k_{03}^2 (k_{11} k_{22} - k_{12}^2) + d^2 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Sei α die Wurzel der Kongruenz

$$(6) \quad d \equiv k_{03} (k_{12} + k_{22} \alpha) \pmod{m}.$$

Weil $k_{03} k_{22}$ teilerfremd zu m ist, ist sie immer lösbar. Wenn wir (6) in (5) einsetzen, so bekommen wir durch Ausrechnen und Wegschaffen des zu m teilerfremden Faktors $k_{03} k_{22}$

$$(7) \quad k_{11} + 2 k_{12} \alpha + k_{22} \alpha^2 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Wir bilden nun die Substitution

$$P = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha, & m, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & m \end{bmatrix},$$

deren Elementarteiler $\{1, 1, m, m\}$ sind. Die Substitution überführt eben K in die Form mA . Die zu konstruierende Form A besitzt dann folgende Koeffizienten:

$$\sigma_1 A = \begin{bmatrix} mk'_{00}, & k'_{01} + k'_{02}\alpha, & mk'_{02}, & k_{03} \\ k'_{01} + k'_{02}\alpha, & \frac{1}{m} (k_{11} + 2k_{12}\alpha + k_{22}\alpha^2), & k_{12} + k_{22}\alpha, & k_{13} + k_{23}\alpha \\ mk'_{02}, & k_{12} + k_{22}\alpha, & mk_{22}, & mk_{23} \\ k_{03}, & k_{13} + k_{23}\alpha, & mk_{23}, & mk_{33} \end{bmatrix}.$$

Wegen (7) hat $\sigma_1 A$ ganzzahlige Koeffizienten und, weil m prim zu $2D$ ist, ist sie von derselben Ordnung wie $\sigma_1 K$. Es ist wegen (6)

$$a_{02} a_{13} - a_{12} a_{03} \equiv -k_{03} (k_{12} + k_{22} \alpha) \equiv -d \pmod{m},$$

wenn man die Koeffizienten der Form $\sigma_1 A$ durch a_{ik} bezeichnet. Das ist eben die Größe, die Brandt²¹⁾ mit k bezeichnet. Es erweist sich also P als eine zur Grundform K gehörende die Form A erzeugende Substitution von negativem Charakter²¹⁾. Man kann also einen Satz von H. Brandt²²⁾ anwenden. Aus diesem Satze ergibt sich, daß die Form A die Komposition $KA = A$ zuläßt, also K zu A links zugehörige Hauptform ist.

Die Substitution

$$Q = \begin{bmatrix} m, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha, & m, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

²¹⁾ Über den Begriff einer Erzeugenden siehe H. Brandt VII. S. 180. über die Definition des Charakters einer Erzeugenden H. Brandt VII. S. 181, 182.

²²⁾ H. Brandt VII. S. 192.

mit denselben Elementarteilern überführt K' in mA . Der Charakter dieser Substitution ergibt sich mittels

$$k' = -a_{23} a_{01} + a_{12} a_{03} \equiv k_{03} (k_{12} + k_{22}\alpha) \equiv d \pmod{m}$$

als positiv. Nach dem erwähnten Satze von H. Brandt²²⁾ besteht also die Komposition $AK' = A$ und K' ist zu A rechts zugehörige Hauptform. Damit ist der 1. Satz bewiesen.

§ 5. Beweis des 2. Satzes.

Der Beweis des 2. Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Kompositionstheorie. Sei also ein Komplex durch sein Hauptgeschlecht (χ) gegeben. Sei \mathbf{A} eine K -Klasse derselben Ordnung mit den Geschlechtscharakteren (ψ). Durch die Vorschrift des Satzes ist durch das Geschlecht (ψ) das Geschlecht (χ) vollständig bestimmt. Denn alle Charaktere $\chi^{(1)}$ sind durch die Gleichungen § 2 (1) und (1') gegeben, alle Charaktere $\chi^{(2)}$ sind es durch die Vorschriften 1) und 1') des Satzes, alle Charaktere $\chi^{(3)}$ durch die Vorschriften 2) und 2'). Weil nun immer zu jeder K -Klasse eine ihr links zugehörige Hauptklasse vorhanden ist, erweist sich die Bedingung des Satzes als hinreichend, sobald sie als nötig bewiesen ist. Gleichzeitig ist dann damit auch der 3. Satz und nach einer Bemerkung am Ende des Beweises zum 4. Hilfsatzes auch der 4. Satz bewiesen.

Sei also A eine Form aus \mathbf{A} und H eine ihr links zugehörige Hauptform. Dann besteht die Komposition aus § 4 (1) durch die bilineare Substitution § 4 (3) vermittelt. Durch § 4 (4) sei wieder eine eigentliche Darstellung einer zu $2D$ primen Zahl m durch \bar{A} gegeben. Wie in § 4 entsteht nach Einsetzung der Werte η_k aus (4) für y_k , $k=0, 1, 2, 3$ in die bilineare Substitution (3) eine ganzzahlige lineare Substitution \bar{S} mit der Determinante m^2 ²⁰⁾, die

$$(1) \quad H(z_i) = mA(x_i)$$

bewirkt. Seien durch $\sigma_2 H_2$, $\sigma_3 H_3$ und $\sigma_2 A_2$, $\sigma_3 A_3$ die primitiven Begleitformen von H und A bezeichnet. Dann überführt die ganzzahlige Substitution \bar{S}_2 , die mit den zweireihigen Unterdeterminanten von \bar{S} gebildet ist, H_2 in $m^2 A_2$

$$(2) \quad H_2(z_i^{(2)}) = m^2 A_2(x_i^{(2)}).$$

Ähnlich wird die Transformation

$$(3) \quad H_3(z_i^{(3)}) = m^3 A_3(x_i^{(3)})$$

durch die mit den dreireihigen Unterdeterminanten von \bar{S} gebildete Substitution \bar{S}_3 bewirkt. Sind in (1), (2), (3) die $x_i, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}$ ganze Zahlen, so sind solche auch die $z_i, z_i^{(2)}, z_i^{(3)}$. Jetzt folgen unmittelbar aus (2) die Bedingungen 1) und 1') des Satzes, aus (1) zusammen mit (3) die Bedingungen 2), 2'), 3), 3'). Damit ist der 2. Satz bewiesen.

Résumé.

Sur la composition des formes quadratiques quaternaires.

La théorie de la composition des formes quadratiques quaternaires a été développée dans une série de travaux par M. H. Brandt. (Voir la note ¹.) D'après les résultats obtenus par ce géomètre la composition n'est possible que dans les ordres, dits ordres K, ayant les invariants arithmétiques assujettis à de certaines conditions. Mais en général, deux classes quelconques d'un tel ordre n'admettent pas encore une composition. Si pour deux classes d'un ordre K une composition existe, ces deux classes sont dites composables. Je dis qu'une classe **A** peut être liée par composition à la classe **B**, si l'on peut former une suite de classes, appartenant toutes au même ordre K comme **A** et **B**, si cette suite commence par **A** et finit par **B** et si toutes les deux classes qui s'y suivent sont composables. La relation entre les classes ainsi définie est réflexive, symétrique et transitive.

J'appelle un ensemble de classes d'un ordre K un complexe, s'il possède les deux propriétés suivantes:

1^o. Si **A** appartient au complexe, toutes les classes de l'ordre qui sont composables avec **A** y appartiennent aussi.

2^o. Deux classes quelconques du complexe peuvent être liées par composition l'une à l'autre.

Le présent travail examine les classes qui appartiennent

à un complexe. D'abord, toutes les classes du complexe, dites principales, appartiennent à un même genre et réciproquement chaque classe de ce genre appartient au complexe. (1^e théorème.) Chaque complexe est par conséquent complètement déterminé par son genre des classes principales. Ensuite, le complexe est composé de toutes les classes d'un certain nombre de genres. Les caractères quadratiques de ces genres sont en relations simples avec les caractères du genre principale. (2^e théorème.) Enfin le 3^e et le 4^e théorème déterminent le nombre de complexes dans un ordre K .

Aproximace funkcí mnohočlenem $P_n(x)$ tak, aby

$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$

byl minimem.

Napsal Dr. V. HRUŠKA.

Předloženo dne 16. října 1929.

I.

1. Předpokládejme, že $f(x)$ jest v uzavřeném oboru $\langle a, b \rangle$ spojitou, že má v něm spojitě všechny první $n+1$ derivace a že $n+1$ -vá derivace $f^{(n+1)}(x)$ jest v tomto oboru stále od nuly různá. Dokažme si, že pak křivky

$$y = f(x) \tag{1}$$

a

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \tag{2}$$

mají v $\langle a, b \rangle$ nejvýš $n+1$ průsečíků.

Položme

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$$

a uvažujme znaménka v posloupnostech

$$\varphi(a), \varphi'(a), \varphi''(a), \dots, \varphi^{(n)}(a), \varphi^{(n+1)}(a) = f^{(n+1)}(a) \tag{3}$$

$$\varphi(b), \varphi'(b), \varphi''(b), \dots, \varphi^{(n)}(b), \varphi^{(n+1)}(b) = f^{(n+1)}(b) \tag{4}$$

Ztráta počtu změn znamének v posloupnosti (4) proti posloupnosti (3) jest nejvýš $n+1$, neboť každá z obou posloupností má $n+2$ členů. Jelikož $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ dle předpokladu jest od nuly různá v oboru $\langle a, b \rangle$, má rovnice $\varphi(x) = 0$ dle věty Budan-Fourierovy nejvýš $n+1$ kořenů mezi a a b , t. j. křivky (1) a (2) mají v tomto oboru nejvýš $n+1$ průsečíků.

2. Jest jasno, že vždy existují takové křivky (2), které libovolnou křivku (1) vytčených vlastností protínají právě v $n+1$ bodech položených v oboru $\langle a, b \rangle$. Stačí totiž na (1) zvoliti libovolně $n+1$ bodů uvnitř oboru $\langle a, b \rangle$ a jimi užitím Lagrangeovy interpolační formule proložit křivku tvaru (2), což jest vždy možno provésti. Obě křivky (1) a (2) budou se pak protínati uvnitř oboru $\langle a, b \rangle$ právě v $n+1$ různých bodech.

3. Předpokládejme, že (1) a (2) se v oboru $\langle a, b \rangle$ protínají pouze v $m < n+1$ různých bodech

$$M_i(x_i, y_i = f(x_i)), \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5)$$

z nichž některé mohou býti vícenásobnými průsečíky. Předpokládejme je dále srovnány dle rostoucích úseček

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m \quad (m < n+1) \quad (6)$$

a označme

$$y = f(x) - P_n(x) = \varphi(x), \quad (7)$$

takže rovnice

$$\varphi(x) = 0 \quad (8)$$

má v oboru $\langle a, b \rangle$ právě m kořenů (6). Označme z nich

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_s \quad (s \leq m) \quad (9)$$

kořeny lichého řádu a dále

$$\lambda(x) = (\xi_1 - x)(\xi_2 - x) \dots (\xi_s - x). \quad (10)$$

Uvažujme průsečíky křivky (7) s $y = \varepsilon \lambda(x)$, kde ε buď prozatím libovolné číslo. Jejich úsečky hoví rovnici

$$\varphi(x) - \varepsilon \cdot \lambda(x) = \psi(x) = 0. \quad (11)$$

Je-li x_i r_i -násobným kořenem rovnice (8) jest

$$\psi^{(k)}(x) = \frac{(x - x_i)^{r_i - k}}{(r_i - k)!} \cdot \varphi^{(r_i)}(x_i + \Theta_k(x - x_i)) - \varepsilon \cdot \lambda^{(k)}(x), \quad (12)$$

$$|\Theta_k| < 1, \quad (k = 0, 1, \dots, r_i),$$

při čemž $\varphi^{(r_i)}(x_i) \neq 0$. Jelikož $\varphi^{(r_i)}(x)$ jest spojitou funkcí x , můžeme zvoliti uzavřený obor

$$|x - x_i| \leq \alpha_i \quad (13)$$

obsahující x_i , v němž bude stále $\varphi^{(r_i)}(x) \neq 0$. Označme v tomto oboru

$$\mu_i = \min (|\varphi^{(r_i)}(x)|) > 0 \quad (14)$$

a

$$M_i = \max (|\lambda^{(x)}(x)|), \quad (x = 0, 1, \dots, r_i). \quad (15)$$

Omezíme-li ε tak, aby

$$|\varepsilon| < \max \left(\frac{\alpha_i^{r_i - x}}{(r_i - x)!} \cdot \frac{\mu_i}{M_i} \right), \quad \begin{array}{l} (x = 0, 1, \dots, r_i), \\ (i = 1, 2, \dots, m), \end{array} \quad (16)$$

bude $\psi^{(x)}(x_i - \alpha_i)$ téhož znaménka jako $(-\alpha_i)^{r_i - x} \cdot \varphi^{(r_i)}(x_i - \Theta_x \alpha_i)$ a $\psi^{(x)}(x_i + \alpha_i)$ téhož znaménka jako $(+\alpha_i)^{r_i - x} \cdot \varphi^{(r_i)}(x_i + \Theta_x \alpha_i)$. Jelikož pak $\varphi^{(r_i)}(x)$ nemění svého znaménka v oboru (13), bude v posloupnosti

$$\psi(x_i - \alpha_i), \psi'(x_i - \alpha_i), \dots, \psi^{(r_i)}(x_i - \alpha_i),$$

přávě r_i změn znamének, kdežto v posloupnosti

$$\psi(x_i + \alpha_i), \psi'(x_i + \alpha_i), \dots, \psi^{(r_i)}(x_i + \alpha_i),$$

nebude žádné změny znamének. Dle věty Budan-Fourierovy má proto rovnice (11) v oboru (13) nejvýš r_i kořenů, nebo o sudý počet kořenů méně. Speciálně tedy v okolí kořenů (9) bude rovnice (11) mít lichý počet kořenů, v okolí ostatních kořenů (6) sudý počet kořenů. Je-li dále $\mu > 0$ nejmenší hodnota $|\varphi(x)|$ v uzavřeném oboru Ω , který vznikne z $\langle a, b \rangle$ vyloučením všech otevřených oborů

$$|x - x_i| < \alpha_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

a M největší hodnota $|\lambda(x)|$ v témž oboru, omezme ε kromě nerovnicemi (16) ještě nerovnicí

$$|\varepsilon| < \frac{\mu}{M}. \quad (17)$$

Pak v oboru Ω bude stále $|\psi(x)| > 0$, takže rovnice (11) bude mít kořeny pouze v oborech (13), t. j. v okolí kořenů rovnice (8).

4. Pro dosti malé ε seskupují se tudíž kořeny rovnice (11) ve vzájemně separované skupiny v okolí m kořenů rovnice $\varphi(x) = 0$ a sice tak, že počet kořenů v každé skupině bude stejné parity a nejvýš roven váze příslušného kořene rovnice $\varphi(x) = 0$. Kořeny rovnice (11), které leží v okolí r_i -násobného kořene x_i rovnice $\varphi(x) = 0$ hoví pak rovnici

$$\psi(x) = \frac{(x - x_i)^{r_i}}{r_i!} \cdot \varphi^{(r_i)}(x_i + \Theta_i(x - x_i)) - \varepsilon \cdot \lambda(x) = 0,$$

t. j. bude pro ně

$$|x - x_i| = \sqrt[r_i]{r_i! |\varepsilon|} \cdot \frac{|\lambda(x)|}{|\varphi^{(r_i)}(x_i + \Theta_i(x - x_i))|} < \\ < \sqrt[r_i]{|\varepsilon|} \cdot \sqrt[r_i]{\frac{M_i}{\mu_i}}.$$

Tato veličina konverguje k nule spolu s $|\varepsilon|$. Proto v každé skupině budou veškeré kořeny rovnice (11) konvergovati k příslušnému kořenu rovnice (8), jestliže ε dáme se blížit k nule.

5. Dejme tomu, že na př. mezi a a ξ_1 má $\varphi(x)$ šestinásobný kořen x_1 , v jehož okolí leží čtyři kořeny rovnice $\psi(x) = 0$

$$x_1' \leq x_1'' \leq x_1''' \leq x_1^{IV}, \quad (18)$$

které mohou býti navzájem různé, nebo některé vzájemně stejné. Dále, že $\xi_1 = x_2$ jest pateronásobným kořenem $\varphi(x) = 0$ a že v jeho okolí leží 5 kořenů rovnice $\psi(x) = 0$, které buďte na př. takto rozloženy

$$x_2' \leq x_2'' \leq x_2''' \leq x_2^{IV} = \xi_1 \leq x_2^V \quad (19)$$

a z nichž opět některé mohou býti vzájemně stejné. Konečně předpokládejme, že na př. mezi ξ_1 a ξ_2 bude $\varphi(x) = 0$ mít jeden dvojnásobný kořen x_3 , v jehož okolí leží dva různé, nebo splývající kořeny

$$x_3' \leq x_3''$$

rovnice $\psi(x) = 0$ a že $\xi_2 = x_4$ jest jednoduchým kořenem rovnice $\varphi(x) = 0$ a tedy také jednoduchým kořenem $\psi(x) = 0$. Jestliže jsme ještě volili prvý obor (13) tak malý, aby bod a v něm neležel, bude patrně v $x = a$, který pak leží v Ω (odst. 4.), vzhledem k nerovnici (17)

$$|\varphi(x)| \geq |\varepsilon| \cdot |\lambda(x)|. \quad (20)$$

Vzhledem k spojitosti pravé i levé strany platí tato nerovnice v celém prvém oboru $a \dots x_1'$, takže v tomto oboru o znamení $\psi(x)$ rozhoduje $\varphi(x)$. Naproti tomu v oboru $x_1' \dots x_1''$, v němž jest $\psi(x)$ opáčeného znamení než v oboru prvém, musí o znamení $\psi(x)$ rozhodovati člen druhý, t. j. v tomto oboru musí

$$|\varphi(x)| \leq |\varepsilon| \cdot |\lambda(x)|, \quad (21)$$

jelikož ani $\varphi(x)$, ani $\lambda(x)$ nemění v x_1' znaménka. Vztah (21)

zůstane ostatně správný i v případě $x_1' = x_1''$, kdy platí v něm znaménko rovnosti. Vztah (20) platí stejně dále v oborech

$$(x_1'', x_1'''), (x_1^{IV}, x_2'), (x_2'', x_2'''),$$

kdežto v oborech

$$(x_1''', x_1^{IV}), (x_2', x_2''), (x_2''', \xi_1)$$

platí nerovnice (21). V ξ_1 mění však znamení jak $\varphi(x)$ tak i $\lambda(x)$ a tedy i $\psi(x)$. Proto v oborech

$$(\xi_1, x_2^V) \text{ a dále v } (x_3', x_3'')$$

platí nerovnice (21), kdežto v

$$(x_2^V, x_3') \text{ a } (x_3'', \xi_2)$$

platí nerovnice (20) atd.

6. Vzhledem k odst. 5. platí tedy:

$$\begin{aligned} \int_a^{\xi_2} |\psi(x)| dx &= \left| \int_a^{x_1'} \psi(x) dx - \int_{x_1'}^{x_1''} \psi(x) dx + \int_{x_1''}^{x_1'''} \psi(x) dx - \right. \\ &- \int_{x_1'''}^{x_1^{IV}} \psi(x) dx + \int_{x_1^{IV}}^{x_2'} \psi(x) dx - \int_{x_2'}^{x_2''} \psi(x) dx + \int_{x_2''}^{x_2'''} \psi(x) dx - \\ &\left. \int_{x_2'''}^{\xi_1} \psi(x) dx + \int_{\xi_1}^{x_2^V} \psi(x) dx - \int_{x_2^V}^{x_3'} \psi(x) dx + \int_{x_3'}^{x_3''} \psi(x) dx - \int_{x_3''}^{\xi_2} \psi(x) dx \right| = \quad (22) \\ &= \left| \int_a^{\xi_1} \psi(x) dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(x) dx - 2L \right|, \end{aligned}$$

když označíme

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1'}^{x_1''} \psi(x) dx + \int_{x_1'''}^{x_1^{IV}} \psi(x) dx + \int_{x_2'}^{x_2''} \psi(x) dx + \int_{x_2'''}^{x_1} \psi(x) dx - \\ &\int_{x_2^V}^{x_3'} \psi(x) dx - \int_{x_3''}^{\xi_2} \psi(x) dx. \quad (23) \end{aligned}$$

V integračních oborech integrálů vystupujících v L platí vesměs nerovnice (21), takže o znamení $\psi(x)$ v nich rozhoduje člen $\varepsilon \cdot \lambda(x)$, který v posledních dvou integrálech jest

opačného znamení než v prvých čtyřech. Vzhledem k (21) tedy můžeme položit

$$L = \varepsilon \cdot \eta_1$$

kde

$$|\eta_1| \leq \int_{x_1'}^{x_1''} \lambda(x) dx + \int_{x_1'''}^{x_1^{IV}} \lambda(x) dx + \int_{x_2'}^{x_2''} \lambda(x) dx + \int_{x_2'''}^{\xi_1} \lambda(x) dx - \int_{\xi_1}^{x_2^V} \lambda(x) dx - \int_{x_3'}^{x_3''} \lambda(x) dx. \quad (24)$$

V integrálech (24) jsou obě meze každého integrálu z téže skupiny kořenů rovnice $\psi(x) = 0$, takže pro $\lim \varepsilon = 0$ bude $\lim x_1'' = x_1'$, $\lim x_1^{IV} = x_1'''$ atd. a tedy $\lim \eta_1 = 0$. Ze vzorce

(22) proto plyne konečně pro dosti malé ε

$$\begin{aligned} \int_a^{\xi_2} |\psi(x)| dx &= \left| \int_a^{\xi_1} \varphi(x) dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \cdot \left(\int_a^{\xi_2} |\lambda(x)| dx - 2\eta_1 \right) \right| = \\ &= \left| \frac{\varphi(a)}{|\varphi(a)|} \cdot \int_a^{\xi_2} |\varphi(x)| dx - \varepsilon \cdot \left(\int_a^{\xi_2} |\lambda(x)| dx - 2\eta_1 \right) \right|, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_1 &= 0, \end{aligned}$$

a podobně obecněji

$$\int_a^b |\psi(x)| dx = \left| \frac{\varphi(a)}{|\varphi(a)|} \cdot \int_a^b |\varphi(x)| dx - \varepsilon \cdot \left(\int_a^b |\lambda(x)| dx - 2\eta \right) \right|$$

kde

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots$$

a tudíž

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta = 0.$$

Pro dosti malé ε jest patrně

$$\int_a^b |\lambda(x)| dx - 2\eta > 0$$

a zvolíme-li tedy ε dosti malé a stejného znamení s $\varphi(a)$, bude

$$\int_a^b |\psi(x)| dx < \int_a^b |\varphi(x)| dx. \quad (25)$$

7. Odtud plyne, je-li počet kořenů lichého řádu rovnice (8) menší než $n+1$, nemůže integrál

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx = \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx \quad (26)$$

býti minimem, jelikož integrál

$$\int_a^b |\psi(x)| dx = \int_a^b |f(x) - (P_n(x) - \varepsilon \cdot \lambda(x))| dx$$

dle vzorce (25) může nabýti hodnoty ještě menší. Soudíme proto, že za předpokladů odst. 1. může integrál (26) dosáhnouti minima pouze tenkrát, má-li rovnice (8) přesně $n+1$ kořenů lichého řádu. Tyto kořeny

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1} \quad (27)$$

pak nutně jsou jednoduché a tedy jest v nich

$$\varphi'(x_i) = f'(x_i) - P_n'(x_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1). \quad (28)$$

Dejme tomu, že

$$a_0^0, a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0 \quad (29)$$

činí integrál (26) minimem a uvažujme kořeny rovnice (8)

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = 0 \quad (8)$$

jako funkce proměnných a_0, a_1, \dots, a_n v okolí hodnot (29). Vzhledem k (28) kořen x_i rovnice (8) jest spojitou, v okolí (29) derivace schopnou funkcí a_0, a_1, \dots, a_n , která pro $a_0 = a_0^0, a_1 = a_1^0, \dots, a_n = a_n^0$ se redukuje na kořen rovnice

$$\varphi^0(x) = f(x) - (a_0^0 x^n + a_1^0 x^{n-1} + \dots + a_n^0) = 0.$$

8. Pro jednoduchost vynechejme v následujících úvahách horní index 0 při hodnotách (29), které činí integrál (26) minimem, a uvažujme extrémní hodnoty funkce

$$\begin{aligned} \bar{J}(a_0, a_1, \dots, a_n) = & \int_a^{x_1} (f(x) - P_n(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - P_n(x)) dx + \\ & \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - P_n(x)) dx - \dots \pm \int_{x_{n+1}}^b (f(x) - P_n(x)) dx, \end{aligned} \quad (30)$$

v níž x_i značí kořeny (27) rovnice (8). Tato funkce jest také spojitou, derivace schopnou funkcí koeficientů mnohočlenu $P_n(x)$ a proto nutné podmínky pro minimum jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{J}}{\partial a_i} = & \left(f(x_1) - P_n(x_1) \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial a_i} - \left(f(x_2) - P_n(x_2) \right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a_i} + \\ & \left(f(x_1) - P_n(x_1) \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial a_i} - \left(f(x_2) - P_n(x_2) \right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial a_i} + \\ & \dots \dots \dots \\ \pm & \left(f(x_n) - P_n(x_n) \right) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial a_i} \mp \left(f(x_{n+1}) - P_n(x_{n+1}) \right) \cdot \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a_i} - \\ & - \int_a^{x_1} x^i dx + \int_{x_1}^{x_2} x^i dx - \dots - \int_{x_{n+1}}^b x^i dx = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Avšak x_k jsou kořeny rovnice (8), takže jest

$$\varphi(x_k) = f(x_k) - P_n(x_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1). \quad (32)$$

Z rovnice (31) zbudě proto pouze poslední řádka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{J}}{\partial a_i} = & \frac{1}{i+1} \left[a^{i+1} - 2x_1^{i+1} + 2x_2^{i+1} - 2x_3^{i+1} + \dots \right. \\ & \left. + 2(-1)^{n+1} x_{n+1}^{i+1} + (-1)^{n+2} b^{i+1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

($i = 0, 1, \dots, n$).

Tyto nutné podmínky pro extrémní hodnoty jsou ostatně také postačující, neboť

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial a_i \partial a_k} = & -2 \left[x_1^i \frac{\partial x_1}{\partial a_k} - x_2^i \frac{\partial x_2}{\partial a_k} + x_3^i \frac{\partial x_3}{\partial a_k} - \dots + \right. \\ & \left. (-1)^{n+1} x_{n+1}^i \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a_k} \right] \end{aligned}$$

a derivací rovnic (32) dle a_i plyne

$$\left[f'(x_s) - P_n'(x_s) \right] \cdot \frac{\partial x_s}{\partial a_i} - x_s^i = 0.$$

dokázali:

Rovnice

$$a^i - 2x_1^i + 2x_2^i - 2x_3^i + \dots + 2(-1)^{n+1}x_{n+1}^i + (-1)^{n+2}b^i = 0 \quad (33)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n+1)$$

představuje nutné a postačující podmínky, aby za předpokladů odst. 1. integrál

$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$

nabyl minimální hodnoty, značí-li

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$$

úsečky (abscissy) průsečíků křivek

$$y = f(x)$$

$$a \quad y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

II.

9. Při řešení rovnice (33) můžeme vždy předpokládati $a = -1$, $b = +1$. Není-li tomu tak, převedeme obecný případ na tento speciální napřed substitucí

$$x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} t.$$

Dále třeba rozeznávat dva případy: n sudé a n liché.

10. Při sudém $n = 2k$ položíme

$$s_i = x_2^i + x_4^i + \dots + x_{2k}^i \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

$$\sigma_i = x_1^i + x_3^i + \dots + x_{2k-1}^i + x_{2k+1}^i$$

$$f(z) = (z - x_2)(z - x_4) \dots (z - x_{2k}) = z^k + a_1z^{k-1} + \dots + a_k$$

$$\varphi(z) = (z - x_1)(z - x_3) \dots (z - x_{2k+1}) = z^{k+1} + \alpha_1z + \dots + \alpha_{k+1},$$

čímž rovnice (33) nabudou tvaru (vzhledem k odst. 9.)

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 \\ 1 + s_2 &= \sigma_2 \\ s_3 &= \sigma_3 \\ 1 + s_4 &= \sigma_4 \\ &\dots \dots \dots \\ s_{2k+1} &= \sigma_{2k+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Jest však

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z-x_2} + \frac{1}{z-x_4} + \dots + \frac{1}{z-x_{2k}} = \\ &= \frac{k}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \frac{s_3}{z^4} + \dots + \frac{s_{2k+1}}{z^{2k+2}} + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{k+1}{z} + \frac{\sigma_1}{z^2} + \frac{\sigma_2}{z^3} + \frac{\sigma_3}{z^4} + \dots + \frac{\sigma_{2k+1}}{z^{2k+1}} + \dots, \quad (39)$$

kteréžto rozvoje konvergují pro $|z|$ větší než největší z kořenů

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2k+1}.$$

Odečtením (38) a (39) obdržíme vzhledem k rovnicím (37)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \dots + \frac{1}{z^{2k+1}} + \frac{b_{2k+3}}{z^{2k+3}} + \dots \\ &= \frac{z}{z^2-1} + \frac{c_{2k+3}}{z^{2k+3}} + \frac{c_{2k+4}}{z^{2k+4}} + \dots \end{aligned}$$

a odtud integrací

$$\frac{\varphi(z)}{\sqrt{z^2-1}} = C \cdot f(z) \cdot e^{\frac{d_{2k+3}}{z^{2k+2}} + \frac{d_{2k+4}}{z^{2k+3}} + \dots}. \quad (40)$$

Rozvinutím

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{z} = \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^5} + \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{z^7} + \dots \end{aligned}$$

podle klesajících mocností, vynásobením $\varphi(z)$ a srovnáním koeficientů stejných mocnin z na obou stranách obdržíme nejprve $C=1$ a $n=2k+1$ lineárních rovnic pro neznámé koeficienty $\varphi(z)$ a $f(z)$, jichž kořeny budou právě hledané hodnoty x_i . V obecném případě jsou výpočty koeficientů a_i a α_i dosti zdlouhavé, ve speciálních případech však neskytají celkem žádných obtíží. Tak

Při $n=0$ podají rovnice (37) přímo $x_1=0$.

Pro $n=2$ plyne z rovnice (40)

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 & = a_1, & \\
 \alpha_2 & + \frac{1}{2} = 0, & \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad f(z) = z \\
 \frac{1}{2}\alpha_1 & = 0, & \alpha_1 = a_1 = 0, \quad \varphi(z) = z^2 - \frac{1}{2} \\
 x_1 & = -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x_2 = 0, \quad x_3 = +\frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{array}$$

Hodnota $n = 4$ podá systém

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 & = a_1 \\
 \alpha_2 + & \frac{1}{2} = a_2 \\
 \alpha_3 + & \frac{1}{2} \alpha_1 = 0 \\
 \frac{1}{2} \alpha_2 + & \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = 0, \\
 \frac{1}{2} \alpha_3 + & \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_1 = 0, \\
 a_1 = \alpha_1 = \alpha_3 = 0, & \alpha_2 = -\frac{3}{4}, & a_2 = -\frac{1}{4} \\
 f(z) = z^2 - \frac{1}{4}, & \varphi(z) = z^3 - \frac{3}{4}z, \\
 x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x_2 = -\frac{1}{2}, & x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{1}{2}, \quad x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{array}$$

Konečně pro $n = 6$ obdržíme systém rovnic

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 & = a_1, \\
 \alpha_2 + & \frac{1}{2} = a_2, \\
 \alpha_3 + & \frac{1}{2} \alpha_1 = a_3, \\
 \alpha_4 + & \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = 0, \\
 \frac{1}{2} \alpha_3 + & \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_1 = 0, \\
 \frac{1}{2} \alpha_4 + & \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = 0, \\
 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_3 + & \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha_1 = 0, \\
 a_1 = a_3 = \alpha_1 = \alpha_3 = 0, & \alpha_2 = -1, & a_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{8},
 \end{array}$$

$$f(z) = z^3 - \frac{1}{2}z, \quad \varphi(z) = z^4 - z^2 + \frac{1}{8}$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}, \quad x_4 = 0,$$

$$x_5 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}, \quad x_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_7 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

11. Je-li $n = 2k + 1$, označme

$$s_i = x_2^i + x_4^i + \dots + x_{2k+2}^i,$$

$$\sigma_i = x_1^i + x_3^i + \dots + x_{2k+1}^i,$$

načež rovnice (33) nabudou tvaru:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 + 1 \\ s_2 &= \sigma_2 \\ s_3 &= \sigma_3 + 1 \\ s_4 &= \sigma_4 \\ &\dots \\ s_{2k+2} &= \sigma_{2k+2}. \end{aligned} \tag{41}$$

Položme opět

$$f(z) = (z - x_2)(z - x_4) \dots (z - x_{2k+2}) =$$

$$= z^{k+1} + a_1 z^k + \dots + a_{k+1},$$

$$\varphi(z) = (z - x_1)(z - x_3) \dots (z - x_{2k+1}) =$$

$$= z^{k+1} + \alpha_1 z^k + \dots + \alpha_{k+1}$$

a utvořme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - x_2} + \frac{1}{z - x_4} + \dots + \frac{1}{z - x_{2k+2}} =$$

$$= \frac{k+1}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \frac{s_3}{z^4} + \frac{s_4}{z^5} + \dots + \frac{s_{2k+2}}{z^{2k+3}} + \dots,$$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{k+1}{z} + \frac{\sigma_1}{z^2} + \frac{\sigma_2}{z^3} + \frac{\sigma_3}{z^4} + \frac{\sigma_4}{z^5} + \dots + \frac{\sigma_{2k+2}}{z^{2k+3}} + \dots,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots + \frac{1}{z^{2k+2}} + \frac{b_{2k+4}}{z^{2k+4}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{z^2-1} + \frac{c_{2k+4}}{z^{2k+4}} + \dots$$

Odtud integrací a odlogaritmováním

$$f(z) = C \cdot \varphi(z) \cdot \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \cdot e^{\frac{d_{2k+4}}{z^{2k+3}} + \dots} \tag{42}$$

Rozvinutím

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} &= \frac{z-1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}} = \left(1-\frac{1}{z}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + \right. \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{z^6} + \dots \left. \right) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{z^6} - \dots \end{aligned}$$

a srovnáním koeficientů stejných mocnin z na obou stranách obdržíme:

Při $n=1$,

$$a_1 = -1 + \alpha_1,$$

$$0 = \frac{1}{2} - \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{2},$$

$$f(z) = z - \frac{1}{2}, \quad \varphi(z) = z + \frac{1}{2},$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = +\frac{1}{2}.$$

Při $n=3$,

$$a_1 = -1 + \alpha_1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \alpha_1 + \alpha_2$$

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \alpha_1 - \alpha_2$$

$$0 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{4},$$

$$f(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0, \quad \varphi(z) = z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0,$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \quad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Při $n=5$

$$a_1 = -1 + \alpha_1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 - \alpha_3$$

$$0 = -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_3$$

$$0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_3$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{8}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \alpha_3 = -\frac{1}{8},$$

$$f(z) = z^3 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{8}, \quad \varphi(z) = z^3 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{8}.$$

12. Jak vidíme z vypočítaných speciálních případů, položíme-li

$$x_i = -\cos \varphi_i,$$

jest pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ a 6

$$\varphi_i = i \cdot \frac{\pi}{n+2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

t. j. φ_i hová rovnici

$$\frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin \varphi} = 0.$$

Abychom dokázali, že to platí obecně pro každé n , uijíme známých vzorců

$$\begin{aligned} \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos l\varphi &= \\ &= \frac{\cos \frac{l+1}{2} \varphi \cdot \sin \frac{l}{2} \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \end{aligned}$$

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \dots + \cos(2l+1)\varphi = \frac{\sin(2l+2)\varphi}{2 \sin \varphi}.$$

Speciálně pro celé r z nich plyne:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^l \cos(2p+1) \frac{r\pi}{l+1} &= \frac{\sin(2l+2) \frac{r\pi}{l+1}}{2 \sin \frac{r\pi}{l+1}} = \\ &= \frac{\sin 2r\pi}{2 \sin \frac{r\pi}{l+1}} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^l \cos p \cdot \frac{r\pi}{l+1} = \\
& = \frac{\cos\left(\frac{l+1}{2} \cdot \frac{r\pi}{l+1}\right) \cdot \sin\frac{l}{2} \cdot \frac{r\pi}{l+1}}{\sin\frac{r\pi}{2(l+1)}} = \begin{cases} 0 & r \text{ liché} \\ -1 & r \text{ sudé} \end{cases} \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^l \cos p \cdot \frac{2r\pi}{2l+1} = \\
& = \frac{\cos\left(\frac{l+1}{2} \cdot \frac{2r\pi}{2l+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{l}{2} \cdot \frac{2r\pi}{2l+1}\right)}{\sin\frac{2r\pi}{2(2l+1)}} = \\
& = \frac{\sin\left(\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{2r\pi}{2l+1}\right) - \sin\frac{2r\pi}{2(2l+1)}}{2 \sin\frac{2r\pi}{2(2l+1)}} = -\frac{1}{2} \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^{l-1} \cos(2p+1) \frac{r\pi}{2l+1} = \\
& = \frac{\sin\frac{2lr\pi}{2l+1}}{2 \sin\frac{r\pi}{2l+1}} = \frac{\sin\left(r\pi - \frac{r\pi}{2l+1}\right)}{2 \sin\frac{r\pi}{2l+1}} = \\
& = (-1)^{r-1} \cdot \frac{\sin\frac{r\pi}{2l+1}}{2 \sin\frac{r\pi}{2l+1}} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{2}. \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^{2r} \varphi &= \frac{1}{2^{2r-1}} \left[\cos 2r\varphi + \binom{2r}{1} \cos(2r-2)\varphi + \right. \\
& \left. \binom{2r}{2} \cos(2r-4)\varphi + \dots + \binom{2r}{r-1} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \binom{2r}{r} \right] \\
\cos^{2r+1} \varphi &= \frac{1}{2^{2r}} \left[\cos(2r+1)\varphi + \binom{2r+1}{1} \cos(2r-1)\varphi + \dots + \right. \\
& \left. + \binom{2r+1}{r} \cos \varphi \right].
\end{aligned}$$

13. Je-li $n = 2l$ sudé, tedy $n + 2 = 2l + 2$ také sudé, jest podle vzorce (44)

$$2^{2r-1} s_{2r} = 2^{2r-1} \cdot \sum_{i=1}^l \cos^{2r} 2i \frac{\pi}{2l+2} = \sum_{i=1}^l \cos i \frac{2r\pi}{l+1} +$$

$$+ \binom{2r}{1} \sum_{i=1}^l \cos i \frac{(2r-2)\pi}{l+1} + \dots + \binom{2r}{r-1} \cdot \sum_{i=1}^l \cos i \frac{2\pi}{l+1} +$$

$$+ \frac{l}{2} \binom{2r}{r} = -1 - \binom{2r}{1} - \dots - \binom{2r}{r-1} + \frac{l}{2} \binom{2r}{r} \quad (47)$$

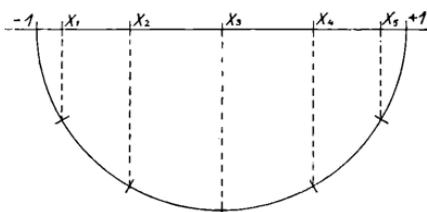
a podle vzorce (43)

$$2^{2r-1} \sigma_{2r} = 2^{2r-1} \cdot \sum_{i=0}^l \cos^{2r} (2i+1) \frac{\pi}{2l+2} =$$

$$= \sum_{i=0}^l \cos (2i+1) \frac{r\pi}{l+1} + \binom{2r}{1} \sum_{i=0}^l \cos (2i+1) \frac{(r-1)\pi}{l+1} + \dots$$

$$\dots + \binom{2r}{r-1} \sum_{i=0}^l \cos (2i+1) \frac{\pi}{l+1} +$$

$$+ \frac{l+1}{2} \binom{2r}{r} = \frac{l+1}{2} \binom{2r}{r}. \quad (48)$$



Obr. 1.

Srovnáním vzorců (47) a (48) však plyne

$$2^{2r} \cdot (\sigma_{2r} - s_{2r}) = 2 + 2 \binom{2r}{1} + \dots + 2 \binom{2r}{r-1} + \binom{2r}{r} =$$

$$= (1+1)^{2r} = 2^{2r}$$

a tedy

$$\sigma_{2r} = s_{2r} + 1$$

ve shodě s (37).

Stejně vyjde dle (44)

$$2^{2r} \cdot s_{2r+1} = -2^{2r} \cdot \sum_{i=1}^l \cos^{2r+1} 2i \frac{\pi}{2l+2} =$$

$$= - \sum_{i=1}^l \cos (2r+1) \frac{2i\pi}{2l+2} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \binom{2r+1}{1} \cdot \sum_{i=1}^l \cos(2r-1) \frac{2i\pi}{2l+2} - \dots \\
 & \dots - \binom{2r+1}{r} \cdot \sum_{i=1}^l \cos \frac{2i\pi}{2l+2} = 0
 \end{aligned}$$

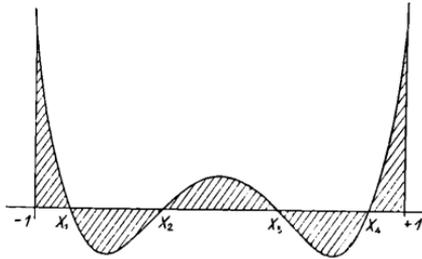
a dle (43)

$$\begin{aligned}
 2^{2r} \cdot s_{2r+1} &= -2^{2r} \cdot \sum_{i=0}^l \cos^{2r+1}(2i+1) \frac{\pi}{2l+2} = \\
 &= - \sum_{i=0}^l \cos(2i+1) \frac{(2r+1)\pi}{2l+2} - \\
 & - \binom{2r+1}{1} \cdot \sum_{i=0}^l \cos(2i+1) \frac{(2r-1)\pi}{2l+2} - \\
 & - \dots - \binom{2r+1}{r} \cdot \sum_{i=0}^l \cos(2i+1) \frac{\pi}{2l+2} = 0.
 \end{aligned}$$

Platí tedy

$$s_{2r+1} = S_{2r+1}$$

opět ve shodě s (37).



Obr. 2.

14. Je-li $n = 2l - 1$ liché a tedy i $n + 2 = 2l + 1$ liché, rovná se dle (45)

$$\begin{aligned}
 2^{2r-1} \cdot s_{2r} &= 2^{2r-1} \cdot \sum_{i=1}^l \cos^{2r} 2i \frac{\pi}{2l+1} = \\
 &= \sum_{i=1}^l \cos i \frac{4r\pi}{2l+1} + \binom{2r}{1} \cdot \sum_{i=1}^l \cos i \frac{4(r-1)\pi}{2l+1} + \dots \\
 & \dots + \binom{2r}{r-1} \cdot \sum_{i=1}^l \cos i \frac{4\pi}{2l+1} + \frac{l}{2} \binom{2r}{r} = \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \binom{2r}{1} - \dots - \frac{1}{2} \binom{2r}{r-1} + \frac{l}{2} \binom{2r}{r}
 \end{aligned}$$

a dle (46)

$$\begin{aligned}
 2^{2r-1} \cdot \sigma_{2r} &= 2^{2r-1} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \cos^{2r}(2i+1) \frac{\pi}{2l+1} = \\
 &= \sum_{i=0}^{l-1} \cos(2i+1) \frac{2r\pi}{2l+1} + \binom{2r}{1} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \cos(2i+1) \frac{2(r-1)\pi}{2l+1} + \dots \\
 &\quad \dots + \binom{2r}{r-1} \sum_{i=0}^{l-1} \cos(2i+1) \frac{2\pi}{2l+1} + \\
 &\quad + \frac{l}{2} \binom{2r}{r} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \binom{2r}{1} - \dots - \frac{1}{2} \binom{2r}{r-1} + \frac{l}{2} \binom{2r}{r}.
 \end{aligned}$$

Jest tedy ve shodě s (41)

$$\sigma_{2r} = S_{2r}.$$

Podobně dle (45) obdržíme

$$\begin{aligned}
 2^{2r} \cdot S_{2r+1} &= -2^{2r} \cdot \sum_{i=1}^l \cos^{2r+1} 2i \frac{\pi}{2l+1} = \\
 &= -\sum_{i=1}^l \cos i \frac{2(2r+1)\pi}{2l+1} - \binom{2r+1}{1} \cdot \sum_{i=1}^l \cos i \frac{2(2r-1)\pi}{2l+1} - \dots \\
 &\quad \dots - \binom{2r+1}{r} \cdot \sum_{i=1}^l \cos i \frac{2\pi}{2l+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \binom{2r+1}{1} + \dots \\
 &\quad \dots + \frac{1}{2} \binom{2r+1}{r}
 \end{aligned}$$

a dle (46)

$$\begin{aligned}
 2^{2r} \cdot \sigma_{2r+1} &= -2^{2r} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \cos^{2r+1}(2i+1) \frac{\pi}{(2l+1)} = \\
 &= -\sum_{i=0}^{l-1} \cos(2i+1) \frac{(2r+1)\pi}{2l+1} - \\
 &\quad - \binom{2r+1}{1} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \cos(2i+1) \frac{(2r-1)\pi}{2l+1} - \dots \\
 &\quad \dots - \binom{2r+1}{r} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \cos(2i+1) \frac{\pi}{2l+1} = \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \binom{2r+1}{1} - \dots - \frac{1}{2} \binom{2r+1}{r}.
 \end{aligned}$$

Jest tedy

$$2^{2r+1} \cdot (s_{2r+1} - \sigma_{2r+1}) = 2 \left[1 + \binom{2r+1}{1} + \dots + \binom{2r+1}{r} \right] = \\ = (1+1)^{2r+1} = 2^{2r+1},$$

čili opět ve shodě s (41)

$$s_{2r+1} = \sigma_{2r+1} + 1.$$

15. Tím jsme dokázali, že rovnicím (37) resp. (41) hoví hodnoty

$$x_i = -\cos i \frac{\pi}{n+2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

kteřé jsou patrně kořeny algebraické rovnice řádu $(n+1)$

$$\frac{\sin [(n+2) \arccos z]}{\sin (\arccos z)} = 0. \quad (49)$$

Graficky obdržíme tyto kořeny, opíšeme-li nad integračním oborem $a \dots b$ jako průměrem polokružnici, kterou rozdělíme na $n+2$ stejných dílů a dělicí body promítneme na \overline{ab} . V obr. 1. to bylo naznačeno pro $n=6$.

Jelikož koeficient nejvyšší mocniny z v (49) jest 2^{n+1} , označme

$$H_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin [(n+2) \arccos x]}{\sin (\arccos x)} = \\ = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}).$$

Mnohočlen $P_n(x)$ nyní obdržíme Lagrangeovou interpolační formulí jako mnohočlen, který pro $(n+1)$ kořenů x_i rovnice (49) nabývá hodnot resp. $f(x_i)$, $(i=1, 2, \dots, n+1)$, takže bude

$$f(x) = P_n(x) + \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1.$$

Proto

$$\int_{-1}^{+1} |f(x) - P_n(x)| dx = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{-1}^{x_1} H_{n+1}(x) dx - \right. \quad (50) \\ \left. - \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_{x_1}^{x_2} H_{n+1}(x) dx + \dots + (-1)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+2})}{(n+1)!} \int_{x_{n+1}}^1 H_{n+1}(x) dx \right|.$$

Avšak veškeré integrály

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} H_{n+1}(x) dx, \quad (x_0 = -1, x_{n+2} = +1)$$

jsou co do prosté hodnoty stejné. Skutečně

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_{n+1}(x) dx &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \int_{-\cos \frac{i\pi}{n+2}}^{-\cos \frac{(i+1)\pi}{n+2}} \frac{\sin [(n+2) \arccos x]}{\sin (\arccos x)} dx = \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \int_{\frac{(u+2-i)\pi}{n+2}}^{\frac{(u+1-i)\pi}{n+2}} \frac{\sin (n+2) \varphi}{\sin \varphi} \sin \varphi d\varphi = \frac{(-1)^{n+1-i}}{(n+2) \cdot 2^n}, \\ &\quad (i = 0, 1, 2, \dots, n+1), \end{aligned}$$

položíme-li $\arccos x = \varphi$.

Geometricky to znamená, zobrazíme-li

$$y = H_{n+1}(x)$$

křivkou, která protíná osu x v $(n+1)$ bodech x_i , ($i = 1, 2, \dots, n+1$) že vyšrafované plochy jsou navzájem stejné (obr. 2.). Dosazením těchto hodnot do (50) obdržíme konečně vzhledem k spojitosti $(n+1)$ -vé derivace

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} |f(x) - P_n(x)| dx &= \tag{51} \\ &= \frac{1}{(n+1)!2^n} \cdot \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_1) + f^{(n+1)}(\xi_2) + \dots + f^{(n+1)}(\xi_{n+2})}{n+2} \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!2^n} \cdot |f^{(n+1)}(\xi)|, \quad -1 < \xi < +1. \end{aligned}$$

Jsou-li libovolné meze $a \dots b$, provedme napřed substituci

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

a položíme

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) = F(t)$$

a vzorec (51) aplikujme na tuto funkci. Obdržíme, označíme-li $P_n(x) = \bar{P}_n(t)$:

$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} |F(t) - \bar{P}_n(t)| dt =$$

$$= \frac{b-a}{2 \cdot (n+1)! 2^n} \cdot |F^{(n+1)}(\tau)| = \frac{(b-a)^{n+2}}{2^{2n+2} \cdot (n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)|,$$

$$a < \xi < b, \quad -1 < \tau < +1.$$

Tento zbytek možno vzítí za jakousi míru aproximace $f(x)$ mnohočlenem $P_n(x)$. Ze vzorce (50) vidíme, že plochy mezi křivkami (1) a (2) budou v případě minima integrálu

$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$

střídavě kladné a záporné a-pokud $f^{(n+1)}(x)$ se nebude příliš měnit mezi $a \dots b$ -budou navzájem od sebe také málo odlišné. Dokonce, bude-li aproximovaná funkce mnohočlenem řádu $(n+1)$ -vého, bude $f^{(n+1)}(x) = \text{konst.}$ a tedy plochy mezi křivkami (1) a (2) budou přesně stejně velké*).

R é s u m é.

Sur l'approximation des fonctions par un polynôme $P_n(x)$ de manière, que

$$\int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$

soit minimum.

Supposons que $f(x)$ et ses $(n+1)$ premières dérivées soient des fonctions continues de x dans l'intervalle fermé $a \leq x \leq b$ et que $f^{(n+1)}(x)$ y soit toujours différente de zéro. Désignons par $P_n(x)$ un polynôme quelconque en x de degré n et considérons la valeur de l'intégrale

$$J = \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx.$$

*) Popudem k této práci bylo krátké sdělení prof. Steinhause v *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Okt. 1928, v němž uveřejňuje uvedenou větu pro $n = 1$ a pro konvexní funkce. Konvexitu funkcí $f(x)$ však není tam blíže definována.

Si l'on choisit le polynôme $P_n(x)$ de manière que J soit minimum, l'équation

$$f(x) - P_n(x) = 0$$

aura précisément $n + 1$ racines simples et différentes à l'intérieur de l'intervalle $a \dots b$. Ces racines satisferont à l'équation (49), si l'on y substitue

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z.$$

La démonstration de la première partie du théorème se fait en plusieurs étapes: Par le théorème de Budan-Fourier on démontre d'abord que les courbes (1) et (2) n'ont que $(n + 1)$ intersections simples à l'intérieur de $a \dots b$ au plus, ou un nombre équivalent d'intersections multiples (No. 1.). Si ces courbes n'avaient que $m < n + 1$ intersections (5) différentes, dont $s \leq m$ intersections d'ordre impaire aux abscisses (9), posons

$$\lambda(x) = (\xi_1 - x)(\xi_2 - x) \dots (\xi_s - x)$$

et considérons l'équation (11). Pour un ε assez petit, ses racines se distribuent en groupes dans le voisinage des racines de l'équation (8). Le nombre des racines dans chaque groupe est de la même parité que la racine correspondante multiple de l'équation (8) et elles tendent avec $\lim \varepsilon = 0$ vers celle-ci (Nos 3. et 4.). Alors on peut vérifier que

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x) - [P_n(x) - \varepsilon \cdot \lambda(x)]| dx = \\ & = \left| \frac{\varphi(a)}{|\varphi(a)|} \cdot \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx - \varepsilon \left(\int_a^b |\lambda(x)| dx - 2\eta \right) \right|, \end{aligned}$$

η étant une somme d'intégrales dont chacune a deux racines du même groupe de l'équation (11) pour limites d'intégration. Par suite on a $\lim \eta = 0$ pour $\lim \varepsilon = 0$ et pour un ε assez petit

$$\int_a^b |\lambda(x)| dx - 2\eta > 0,$$

c'est-à-dire, on peut toujours choisir le signe de ε de manière que

$$\int_a^b |f(x) - [P_n(x) - \varepsilon \cdot \lambda(x)]| dx < \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx$$

(Nos. 5 et 6.). Donc, en cas de minimum de J on ne peut supposer que les courbes (1) et (2) n'aient que $m < n + 1$ intersections différentes. Toutes ces intersections x_i étant par suite simples, on a

$$f'(x_i) - P_n'(x_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1)$$

et les x_i sont des fonctions continues et dérivables des coefficients de $P_n(x)$ dans un certain voisinage des valeurs qui rendent J minimum. (No. 7.). Les équations (33) étant des conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction (30) ait une valeur extrême, elles le sont aussi pour que $J = |\bar{J}|$ soit minimum. J étant négatif en cas de maximum et positif en cas de minimum (No. 8).

Dans la deuxième partie on résout les équations (33), que l'on peut simplifier en posant $a = -1$ et $b = 1$ (No. 9). Dans le cas de $n = 2k$ on obtient des équations (37), en posant

$$\begin{aligned} s_i &= x_2^i + x_4^i + \dots + x_{2k}^i, \\ \sigma_i &= x_1^i + x_3^i + \dots + x_{2k+1}^i, \quad (i = 1, 2, \dots, 2k + 1), \end{aligned}$$

un système d'équations linéaires pour les coefficients de

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - x_2)(z - x_4) \dots (z - x_{2k}) = z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k \\ \varphi(z) &= (z - x_1)(z - x_3) \dots (z - x_{2k+1}) = \\ &= z^{k+1} + \alpha_1 z^k + \dots + \alpha_{k+1} \end{aligned}$$

et en comparant les coefficients des mêmes puissances de z des deux côtés de l'équation (40). (No. 10.). De la même manière on obtient de la fonction (42) un système d'équations linéaires pour les coefficients de

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - x_2)(z - x_4) \dots (z - x_{2k+2}) = z^{k+1} + a_1 z^k + \dots + a_{k+1} \\ \varphi(z) &= (z - x_1)(z - x_3) \dots (z - x_{2k+1}) = z^{k+1} + \alpha_1 z^k + \dots + \alpha_{k+1} \end{aligned}$$

en cas de $n = 2k + 1$ (No. 11.). Mais, dans le cas général, ces équations linéaires sont bien difficiles à résoudre. Or, aux cas spéciaux de $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et 6, on peut vérifier facilement que les racines x_i satisfont à l'équation algébrique (49) d'ordre $n + 1$. On peut le prouver aussi dans le cas général, en posant

$$x_i = -\cos i \frac{\pi}{n+2} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

car les équations (37) ou (41) sont satisfaites pour ces expressions. Ces quantités étant des racines de (49), la deuxième partie du théorème est, par-là, démontrée. (Nos. 12., 13., 14.). Géométriquement, on obtient les x_i par un demicercle sur le diamètre ab , que l'on divise en $(n+2)$ arcs égaux, et par la projection des $(n+1)$ points de division sur ab (fig. 1.) La courbe

$$y = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin [(n+2) \arccos x]}{\sin (\arccos x)}$$

jouit de la propriété remarquable que ses aires entre deux racines consécutives x_i et x_{i+1} sont de la même valeur absolue. En calculant le polynôme $P_n(x)$ par la formule d'interpolation de Lagrange, on vérifie facilement l'équation (51), les aires entre les courbes (1) et (2) étant alternativement des signes contraires et presque de la même valeur absolue, si $f^{(n+1)}(x)$ ne change pas beaucoup dans l'intervalle $a \dots b$. Si $f(x)$ était un polynôme d'ordre $n+1$, la valeur absolue de ces aires serait précisément la même (No. 15.)*

*) Prof. Steinhaus a démontré ce théorème spécialement pour $n=1$ (Zeitschrift für die angewandte Mathematik und Mechanik, Oktober 1928).

XVI.

Mesures d'étoiles doubles.

Par E. BUCHAR.

Présenté le 5 novembre 1929.

Cette petite série d'observations de 51 étoiles doubles a été effectuée avec le réfracteur de l'Université Charles, dont l'objectif a une ouverture de 217 mm, sa distance focale étant 2.45 m. On trouvera sa description plus détaillée dans le numéro 7 de ces Publications.¹⁾ On s'est déjà servi de cet instrument pour mesurer les étoiles doubles, en 1917.²⁾

La position de l'axe horaire a été améliorée, les autres erreurs instrumentales ont été réduites au minimum; par conséquent, on peut négliger ces écarts. On s'est servi d'un micromètre à fil, auquel on a adapté un cercle auxiliaire et une manette, pour en faciliter le maniement. Les microscopes de lecture et le tambour de la vis micrométrique étaient éclairés à l'aide de petites lampes à incandescence à éclat variable. Après plusieurs mesures préliminaires, on a installé un prisme de Salet-Bosler (à partir du 18 octobre 1927), pour éliminer les erreurs systématiques de l'angle de position. On a employé presque exclusivement un oculaire de 2.5' de champ, grossissant 430 fois. Un second oculaire, grossissant 230 fois n'a été utilisé que très rarement. Il faut mentionner aussi, que les images à fort grossissement étaient imparfaites et qu'elles présentaient quelques rayons irréguliers. Ce défaut ne dépend pas du centrage de l'objectif et il faut le considérer comme une conséquence de la non-homogénéité de verre optique.

Le champ était éclairé du bout de la lunette par une

¹⁾ B. Šternberk: Messungen von veränderlicher Sternen in den Jahren 1925-26.

²⁾ Dr. V. Heinrich: Mikrometrická měření dvojhvězd. (Rozpravy České Akademie věd a umění, roč. 26.)

lampe électrique à lumière rouge. A l'aide d'un rhéostat, on réglait l'intensité du courant de telle façon, que l'éclat de l'étoile reste à peu près constant par rapport à celui du champ. On a diminué ainsi l'effet de la grandeur, mais un autre inconvénient apparaît alors: la visibilité variable de fils.

De 20 passages des étoiles γ et 43 *H* Céphée, on a déterminé la valeur du tour de la vis micrométrique. On l'a contrôlée en mesurant directement la différence en déclinaison de deux étoiles *EZ*, qui se trouvent dans l'amas *h* Persée. Le résultat adopté est:

$$R = 25''.582 \pm 0''.019$$

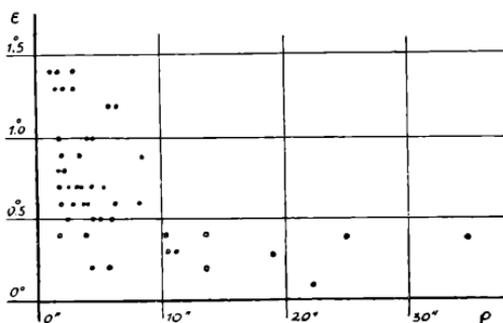
La précision obtenue est tout-à-fait satisfaisante pour le but que nous nous proposons.

Le mode d'observations a été le suivant: On tournait le micromètre jusqu' à rendre le fil parallèle à la ligne joignant les deux composantes. Au début, quand on ne se servait pas du prisme, on inclinait la tête de façon que le fil apparaisse à peu près horizontal ou vertical, ce qui augmente la précision. Cela fait, on lisait les microscopes et on recommençait le tout en sens inverse. Après avoir installé le prisme la moitié des mesures de l'angle de position était effectuée sans le prisme et la seconde moitié avec le prisme. Le zéro du cercle de position a été déterminé tous les soirs. Quant à la distance, on mesurait la double distance pour éliminer la lecture du fil fixe et on procédait de façon à ce que le temps perdu de la vis micrométrique n'entre pas dans les résultats.

En ce qui concerne les conditions météorologiques, il semble, que le brouillard, très fréquent d'ailleurs, n'ait aucun effet sur la précision des mesures. Au contraire, on a pu constater que les images étaient souvent très calmes dans ce cas, quoique un peu affaiblies.

Les résultats finaux sont des simples valeurs moyenne dans lesquelles on n'a pas tenu compte du poids des observations. L'erreur moyenne est $\pm 0.4^\circ$ sur l'angle de position et $\pm 0''.06$ sur la distance des composantes, tandis qu'en une seule nuit, elle atteint $\pm 0^\circ.8$, $\pm 0''.12$ respectivement. Entre l'erreur moyenne sur l'angle de position et la distance, il

y a une relation, comme on peut le remarquer en considérant la figure:



En effet, la valeur ε en question diminue lorsque la distance croît, suivant sensiblement la formule

$$\varepsilon = \pm 1.73 \rho^{-0.66}$$

où ε est exprimé en degrés, ρ en secondes d'arc. Quant à l'erreur sur la distance, elle semble augmenter avec la distance elle-même.

La signification des colonnes du Tableau est la suivante: Dans la première, on trouve l'époque d'observation, exprimée en fraction d'année, la deuxième donne l'angle horaire, la troisième l'angle de position, la quatrième la distance des composantes, la cinquième le nombre de mesures, la sixième contenant une remarque sur les images et les conditions météorologiques. En tête de chaque série est indiqué le numéro du Catalogue de Burnham et de Struve, le nom de l'étoile, puis la position par rapport à l'équinoxe 1930, ainsi que les grandeurs. A côté des moyennes sont indiquées leurs erreurs moyennes, la lettre P signifiant qu'on s'est servi du prisme; on y trouve enfin le nombre de nuit d'observation.

XVI. E. Buchar:

372 = Σ 48.

$\alpha = 0^{\text{h}} 38.2^{\text{m}}, \delta = + 70^{\circ} 59', m = 7.0, 7.2.$

	h	o	"		
1927.780	0.0	335.6	6.06	4	i. mauvaises, alto-cum.
.799	-0.6	335.7	5.93	4	i. mauvaises
.821	+0.5	333.4	5.83	4	i. agitées
.824	+0.8	332.8	5.91	4	i. bonnes
.829	+1.2	333.3	5.86	4	i. très bonnes, brouillard.
.835	+0.1	334.1	5.63	4	" "
1927.81	P	334.1 ± 0.5	5.87 ± 0.06	6	

426 = Σ 60 = η Cassiopeiae.

$\alpha = 0^{\text{h}} 44.6^{\text{m}}, \delta = + 57^{\circ} 27', m = 4.0, 7.6.$

	h	o	"		
1927.799	+0.7	269.3	8.67	4	i. mauvaises
.821	+0.9	267.0	8.11	4	i. agitées
.824	-0.7	268.9	8.39	4	i. bonnes, brouillard.
.829	+1.7	268.5	8.49	4	i. très bonnes, brouillard.
.835	+1.8	268.4	8.57	4	" "
1927.82	P	268.4 ± 0.4	8.45 ± 0.10	5	

439 = Σ 61 = 65 Piscium.

$\alpha = 0^{\text{h}} 46.1^{\text{m}}, \delta = + 27^{\circ} 19', m = 6.0, 6.0.$

	h	o	"		
1927.780	-1.1	297.8	4.58	4	i. mauvaises, alto-cum.
.799	0.0	294.7	4.35	4	i. mauvaises
.821	-0.6	295.9	4.37	4	i. agitées
.824	-0.5	295.5	4.30	4	i. bonnes
.829	+0.6	295.2	4.37	4	i. très bonnes, brouillard.
.835	+0.8	295.8	4.27	4	" "
1927.81	P	295.8 ± 0.4	4.37 ± 0.04	6	

591 = Σ 91 = 160 Ceti.

$\alpha = 1^{\text{h}} 3.6^{\text{m}}, \delta = - 2^{\circ} 6', m = 6.7, 7.5.$

	h	o	"		
1927.796	0.0	317.7	3.94	4	i. mauvaises
.824	-0.2	318.9	4.11	4	i. bonnes
.835	+0.2	318.6	4.27	4	i. bonnes, brouillard.
1927.82	P	318.4 ± 0.4	4.11 ± 0.09	3	

707 = Σ 113 = 42 Ceti.

$\alpha = 1^{\text{h}} 16.2^{\text{m}}$, $\delta = -0^{\circ} 52'$, $m = 6.2, 7.2$,

	h	o	"		
1927.835	+0.6	P 1.8	1.58	4	i. bonnes, brouillard.

877 = Σ 147 = χ_1 Ceti.

$\alpha = 1^{\text{h}} 38.3^{\text{m}}$, $\delta = -11^{\circ} 40'$, $m = 5.3, 6.9$.

	h	o	"		
1927.835	+0.6	P 88.9	2.58	4	i. bonnes, brouillard

993 = Σ 180 = γ Arietis.

$\alpha = 1^{\text{h}} 49.7^{\text{m}}$, $\delta = +18^{\circ} 57'$, $m = 4.2, 4.4$.

	h	o	"		
1927.903	+1.5	0.9	8.29	4	à travers strato-cumul.
1927.922	+0.8	359.6	8.47	4	i. bonnes, brouillard.
1928.005	+0.6	0.1	8.27	4	i. bonnes
.008	+1.0	359.7	8.18	4	i. bonnes, brouillard
.115	+2.6	359.5	8.16	4	i. agitées, vent.
1927.99	P	0.0 ± 0.3	8.27 ± 0.05	5	

1061 = Σ 202 = α Piscium.

$\alpha = 1^{\text{h}} 58.4^{\text{m}}$, $\delta = +2^{\circ} 26'$, $m = 2.8, 3.9$.

	h	o	"		
1927.922	+0.5	306.0	2.14	4	i. bonnes, brouillard
1928.005	+0.2	308.0	2.37	4	i. bonnes
.008	+0.6	307.9	2.20	4	i. bonnes, brouillard
.115	+1.3	211.5	2.43	4	i. agitées, vent.
1928.01	P	308.4 ± 1.1	2.28 ± 0.07	4	

1070 = 0Σ 38 = γ Andromedae.

$\alpha = 1^{\text{h}} 59.5^{\text{m}}$, $\delta = +42^{\circ} 0'$, $m = 3.0, 5.0$.

	h	o	"		
1927.922	+1.5	63.1	10.23	4	i. bonnes, brouillard
28.005	+1.1	64.1	10.38	4	i. bonnes
.008	+1.5	63.4	10.05	4	i. bonnes, brouillard
.024	+3.3	63.7	10.10	4	i. mauvaises.
1927.99	P	63.6 ± 0.2	10.19 ± 0.07	4	

XVI. E. Buchar:

1401 = Σ 299 = γ Ceti. $\alpha = 2^{\text{h}} 39.7^{\text{m}}$, $\delta = + 2^{\circ}57'$, $m = 3.0, 6.8$.

1927.922	+ 0.3	295.1	2.76	4	i. assez bonnes
1928.005	+ 0.1	295.1	3.11	4	i. bonnes
.008	+ 0.5	294.1	2.79	4	i. bonnes, brouillard
1927.98	P	294.8 ± 0.3	2.89 ± 0.11	3	

1799 = Σ 425. $\alpha = 3^{\text{h}} 35.7^{\text{m}}$, $\delta = + 33^{\circ}54'$, $m = 7.3, 7.3$.

1927.922	-- 0.4	83.4	2.22	4	i. bonnes, brouillard,
1928.005	+ 0.6	82.6	2.15	4	i. bonnes
.008	+ 0.2	84.5	2.25	4	i. bonnes, brouillard
.071	+ 0.9	84.1	2.27	4	" "
.115	+ 1.2	84.3	2.12	4	i. agitées, vent.
1928.02	P	83.8 ± 0.3	2.20 ± 0.03	5	

2284 = Σ 572 = 4 Aurigae. $\alpha = 4^{\text{h}} 34.2^{\text{m}}$, $\delta = + 26^{\circ}48'$, $m = 6.5, 6.5$.

1928.071	+ 0.2	196.6	4.04	4	i. bonnes, brouillard
.115	-- 0.8	197.7	3.79	4	i. agitées, vent
.150	+ 0.6	197.0	3.99	4	i. bonnes, calme
.153	+ 0.9	196.1	3.97	4	i. bonnes, calme
.210	+ 2.5	197.2	4.04	4	réglé le mouv. d'horlogerie
1928.14	P	196.9 ± 0.3	3.97 ± 0.05	5	

2821 = Σ 738 = λ Orionis. $\alpha = 5^{\text{h}} 31.3^{\text{m}}$, $\delta = + 9^{\circ}53'$, $m = 4.0, 6.0$.

1928.150	+ 0.3	43.6	4.40	4	i. bonnes, calme
.153	+ 0.3	43.4	4.40	4	
.210	+ 1.9	43.7	4.50	4	i. bonnes
1928.17	P	43.6 ± 0.1	4.43 ± 0.03	3	

3402 = Σ 919 = λ Monocerotis. $\alpha = 6^{\text{h}} 25.4^{\text{m}}$, $\delta = - 7^{\circ} 1'$, $m = 5.0, (5.5, 6.0)$.

1928, 027	- 0.3	P 133.0	7.32	4	i. mauvaises
-----------	-------	---------	------	---	--------------

3793 = Σ 1009. $\alpha = 7^{\text{h}} 0.1^{\text{m}}$, $\delta = + 52^{\circ} 52'$, $m = 6.7, 6.8$.

	h	o	"		
1928.071	-1.8	150.6	3.50	4	i. bonnes, brouillard
.115	-1.9	151.1	3.58	4	i. agitées, vent
.150	-1.6	152.4	3.63	4	i. bonnes, calme
.153	-1.9	152.0	3.68	4	"
.219	+4.5	151.8	3.53	4	régulé le mouv. d'horlogerie
1928.14	P	151.6 ± 0.3	3.58 ± 0.03	5	

4122 = Σ 1110 = α Geminorum. $\alpha = 7^{\text{h}} 30.2^{\text{m}}$, $\delta = + 32^{\circ} 3'$, $m = 2.7, 3.7$.

	h	o	"		
1928.068	+1.4	211.1	—	4	i. agitées
.071	-1.8	210.0	4.50	4	i. bonnes, brouillard
.147	-0.2	210.5	4.35	4	i. faibles, cirrus
.208	-0.8	209.6	4.47	4	i. bonnes, calme
1928.12	P	210.3 ± 0.3	4.44 ± 0.05	3	

4477 = Σ 1196 = ζ Cancri. $\alpha = 8^{\text{h}} 8.2^{\text{m}}$, $\delta = + 17^{\circ} 52'$, $m = 5.0, (5.7, 5.5)$.

	h	o	"		
1928.068	+0.4	104.4	5.42	4	i. agitées
.071	-2.1	104.4	5.40	4	i. bonnes, brouillard
.095	+0.7	104.0	5.33	4	brouillard
.101	-0.7	103.5	5.42	4	i. mauvaises
.147	-0.5	104.7	5.40	4	à travers cirrus
.150	-1.9	105.9	5.60	4	i. bonnes
.153	-2.1	104.6	5.73	4	"
.158	+1.6	104.7	5.42	4	i. mauvaises
.208	-1.1	105.0	5.32	4	i. bonnes
.210	-0.5	103.5	5.40	4	le mouv. irrégulier
1928.14	P	104.5 ± 0.2	5.44 ± 0.04	10	

4601 = Σ 1223 = ϕ^2 Cancri. $\alpha = 8^{\text{h}} 22.6^{\text{m}}$, $\delta = + 27^{\circ} 10'$, $m = 6.0, 6.5$.

	h	o	"		
1928.071	-1.6	P 213.9	4.76	4	i. bonnes, brouillard

4602 = γ 1224 = ν^1 Cancri. $\alpha = 8^{\text{h}} 22.5^{\text{m}}$, $\delta = + 24^{\circ} 46'$, $m = 6.0, 7.1$.

	h	o	"		
1928.216	+1.6	45.9	6.01	4	i. agitées
.235	+2.0	45.9	5.96	4	i. très mauvaises
.243	+1.5	44.5	6.04	4	i. bonnes, calme
1928.23	P	45.4 ± 0.3	6.00 ± 0.02	3	

XVI. E. Buchar:

5030 = Σ 1338 = 157 Lyncis. $\alpha = 9^{\text{h}} 16.6^{\text{m}}$, $\delta = + 38^{\circ}29'$, $m = 7.0, 7.2$.

	h	o	"		
1928.235	+ 1.6	186.8	1.48	4	i. très mauvaises
.243	+ 0.8	188.7	1.69	4	i. bonnes, calme
1928.24	P	187.8 ± 0.9	1.59 ± 0.11	2	

5094 = Σ 1355. $\alpha = 9^{\text{h}} 23.6^{\text{m}}$, $\delta = + 6^{\circ}33'$, $m = 7.2, 7.2$.

	h	o	"		
1928.216	+ 1.1	340.6	1.74	4	i. un peu agitées
.235	+ 1.4	340.6	2.27	4	i. très mauvaises
.243	+ 0.2	342.1	2.22	4	i. bonnes, calme
1928.23	P	341.1 ± 0.5	2.08 ± 0.17	3	

5388 = Σ 1424 = γ Leonis. $\alpha = 10^{\text{h}} 16.1^{\text{m}}$, $\delta = + 20^{\circ}12'$, $m = 2.0, 3.5$.

	h	o	"		
1928.068	- 1.9	120.3	4.45	4	i. agitées
.095	- 1.1	118.2	4.17	4	brouillard
.150	- 1.9	119.6	4.15	4	i. bonnes
.158	- 1.9	117.5	4.04	4	i. mauvaises
.202	- 0.3	119.5	4.37	4	i. mauvaises, cirrus
.210	- 1.8	118.7	4.47	4	le mouv. irrégulier
1928.15	P	119.0 ± 0.4	4.28 ± 0.07	6	

5734 = Σ 1523 = ξ Ursae maioris. $\alpha = 11^{\text{h}} 14.6^{\text{m}}$, $\delta = + 31^{\circ}57'$, $m = 4.0, 4.9$.

	h	o	"		
1928.150	- 2.7	—	1.94	4	i. bonnes
.208	- 1.4	76.3	1.63	4	"
.210	- 2.8	78.1	1.87	4	le mouv. irrégulier
.235	+ 0.6	77.0	1.92	4	i. très mauvaises
.243	- 0.9	77.0	1.74	4	i. bonnes
.301	+ 1.4	76.4	1.79	4	à travers nuages
1928.22	P	77.0 ± 0.3	$1.82 \pm 0,05$	5	

6243 = ζ 1670 = γ Virginis.

$\alpha = 12^{\text{h}} 38.2^{\text{m}}$, $\delta = -1^{\circ}3'$, $m = 3.0, 3.0$.

1928.202	— 2.2	321.5	6.37	4	i. mauvaises, cirrus
.208	— 2.5	319.9	6.27	4	i. bonnes
.219	— 0.7	320.3	6.07	4	le mouv. irrégulier
.235	— 1.3	320.3	6.44	4	i. très mauvaises
.243	— 2.0	320.3	6.42	4	i. bonnes
.279	— 0.8	320.1	6.39	4	l'oeil fatigué
.298	— 0.3	321.1	6.13	4	nuages
.301	+ 0.4	320.4	6.13	4	i. mauvaises
.317	+ 0.7	321.0	6.18	4	i. mauvaises par instants
.350	+ 1.6	321.4	—	4	i. bonnes
1928.27	P	320.6 ± 0.2	6.27 ± 0.05	9	

6566 = Σ 1768 = 25 Can. ven.

$\alpha = 13^{\text{h}} 34.3^{\text{m}}$, $\delta = +36^{\circ}39'$, $m = 5.7, 7.6$.

1928.410	+ 3.1	122.7	1.33	4	i. bonnes
424	+ 2.6	116.1	1.43	4	cirrus
449	+ 1.7	120.6	1.38	4	incertain
1928.43	P	119.8 ± 1.0	1.38 ± 0.03	3	

6778 = Σ 1821 = α Bootis.

$\alpha = 14^{\text{h}} 11.0^{\text{m}}$, $\delta = +52^{\circ}27'$, $m = 5.1, 7.2$.

1928.451	+ 3.5	237.5	13.61	4	i. bonnes
476	+ 3.2	237.2	13.51	4	i. faibles, brouillard
484	+ 3.4	237.4	13.51	4	le mouv. irrégulier
1928.47	P	237.4 ± 0.1	13.55 ± 0.03	3	

6837 = Σ 1833.

$\alpha = 14^{\text{h}} 18.9^{\text{m}}$, $\delta = -7^{\circ}27'$, $m = 7.0, 7.0$

1928.410	+ 1.5	170.1	5.57	4	i. très bonnes
.413	+ 1.4	170.3	5.68	4	i. mauvaises, nuages
.424	+ 1.6	170.5	5.63	4	i. bonnes, cirrus
.432	+ 0.2	170.7	5.88	4	i. très mauvaises
1928.42	P	170.4 ± 0.1	5.69 ± 0.07	4	

XVI. E. Buchar:

6955 = γ 1865 = ζ Bootis. $\alpha = 14^{\text{h}} 37.8^{\text{m}}$, $\delta = + 14^{\circ} 2'$, $m = 3.5, 3.9$.

	h	o	"		
1928.410	+ 1.6	135.7	0.95	4	incertain
.424	+ 1.8	138.3	1.15	4	incertain, cirrus
.449	+ 1.7	136.2	1.15	4	incertain
1928.43	P	136.7 ± 0.8	1.08	3	

6975 = γ 1871. $\alpha = 14^{\text{h}} 39.1^{\text{m}}$, $\delta = + 51^{\circ} 41'$, $m = 7.0, 7.0$.

	h	o	"		
1928.451	+ 3.2	294.8	1.84	4	i. très bonnes
.476	+ 3.0	296.5	1.99	4	i. faibles, brouillard
.484	+ 3.2	296.4	1.79	4	le mouv. irrégulier
1928.47	P	295.9 ± 0.5	1.87 ± 0.06	3	

6993 = γ 1877 = ϵ Bootis. $\alpha = 14^{\text{h}} 42.0^{\text{m}}$, $\delta = + 27^{\circ} 22'$, $m = 3.0, 6.3$.

	h	o	"		
1928.317	- 0.7	336.9	3.02	4	i. mauvaises
.342	- 2.0	334.7	2.92	4	i. bonnes, vent
.350	- 0.2	336.2	2.82	4	i. bonnes
.361	- 0.8	335.5	2.92	4	;
.369	- 0.5	334.3	3.14	4	l'oeil fatigué
.397	- 0.5	333.3	2.99	4	i. bonnes
1928.36	P	335.2 ± 0.5	2.97 ± 0.04	6	

7034 = γ 1888 = ξ Bootis. $\alpha = 14^{\text{h}} 48.1^{\text{m}}$, $\delta = + 19^{\circ} 23'$, $m = 4.7, 6.6$.

	h	o	"		
1928.219	- 2.5	30.9	3.50	4	le mouv. irrégulier
.243	- 4.0	31.8	3.45	4	i. bonnes
.279	- 2.6	32.6	3.35	4	l'oeil fatigué
.298	- 2.0	32.2	3.50	4	nuages
.301	- 1.5	31.9	3.50	4	i. mauvaises
.317	- 1.1	32.5	3.63	4	"
.342	- 1.8	32.5	3.58	4	i. bonnes, vent
.345	- 2.8	32.0	3.50	4	i. mauvaises
.350	0.0	33.3	—	4	
1928.30	P	32.2 ± 0.2	3.50 ± 0.03	9	

7049 = $O \Sigma$ 288.

$\alpha = 14^{\text{h}} 50.1^{\text{m}}$, $\delta = + 15^{\circ} 59'$, $m = 6.4, 7.1$.

	h	o	"		
1928.410	+ 1.6	184.8	1.76	4	i. bonnes
.424	+ 1.8	183.3	1.79	4	cirrus
.449	+ 1.8	184.0	1.84	4	i. bonnes
.451	+ 2.3	184.0	1.77	4	i. très bonnes
1928.43	P	184.0 ± 0.3	1.79 ± 0.02	4	

7120 = Σ 1909 = 44 Bootis.

$\alpha = 15^{\text{h}} 1.6^{\text{m}}$, $\delta = + 47^{\circ} 59'$, $m = 5.2, 6.1$.

	h	o	"		
1928.342	- 2.7	247.5	3.22	4	i. bonnes, vent
.345	- 3.4	247.1	3.40	4	i. mauvaises
.351	+ 3.1	246.6	3.50	4	i. très bonnes
.476	+ 3.0	245.7	3.50	4	i. faibles
.484	+ 3.1	245.4	3.30	4	le mouv. irrégulier
1928.42	P	246.5 ± 0.4	3.38 ± 0.05	5	

7259 = Σ 1938 = μ^2 Bootis.

$\alpha = 15^{\text{h}} 21.9^{\text{m}}$, $\delta = + 37^{\circ} 35'$, $m = 6.7, 7.3$.

	h	o	"		
1928.410	+ 1.6	40.2	1.59	4	i. très bonnes
.449	+ 1.6	41.0	1.61	4	i. bonnes
.451	+ 2.0	40.1	1.73	4	"
.476	+ 3.0	40.2	1.71	4	i. faibles
1928.45	P	40.4 ± 0.2	1.66 ± 0.04	4	

7318 Σ 1954 = δ Serpentis.

$\alpha = 15^{\text{h}} 31.5^{\text{m}}$, $\delta = + 10^{\circ} 46'$, $m = 3.0, 4.0$

	h	o	"		
1928.342	- 2.2	182.3	—	4	i. bonnes, vent
.345	- 3.3	182.6	4.09	4	i. mauvaises
.350	- 0.5	182.4	3.99	4	i. bonnes
.361	- 1.4	183.1	3.99	4	"
.369	- 1.0	183.2	4.19	4	l'oeil fatigué
.397	- 1.0	182.4	3.89	4	i. bonnes
1928.36	P	182.7 ± 0.2	4.03 ± 0.05	6(5)	

XVI. E. Buchar:

7905 = Sh 243 = 36 Ophiuchi.

 $\alpha = 17^{\text{h}} 11.1^{\text{m}}$, $\delta = -26^{\circ}29'$, $m = 6, 6$.

1928.449	+ 0.3	178.6	4.66	4	i. bonnes
.451	+ 1.2	179.3	4.48	4	„
.484	+ 1.3	178.2	4.37	4	le mouv. irrégulier
1928.46	P	178.7 ± 0.3	4.50 ± 0.08	3	

7922 = Σ 3127 = δ Herculis. $\alpha = 17^{\text{h}} 12.2^{\text{m}}$, $\delta = +24^{\circ}55'$, $m = 3.0, 8.1$

1927.567	+ 1.9	207.3	11.46	6	incertain
.586	+ 1.3	207.9	10.95	6	incertain
1928.449	+ 0.3	207.4	11.18	4	i. bonnes
1927.87		207.5 ± 0.2	11.20 ± 0.15	3	

8303 = Σ 2262 = τ Ophiuchi. $\alpha = 17^{\text{h}} 59.3^{\text{m}}$, $\delta = -8^{\circ}11'$, $m = 5.0, 6.7$

1927.555	+ 0.8	263.5	2.15	6	nuages
.567	+ 1.8	265.9	2.56	6	i. agitées
.569	+ 1.8	263.1	2.36	6	i. bonnes
.583	+ 2.4	263.5	2.20	6	i. mauvaises
1927.56		264.0 ± 0.6	2.32 ± 0.09	4	

8340 = Σ 2272 = 70 Ophiuchi. $\alpha = 18^{\text{h}} 1.9^{\text{m}}$, $\delta = +2^{\circ} 36'$, $m = 4.1, 6.1$.

1927.555	+ 1.4	125.1	6.47	6	nuages
.567	+ 2.2	126.0	6.65	6	i. agitées
.569	+ 2.3	123.8	6.45	6	i. bonnes
.583	+ 2.9	123.2	6.27	6	i. mauvaises
1927.57		124.5 ± 0.6	6.46 ± 0.08	4	

8783 = Σ 2382 = ϵ^1 Lyrae. $\alpha = 13^{\text{h}} 42.0^{\text{m}}$, $\delta = +39^{\circ} 36'$, $m = 4.6, 6.3$.

1927.567	+ 2.5	10.1	3.02	6	i. agitées
.569	+ 2.3	9.1	2.99	6	i. bonnes
.583	+ 3.4	10.0	2.94	6	i. agitées
.605	+ 3.4	10.2	2.89	6	„
1928.361	- 4.3	7.0	2.99	4	i. bonnes
.369	- 4.0	7.6	2.87	4	l'oeil fatigué
1927.84		9.0 ± 0.6	2.95 ± 0.02	6	

8785 = Σ 2383 = ϵ^2 Lyrae.

$\alpha = 18^h 42.1^m$, $\delta = + 39^\circ 32'$, $m = 4.9$, 5.2.

	h	o	"		
1927.567	+ 2.1	116.8	2.56	6	i. agitées
.569	+ 2.7	114.5	2.46	6	i. bonnes
.583	+ 3.0	115.9	2.20	6	i. agitées
.605	+ 2.7	116.0	2.56	6	"
1928.361	- 4.1	115.5	2.50	4	i. bonnes
.369	- 3.8	116.1	2.30	4	l'oeil fatigué
1927.84		115.8 ± 0.3	2.43 ± 0.06	6	

8914 = Σ 2417 = Θ Serpentis.

$\alpha = 18^h 52.7^m$, $\delta = + 4^\circ 7'$, $m = 4.0$, 4.2.

	h	o	"		
1927.605	+ 3.7	103.6	22.38	6	i. agitées
.610	+ 1.5	103.9	22.20	6	nuages
.616	+ 1.9	103.7	22.18	6	i. agitées
.632	+ 1.8	103.6	22.18	6	cirrus
.665	+ 0.5	102.6	22.25	6	i. bonnes
1927.62		103.7 ± 0.1	22.24 ± 0.04	5	

9374 = Σ 43 = β Cygni.

$\alpha = 19^h 27.9^m$, $\delta = + 27^\circ 48'$, $m = 3.0$, 5.3.

	h	o	"		
1927.539		54.6	34.43	7	cirrus
.580	+ 3.3	53.7	35.02	6	nuages
.583	+ 2.0	53.8	34.95	6	i. mauvaises
.585	- 0.3	54.6	34.72	6	i. bonnes
.605	+ 1.5	53.8	35.04	6	i. agitées
.616	+ 2.1	54.1	35.07	4	"
.635	+ 2.9	53.7	35.20	6	nuages
1927.59		54.0 ± 0.1	34.92 ± 0.10	7	

10500 = Σ 2727 = γ Delphini.

$\alpha = 20^h 43.4^m$, $\delta = + 15^\circ 53'$, $m = 4.0$, 5.0.

	h	o	"		
1927.605	+ 2.3	268.7	10.54	6	i. agitées
.610	+ 0.2	269.3	10.46	6	nuages
.616	+ 0.4	269.5	10.54	6	i. agitées
.632	+ 0.7	269.4	10.59	6	cirrus
.635	+ 1.2	269.3	10.69	6	nuages
.660	+ 1.6	269.2	10.54	6	i. bonnes
.662	+ 0.6	269.3	10.51	6	i. "
.665	- 0.9	269.4	10.61	6	i. "
1927.64		269.3 ± 0.1	10.56 ± 0.02	8	

XVI. E. Buchar:

10732 = γ 2758 = 61 Cygni. $\alpha = 21^{\text{h}} 03.2^{\text{m}}$, $\delta = + 38^{\circ} 20'$, $m = 5.3, 5.9$.

	h	o	"		
1927.586	- 1.3	—	25.12	6	i. bonnes
.605	+ 2.3	133.4	25.04	6	i. agitées
.660	+ 1.7	133.7	24.76	6	i. bonnes
.662	+ 0,8	133.7	24.81	6	i. „
.670	- 0.2	134.5	25.00	6	i. „
1927.64		134.0 ± 0.2	24.95 ± 0.07	5	

11743 = γ 2909 = ζ Aquarii. $\alpha = 22^{\text{h}} 25.2^{\text{m}}$, $\delta = - 0^{\circ} 23'$, $m = 4.0, 4.1$.

	h	o	"		
1927.731	+ 0.1	300.1	2.56	6	nuages
.739	- 0.6	302.0	2.56	6	cirrus
.742	- 0.3	301.0	2.53	4	i. bonnes
.744	+ 1.2	301.6	2.53	4	„
.747	- 1.3	301.2	2.53	4	i. agitées
.753	+ 1.3	301.9	2.63	4	i. bonnes
1927.74		301.3 ± 0.3	2.56 ± 0.02	6	

12021 = γ 2950 = 241 Cephei. $\alpha = 22^{\text{h}} 48.6^{\text{m}}$, $\delta = + 61^{\circ} 19'$, $m = 5.7, 7.0$.

	h	o	"		
1927.660	+ 0.4	300.2	1.86	6	i. très bonnes
.662	+ 0.1	298.4	1.94	6	„
.670	- 0.9	300.1	2.02	6	i. bonnes
.673	- 1.4	300.2	1.97	6	„
.681	- 2.0	301.0	1.92	6	„
.722	- 2.6	302.7	2.04	6	nuages
.742	- 1.1	301.9	1.77	6	incertain
1927.69		300.6 ± 0.5	1.93 ± 0.03	7	

12292 = γ 2998 = 94 Aquarii. $\alpha = 23^{\text{h}} 15.4^{\text{m}}$, $\delta = - 13^{\circ} 51'$, $m = 5.2, 7.2$.

	h	o	"		
1927.660	+ 0.5	349.5	13.56	6	i. très bonnes
.662	- 0.8	349.1	13.30	6	i. bonnes
.673	- 1.2	350.3	13.51	6	„
.681	- 2.0	349.4	13.51	6	„
.717	+ 0.3	350.0	13.35	4	„
.742	- 0.8	349.5	13.66	4	brouillard
1927.69		349.6 ± 0.2	13.48 ± 0.06	6	

12601 = γ 3042 = 28 Andromedae. $\alpha = 23^{\text{h}} 48.4^{\text{m}}$, $\delta = + 37^{\circ} 30'$, $m = 7.0, 7.0$.

	h	o	"		
1927.742	+ 0.8	87.5	4.99	4	brouillard
.744	+ 0.8	87.6	5.01	4	i. bonnes
.747	- 2.4	88.5	5.50	4	i. agitées
.752	+ 0.5	88.7	4.88	4	i. un peu agitées
.777	0.0	87.9	4.96	4	brouillard
.780	- 0.8	88.1	5.01	4	i. bonnes
1927.76		88.1 ± 0.2	5.06 ± 0.09	6	

12613 = γ 3044. $\alpha = 23^{\text{h}} 49.4^{\text{m}}$, $\delta = + 11^{\circ} 32'$, $m = 6.9, 7.3$.

	h	o	"		
1927.742	+ 0.2	281.2	18.93	6	brouillard
.745	+ 0.1	282.0	19.11	4	i. bonnes
.747	- 1.7	281.7	19.06	4	i. agitées
.752	+ 0.3	282.0	19.34	4	i. bonnes
.761	+ 0.4	281.5	19.26	4	cirro — cum.
.777	- 0.8	281.8	19.19	4	i. bonnes, brouillard
1927.75		281.7 ± 0.1	19.15 ± 0.06	6	

12675 = γ 3050 = 37 Andromedae. $\alpha = 23^{\text{h}} 55.9^{\text{m}}$, $\delta = + 33^{\circ} 21'$, $m = 6.0, 6.0$.

	h	o	"		
1927.744	+ 0.3	235.4	1.89	4	i. bonnes
.747	- 2.1	233.2	1.84	4	i. agitées
.752	+ 0.5	234.3	1.94	4	i. bonnes
.777	- 0.5	234.0	1.89	4	i. bonnes, brouillard
.780	- 0.6	234.4	1.82	4	i. bonnes
1927.76		234.3 ± 0.4	1.88 ± 0.02	5	