

VĚSTNÍK KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK

TŘÍDA
MATEMATICKO - PŘÍRODOVĚDECKÁ.

ROČNÍK 1934.



V PRAZE 1935.
NÁKLADEM KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK.
V KOMISI FRANTIŠKA ŘIVNÁČE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME

CLASSE DES SCIENCES.

ANNÉE 1934.



PRAGUE 1935.
PUBLIÉ PAR LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE BOHÊME.
LIBRAIRIE FR. ŘIVNÁČ.

Obsah.

St. Gołąb: Sur l'invariance des courbures des courbes réelles dans les espaces à n dimensions par rapport à l'orientation de ces courbes	I
Fr. Kadeřávek: O ploše čtvrtého stupně, vytvořené sečtením rotačního paraboloidu a Plückerova konoidu	II
Fr. Záviška: Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender dielektrischer Hülle .	III
M. Servít a Zd. Černohorský: Flechten aus Čechoslovakei	IV
E. Bunický: Théorie de la divisibilité des nombres fractionnaires d'une classe spéciale	V
Wladimír Wáclav Heinrich: Sur la variation des arbitraires et certaines coordonnées normales de la dynamique	VI
B. Němec: Ernährung, Organogene und Regeneration	VII
Bohuslav Hruďička: Hyetoisogradienty Evropy	VIII
Vojtěch Jarník: Sur la dérivée approximative unilatérale	IX
Michel Petrovič: Un mode de représentation des nombres positifs	X
Josef Babička: Kolorimetrische Bestimmung von Kobalt in einer Nährlösung und in der Asche von Pflanzenorganen	XI
Viktor Janda: Příspěvky k poznání periodické barvoměny pakobylyky indické (<i>Dixippus morosus</i> Br. et Redt.)	XII
F. Němeje: On two new Sphenopteris fructifications closely allied to Kindston's Boweria (resp. Scott's Pteridotheca) with remarks to some of the already known Palaeozoic fern sporangia	XIII
M. Kössler: Ueber besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen	XIV
Jaromír Klika: Borstgraswiesen in den Westkarpathen	XV
Rudolf Mikyška: Jedliny ve Štiavnickém středohoří	XVI
Karel Hrubý: Nestálost květních abnormit u <i>Galanthus nivalis</i> L.	XVII
Karel Rössler: Beweis der Widerspruchsfreiheit des Funktionenkalküls der mathematischen Logik	XVIII
B. Němec a J. Babička: Chlorosa rostlin způsobená kobaltem	XIX
V. Breindl a O. Jírovec: Die Cytologie und Entwicklung von <i>Ichthyophthirius multifiliis</i> (Fouquet)	XX



Table des matières.

St. Golab: Sur l'invariance des courbures des courbes réelles dans les espaces à n dimensions par rapport à l'orientation de ces courbes	I
Fr. Kadeřávek: Sur une surface Steinerienne du quatrième degré	II
Fr. Závíška: Ondes électromagnétiques le long d'un fil conducteur entouré d'une gaine isolante diélectrique	III
M. Servít a Zd. Černohorský: Lichens de la Tchécoslovaquie	IV
E. Buničský: Théorie de la divisibilité des nombres fractionnaires d'une classe spéciale	V
Wladimír Wáclav Heinrich: Sur la variation des arbitraires et certaines coordonnées normales de la dynamique	VI
B. Němec: Régénération, organogènes et corrélation	VII
Bohuslav Hruďička: Les hyetisogradients de l'Europe	VIII
Vojtěch Jarník: Sur la dérivée approximative unilatérale	IX
Michel Petrovič: Un mode de représentation des nombres positifs	X
Josef Babička: Détermination colorimétrique du cobalt dans les liquides nutritifs et dans la cendre des végétaux	XI
Viktor Janda: Contribution à l'étude des changements périodiques de la coloration chez <i>Dixippus morosus</i> Br. et Redt	XII
F. Němejc: Sur deux fructifications de <i>Sphenopteris</i> très proches de <i>Boweria</i> Kidst. et quelques notes sur les sporanges des fougères paléozoïques déjà connues	XIII
M. Kössler: Sur les familles particulières de fonctions univalentes	XIV
Jaromír Klika: Les nardaies des Carpathes d'Est	XV
Rudolf Mikyška: Les forêts à <i>Abies alba</i> de montagne de Štiavnica	XVI
Karel Hrubý: L'inconstance des irrégularités de fleurs chez <i>Galanthus nivalis</i> L.	XVII
Karel Rössler: Démonstration que le calcul fonctionnel est sans contradictions	. XVIII
B. Němec a J. Babička: Chlorose chez les plantes causée par les sels du cobalt	XIX
V. Breindl a O. Jirovec: La cytologie et l'évolution d' <i>Ichthyophthirius multifiliis</i> (Fouquet)	XX

I.

Sur l'invariance des courbures des courbes réelles dans les espaces à n -dimensions par rapport à l'orientation de ces courbes.

Par **St. Gołąb.**

(Présenté le 10 janvier 1934.)

Supposons qu'il s'agit du système fondamental des invariants différentiels d'une courbe quelconque située dans l'espace euclidien à trois dimensions par rapport aux déplacements euclidiens et à la variation du paramètre de la courbe. En particulier, si nous voulons obtenir le système demandé pour les courbes planes nous sommes obligés à modifier convenablement le système primitif.¹⁾ Suivant une observation de M. H o b o r s k i l'explication donnée par M. G. S c h e f f e r s de cette modification n'est pas suffisamment claire. La cause de cette circonstance réside, comme l'a prouvé M. H o b o r s k i, en ce que la courbure des courbes planes (affectée d'un signe) change de signe lorsqu'on change l'orientation (le sens du parcours) de la courbe, tandis que le changement de l'orientation des courbes gauches n'implique pas le changement ni de la courbure ni de la torsion. De là vient le problème de savoir quel est le rapport entre l'orientation des courbes et le signe de leurs courbures dans le cas de l'espace à n -dimensions.

Voici le résultat valable pour les espaces de Riemann. Supposons que la m -ème courbure ($m \geq 2$) ainsi que toutes les courbures suivantes s'annulent identiquement. Dans cette hypothèse la première, la deuxième, ..., la $m-2$ -ème courbure

¹⁾ Cf. p. ex. G. S c h e f f e r s, *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume*, Berlin 1921, la fin du § 11, chapitre II.

ne change pas de signe lorsqu'on modifie l'orientation de la courbe. La dernière courbure c.-à-d. la $m-1$ -ère, tout en conservant sa valeur absolue, change alors de signe ou non, suivant la valeur de m ce qui est précisé par la formule (27) où p a la valeur exprimée par l'équation (28). Dans le cas $m = n$ et $n = 2, 3$ nous obtenons le résultat bien connu pour les espaces euclidiens. Il est intéressant que ce théorème n'a pas d'analogue lorsqu'il s'agit du changement du signe des courbures des courbes dans les espaces à connexion linéaire. En tout cas relativement aux courbes situées dans ces espaces et aux courbures définies de deux façons différentes par M. V. Hlavatý²⁾ la règle du changement du signe est tout-à-fait différente. Dans ce cas toutes les courbures paires ou impaires changent de signe. Le fait si ce sont les courbures paires ou impaires dépend seulement de la valeur de m (dans le cas spécial de n où n est le nombre des dimensions).

Soit C une courbe réelle située dans l'espace riemannien à n -dimension V_n ($n > 2$) et soit

$$x^i = x^i(s) \quad (a \leq s \leq b) \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

la représentation paramétrique de cette courbe, où s désigne la longueur de l'arc de C et la courbe C n'a pas, par hypothèse, de points singuliers. En admettant la régularité d'un nombre convenablement haut des fonctions $x^i(s)$ on obtient les formules de Frenet

$$D \underset{j}{t^i} = - \underset{j-1}{k} \underset{j-1}{t^i} + \underset{j}{k} \underset{j+1}{t^i} \quad \left[\begin{matrix} j=1, \dots, n \\ k = \underset{o}{k} = \underset{n}{0} \end{matrix} \right] \quad (2)$$

où les $\underset{1}{t^i}$ sont définis par l'équation

$$\underset{1}{t^i} = \frac{dx^i}{ds}. \quad (3)$$

Le symbole D désigne dans la formule (2) la différentiation covariante (absolue) par rapport à s :

²⁾ V. Hlavatý, Proprietà differenziali delle curve etc. Rend. di Palermo 53 (1929), 365—388. — Ancora sulle proprietà etc. Ibid. p. 389—410.

$$D v^i = \frac{d v^i}{d s} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} v^k \frac{d x^j}{d s} = \frac{d v^i}{d s} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} v^k t^j_1. \quad (4)$$

Les vecteurs consécutifs t^i_2, t^i_3, \dots sont parfaitement déterminés au moyen de la différentiation covariante, de la normalisation, de l'orthogonalité et de la positivité des courbures, c.-à-d. par les conditions suivantes

$$g_{ik} t^i_j t^k_j = 1 \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

$$g_{ik} t^i_j t^k_l = 0 \quad l = 1, \dots, j-1 \quad (6)$$

$$k_i > 0 \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (7)$$

Les scalaires k_1, k_2, \dots (qui sont fonctions du paramètre s le long de la courbe C) sont appelés respectivement première, deuxième etc. courbure de la courbe C . Ils s'expriment (ce qui n'importe pas pour la suite) par les formules

$$k_i = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_{i-1}^2}, \quad (8)$$

où

$$\sigma = 0, \quad \sigma = g_{kj} D t^j D t^k \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Envisageons le cas général où toutes les courbures sont différentes de zéro. Les n vecteurs $t^i_2, t^i_3, \dots, t^i_n$ sont alors linéairement indépendents. L'orientation du vecteur, t^i_1 résulte automatiquement de la relation (3) (ce qu'on exprime en disant que ce vecteur a été orienté dans le sens des s croissantes). L'orientation des autres vecteurs t^i_2, t^i_3, \dots s'obtient de la condition (7). Afin de maintenir l'analogie avec le mode d'orientation du trièdre fondamental dans l'espace euclidien nous sommes obligés de nous arrêter au vecteur avant-dernier t^i_{n-1} du n -èdre fondamental lié avec notre courbe et d'orienter le dernier vecteur t^i_n de façon que le déterminant

$$\Delta = \left| t^i_1, t^i_2, \dots, t^i_n \right| \quad (10)$$

soit positif.⁴⁾ En conséquence d'une telle orientation du vec-

³⁾ Cf. p. ex. D. J. Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, Berlin (1922), p. 76, les equations (34).

⁴⁾ Nous obtenons ainsi un n -èdre positif ou direct.

teur t_n^i la dernière courbure k_{n-1} ne vérifiera pas l'inégalité (7), elle sera définie algébriquement. Les courbures k_1, k_2, \dots, k_{n-1} ainsi définies sont invariatives relativement aux transformations du système des coordonnées. Plus précisément k_1, k_2, \dots, k_{n-2} sont des invariants absolus tandis que la courbure k_{n-1} change éventuellement de signe lorsque le jacobien de la transformation au point considéré de la courbe est négatif.⁵⁾ Il se pose le problème de savoir dans quelle mesure les courbures k_i sont invariatives relativement aux changements admissibles du paramètre de la courbe. Comme s désigne l'arc les changements admissibles du paramètre s'expriment par la formule

$$\bar{s} = s_0 + \varepsilon s \quad (\varepsilon^2 = 1). \quad (11)$$

Il est manifeste que l'addition de la constante s_0 est sans effet sur la position et l'orientation des vecteurs du n -èdre fondamental. Il reste donc à l'examiner la question de l'invariance des courbures k par rapport à la transformation

$$\bar{s} = -s \quad (12)$$

ce qui se réduit au changement de l'orientation de la courbe C .

Afin d'éviter l'examen des cas particuliers envisageons le cas le plus général et supposons à cet effet que la m -ème courbure est nulle:

$$k_m = 0 \quad (k_j \neq 0 \text{ pour } j = 1, \dots, m-1). \quad (13)$$

L'égalité $m = n$ correspondra au cas le plus général. Lorsque $m < n$, nous choisirons les vecteurs $t_{m+1}^i, t_{m+2}^i, \dots, t_n^i$ d'une façon tout-à-fait arbitraire pourvu qu'ils satisfassent cependant aux relations (5) et (6). L'orientation des vecteurs $t_2^i, t_3^i, \dots, t_{m-1}^i$ sera fixée par les inégalités

$$k_{j-1} > 0 \quad j = 2, \quad m-1 \quad (14)$$

et le vecteur t_m^i sera orienté de façon que le déterminant (10) ait une valeur positive. En soumettant le paramètre s à la transformation (12) et en désignant les quantités analogues

⁵⁾ Nous disons que le signe de k_{n-1} dépend de l'axialité de l'espace.

relatives au nouveau paramètre s par des lettres barrées nous sommes amenés à chercher les relations entre les courbures \bar{k}_i et k_i . Remarquons pour ce but que

$$\bar{t}_1^i = \frac{dx^i}{ds} = -\frac{dx^i}{ds} = -t_1^i. \quad (15)$$

Observons ensuite que la relation

$$\bar{v}^i = \varepsilon v^i \quad (\varepsilon^2 = 1) \quad (16)$$

entraîne la relation

$$\bar{D} \bar{v}^i = \frac{d\bar{v}^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\}_1 \bar{v}^k \bar{t}_1^j = -\varepsilon \left\{ \frac{dv^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} v^k t_1^j \right\} = -\varepsilon D v^i. \quad (17)$$

De là, en vertu des équations de Frenet (appliquées aux quantités barrées), nous obtenons à l'aide de l'induction mathématique les relations

$$\bar{t}_j^i = (-1)^j t_j^i \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (18)$$

et

$$\bar{k}_j = k_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, m-2. \quad (19)$$

Il reste à trouver la relation entre \bar{k}_{m-1} et k_{m-1} . Avant de l'écrire désignons par p le nombre des nombres impairs inférieurs à m . On a

$$\bar{t}_j^i = t_j^i \quad \text{pour } j = m+1, \dots, n \quad (20)$$

parce que ces vecteurs accessoires ont été choisis une fois par toutes et cela d'une façon indépendante de l'orientation de la courbe C . Faisons pour le moment abstraction de la m -ème ligne dans le déterminant

$$\bar{\Delta} = \left| \begin{matrix} \bar{t}_1^1 & \bar{t}_1^2 & \dots & \bar{t}_1^{m-1} & \bar{t}_1^m & \bar{t}_1^{m+1} & \dots & \bar{t}_1^n \\ \bar{t}_2^1 & \bar{t}_2^2 & \dots & \bar{t}_2^{m-1} & \bar{t}_2^m & \bar{t}_2^{m+1} & \dots & \bar{t}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{t}_{m-1}^1 & \bar{t}_{m-1}^2 & \dots & \bar{t}_{m-1}^{m-1} & \bar{t}_{m-1}^m & \bar{t}_{m-1}^{m+1} & \dots & \bar{t}_{m-1}^n \end{matrix} \right|. \quad (21)$$

Ceci fait nous observons que les $n-m$ dernières lignes du déterminant (21) sont identiques aux lignes homologues du déterminant (10). Parmi les $m-1$ premières lignes homologues dans ces deux déterminants il y en a qui sont identiques et il en existe exactement p qui sont affectées des signes opposés dans les deux déterminants. En se souvenant que les deux déterminants ont les mêmes signes nous obtenons de là la relation

$$\operatorname{sgn} \bar{t}_m^i = (-1)^p \operatorname{sgn} t_m^i. \quad (22)$$

Mais l'avant dernière équation de Frenet:

$$\bar{D} \bar{t}_{m-1}^i = -\bar{k}_{m-2} \bar{t}_{m-2}^i + \bar{k}_{m-1} \bar{t}_m^i \quad (23)$$

rapprochée aux équations (17), (18), (19) et (5) donne les égalités:

$$|\bar{t}_m^i| = |t_m^i|, \quad |\bar{k}_{m-1}| = |k_{m-1}|. \quad (24)$$

De là il résulte que

$$\bar{t}_m^i = (-1)^p t_m^i \quad (25)$$

et la dernière équation de Frenet

$$\bar{D} \bar{t}_m^i = -\bar{k}_{m-1} \bar{t}_{m-1}^i \quad (26)$$

nous conduit, en vertu de (25), (17), (24) et (18), à l'égalité finale

$$\boxed{\bar{k}_{m-1} = (-1)^{m+p} \cdot k_{m-1}}. \quad (27)$$

La dernière courbure qui ne s'annule pas (tout en gardant la valeur absolue constante) peut changer de signe ce qui dépend de la valeur de m . Nous observons en effet que p est parfaitement déterminé par la valeur de m car nous avons

$$p = E \left(\frac{m}{2} \right) \quad (28)$$

où E représente le plus grand nombre entier au plus égal au nombre donné. Si

$$m = n \quad (29)$$

alors

$$\bar{k}_{n-1} = (-1)^{n+E \left(\frac{n}{2} \right)} \cdot k_{n-1} \quad (30)$$

d'où on voit que la courbure de la courbe plane change de signe lorsqu'on change l'orientation de la courbe. Le signe de la torsion d'une courbe gauche ne change pas. Le signe de la troisième courbure d'une courbe générale située dans l'espace à quatre dimensions se conserve aussi lorsqu'on change l'orientation. Pour une courbe dans l'espace à cinq dimensions la dernière courbure change de signe et ainsi de suite.

Il est intéressant d'observer que, dans le cas $m = n$, la formule (30) s'obtient dans une voie plus courte et plus élégante lorsqu'on se base sur une formule due à M. V. Hlavatý, que voici écrite dans nos notations:

$$k_{n-1} = \frac{\omega}{\binom{k}{1}^{n-1} \cdot \binom{k}{2}^{n-2} \dots \binom{k}{n-2}^2 \Delta}, \quad (31)$$

où ω désigne le déterminant

$$\omega = \left| t_1^i, D_1^i t_1^i, D_1^2 t_1^i, \dots, D_1^{n-1} t_1^i \right|, \quad D^{j+1} = D(D^j). \quad (32)$$

Le dénominateur du deuxième membre ne change pas lorsqu'on passe de k à \bar{k} et l'examen de la variation du numérateur se réduit à l'application de la formule (17).

Comme les formules de Frenet ont été généralisées aux espaces plus généraux que ceux de Riemann (p. ex. aux espaces à connexion affine) il surgit automatiquement le problème de savoir dans quelle mesure les considérations précédentes peuvent être étendues à ces espaces. Or il est intéressant que l'analogie ne se maintient plus dans ce cas. Nous avons notamment pour les espaces L_n (espaces à connexion linéaire pas nécessairement symétrique) deux espèces différentes de formules de Frenet qui sont toutes les deux due à Hlavatý.⁷⁾ Si nous désignons — comme précédemment — par k_1, k_2, \dots, k_{n-1} les courbures d'une courbe C alors, en vertu de formules données par Hlavatý, nous aurons pour le premier groupe⁸⁾ (dans le cas $m = n$) les relations suivantes:

$$\bar{k}_j = (-1)^{n+E} \binom{n+1}{2}^{j+1} \cdot k_j \quad (j = 1, \dots, n-1). \quad (33)$$

Il s'ensuit que toutes les courbures paires, éventuellement toutes les courbures impaires (ce qui dépend de n) changent de signe lorsqu'on modifie l'orientation de la courbe. Un phénomène analogue se présente aussi pour le deuxième groupe de relations Frenet-Hlavatý.⁹⁾

⁶⁾ L. c. ²⁾ p. 374, la formule (21).

⁷⁾ L. c. ²⁾.

⁸⁾ p. 371, les formules (14) et (15).

⁹⁾ p. 395, la formule (II).

Résumé.

L'auteur établie pour les espaces de Riemann à n dimensions le résultat suivant: Etant donnée une courbe quelconque régulière, nous supposons que la m -ième courbure ($2 \leq m \leq n$) ainsi que toutes les courbures suivantes s'annulent identiquement. Lorsqu'on modifie l'orientation de la courbe (le sens de parcours), alors les $m-2$ premières courbures ne changent pas. La dernière courbure c.-à-d. la $m-1$ -ère, tout en conservant sa valeur absolue, change de signe ou non, suivant la valeur de m , ce qui est précisé par la formule (27) où p est donné par la formule (28). Ce théorème valable pour les espaces de Riemann n'a pas d'analogue lorsqu'il s'agit des courbes situées dans les espaces à connexion linéaire générale. Dans ce cas là la règle du changement du signe des courbures de Hlavatý par rapport à changement de l'orientation de la courbe s'exprime par la formule (33).

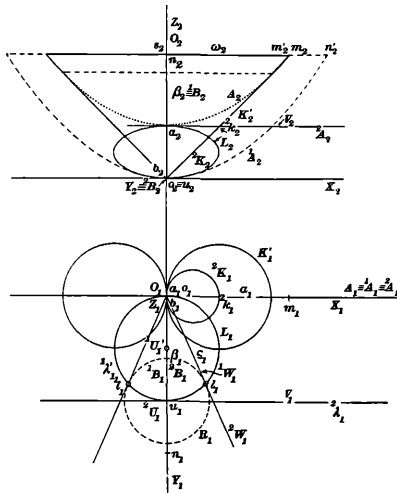
II.

O ploše čtvrtého stupně, vytvořené sečtením rotačního paraboloidu a Plückerova konoidu.

Napsal Dr. FR. KADERÁVEK (Praha).

(Předloženo 10. ledna 1934).

1. Buďtež dány tři k sobě kolmé osy souřadné X, Y, Z , protínající se v počátku o . Roviny jimi určené označme, jak jest obvyklé, π, ν, μ a kolmé průměty do nich jmenujme půdorysem, nárysem a stranorysem. Vytkněme rotační paraboloid



${}^1\sigma$, jehož osou rotace buď přímka $O \equiv Z$, vrchol $b \equiv o$, a paraboly meridiální ${}^1A, {}^1B$ o parametu p buďtež položeny v $\nu \equiv \alpha$ a $\mu \equiv \beta$. Dále vytkněme Plückerův konoid ${}^2\sigma$ o torsální přímce ${}^2A // X$ a protínající osu O v kuspidálním bodu a a druhé torsální přímce ${}^2B \equiv Y$; příslušný kuspidální bod $b \equiv o$! Vzdálenost ab zvolme rovnu $p/2$! Libovolná přímka, rovnoběžná s osou Z protíná v konečnu plochy ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ a π v bodech ${}^1p, {}^2p$,

1p_1 ; bod p , jehož z -tová souřadnice $p^1p_1 = {}^1p^1p_1 + {}^2p^2p_1$ je rovna součtu z -tových souřadnic bodů 1p , 2p , vyplní součtovou plochu σ ploch ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ pro základní rovinu sčítání π a pro směr sčítání Z . Součet dvou ploch stupně n a m -tého je obecně plocha stupně $n.m$; zde však plochy ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ mají v úběžné rovině společné isotropické přímky, proto součet σ je stupně čtvrtého. V každé rovině, jdoucí přímkou O , která je pro plochu σ přímkou dvojnou, je na σ položena parabola o parametru p , mající přímkou konoidu ${}^2\sigma$, položenou v téže rovině, za svou vrcholovou tečnu. Je z toho patrné, že se plochy σ dotýká v bodech přímky O daný konoid ${}^2\sigma$ a dále, že podél parabol A , B plochy σ , položených v rovinách α , β kolmé souměrnosti plochy σ , dotýkají se této plochy válcové plochy o povrchových přímkách kolmých k rovině α , resp. β .

2. Sestrojíme-li v π kružnici E_1 o středu e_1 položeném v ose X , jest to půdorys elipsy 1E paraboloidu ${}^1\sigma$ a elipsy 2E konoidu ${}^2\sigma$. Podél 1E se dotýká paraboloidu ${}^1\sigma$ plocha kuželová ${}^1\varepsilon$ o středu ${}^1e \equiv e_1$, podél 2E dotýká se konoidu ${}^2\sigma$ rovněž kuželová plocha ${}^2\varepsilon$ o středu 2e , položeném v torsální přímce 2A a majícím v e_1 svůj půdorys. Součtem elips 1E a 2E je elipsa E o témž půdorysu E_1 a součtem obou ploch kuželových ${}^1\varepsilon$ a ${}^2\varepsilon$ dotýčných je podél E se σ dotýkající plocha kuželová ε o vrcholu e v přímce 2A , e_1 je půdorysem bodu e .

I jeví se nám plocha σ jako souhrn eliptických křivek v rovinách položených torsální přímkou 2B plochy konoidu ${}^2\sigma$, majících v bodě b jeden svůj vrchol, druhý vrchol je položen v parabole A . Každá z těchto elips je položena na rotační ploše válcové o ose rovnoběžné s osou O a podél této elipsy dotýká se plochy σ plocha kuželová, jejíž vrchol je položen v přímce 2A a v ose příslušné rotační plochy válcové.

3. Vedeme-li přímkou 2B tečné roviny k parabole A plochy σ , jsou v nich položené elipsy K' , K'' kraterovými křivkami plochy σ , ježto podél nich se dotýkající plochy kuželové přešly do rovin tečných. Křivky K' , K'' s parabolou A tvoří nárysný obrys plochy. Souosé nárysy všech parabol plochy σ dotýkají se přímek K'_2 , K''_2 , které při délce a_2 $b_2 = p/2$ stojí k sobě kolmo. I jsou nárysy všech parabol plochy σ souosé paraboly o společné řídicí přímce X_2 .

4. Vytkneme-li v π kružnici dotýkající se osy X v bodě

σ , je to obdobně jako v právě probraném případě půdorys elipsy paraboloidu ${}^1\sigma$ a elipsy konoidu ${}^2\sigma$ v rovině jdoucí torzální přímkou 2A . Střed vytčené kružnice je společným vrcholem kuželových ploch, které se podél uvažovaných elips ploch ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ dotýkají. Z toho je patrné, že plocha σ je souhrnem elips, které jsou položeny v rovinách, jdoucích přímkou 2A , majících v bodě a svůj jeden vrchol, druhý vrchol je položen v parabole B . Půdorys středu takovéto elipsy jest vrcholem kuželové plochy, která se dotýká podle této elipsy plochy σ .

Proto stranorys má za obrys parabolu B_3 a obě k ní ohniskem a_3 vedené tečny. Z toho je zřejmo, že stranorysy parabol plochy σ jsou koaxiální a konfokální paraboly.

Kuželových ploch, které se plochy σ dotýkají podél elips v rovinách svazků o osách 2A a 2B , lze s výhodou použití, hledáme-li dotyčné křivky ploch válcových a kuželových, ploše σ opsaných.

5. Zvolme v rovině $\mu \equiv \beta$ přímkou ${}^2U \parallel {}^1U' \parallel Z \equiv O$ od sebe o $p/2$ odlehlé. Kolem ${}^1U'$ opišme rotační plochu válcovou ${}^1\lambda'$ jdoucí osou O a i přímkou 2U , kol kteréž opišme rotační paraboloid ${}^2\lambda$, jehož vrchol u buď v půdorysně a jehož parametr buď p ! Tento paraboloid obsahuje parabolu A plochy σ , dále protíná plochu válcovou ${}^1\lambda'$ v elipse L , jejíž vrcholy jsou body a a u . Tato elipsa je souhrnem dotyčných bodů tečen, rovnoběžných s půdorysnou π a vedených osou O k paraboloidu ${}^2\lambda$. Je zřejmo, že tyto tečny vyplňují Plückerův konoid, totožný s původně uvažovaným konoidem ${}^2\sigma$. V libovolné rovině ζ jdoucí osou O jsou položeny: přímka 1W válcové plochy ${}^1\lambda'$ která je osou paraboly 2W paraboloidu ${}^2\lambda$ položené v ζ a dotýkající se v ζ položené přímky konoidu ${}^2\sigma$ kolmé k O . Odečteme-li v ζ pro osu O jako příslušnou osu, k níž směr sčítání zvolme kolmý, pořadnice přímky 1W od pořadnic paraboly 2W , vyjde jako výsledek parabola plochy σ položená v rovině ζ . Z toho je patrné, že, označíme-li ${}^1\lambda$ válcovou plochu k ${}^1\lambda'$ podle a souměrnou, plyne pro plochu σ následující způsob vytváření:

Jestliže v paprscích rotační lin. kongruence o ose O a druhé úběžné, k ní kolmé, sčítáme úsečky omezené osou O a válcem ${}^1\lambda$, jakož i osou O a paraboloidem ${}^2\lambda$, získáváme body plochy σ .

6. Z toho vyplývá, že řezy plochy σ v rovinách kolmých

k O jsou kyssoidy dvou kružnic, z nichž jedna jde pólem. Jsou to proto racionální bicirkulární kvartiky, mající v rovinách α a β své vrcholy. Jsou to úpatnice křivek druhého stupně, majících s nimi společné vrcholy v parabolách A a B . Ježto střed oné kružnice, která jde pólem, je v uvažovaném případě ohniskem vytvořované kyssoidy — a tu tento střed leží na ose plochy válcové ${}^1\lambda$ — vidíme, že řezy plochy σ rovnoběžné s půdorysnou — jsou to Boothovy lemniskaty — mají touž výstřednost a jejich půdorysy jsou konfokální. V rovině jdoucí středem úsečky ab je položena Bernouilliho lemniskata a v rovině, jdoucí přímkou 2A dvě v bodě a se této přímkou dotýkající kružnice o průměru rovném parametru p .

Jinak můžeme důkaz o konfokalitě půdorysů s π rovnoběžných řezů provést takto: V rovině $\omega \parallel \pi$ položený řez je úpatnicí kuželosečky o středu s v O a vrcholech m v A a n v B . Parabola 1A je protata rovinou ω v bodě n' . Protne-li paraboloid ${}^1\sigma$ rovinou, která je s ν rovnoběžná ve vzdálenosti p , bude nárys řezu totožný s parabolou A a označíme-li průsečík tohoto řezu s ω písmenou m' , je v Δ pravoúhlém $smm' : \overline{sm}^2$ — — $\overline{sm}^2 = \overline{mm}'^2$; ježto však $sm' = sn' = sn$, je i $\overline{sn}^2 - \overline{sm}^2 = \overline{mm}'^2 = p^2$, tedy konstantní.

Půdorysy všech základních kuželoseček řezů plochy σ s π rovnoběžných jsou konfokální kuželosečky o lineár. výstřednosti rovné p .

7. Kdybychom zvolili rotační paraboloid ζ o parametru rovném $p/4$, o vrcholu v Y a o ose rotace ${}^1U' \parallel O$ a od O o vzdálenost $p/2$ odlehlé, vyplní veškerý s π rovnoběžné tečny paraboloidu, protínající osu O , Plückerův konoid σ . Vedeme-li osou O libovolnou rovinu ζ a přeneseme-li v ní od osy O na přímkách k této ose kolmých tětivy parabolického řezu roviny ζ s paraboloidem ζ na obě strany osy O , vyplní všechny takto stanovené body parabolou o ose O příslušící ploše σ . I je plochu σ možno též vytvořit takto: Zvolme rotační paraboloid o parametru $p/4$ a s jeho osou přímkou rovnoběžnou ve vzdálenosti $p/2$. Nanášíme-li od této přímky na paprsky lin. kongruence rotační — jejíž jednou osou je O — druhá je úběžná a k této kolmá — tětivy vytyčované těmito paprsky ve zvoleném paraboloidu, vyplňují jejich koncové body plochu σ .

Tento způsob vytvoření plochy σ dává známou konstrukci Boothových lemniskat v rovinách rovnoběžných s π : $V\omega \parallel \pi$ je položena kružnice zvoleného paraboloidu a průsečný bod s osou O . Nanášíme-li od tohoto bodu na jím procházející paprsky tětivy kružnice na obě strany, vyplňují koncové body hledaný řez.

Je zřejmo, že dotyčné body bitangent řezů plochy σ , rovnoběžných s π , jsou položeny na kraterových elipsách. Z toho plyne, že půdorysy řezů plochy σ — konfokální Boothovy lemniskaty — mají dotyčníky dvojných tečen položeny na dvou kružnicích o průměru p , dotýkajících se ve středu hlavní osy lemniskat.

8. Obecný rovinný řez plochy σ je racionální kvartika, jejímž půdorysem je bicirkulární kvartika, kterou možno vytvořiti jako úpatnici kuželosečky, ovšem pól nezapadá tu do středu této kuželosečky.

9. Každá v π položená a počátkem jdoucí kružnice je půdorysem elipsy paraboloidu ${}^1\sigma$ a elipsy konoidu ${}^2\sigma$; součtem těchto elips na téže ploše válcové ve směru sčítání je elipsa plochy σ .

Rotační plocha válcová, procházející osou plochy σ , protíná σ v křivce eliptické. Plocha σ nese na svém povrchu ∞^2 kuželoseček.

Vytkněme na konoidu ${}^2\sigma$ dvě povrchové přímky 1G a ${}^1G'$, protínající se v bodě v na ose O a položené v půdorysně promítacích rovinách γ a γ' . Půdorys přímky 1G splývá s určitou vrcholovou tečnou 2G paraboloidu ${}^1\sigma$. Libovolná kružnice H_1 , položená v π a dotýkající se v bodě o přímkou $\gamma_1 \equiv {}^1G_1 \equiv {}^2G_1$, je půdorysem jediné elipsy paraboloidu ${}^1\sigma$, položené v rovině, jdoucí tečnou 2G a půdorysem jediné elipsy konoidu ${}^2\sigma$, položené v rovině, procházející přímkou ${}^1G'$ v rovině γ' . Tyto roviny uvažovaných elips probíhají, mění-li se H_1 v π , dva rovinové svazky o osách 2G a ${}^1G'$, jejichž prvky jsou v alg. jedno-jednoznačné příbuznosti, jsou to proto svazky promětné. Součet dvou sdružených rovin prochází bodem v , v rovině γ určitou přímkou svazku o středu v , a v rovině γ' přímkou promětného svazku o středu rovněž v bodě v , vzniklého z průsečného svazku roviny γ' se svazkem rovin elips paraboloidu ${}^1\sigma$ o ose 2G v rovině γ' posunutím o úsečku \overline{ov} . Proto obalují

součtové roviny plochu kuželovou druhé třídy o vrcholu v .

Roviny elips plochy σ procházejících určitým bodem na ose O , obalují kuželovou plochu druhé třídy, dotýkající se promítacích rovin obou přímk konoidu ${}^2\sigma$ jdoucích týmž bodem na ose O .

¹⁰⁾ Ježto každým bodem v π jde ∞^1 kružnic, které procházejí počátkem, je zřejmo, že každým bodem plochy σ jde ∞^1 elips a jedna parabola.

Úběžným bodem t_∞ osy O plochy σ jdoucí úběžné isotropické přímky jsou další dvojně přímky plochy σ ; bod t_∞ je jejím trojným bodem. Plocha σ je monoidem.

Zvolíme-li v ose O libovolný bod w a uvedeme-li jím k libovolné parabole plochy σ tečny, je semipolára vytčeného bodu vrcholovou tečnou zvolené paraboly a proto povrchovou přímkou konoidu ${}^2\sigma$, polára vytčeného bodu, jsou od něho ve dvojnásobné vzdálenosti semipoláry a jsou k této rovnoběžná, probíhá rovněž Plückerův konoid. Je tedy zřejmo, že dotyčné křivky kuželových ploch ploše σ z bodů osy O opsaných jsou položeny na Plückerových konoidech s plochou σ sousých a k základnímu konoidu ${}^2\sigma$ podobně položených.

Rotační plocha válcová o ose O protíná základní paraboloid ${}^1\sigma$ v kružnici v rovině rovnoběžné s π a konoid ${}^2\sigma$ v prostorové křivce 4 stupně, prvního druhu, kterou prochází rovnosý hyperbolický paraboloid o ose O , mající k sobě kolmé přímky konoidu ${}^2\sigma$ za své přímky vrcholové. Sečtení kružnice paraboloidu a křivky konoidu je totožné s posunutím této křivky. Proto platí věta:

S plochou σ sousé rotační plochy válcové protínají ji v prostorových křivkách čtvrtého stupně, prvního druhu.

Podle uvedených vlastností povrchových kuželoseček je uvažovaná plocha σ zvláštní plochou Steinerovou a je plochou jednostrannou. Její rovnice v obyč. souřadnicích jest

$$\sigma \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2pz(x^2 + y^2) + p^2x^2 = 0.$$

¹¹⁾ Kdybychom při vytvořování uvažované plochy σ , a to při způsobu, uvedeném v odst. ⁷⁾ nahradili paraboloid ${}^1\sigma$ rotační plochou druhého stupně o ose rovnoběžné s osou O , získali bychom zajímavé plochy 4^o, jejichž řezy, kolmé k O jsou Boothovy lemniskaty. Na přímce O , která je dvojnou

přímkou plochy, jsou obecně dvě od sebe oddělené úsečky, v nichž se plocha prostupuje.

¹²⁾ Použijeme-li místo paraboloidu ${}^1\sigma$ při témž vytváření plochu druhého stupně o kruhovém řezu v rovině kolmé k O , získáváme další zajímavé plochy 4^o. Elipsoid a normála O vztyčená k němu v jeho umbilikálním bodě dává plochu velmi obdobnou k ploše, vyplněné oskulačními kružnicemi řezu obecné plochy, vedených její normálou v obecném eliptickém bodu.

Résumé.

Sur une surface Steinerienne du quatrième degré.

Par Fr. K a d e ř á v e k.

(Présenté le 10 janvier 1934.)

Etant données deux surfaces ${}^1\sigma \equiv {}^1z = {}^1f(x, y)$; ${}^2\sigma \equiv {}^2z = {}^2f(x, y)$, on en peut dériver une surface nouvelle $\sigma \equiv z = {}^1z + {}^2z = f(x, y)$; la surface σ est la somme des surfaces données ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$. En prenant un paraboloidé de révolution ${}^1\sigma \equiv {}^1z = x^2 + y^2/2p$ et un conoïde de Plücker ${}^2\sigma \equiv {}^2z = \frac{px^2}{2(x^2 + y^2)}$, on obtient la somme $\sigma \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2pz(x^2 + y^2) + p^2x^2 = 0$, une surface du 4^o. De cette surface on peut facilement construire les sections planes; celles dans les plans perpendiculaires à la droite Z sont des lémnisques de Booth. La surface σ contient ∞^2 de courbes coniques, lesquelles se projettent sur le plans (x, y) , suivant des cercles qui passent par l'origine o . Le long des coniques, lesquelles se projettent sur (x, y) suivant des cercles touchant soit X , soit Y , la surface σ est touchée par des cônes du 2^o. Par chaque point de la surface traitée passent ∞ coniques; la surface σ est un cas particulier de la surface de Steiner.

součtové roviny plochu kuželovou druhé třídy o vrcholu v .

Roviny elips plochy σ procházejících určitým bodem na ose O , obalují kuželovou plochu druhé třídy, dotýkající se promítacích rovin obou přímk konoidu ${}^2\sigma$ jdoucích týmž bodem na ose O .

¹⁰⁾ Ježto každým bodem v π jde ∞^1 kružnic, které procházejí počátkem, je zřejmo, že každým bodem plochy σ jde ∞^1 elips a jedna parabola.

Úběžným bodem t_∞ osy O plochy σ jdoucí úběžné isotropické přímky jsou další dvojně přímky plochy σ ; bod t_∞ je jejím trojným bodem. Plocha σ je monoidem.

Zvolíme-li v ose O libovolný bod w a uvedeme-li jím k libovolné parabole plochy σ tečny, je semipolára vytčeného bodu vrcholovou tečnou zvolené paraboly a proto povrchovou přímkou konoidu ${}^2\sigma$, polára vytčeného bodu, jsou od něho ve dvojnásobné vzdálenosti semipoláry a jsou k této rovnoběžná, probíhá rovněž Plückerův konoid. Je tedy zřejmo, že dotyčné křivky kuželových ploch ploše σ z bodů osy O opsaných jsou položeny na Plückerových konoidech s plochou σ sousých a k základnímu konoidu ${}^2\sigma$ podobně položených.

Rotační plocha válcová o ose O protíná základní paraboloid ${}^1\sigma$ v kružnici v rovině rovnoběžné s π a konoid ${}^2\sigma$ v prostorové křivce 4 stupně, prvního druhu, kterou prochází rovnosý hyperbolický paraboloid o ose O , mající k sobě kolmé přímky konoidu ${}^2\sigma$ za své přímky vrcholové. Sečtení kružnice paraboloidu a křivky konoidu je totožné s posunutím této křivky. Proto platí věta:

S plochou σ sousé rotační plochy válcové protínají ji v prostorových křivkách čtvrtého stupně, prvního druhu.

Podle uvedených vlastností povrchových kuželoseček je uvažovaná plocha σ zvláštní plochou Steinerovou a je plochou jednostrannou. Její rovnice v obyč. souřadnicích jest

$$\sigma \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2pz(x^2 + y^2) + p^2x^2 = 0.$$

¹¹⁾ Kdybychom při vytvořování uvažované plochy σ , a to při způsobu, uvedeném v odst. ⁷⁾ nahradili paraboloid ${}^1\sigma$ rotační plochou druhého stupně o ose rovnoběžné s osou O , získali bychom zajímavé plochy 4^o, jejichž řezy, kolmé k O jsou Boothovy lemniskaty. Na přímce O , která je dvojnou

přímku plochy, jsou obecně dvě od sebe oddělené úsečky, v nichž se plocha prostupuje.

¹²⁾ Použijeme-li místo paraboloidu ${}^1\sigma$ při témž vytváření plochu druhého stupně o kruhovém řezu v rovině kolmé k O , získáváme další zajímavé plochy 4^o. Elipsoid a normála O vztyčená k němu v jeho umbilikálním bodě dává plochu velmi obdobnou k ploše, vyplněné oskulačními kružnicemi řezu obecné plochy, vedených její normálou v obecném eliptickém bodu.

Résumé.

Sur une surface Steinerienne du quatrième degré.

Par Fr. K a d e ř á v e k.

(Présenté le 10 janvier 1934.)

Etant données deux surfaces ${}^1\sigma \equiv {}^1z = {}^1f(x, y)$; ${}^2\sigma \equiv {}^2z = {}^2f(x, y)$, on en peut dériver une surface nouvelle $\sigma \equiv z = {}^1z + {}^2z = f(x, y)$; la surface σ est la somme des surfaces données ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$. En prenant un paraboloid de révolution ${}^1\sigma \equiv {}^1z = x^2 + y^2/2p$ et un conoïde de Plücker ${}^2\sigma \equiv {}^2z = \frac{px^2}{2(x^2 + y^2)}$, on obtient la somme $\sigma \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2pz(x^2 + y^2) + p^2x^2 = 0$, une surface du 4^o. De cette surface on peut facilement construire les sections planes; celles dans les plans perpendiculaires à la droite Z sont des lémniscates de Booth. La surface σ contient ∞^2 de courbes coniques, lesquelles se projettent sur le plans (x, y) , suivant des cercles qui passent par l'origine o . Le long des coniques, lesquelles se projettent sur (x, y) suivant des cercles touchant soit X , soit Y , la surface σ est touchée par des cônes du 2^o. Par chaque point de la surface traitée passent ∞ coniques; la surface σ est un cas particulier de la surface de Steiner.

III.

Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender dielektrischer Hülle.

(Ondes électromagnétiques le long d'un fil conducteur entouré d'une gaine isolante diélectrique.)

Von **FR. ZÁVIŠKA.**

(Vorgelegt am 10. Jänner 1934).

Das Problem der Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen längs eines metallischen Drahtes, der sich in einem homogenen unendlich ausgedehnten Dielektrikum befindet, hat Sommerfeld¹⁾ streng gelöst; seine Lösung wurde von Harms²⁾ auf den Fall eines Metalldrahtes mit koaxialer isolierender Hülle erweitert. Für die Wellenlänge der am Drahte fortschreitenden Wellen (Drahtwellenlänge) fand Harms eine transzendente Gleichung, deren Diskussion er unter Voraussetzung, daß die Leitfähigkeit des Drahtes unendlich groß sei, durchführte. Es ergab sich unter anderem, daß bei zunehmender Dicke der Hülle und konstanter Frequenz die Drahtwellenlänge abnimmt, und zwar von dem der freien Vakuumwelle (Luftwelle) zugehörigen Werte l bis zum Werte $l/\sqrt{\epsilon}$, der dem unendlich ausgedehnten Dielektrikum entspricht. Alle von Harms theoretisch gefundenen Resultate wurden von Weiss³⁾ experimentell bestätigt.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß außer der von Harms untersuchten Welle noch eine ganze Reihe von anderen Wellen sich am Drahte fortpflanzen kann, die den von Hondros und Debye⁴⁾ an einem dielektrischen Draht gefundenen Wellen ähnlich sind.

¹⁾ A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 67, 233, 1899.

²⁾ F. Harms, Ann. d. Phys. 23, 44, 1907.

³⁾ H. Weiss, Ann. d. Phys. 28, 651, 1909.

⁴⁾ D. Hondros u. P. Debye, Ann. d. Phys. 32, 465, 1910.

I. *Ableitung und Diskussion der Gleichung für die Drahtwellenlänge.*

Wir führen Zylinderkoordinaten z, r, φ ein und lassen die z -achse mit der Drahtachse zusammenfallen. Weiter wollen wir das Feld als symmetrisch rings um die Drahtachse betrachten, so daß nichts von φ abhängt. Dann bleiben von den in die Zylinderkoordinaten transformierten Maxwell'schen Gleichungen nur folgende drei übrig:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\varphi}) &= \frac{4\pi}{c} \sigma E_z + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ - \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} \sigma E_r + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= - \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Partikuläre Lösungen dieser Gleichungen, welche den in Richtung der positiven z -Achse fortschreitenden Wellen entsprechen, lauten:⁵⁾

$$\begin{aligned} E_z &= \sqrt{k^2 - h^2} Z (r \sqrt{k^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + h z)} \\ E_r &= i h Z' (r \sqrt{k^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + h z)} \\ H_{\varphi} &= i \frac{c k^2}{\omega \mu} Z' (r \sqrt{k^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + h z)} \end{aligned} \quad (1)$$

Hier ist Z eine allgemeine Zylinderfunktion nullter Ordnung, Z' ihre Ableitung nach dem Argument, d. h. $Z'(x) = dZ(x)/dx$. Weiter ist

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\mu \varepsilon \omega^2 + 4\pi i \sigma \mu \omega) \quad (2)$$

und

$$h = \frac{2\pi}{L} + i \alpha \quad (3)$$

L bedeutet die Drahtwellenlänge, α ist das Maß der örtlichen Dämpfung, die durch Entwicklung der Jouleschen Wärme bedingt ist. Beide diesen Größen, L und α , sind positiv; im Grenzfalle, wenn keine Verzeherung der Energie durch die Joulesche Wärme stattfindet, wird α gleich null. Zeitlich sollen die Schwingungen ungedämpft sein, ω ist also reell.

⁵⁾ Vgl. D. Hondros, Ann. d. Phys. 30, 912, 1909.

Die Fortpflanzungskonstante h hat überall denselben Wert, dagegen hängt die Wahl der Zylinderfunktion Z vom Medium, für welches die Gleichungen (1) gelten sollen, ab. In unserem Falle — ein beiderseits unendlich ausgedehnter geradliniger Draht mit coaxialer Hülle — hat man drei Medien zu unterscheiden: den Außenraum (Medium 1, vgl. Fig. 1), die Hülle (Medium 2) und das Drahtinnere (Medium 3). In diesem letzten Medium ist $0 \leq r \leq b$, wenn man mit b den Drahtradius bezeichnet, und für Z darf man nur die gewöhn-

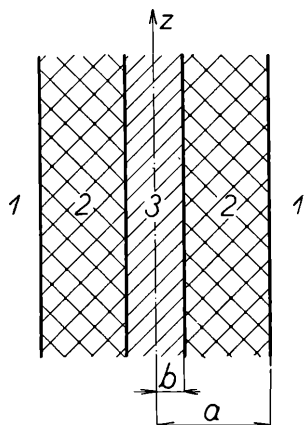


Fig. 1.

liche Besselsche Funktion J wählen, weil keine andere Zylinderfunktion im Nullpunkte sich regulär verhält. Wir setzen also für das Drahtinnere $Z = A_3 J$ und bekommen:

$$\begin{aligned}
 E_{3z} &= A_3 \sqrt{k_3^2 - h^2} J(r \sqrt{k_3^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + hz)} \\
 E_{3r} &= i h A_3 J'(r \sqrt{k_3^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + hz)} \\
 H_{3\varphi} &= i \frac{c k_3^2}{\omega \mu_3} A_3 J'(r \sqrt{k_3^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + hz)}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Im Medium 2 ist $b \leq r \leq a$, wobei a den äußeren Radius der Hülle bedeutet (Fig. 1). Hier ist Z keiner Bedingung unterworfen, man muß also ganz allgemein setzen $Z = A_2 J + B_2 N$; N ist die Neumannsche Funktion oder die Zylinderfunktion zweiter Art.⁶⁾ So erhält man

⁶⁾ Vgl. z. B. E. Jahnke-F. Emde: Funktionentafeln, 2. Aufl. 1933, p. 197.

$$\begin{aligned}
 E_{2z} &= \sqrt{k_2^2 - h^2} \{ A_2 J(r\sqrt{k_2^2 - h^2}) + B_2 N(r\sqrt{k_2^2 - h^2}) \} e^{i(-\omega t + hz)} \\
 E_{2r} &= ih \{ A_2 J'(r\sqrt{k_2^2 - h^2}) + B_2 N'(r\sqrt{k_2^2 - h^2}) \} e^{i(-\omega t + hz)} \quad (5) \\
 H_{2\varphi} &= i \frac{ck_2^2}{\omega\mu_2} \{ A_2 J'(r\sqrt{k_2^2 - h^2}) + B_2 N'(r\sqrt{k_2^2 - h^2}) \} e^{i(-\omega t + hz)}.
 \end{aligned}$$

Im Außenraum ist $r \geq a$. Wie Sommerfeld⁷⁾ gezeigt hat, muß hier, wenn es sich um Drahtwellen handeln soll, das Argument der Zylinderfunktion Z komplex oder im Grenzfall rein imaginär sein und für Z hat man entweder die erste oder die zweite Hankelsche Funktion zu nehmen, je nachdem der imaginäre Teil des Argumentes positiv oder negativ ist. Im folgenden werden wir das Vorzeichen von $\sqrt{k_1^2 - h^2}$ so bestimmen, daß der imaginäre Teil positiv wird; für Z ist dann die erste Hankelsche Funktion⁸⁾ zu nehmen, die wir einfach mit H bezeichnen. Es ist also $Z = A_1 H$ und

$$\begin{aligned}
 E_{1z} &= A_1 \sqrt{k_1^2 - h^2} H(r\sqrt{k_1^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + hz)} \\
 E_{1r} &= ih A_1 H'(r\sqrt{k_1^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + hz)} \quad (6) \\
 H_{1\varphi} &= i \frac{ck_1^2}{\omega\mu_1} A_1 H'(r\sqrt{k_1^2 - h^2}) e^{i(-\omega t + hz)}.
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von den Konstanten A_1, A_2, B_2, A_3 und h dienen die Grenzbedingungen. Der Einfachheit halber wollen wir den Draht als unendlich leitend voraussetzen; dann muß an seiner Oberfläche die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke verschwinden, d. h. für $r = b$ muß $E_{2z} = 0$ sein. In der Grenzfläche zwischen der Hülle und dem Außenraum müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke stetig ineinander übergehen; es ist also $E_{2z} = E_{3z}$ und $H_{2\varphi} = H_{3\varphi}$ für $r = a$. Setzen wir

$$x = a\sqrt{k_1^2 - h^2} \qquad y = a\sqrt{k_2^2 - h^2} \quad (7)$$

$$\text{und} \qquad b = \vartheta a \qquad \vartheta < 1,$$

so nehmen die Grenzbedingungen folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 A_2 J(\vartheta y) + B_2 N(\vartheta y) &= 0 \\
 y \{ A_2 J(y) + B_2 N(y) \} &= A_1 x H(x) \quad (8) \\
 \frac{k_2^2}{\mu_2} \left\{ A_2 J'(y) + B_2 N'(y) \right\} &= A_1 \frac{k_1^2}{\mu_1} H'(x).
 \end{aligned}$$

⁷⁾ A. Sommerfeld, l. c. pag. 250.

⁸⁾ Wegen Definition dieser Funktion vgl. das zitierte Werk von E. Jahnke u. F. Emde, pag. 199.

Dies stellt ein System von drei linearen und homogenen Gleichungen für die drei Konstanten A_1, A_2, B_2 dar. Soll eine nicht identisch verschwindende Lösung existieren, so muß die Determinante des Systems verschwinden; diese Bedingung liefert eine Gleichung für h , die lautet:

$$\frac{k_1^2 H'(x)}{\mu_1 x H(x)} = \frac{k_2^2 J'(y) N(\vartheta y) - N'(y) J(\vartheta y)}{\mu_2 y \{J(y) N(\vartheta y) - N(y) J(\vartheta y)\}}. \quad (9)$$

Nun setzen wir für den Außenraum $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1, \sigma_1 = 0$ (Vakuum oder Luft), auch das Material der Hülle wollen wir als absolut isolierend betrachten und setzen $\sigma_2 = 0, \mu_2 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon$. Dann folgt aus den Gleichungen (2):

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{l^2} \quad k_2^2 = \varepsilon k_1^2, \quad (10)$$

wobei l die der Kreisfrequenz ω entsprechende Wellenlänge im Vakuum oder in Luft (freie Wellenlänge) bedeutet. Es folgt dann aus der Gleichung (9):

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{H'(x)}{x H(x)} = \frac{J'(y) N(\vartheta y) - N'(y) J(\vartheta y)}{y \{J(y) N(\vartheta y) - N(y) J(\vartheta y)\}}. \quad (11)$$

Über die Wurzeln dieser Gleichung läßt sich allgemein folgendes sagen: Da das Drahtmaterial unendlich gut leiten soll und die Leitfähigkeit der Hülle und des Außenraumes ausgeschlossen wurde, wird keine Joulesche Wärme erzeugt, der Dämpfungskoeffizient κ ist gleich Null und $h = 2\pi/L$ ist reell. Den Gleichungen (7) zufolge können dann x und y nur reelle oder rein imaginäre Werte annehmen. Im Falle der Drahtwellen ist ein reeller Wert von x unmöglich; daraus folgt, daß x rein imaginär sein muß, und zwar nach dem, was oben über das Vorzeichen von $k_1^2 - h^2$ gesagt wurde, positiv imaginär. Für solche x -Werte ist die linke Seite der Gleichung (11) reell und positiv; dasselbe muß also auch für die rechte Seite gelten.

Um zu entscheiden, wann dies stattfindet, genügt es, positiv reelle und positiv imaginäre Werte von y zu betrachten, da die rechte Seite der Gleichung (11) eine gerade Funktion von y darstellt. Für rein imaginäre Argumente ist diese Funktion reell und ändert ihr Zeichen nicht, wenn y alle betrachteten Werte annimmt; das folgt daraus, daß der Zähler sowie auch der Nenner der untersuchten Funktion stetige

Funktionen von y sind und für kein rein imaginäres Argument verschwinden. Für kleine Werte von y hat man annähernd⁹⁾

$$J(y) = 1 \qquad J'(y) = -\frac{1}{2}y$$

$$N(y) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma y} \qquad N'(y) = \frac{2}{\pi y},$$

wo $\gamma = e^C$ ist und C die Eulersche Konstante bedeutet. Es ist $\gamma = 1,781$. Setzt man das in die rechte Seite der Gleichung (11) ein, so bekommt man nach einer kurzen Rechnung den Näherungswert $-1/y^2 \ln \vartheta$. Für rein imaginäre y ist dieser Ausdruck reell und negativ, da $\vartheta < 1$ ist. Man sieht daraus, daß die rechte Seite der Gleichung (11) für alle positiv imaginäre y reell und negativ ist. Diese Werte kommen also für uns nicht in Betracht; y darf nur reelle Werte annehmen.

II. Die Drahtwellenlängen in ihrer Abhängigkeit von der freien Wellenlänge der erzeugenden Schwingungen.

Den Zusammenhang zwischen der Drahtwellenlänge L und der freien Wellenlänge l ermittelt man am einfachsten graphisch, und zwar etwa folgendermaßen. Zu einem beliebig vorgegebenen x bestimmt man aus der Gleichung (11) das entsprechende y und zu jedem so gefundenen Wertepaare (x, y) berechnet man auf Grund der Gleichungen (7) und (10) die Werte von l und L . Es ist nämlich $h = 2\pi/L$ und

$$x^2 = 4\pi^2 a^2 \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{2L} \right) \qquad y^2 = 4\pi^2 a^2 \left(\frac{\varepsilon}{l^2} - \frac{1}{L^2} \right),$$

woraus folgt:

$$l = 2\pi a \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{y^2 + \xi^2}} \qquad L = 2\pi a \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{y^2 + \varepsilon \xi^2}}, \qquad (12)$$

wenn man $\xi = x/i$ setzt. Hat man genug Wertepaare (l, L) gefunden, so kann man eine Kurve ziehen, welche den Zusammenhang zwischen l und L darstellt.

Allgemein läßt sich darüber folgendes sagen. Die auf der linken Seite der Gleichung (11) stehende Funktion

⁹⁾ Vgl. das zitierte Werk von E. Jahnke u. F. Emde, pag. 194 u. 198.

$$z_1 = \frac{1}{\epsilon} \frac{H'(x)}{x H(x)}$$

ist für rein imaginäre und positive Werte von $x = i\xi$ (ξ reell und positiv) eine monoton sinkende Funktion. Für kleine Werte von ξ ist annähernd

$$H(i\xi) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \xi} \quad H'(i\xi) = \frac{2}{\pi \xi}$$

und die Funktion z_1 verhält sich wie

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\xi^2 \ln \frac{2}{\gamma \xi}};$$

wenn also ξ gegen Null konvergiert, wird z_1 unendlich groß.

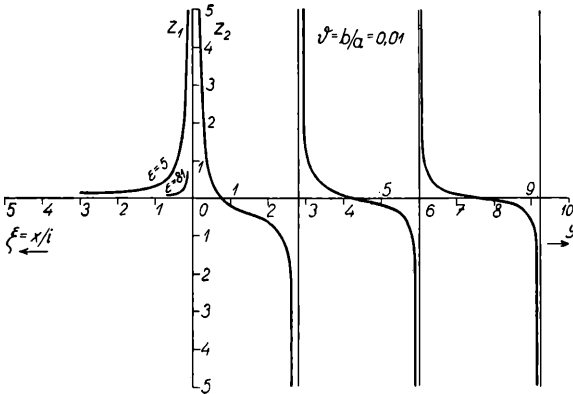


Fig. 2.

Für große Werte von ξ läßt sich näherungsweise schreiben:

$$H(i\xi) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} e^{-\xi} \quad H'(i\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} e^{-\xi}$$

und z_1 verhält sich wie $1/\epsilon \xi$; wenn ξ über alle Grenzen wächst, wird z_1 unendlich klein. In der linken Hälfte der Fig. 2 ist diese Funktion aufgetragen, und zwar für $\epsilon = 5$ und $\epsilon = 81$.

Die auf der rechten Seite der Gleichung (11) stehende Funktion

$$z_2 = \frac{J'(y) N(\vartheta y) - N'(y) J(\vartheta y)}{y \{ J(y) N(\vartheta y) - N(y) J(\vartheta y) \}}$$

hat für reelle Argumente einen periodischen Charakter. Für große Werte von y und ϑy ist annähernd

$$J(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \quad J'(y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi y}} \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \quad N'(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

und die Funktion z_2 verhält sich wie

$$\frac{1}{y} \cot(1 - \vartheta) y.$$

Sie hat unendlich viele Nullstellen, deren Lage sich asymptotisch nähert zu

$$y = \frac{2n + 1}{1 - \vartheta} \frac{\pi}{2};$$

auf jede Nullstelle folgt eine Unendlichkeitsstelle, in der die betrachtete Funktion ihr Zeichen wechselt. Für kleine Werte von y ist der Näherungswert von z_2 gleich $1/y^2 \ln \vartheta$, wie es schon oben gefunden wurde. Im rechten Teil der Fig. 2 ist z_2 aufgetragen, und zwar für $\vartheta = 0,01$.

Nach dem oben gesagten sind nun diejenigen Werte von ξ und y , welche gleichen Ordinaten z_1 und z_2 entsprechen, zusammengehörig; aus Fig. 2 sieht man sogleich, daß zu einem bestimmten ξ unendlich viele y -Werte gehören, die in einzelne Gruppen zerfallen. Die erste Gruppe enthält alle y , welche im Intervall von $y = 0$ bis zur kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$J'(y) N(\vartheta y) - N'(y) J(\vartheta y) = 0 \quad (13)$$

enthalten sind. Konvergiert ξ gegen Null, so wird auch y unendlich klein, bleibt aber dabei sehr groß gegen ξ , denn für kleine y und ξ läßt sich die Gleichung (11) in folgender Form schreiben:

$$\varepsilon \xi^2 \ln \frac{2}{\gamma \xi} = -y^2 \ln \vartheta.$$

Aus den Gleichungen (12) folgen dann für L und l sehr große Werte, deren Verhältnis mit unbegrenzt wachsendem l gegen 1 konvergiert, während die Differenz $l - L$ ins Unendliche steigt. Man darf freilich nicht vergessen, daß für sehr große freie Wellenlängen l die Voraussetzung, daß Drahtmaterial unendlich gut leite, nicht erlaubt sein muß.

Wenn ξ wächst, wird auch y größer, zugleich sinken die Werte von l und L , es ist aber immer $L < l$. Wird ξ unend-

lich groß, so bleibt y endlich und die Werte von l und L werden sehr klein, wobei sich L mehr und mehr dem Grenzwerte $l/\sqrt{\epsilon}$ nähert.

Man sieht also, daß die Drahtwellenlänge L immer zwischen l und $l/\sqrt{\epsilon}$ liegt. Ist die freie Wellenlänge (Erregerwellenlänge) l groß im Verhältnis zum Halbmesser a der Hülle,

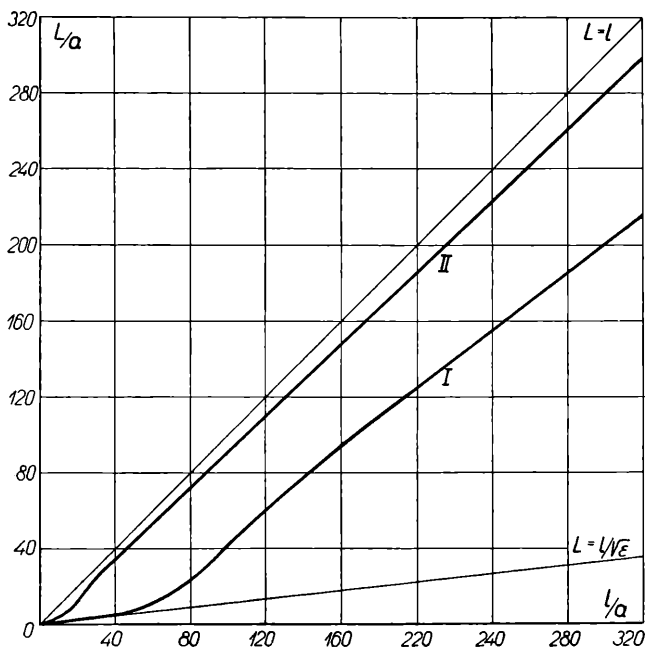


Fig. 3.

so pflanzt sich die Welle längs des Drahtes fast genau mit der dem Außenmedium (Vakuum, Luft) entsprechenden Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit c) fort. Wenn die freie Wellenlänge sinkt, steigt der Einfluß des Schichtmaterials, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen nimmt ab und bei Erregerwellen, die klein im Verhältnis zum Halbmesser der Hülle sind, ist L nur wenig größer als $l/\sqrt{\epsilon}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit strebt dem Werte $c/\sqrt{\epsilon}$ zu. Dies ist die von Harms und Weiss untersuchte Welle; wir werden sie als **Hauptwelle** bezeichnen. In Fig. 3 ist der Zusammenhang zwischen l und L bei dieser Welle graphisch dargestellt, und

zwar für $\varepsilon = 81$ (Dielektrizitätskonstante des Wassers) und für $\vartheta = 0,01$ (Kurve I) und $\vartheta = 0,5$ (Kurve II). Als Abszissen sind dabei die Werte von l/a , als Ordination die von L/a abgesteckt.

Die zweite Gruppe der y -Werte, welche die Gleichung (11) befriedigen, fängt mit der kleinsten positiven Wurzel y_1 der Gleichung

$$J(y)N(\vartheta y) - N(y)J(\vartheta y) = 0 \quad (14)$$

an und endet bei der zweitkleinsten positiven Wurzel der

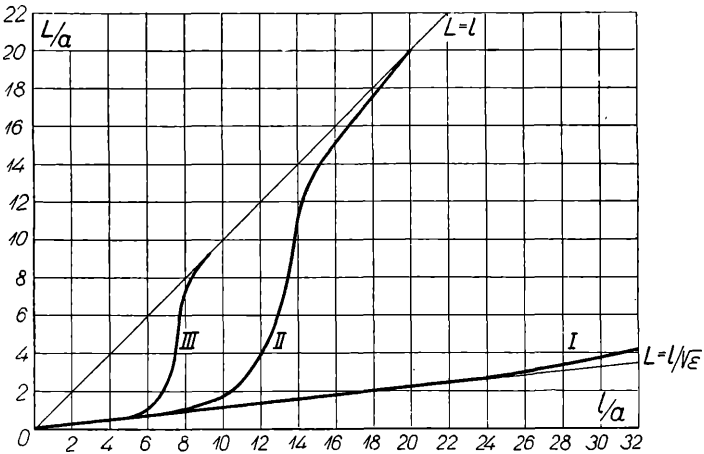


Fig. 4.

Gleichung (13). Für $\xi = 0$ wird jetzt $y = y_1$ und aus den Gleichungen (12) folgt

$$l = L = \frac{2\pi a}{y_1} \sqrt{\varepsilon - 1}. \quad (15)$$

Mit wachsendem ξ wächst auch y und die Werte von l und L sinken; wenn schließlich ξ sehr groß wird, konvergieren l und L gegen Null und L strebt wieder dem Grenzwerte $l/\sqrt{\varepsilon}$ zu. Die Abhängigkeit der Drahtwellenlänge L von der freien Wellenlänge l bei dieser Welle ist aus Fig. 4 ersichtlich (Kurve II), und zwar für $\varepsilon = 81$ und $\vartheta = 0,01$. Man sieht, daß L wieder zwischen beiden Grenzwerten l und $l/\sqrt{\varepsilon}$ variiert, aber die obere Grenze von l ist jetzt endlich. Das bedeutet, daß diese Drahtwellen nicht bei jeder beliebigen Schwingungszahl mög-

lich sind, sondern erst dann, wenn die der Schwingungszahl zugehörige Vakuumwellenlänge l eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Wir wollen diese Drahtwelle als *Nebenwelle erster Ordnung* bezeichnen. Die Grenzwellenlänge pflanzt sich am Drahte mit der Lichtgeschwindigkeit fort und ihre Länge ist durch Gleichung (15) gegeben; sie hängt vom Material der den Draht umgebenden Schicht, vom Halbmesser a der Schicht und vom Verhältnis ϑ zwischen der Draht- und Schichtdicke ab.

Entsprechend weiteren Gruppen von Lösungen der Gleichung (11) sind noch weitere Wellen — Nebenwellen zweiter, dritter usw. Ordnung — am Drahte möglich, sobald die freie Wellenlänge hinreichend verkürzt ist. Alle diese Wellen wiederholen den Verlauf der Nebenwelle erster Ordnung, nur mit immer kürzeren und kürzeren Grenzwellenlängen. In Fig. 4 ist die Nebenwelle zweiter Ordnung (für $\varepsilon = 81$ und $\vartheta = 0,01$) durch Kurve III dargestellt, zum Vergleich ist auch die Hauptwelle (Kurve I) hinzugefügt.

Die Grenzwellenlänge der Nebenwelle k -ter Ordnung ergibt sich aus der ersten Gleichung (12), wenn man darin $\xi = 0$ und $y = y_k$ einsetzt, wobei y_k die k -te positive Wurzel der Gleichung (14) bezeichnet. Es ist

$$l_k = \frac{2\pi a}{y_k} \sqrt{\varepsilon - 1}. \tag{16}$$

Die Methode zur Berechnung von y_k hat A. Kalähne¹⁰⁾ angegeben und für einige Werte von ϑ auch die sechs ersten Wurzeln y_k berechnet. Für $\vartheta = 0,01$ ist $y_1 = 2,80$; $y_2 = 6,01$; $y_3 = 9,21$ usw. Es folgt daraus

$l_1 = 2,24 a \sqrt{\varepsilon - 1}$ $l_2 = 1,05 a \sqrt{\varepsilon - 1}$ $l_3 = 0,68 a \sqrt{\varepsilon - 1}$
 usw. Ist die Hülle mit Wasser gefüllt ($\varepsilon = 81$), so bekommt man

$l_1 = 20,1 a$ $l_2 = 9,35 a$ $l_3 = 6,10 a$
 usw. Für $\vartheta = 0,1$ hat man $y_1 = 3,31$; $y_2 = 6,86$; $y_3 = 10,4$ usw.; für die Grenzwellenlängen der Nebenwellen ergibt sich daraus:
 $l_1 = 1,90 a \sqrt{\varepsilon - 1}$ $l_2 = 0,92 a \sqrt{\varepsilon - 1}$ $l_3 = 0,61 a \sqrt{\varepsilon - 1}$
 usw.; für Wasser

¹⁰⁾ A. Kalähne: Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54, 55, 1907; vgl. auch das zitierte Buch von E. Jahnke u. F. Emde, pag. 274.

$$l_1 = 17,0 a \quad l_2 = 8,19 a \quad l_3 = 5,41 a$$

usw. Endlich für $\vartheta = 0,5$ ist $y_1 = 6,25$; $y_2 = 12,5$; $y_3 = 18,8$ usw.; weiter

$$l_1 = 1,01 a \sqrt{\varepsilon - 1} \quad l_2 = 0,50 a \sqrt{\varepsilon - 1} \quad l_3 = 0,33 a \sqrt{\varepsilon - 1}$$

usw., für Wasser

$$l_1 = 9,00 a \quad l_2 = 4,38 a \quad l_3 = 2,98 a$$

usw.

Als Beispiel nehmen wir einen Draht von 0,6 mm Durchmesser ($b = 0,03$ cm) in einer Wasserhülle von 60 mm Durchmesser ($a = 3$ cm und $\vartheta = 0,01$); die Schwingungsdauer sei eine solche, daß ihr eine Vakuumwellenlänge von 60,3 cm, also gleich der Grenzwellenlänge der Nebenwelle erster Ordnung, entspräche. Dann können längs des Drahtes zwei Arten von Wellen fortschreiten: erstens die Hauptwelle, deren Wellenlänge etwa 2,3 cm beträgt und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur sehr wenig größer ist als die der freien im Wasser sich fortpflanzenden Wellen, zweitens die Nebenwelle erster Ordnung, die mit der Lichtgeschwindigkeit fortschreitet.

Aus den obenangeführten Zahlen ist ersichtlich, daß mit zunehmendem $\vartheta = b/a$ die Grenzwellenlängen der Nebenwellen abnehmen, d. h. die Intervalle, in welchen sich die Nebenwellen beobachten lassen, werden kürzer und kürzer. Für $\vartheta = 1$ verschwindet die Hülle und mit ihr auch die Nebenwellen. Wird ϑ gleich Null, so verschwindet der Draht und nur die isolierende Hülle bleibt übrig. In der Gleichung (11) wird $N(\vartheta y)$ unendlich groß, $J(\vartheta y)$ wird gleich 1 und die Gleichung nimmt folgende Form an:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{H'(x)}{x H(x)} = \frac{J'(y)}{y J(y)}$$

Diese Gleichung wurde von Hondros und Debye⁴⁾ für die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen längs eines isolierenden dielektrischen Zylinders abgeleitet. Es gibt hier keine Hauptwelle; die Grenzwellenlängen der Nebenwellen sind wieder durch die Gleichung (16) gegeben, wobei die y_k Wurzeln der Gleichung

$$J(y) = 0$$

sind. Es ist nun $y_1 = 2,40$; $y_2 = 5,52$; $y_3 = 8,65$ usw. Für die Grenzwellenlängen folgt daraus:

$$l_1 = 2,31 a \sqrt{\varepsilon - 1} \quad l_2 = 1,14 a \sqrt{\varepsilon - 1} \quad l_3 = 0,73 a \sqrt{\varepsilon - 1}$$

usw., für Wasser

$$l_1 = 23,4 a \quad l_2 = 10,2 a \quad l_3 = 6,5 a$$

usw. Diese Grenzen werden im Falle eines metallischen, mit einer isolierenden Hülle umgebenen Drahtes niemals überschritten.

III. Darstellung des Feldes.

Um zur expliziten Darstellung des Feldes in der Hülle und im Außenraum zu gelangen, braucht man nur aus den Gleichungen (5) und (6) die Konstanten A_1 , A_2 und B_2 , beziehungsweise deren Verhältnisse, zu berechnen. Man erhält so bis auf einen allen Feldkomponenten gemeinsamen Faktor für das Feld im Außenraum (Medium 1):

$$E_{1z} = xy \{N(\vartheta y) J(y) - J(\vartheta y) N(y)\} H\left(\frac{x}{a} r\right) e^{-i\omega t + ihz}$$

$$E_{1r} = i h a y \{N(\vartheta y) J(y) - J(\vartheta y) N(y)\} H'\left(\frac{x}{a} r\right) e^{-i\omega t + ihz} \quad (17)$$

$$H_{1\varphi} = i a \frac{\omega}{c} y \{N(\vartheta y) J(y) - J(\vartheta y) N(y)\} H'\left(\frac{x}{a} r\right) e^{-i\omega t + ihz}$$

und für das Feld in der Hülle (Medium 2):

$$E_{2z} = xy H(x) \left\{ N(\vartheta y) J\left(\frac{y}{a} r\right) - J(\vartheta y) N\left(\frac{y}{a} r\right) \right\} e^{-i\omega t + ihz}$$

$$E_{2r} = i a h x H(x) \left\{ N(\vartheta y) J'\left(\frac{y}{a} r\right) - J(\vartheta y) N'\left(\frac{y}{a} r\right) \right\} e^{-i\omega t + ihz} \quad (18)$$

$$H_{2\varphi} = i a \varepsilon \frac{\omega}{c} x H(x) \left\{ N(\vartheta y) J'\left(\frac{y}{a} r\right) - J(\vartheta y) N'\left(\frac{y}{a} r\right) \right\} e^{-i\omega t + ihz}$$

Die magnetischen Kraftlinien umgeben den Draht in konzentrischen Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf die Drahtachse stehen; die elektrischen Kraftlinien liegen in einzelnen Meridianebenen und ihr Verlauf ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{E_r}{E_z}.$$

Im Außenraum hat man also

$$\frac{dr}{dz} = \frac{E_{1r}}{E_{1z}}$$

oder, wenn man für E_{1r} und E_{1z} reelle Teile der betreffenden

den Ausdrücke in den Gleichungen (17) einführt und $t = 0$ setzt,

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{ah}{x} \frac{H' \left(\frac{x}{a} r \right)}{H \left(\frac{x}{a} r \right)} \operatorname{tg} hz.$$

Daraus folgt

$$\frac{H \left(\frac{x}{a} r \right)}{H' \left(\frac{x}{a} r \right)} dr + \frac{ah}{x} \operatorname{tg} hz dz = 0. \quad (19)$$

Es ist aber

$$H \left(\frac{x}{a} r \right) = -H'' \left(\frac{x}{a} r \right) - \frac{a}{xr} H' \left(\frac{x}{a} r \right);$$

wenn man das in die Gleichung (19) einsetzt, bekommt man

$$-\frac{H'' \left(\frac{x}{a} r \right)}{H' \left(\frac{x}{a} r \right)} dr - \frac{a}{x} \frac{dr}{r} + \frac{ah}{x} \operatorname{tg} hz dz = 0,$$

was sich leicht integrieren läßt. Man findet so für die Gleichung der elektrischen Kraftlinien im Außenraum:

$$r H' \left(\frac{x}{a} r \right) \cos hz = \text{const.}$$

oder

$$u H'(iu) \cos hz = c_1, \quad (20)$$

wenn man

$$u = \frac{x}{i} \frac{r}{a}$$

setzt. In gleicher Weise folgt, daß die Kraftliniengleichung in der Hülle folgende Form annimmt:

$$v \{ N(\vartheta y) J'(v) - J(\vartheta y) N'(v) \} \cos hz = c_2, \quad (21)$$

wobei

$$v = y \frac{r}{a}$$

ist.

Das Feld der Hauptwelle ist schon von Harms¹¹⁾ unter-

¹¹⁾ F. Harms, l. c. pag. 56.

sucht worden; wir wollen uns daher im folgenden nur auf das der Nebenwelle erster Ordnung beschränken. Dann erhält man Kraftlinienbilder, wie sie in Fig. 5 und 6 für $\vartheta = 0,01$, $\varepsilon = 5$ und zwei verschiedene Werte der freien Wellenlänge wiedergegeben sind. Fig. 5 bezieht sich auf den Fall,

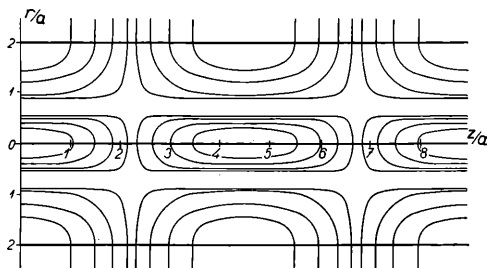


Fig. 5.

daß die freie Wellenlänge gleich der Grenzwelle der Nebenwelle der ersten Ordnung ist. Dabei ist $x = 0$, $y = y_1$, woraus folgt $u = 0$, $v = y_1 r/a$. Wenn u gegen Null konvergiert, strebt das Produkt uH' (iu) der festen Grenze 2π zu und die Kraft-

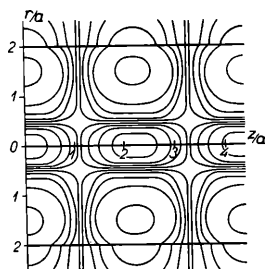


Fig. 6.

liniengleichung (20) lautet dann einfach $z = \text{const}$. Im Außenraum stehen also die Kraftlinien senkrecht zur Oberfläche der Hülle und behalten diese Richtung überall bei. Der Innenraum ist durch die Kraftlinien in zwei Zonen geteilt; in der am Drahte liegenden Zone beginnen und endigen alle Kraftlinien an der Drahtoberfläche, und zwar senkrecht zu ihr; in die andere Zone treten die Kraftlinien aus dem Außenraum, um wieder herauszutreten. An der gemeinsamen Grenze

beider Zonen verlaufen die Kraftlinien parallel mit der Drahtachse.

Verkürzt man die Wellenlänge (Fig. 6), so rückt die erste Zone immer mehr zur Drahtachse hin und die aus dem Außenraum eintretenden Kraftlinien dringen tiefer in die Hülle ein. Einige Kraftlinien schließen sich innerhalb der Hülle. Fig. 6 entspricht den Zahlenwerten $y = 3,80$ und $x = 1,74 i$; es ist dann $l = 3,01 a$, $L = 2,31 a$. Beide diesen Kraftlinienbilder zeigen eine große Ähnlichkeit mit denen, die einem dielektrischen Zylinder entsprechen.¹²⁾

Summary.

Electromagnetic waves along a conducting wire covered with a dielectric shell.

By F. Závíška.

(Presented January 10, 1934.)

The problem of propagation of electromagnetic waves along an infinitely long straight metallic wire covered with a dielectric shell forming a coaxial cylinder has been firstly treated by F. Harms (Ann. der Physik, 23, 44. 1907). Supposing that the electromagnetic field was symmetrical around the axis of the wire, Harms deduced a transcendental equation giving both the wave length along the wire and the coefficient of damping. To simplify it, Harms assumed further that the metal was a perfect conductor and the dielectric a perfect insulator. Then the damping does not take place and the mentioned equation reduces to

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{H'(x)}{xH(x)} = \frac{J'(y)N(\vartheta y) - N'(y)J(\vartheta y)}{y\{J(y)N(\vartheta y) - N(y)J(\vartheta y)\}}.$$

Here J , N and H denote the Bessel functions of the first, second (Neumann f.) and third (Hankel f.) kind and of order zero (cf. E. Jahnke-F. Emde: Tables of Functions, 2nd ed.,

¹²⁾ Vgl. O. Schriever, Ann. d. Phys. 63, 655, 1920.

pp. 192 ff.); the accents indicate differentiation with respect to the argument of the function, thus e. g. $J'(y) = dJ(y)/dy$. Further $\vartheta = b/a$, where a and b denote the outer and inner radii of the dielectric shell respectively (b is simultaneously the radius of the wire) and finally

$$x = 2\pi a \sqrt{\frac{1}{l^2} - \frac{1}{L^2}} \qquad y = 2\pi a \sqrt{\frac{\varepsilon}{l^2} - \frac{1}{L^2}}$$

ε being the dielectric constant of the material of the shell, L the wave length along the wire and l the wave length in vacuum (free wave length) corresponding to the same frequency as L . Using this equation, Harms investigated mainly the relation between the wave length along the wire and the thickness of the shell.

The author shows that besides the wave considered by Harms (the main wave) other waves (secondary waves) can propagate along the wire provided that the corresponding free wave length does not exceed certain limits. These waves have properties similar to those propagated along a dielectric cylinder (D. Hondros and P. Debye, *Ann. der Physik*, 32, 456. 1910). There are secondary waves of different orders; the secondary wave of order k appears if the corresponding free wave length l is not greater than

$$l_k = \frac{2\pi a}{y_k} \sqrt{\varepsilon - 1},$$

where y_k denotes the k^{th} positive root of the equation

$$J(y)N(\vartheta y) - N(y)J(\vartheta y) = 0.$$

When ϑ increases the values of y_k increase too and the intervals $0 \leq l \leq l_k$ in which the secondary waves can be observed get shorter. The velocity of each secondary wave varies with the applied frequency between the velocity of light c (for $l = l_k$) and $c/\sqrt{\varepsilon}$ (for very small values of l). There is no doubt that the existence of these waves could be tested experimentally.

IV

Flechten aus Čechoslovakei.

(*Lichens de la Tchécoslovaquie.*)

Von M. SERVÍT und ZD. ČERNOHORSKÝ.

(Vorgelegt am 10. Jänner 1934.)

IV. Malá Fatra, Velká Fatra und Choč-Gruppe in Slowakei nebst Nachträgen.

Das ganze Material, mit Ausnahme derjenigen Standorte, bei welchen ein anderer Sammler ausdrücklich erwähnt ist, hat RNDr. Zden. Černohorský im Jahre 1931 gesammelt.

Ascolichenes.

Pyrenocarpeae.

Verrucariaceae.

Verrucaria applanata Hepp, Zschacke in Rbh. Krypt. Flora IX, I/1, p. 215, Nádvořík in Sborník klubu přírod., Brno, XV., 1932. — Vihorlat: Orichovce nächst Užhorod, auf Andesit (J. Nádvořík).

Die Flechte stimmt vorzüglich mit Arn. 421 (St. Herbar. München) überein, auch diesbezüglich, daß das Perithezium nur sehr leicht bräunlich gefärbt ist.

V. calciseda DC., Zschacke l. c. p. 81. — Choč-Gr.: bei Val. Dubová auf Dolomit.

V. cataleptoides Nyl., Zschacke l. c. p. 310. — Choč-Gr.: Unterhalb Šíp bei Královany, Kalkstein.

V. coerulea (Ram.) Schaer., Zschacke l. c. p. 142. — M. Fatra: Kalkstein des Suchý vrch.

V. confluens Mass., Zschacke l. c. p. 159. — Vihorlat: Podhorodí nächst Sobrance 380 m, Kalkstein (J. Nádvořík).

V nigrescens Pers., Zschacke l. c. p. 299. — Č h o ě - G r.: Dolomitfelsen am Gipfel des Berges Šíp, Kalksteinblöcke nächst Val. Dubová, Hromovo.

V parmigera Stnr., Zschacke l. c. p. 104. — Č h o ě - G r.: Kalksteinblöcke nächst Val. Dubová, Dolomitfelsen des Berges Šíp bei Královany 1000 m. — V. F a t r a: gegen S. gerichtete Kalkfelsenwand unter dem Tlstá-Gipfel. — M. F a t r a: auf Kalkstein bei Strečno. — P r a h a: Kalkstein bei Radotín (J. P o d p ě r a).

V velana Mass., Zschacke l. c. p. 309. — P r a h a: Kalkfelsen im Prokopital 250 m (M. S e r v í t).

Thelidium absconditum (Hepp) Rbh., Zschacke l. c. p. 330. — V. F a t r a: gegen S. exponierte Kalksteinwände des Berggipfels Tlstá. — Č h o ě - G r.: Kalksteinblöcke bei Val. Dubová.

Th. pyrenophorum (Ach.) Mudd (*I. genuinum* Zschacke l. c. p. 375). — Karpatorus.: Pietrošul, auf kalkh. Sandstein (J. N á d v o r n í k).

Polyblastia cupularis Mass., Zschacke l. c. p. 474. — M. F a t r a: Rosutec 1100 m, an einer senkrechten, gegen S. gerichteten Dolomitfelswand.

P. bavarica (D. T.) Zschacke l. c. p. 438. — M. F a t r a: Kalkstein des Suchý vrch.

Gut entsprechend Arn. 87a, b (St. Herb. München).

P. pallescens Anzi, Zschacke l. c. p. 473. M. F a t r a: Hromovo 1600 m, auf tonartigem Kalkstein.

Mit Arn. 1068 (St. Herb. München) auch durch das schön rissig-gefelderte Lager übereinstimmend.

Staurothele clopima f. *spadicea* (Wllr.) Zhlb. — Č h o ě - G r.: Dolomit am Abhange des Berges Šíp.

St. Hazslinszkyi (Krb.) Stein. — V i h o r l a t: Černá hora bei Sevluš 250 m, auf Andesit (J. N á d v o r n í k).

Der matocarpaceae.

Dermatocarpon aquaticum var. *decipiens* f. *subconca* (Vain). — Č h o ě - G r.: Dolomit auf dem V. Choč.

D. miniatum (L.) Mann. — Č h o ě - G r.: Kalksteinblock und Dolomit unter dem Berge Šíp und bei Val. Dubová.

var. *complicatum* (Sw.) Th., Fr. — M. F a t r a: Kalkfelsen auf dem Gipfel des Berges Suchý vrch.

D. lachneum (Ach.) Sm. — *D. rufescens* Th. Fr., Zhlb. Catal. L. U. I., p. 233. — Č h o ě - G r.: auf Dolomitboden des Berges Šíp.

P y r e n u l a c e a e.

Microthelia marmorata (Krmp.) Hepp. — Č h o ě - G r.: Dolomitfelsen unter dem Šíp-Gipfel.

Porina carpinea (Pers.) Zhlb. — M. F a t r a: Buchen am Weg zwischen Šutovo und Chlieb 800 m.

Pyrenula nitida (Weig.) Ach. — M. F a t r a: Buchen am Weg zwischen Šutovo und Chlieb 800 m.

f. *virens* Servít & Nádvořík in Sborník přírod. klubu, Brno, XV., 1932. — M. F a t r a: Buchen auf der Magura bei Vrútky.

Diese Form braucht keine Standortsmodifikation zu sein. Auf der Buchenrinde von Sninský kámen, von wo sie beschrieben wurde, wuchs sie nur durch den dunklen Protothallus von normal gefärbten Pflanzen getrennt.

G y m n o c a r p a e.

C o n i o c a r p i n e a e.

C a l i c i a c e a e.

Chaenotheca trichialis (Ach.) Hellb. — M. F a t r a: Fichtenholz auf der Magura bei Vrútky.

Calicium sphaerocephalum var. *epiphloeum* (Ach.) Zhlb. — M. F a t r a: auf Fichtenholz auf der Magura bei Vrútky.

C. hyperellum Ach. — M. F a t r a: gemeinsam mit den vorangehenden Arten.

C. lenticulare (Hoff.) Fr. — M. F a t r a: ebenso.

C y p h e l i a c e a e.

Cyphelium Notarisii (Tul.) Blomb. — J. Nádvořík in Sborn. přírod. klubu, Brno, XV., 1932. — U ž h o r o d: auf Holz der Brücke über den Fluß Latorica bei Čop (J. Nádvořík).

Die Flechte stimmt habituell gut mit Rhb. 835 (Herb. Servít) und in der Sporenform mit der Abbildung bei G u n. Nilsson (Botan. Notiser 1930, p. 109) überein.

Sphaerophoraceae.

Sphaerophorus globosus (Huds.) Wain. — M. Fatra: Picea excelsa auf der Fatra Magura.

Graphidineae.

Graphidaceae.

Opegrapha diaphora Ach. — M. Fatra: Buchen auf der Magura bei Vrútky.

O. herpetica Ach. — M. Fatra: Buchen am Weg Šutovo—Chlieb.

Graphis scripta var. *flexuosa* Mass. — M. Fatra: Buchen im Wald unterhalb des Kriváň 800 m.

Cyclocarpineae.

Diploschistaceae.

Diploschistes albissimus (Ach.) DT. — Choč-Gr.: an der Straße Lykava—Val. Dubová nächst Ružomberok, Kalkstein im Waldschatten.

D. bryophilus (Ehrh.) Zhlb. — M. Fatra: auf dem Gipfel des Suchý vrch. — Choč-Gr.: auf dem Berge Šíp, moosbewuchernd auf Kalkfelsen.

D. scruposus f. *flavicans* (Moris.) Zhlb. — M. Fatra: auf Granit am Wege Šutovo-Hütte unter dem Chlieb.

Gyalectaceae.

Jonaspis melanocarpa (Krmpl.) Arn. — Magnusson in Medd. fr. Göteb. Botan. Träd. VIII., p. 39. — *J. cyrtaspis* Zhlb. Catal. L. Un. II., p. 687. — M. Fatra: Kalkfelsen auf dem Bergrücken Suchý-Kriváň Fatr.

var. **crustosa** Magnusson l. c. p. 41. — Mit der Hauptform.

Gut übereinstimmend mit der Beschreibung, mit dem Unterschied, daß die Areolen bis 1 mm breit, 0.2—3 mm dick

sind und daß die Apothezien nur etwas helleren Eigenrand besitzen. Die Scheibe ist anfangs leicht konkav, später flach, mit dem Eigenrand gleichhoch. Das Hymenium ist in oberem Drittel schön blau, durch J wird es leicht blau, dann gelblich, das Hypothezium ist farblos, undurchsichtig. Die Schläuche sind walzig, 85μ lg., 14μ br., mit dicker Scheitelwand, mit einreihig geordneten Sporen. Die Paraphysen sind in der Hymenialgelatine schlecht sichtbar, etwa 2μ dick. Sporen $14-18 \mu$ lg., $8-11 \mu$ br.

J. epulotica var. **crustosa** Magnusson l. c. p. 15. — Exs.: Magnusson, Lich. s. sc. 168. — M. F a t r a: Kalkfelsen am Bergrücken Suchý-Kriváň Patr.

Auch hier erreichen die Areolen bis 1 mm Breite, bei einer Dicke von $0.2-0.25$ mm. Die Gonidien sind bis 25μ groß. Die Apothezien sind in die Areolen eingesenkt, mit blaßrosa gefärbter, anfangs konkaver, später flacher, das Niveau der Lageroberfläche erreichender Scheibe. Durch J wird das Exzipulum gebläut, das Hymenium leicht blau, dann gelb gefärbt. Die Parafysen sind etwa 2μ dick, verklebt. Schläuche keulig, oben mit Dicker Membran, 60μ lg., 16μ br., mit einreihig geordneten Sporen. Dieselben sind ellipsoidisch, breit spindelförmig bis kugelig, $9-14 \mu$ lg., $7-10 \mu$ br.

Gyalecta jenensis (Batsch.) Zhlb. — M. F a t r a: an vertikalen Kalkfelswänden des Suchý vrch. — C h o ě-G r.: Dolomit an der Straße Lykava—Val. Dubová, auf Dolomit im Waldschatten des Berges Vel. Choč 300 m.

G. hypoleuca (Ach.) Zhlb. — C h o ě-G r.: Gegen N. exponierte Dolomitwände auf dem Berge Šíp bei Královany.

G. leucaspis (Mass.) Zhlb. — C h o ě-G r.: Vertikale Dolomitwand auf dem V. Choč.

Die Sporendimensionen entsprechen der Angabe bei K u š a n in Acta Botan. Inst. Bot. Univ. Zagreb. III., 1928, p. 11.

G. peziza (Mont.) Anzi-J. Nádvorník in Věstník přírod. klubu, Brno, XV., 1932. — M a r m a r o š - G e b i e t: Erdboden auf dem Pietroš 1800 m (J. Nádvorník).

Apothezien innen farblos. Das Exzipulum außen aus radialen, stark gelatinisierten, verschmolzenen Hyphen. Dieselben sind etwa 5μ dick, mit 2μ breitem Innenraum. Diese

äußere Schicht ist an der Unterseite der Apothezien ca 120 μ dick. Auf derselben ruht 50 μ dicke Schicht aus horizontal laufenden Hyphen mit ähnlich gelatinisierten und verschmolzenen Zellwänden, 2—3 μ dick. Ihr Innenraum ist nur 0·8 μ breit. Dann folgt das etwa 20 μ hohe Hypothezium aus dünneren, kaum gelatinisierten, dicht verflochtenen Hyphen, die nur 1·5 μ dick sind, mit 0·5 μ breitem Innenraum. Das Hymenium ist in der Apotheziummitte 115 μ hoch, mit zahlreichen, nur oben gegliederten Paraphysen, die mit fast kugeliger Zelle enden. Sporen in schmalen Schläuchen einreihig, oder teilweise auch zweireihig gestellt, von spidelförmiger Gestalt, mit abgerundeten Enden, 16—18 μ lg., 4—6 μ br.

In der äußeren Schicht des Exzipulums sind häufig Trentopohlia-Fäden oder auch einzelne Zellen dieser Alge sichtbar, wohl von Außen eingedrungen.

Die Flechte entspricht gut habituell sowie anatomisch Arn. 709 (St. Herb. München), nur sind dort die Sporen etwas länger, 15—22 μ lg., 5—6 μ br., manchmal auch ein wenig spitzig ausgezogen.

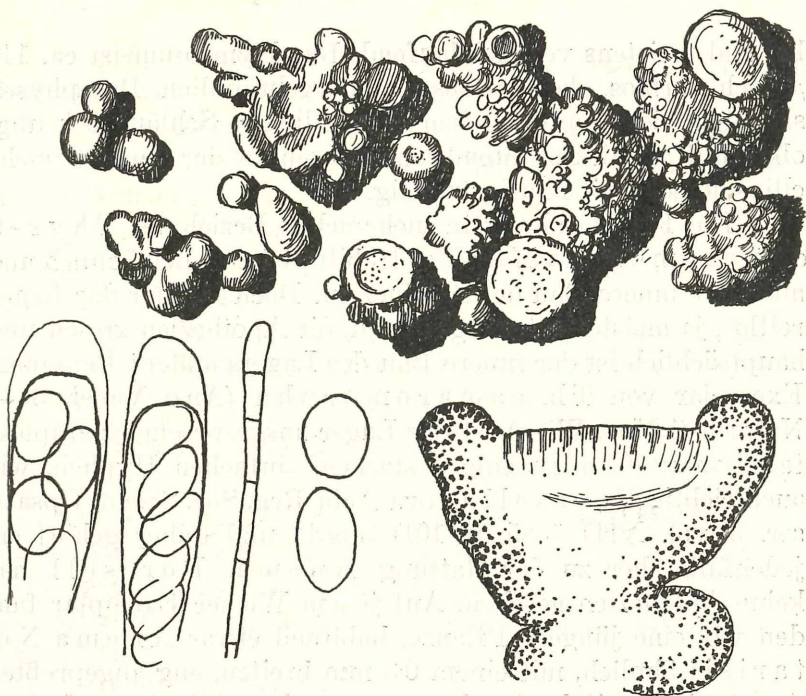
Pyrenopsidaceae.

Anema decipiens var. *diffusum* (Nyl.) Forss. — M. F a t r a: Malý Rozsutec, auf Dolomit.

Thyrea Černohorskýi Servít n. sp. — Thallus niger, nitidulus, ex initiis globosis monophyllinus, demum p. p. crustosus. Thalli monophylli 2—3 mm lati, irregulariter subcrenulati vel lobulati, subtus late umbilicati. Pars superior thalli excrecentiis globosis, 0·1—0·15 mm latis dense vestita. Apothecia nigra, 1—1·5 mm lata, sedentia vel fere breve stipitata, primum urceolata, margine thallino crasso nitidulo cincta, demum plana vel levissime convexa, margine subexcluso. Hypothecium lutescens, pars superior hymenii aequae colorata vel aurantiaco-fuscescens, paraphysibus validis, articulatis, rare furcatis, ascis clavatis, sporis octonis uni — vel diserialiter dispositis, ellipsoideis usque globosis, 12—15 μ longis, 12—14 μ latis. Hymenium J coerulescens.

P r a h a: Auf Diabas bei Sv. Jan p. skálou.

Diese neue Spezies ist durch Wachstumsart des Lagers und durch die relativ sehr großen, sitzenden, bis fast gestiel-



Thyrea Černohorskýi.

Habitusbild, Schläuche mit Sporen und einem Stützfaden, vertikaler Schnitt durch ein Apothezium.

ten, lecanorinischen Apothezien gekennzeichnet. Ihre innere Lagerstruktur entspricht der Gattung *Thyrea* mit horizontal laufenden, in etwa $8\ \mu$ lange, $0.8\text{--}1.5\ \mu$ breite Zellumina geteilten Hyphen im Lagermark und mit verschiedenartig gerichteten Hyphen in der Gonidienschicht. Einzelne Hyphenzellen erreichen hier $8\ \mu$ Länge und $6\ \mu$ Breite. Das Mark nimmt etwa ein Drittel des Lagers ein. Einzelne Gonidien messen ca. $10\ \mu$. Eine gesonderte Lagerrinde ist nicht ausgebildet.

Die Apothezien sitzen auf alten Pflanzen zwischen den kugeligen Auswüchsen der Lageroberfläche. Auf jüngeren Pflanzen sind sie fast gestielt infolge starker Zusammenziehung der Basis. Der Lagerrand der Apothezien hat dieselbe innere Struktur wie die Gonidienzone des Lagers. Das Eigenhäuse ist wenig deutlich, das Hypothezium etwa $80\ \mu$ hoch, gelblich bis gelblich bräunlich, aus dicht verflochtenen Hyphen. Darunter sind die Markhyphen dichter; sie sind farb-

los und meistens vertikal laufend. Das Hymenium ist ca. 140 μ hoch, farblos, oben farblos bis orangebräunlich. Paraphysen sind 4 μ dick, septiert, oben etwas dicker. Schläuche keulig, oben mit verdickter Membran. Sporen in der Jugend mehr ellipsoidisch, reif häufig kugelig.

Die Flechte ähnelt in mehrfacher Beziehung *Thyreacamaromorpha* Mass. Der Habitus ist ziemlich ähnlich und auch der innere Bau der Apothezien. Doch ist hier das Lager reiflos, ja meistens etwas glänzend, die Apothezien größer und hauptsächlich ist der innere Bau des Lagers anders. Bei einem Exemplar von *Th. camaromorpha* (Anzi Venet. 3 — Naturhist. Mus. Wien) ist das Lager ausgesprochen paraplectenchymatisch, mit wenigen starken, einfachen Hyphen, wie auch richtig *Forssell* (Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsala, ser. 3, vol. XIII 1885, p. 101) angibt und daher gehört sie jedenfalls eher zu der Gattung *Anema*. *Forssell* hat keine Apothezien gesehen. Auf jenem Wiener Exemplar fanden wir eine jüngere Pflanze, habituell etwas *Anema Notarisii* ähnlich, mit einem 0·3 mm breiten, eng angepreßten Apothezium mit braunschwarzer, flacher Scheibe und dünnem, nicht überragendem Lagerrand. Das Eigengehäuse ist dünn, 10—15 μ breit, etwas gelblich, aus longitudinalen, wenig deutlichen Hyphen bestehend. Das Hypothezium ist 80 μ hoch, gelblich, aus dichtem Hyphengeflecht, das Hymenium farblos, 150 μ hoch, nur oben stellenweise gelbbraun. Die Schläuche sind deutlich kürzer als das Hymenium, keulig mit oben wenig verdickter Wand. Paraphysen im Wasser wenig deutlich, nach KOH und HNO₃ deutlich gegliedert, mit einzelnen Abschnitten 8—10 μ lang, ca. 3 μ breit, oben kürzer gegliedert, mit etwa eiförmigem, 7 μ langem, 5·5 μ breitem Endglied. Sporen in Schläuchen ein- oder zweireihig, jung eher ellipsoidisch, reif manchmal kugelig, 10—13 μ lang, 6—11 μ breit. J färbt das Hymenium blau.

Peccania coralloides Mass. — Choč-Gr.: Vertikale Dolomitfelswand unter dem Šíp-Gipfel.

Collemaeae.

Collema multipartitum Sm. — M. Fatra: Hromovo, auf Tonkalkstein.

C. polycarpum Hoff. — Ch o ě - G r.: Anhöhe Šíp und Umgebung von Val. Dubová, auf Dolomit.

C. undulatum Laur. — V. F a t r a: Tlstá, auf Kalkstein.

C. furvum (Ach.) DC. — Ch o ě - G r.: Dolomitblock am Šíp-Abhänge. — M. F a t r a: Tonkalkstein auf dem Hromovo 1600 m. — P r a h a: Diabas bei Karlík.

Leptogium lichenoides (L.) Zhlb. — M. F a t r a: Stoh 1350 m, auf Kalkboden.

L. pulvinatum (Hoff.) Crmb. — M. F a t r a: Rozsutec, über Moos auf Dolomitblöcken. — Ch o ě - G r.: Šíp, auf Moos über Dolomit.

L. Schraderi (Bernh.) Nyl. — Ch o ě - G r.: Šíp, auf Dolomit.

Kleine, sterile Pflanzen, wahrscheinlich hieher gehörig. Das Innere des Lagers Collema-artig, die paraplektenchymatische Berindung an beiden Seiten gut ausgebildet, daher ein Eu-Leptogium, nicht Collemodium und keineswegs Homodium.

L. Hildenbrandii (Garov.) Nyl. — V i h o r l a t: Chlumec bei Sevluš 200 m, Juglans regia (J. N á d v o r n í k).

Pannariaceae.

Parmeliella corallinoides (Hoff.) Zhlb. — M. F a t r a: Bäume am Weg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb.

Pannaria pezizoides (Web.) Trev. — M. F a t r a: Suchý vrch.

Placynthium subradiatum (Nyl.) Arn. — M. F a t r a: Malý Rozsutec, auf Dolomit.

Pl. nigrum (Huds.) Gray. — Ch o ě - G r.: Dolomit am Abhänge sowie auf dem Gipfel des Berges Šíp bei Královany, Kalksteinblöcke bei Val. Dubová. — V. F a t r a: Tlstá-Gipfel, Kalkfelsen.

Stictaceae.

Lobaria linita (Ach.) Rbh., J. N á d v o r n í k in Věstník přírod. klubu, Brno, XV, 1932. — Hoverla 2000 m, auf Erdboden.

Ohne Apothezien. An etwa 5 mm vom Lappenrand genommenen Schnitten sieht man 35—45 μ dicke, farblose, in

oberstem Viertel bräunliche, paraplektenchymatische Oberrinde. Einzelne Zellen mit 2—5 μ großem Innenraum, unregelmäßig rundlich, mit 2—3 μ dicken Zellwänden. Die Gonienschicht ist zusammenhängend, 30—40 μ dick. Einzelne Gonidien erreichen 4—7 μ . Das Mark ist durch farblose Körnchen stellenweise undurchsichtig, die Markhyphen 4 μ dick, mit kaum wahrnehmbaren Septen, meistens horizontallaufend, dichtes Geflecht bildend. Die Unterrinde ist leicht gelblich oder bräunlich, 10—15 μ dick, ähnlich gebaut wie die Oberrinde. Die Rhizinen 6 μ dick, farblos, kaum wahrnehmbar septiert.

Bei einem Exemplar von Fiora in der Schweiz, an in gleicher Weise genommenen Schnitten ist der anatomische Bau ähnlich, nur ist die Oberrinde dicker, bis 55 μ , die Rhizinen dünner, nur 5 μ dick.

Peltigeraceae.

Solorina bispora f. **subspungiosa** Zschacke in Mitteil. d. Naturf. Ges. Davos 1926, p. 26. — M. F a t r a: auf Dolomitenboden des Berges Rozsutec. — C h o ě - G r.: auf dem Šíp-Gipfel.

S. saccata (L.) Ach. — M. F a t r a: Suchý vrch. — V. F a t r a: Tlstá 1100 m. — C h o ě - G r.: Vel. Choč.

Var. *spongiosa* (Sm.) Nyl. — M. F a t r a: Stoh 1350 m, auf Kalkboden.

Peltigera canina (L.) Willd. — M. F a t r a: Hor. Lúka, auf moosigem Boden (det. V. G y e l n i k).

P. microphylla f. *lophyroides* Gyel. — C h o ě - G r.: Šíp, am Grunde eines Buchenstammes (det. V. G y e l n i k).

P. polydactyloides f. *canariensis* Gyel. — C h o ě - G r.: am Wege Val. Dubová—Vel. Choč (det. V. G y e l n i k).

P. virescens var. *Degeni* Gyel. — M. F a t r a: Horní Lúka, auf dem Erdboden (det. V. G y e l n i k).

Lecideaceae.

Lecidea albosuffusa var. *petrosa* (Arn.) Wain. — M. F a t r a: Vertikale Kalkfelswand des Suchý vrch.

L. confluens (Web.) Ach. — M. F a t r a: unter dem Hleb-Gipfel, Quarzit.

L. elaeochroma Ach. — M. F a t r a: Abhang der Fatra Magura, Populus nigra. Am Wege Šutovo-Hütte unter dem Chlieb, an Buchen.

L. glomerulosa (DC.) Steud. — M. F a t r a: an Buchen am Weg Šutovo Hütte unter dem Chlieb.

L. grisella Flk. — P r a h a: bei Řeporyje und Butovice, auf Diabas. — W. B ö h m e n: auf Granitblöcken in Wäldern bei Blatná.

f. *biatorina* Servít — P r a h a: auf Diabas bei Karlík.

f. *subecrustacea* (Falk.) D'T. — M. F a t r a: Horna Lúka, auf krystal. Schiefer.

L. lapicida Ach. — M. F a t r a: unter dem Hleb-Gipfel, auf Quarzit.

L. lithospersa Zhlb. — M. F a t r a: Kalkfelswände des Suchý vrch. — C h o ě - G r.: Gipfelfelsen des Choč, auf Dolomit. Kalksteinblöcke auf dem Šíp-Gipfel. — V. F a t r a: Kalkfelsenwand unter dem Gipfel des Berges Tlstá.

L. parasema Ach. — M. F a t r a: an Buchen am Weg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb, 1220 m.

L. vulgata Zhlb. — C h o ě - G r.: Dolomit am Abhange des Berges Šíp, Kalksteinblöcke an der Straße Lykava—Val. Dubová. Dolomit auf dem Vel. Choč. — M. F a t r a: Rozsutec auf Dolomit.

L. Hillmanni Anders — M. F a t r a: am Wege Šutovo—Chlieb, auf Granit.

Durch die Freundlichkeit des Herrn Direktor J. A n d e r s konnten wir ein Exemplar dieser Art (Kitzberg nächst Sonnberg) untersuchen. Das Exemplar ist zwar nicht Spec. orig., doch nach brieflicher Mitteilung Herrn A n d e r s mit der Urstück vollkommen übereinstimmend.

An Berührungsgrenzen zweier Lager ist schwarzer Prothallus gut sichtbar, dagegen dort, wo das Lager ohne Berührung mit anderen Flechtenlagern auf dem Steine (Basalt) aufhört, ist der Prothallus nur wenig deutlich. Das Lager erreicht bis 0·5 mm Dicke, doch kann es auch dünner sein. Die Areolen, durch Risse meistens nicht in vollem Umfange voneinander getrennt, sind verschiedentlich groß, von 0·25 bis 1·5 mm, so daß das Lager stellenweise aus kleinen Areolen besteht, namentlich dort, wo es dünner ist, stellenweise, und

zwar in dickeren Lagerteilen, aus großen Feldchen gebildet wird. Die Oberfläche der Areolen ist flach, jedoch häufig durch kleine hellere Erhebungen verunebnet.

Die Oberrinde ist 15—25 μ dick, farblos, nur oben stellenweise schwärzlich, durch Körnchen undurchsichtig. Darunter 40—60 μ dicke, meist zusammenhängende Gonidien-schicht. Die Gonidien sind zahlreich, dicht aneinander gelagert, wenig Raum für die Pilzhypphen belassend, klein, 4—8 μ groß. Das Mark ist dicht, weiß durch Körnchen, aus dichtem Geflecht meistens vertikal laufender Hypphen bestehend, unten mit großen Krystalen aus aufgelockertem Substrat.

Auch junge Apothezien sind entweder angedrückt, das Lager mit ihrem Rande um etwa 0.1 mm überhöhend, oder eingesenkt, mit dem Rande und der Scheibe in gleicher Höhe mit der Lageroberfläche. Ältere Apothezien sind fast immer flach eingesenkt, mit wenig deutlichem oder undeutlichem Rand. Bei einigen Apothezien ist die Scheibe in der Randnähe etwas bereift. Das Exzipulum ist oben cca 40 μ dick, am Rande aus trajektorisch laufenden Hypphen gebildet, innerlich farblos oder schmutzig, nach Außen schwarz, blauschwarz oder violettschwarz, oder auch heller, bis fast ungefärbt. Die dunkle Außenseite kann meistens auch unter dem Apothezium verfolgt werden, wo das Exzipulum breiter wird und geht ohne scharfe Grenze in das Hypothezium über. Das Hypothezium ist bei jungen Apothezien cca 100 μ hoch, in alten Früchten höher, aus sehr dichtem Geflecht von 3 μ dicken Hypphen bestehend, mit zahlreichen kleinen Tröpfchen. Gegen das Hymenium verlaufen seine Hypphen mehr vertikal, so daß der Übergang nicht scharf ist. Die Schläuche sind etwa 50 μ lg., 12—15 μ br., mit dicker Scheitelwand. Die Paraphysenenden sind bräunlich, etwas inspers. Die Sporenform ist recht variabel. Es kommen fast spindelförmige, breitere Sporen vor, etwa 12 μ lg. und bis 7 μ br., längliche Sporen 14—15 μ lg., 5—6 μ br., ausnahmsweise auch eine 22 μ lg., 4 μ breite Spore. Meistens sind dieselben gerade, doch kommen auch gekrümmte Sporen vor. Breitere Sporen besitzen meistens eine scheinbare Scheidewand, längere Sporen häufig zwei gegen die Sporenmitte gerückte unechte Septa. Dieselbe verbleiben auch nach Einwirkung von KOH und HNO₃.

Durch J wird das Exzipulum, Hypothezium sowie Hymenium intensiv gebläut.

L. Kochiana Hepp-Exs.: Magnusson, Lich. sel. scand. 43. — M. F a t r a: Hrib am Wege von Fatra Kriváň zum Malý Kriváň, auf Granit.

var. *albescens* Magn. — M. F a t r a: Hleb-Gipfel, Quarzit.

L. tenebrosa Fw. — M. F a t r a: Hleb-Abhang oder der Hütte, Quarzit.

L. lurida (Dil.) Ach. — C h o ě - G r.: Šíp-Abhang, Dolomit. Val. Dubová, Erde auf einem Kalksteinblock.

L. decipiens (Ehr.) Ach. — C h o ě - G r.: Šíp-Gipfel, auf Dolomitboden.

f. *albomarginata* (Müll. Arg.) Zhlb. — C h o ě - G r.: Dolomitboden unter dem Šíp-Gipfel. — M. F a t r a: Rozsutec-Gipfel.

Catillaria lenticularis (Ach.) Th. Fr. — C h o ě - G r.: Dolomitfelsenwand unter dem Šíp-Gipfel. — V. F a t r a: Kalkfelsenwand unter dem Gipfel des Berges Tlstá.

f. *nigricans* (Arn.) Lett. — C h o ě - G r.: Šíp bei Královany, auf Dolomit.

C. athallina (Hepp) Hellb. — C h o ě - G r.: Vel. Choč, Dolomit.

Toninia coeruleonigricans f. *caulescens* Lett. — M. F a t r a: Suchý vrch, Kalkstein. — P r a h a: Radotín und Srbsko nächst Beroun (J. P o d p ě r a).

f. *subcandida* (Vain.) Zhlb. — P r a h a: Prokopital, Kalkstein (J. P o d p ě r a).

T. candida (Web.) Th. Fr.: — C h o ě - G r.: am Abhange und auf dem Gipfel des Berges Šíp, auf Dolomit. Kalksteinblöcke an der Straße Lykava—Val. Dubová.

T. syncomista (Flk.) Th. Fr. — M. F a t r a: Rozsutec, auf Dolomitboden. Am Weg Suchý vrch—Kriváň Fatr., auf Pflanzenresten.

Rhizocarpon Hochstetteri f. *colludens* (Nyl.) Vain. — M. F a t r a: am Weg zw. Šutovo und der Hütte unter dem Chlieb, auf Granit (det. A. S c h a d e).

Rh. oreites (Wain.) Zhlb. — M. F a t r a: Fatra Kriváň und Malý Kriváň, Quarzit. Hleb, Quarzit (det. A. S c h a d e).

Dr. A. Schade bemerkte: die Flechten z. T. mit frischen Schneckenfraße. Vereinzelt mit *Tichothecium pygmaeum*. Graue Lager sind ebenfalls *Rh. oreites*, alt und absterbend. Das Gelb ist verlorengegangen (vgl. Zopf nach Tobler, Biologie der Flechten S. 95). Dieser Zustand ist irrtümlich als *Rh. chionophilum* (var. *decoloratum*) durch Eitner in Zhlb. Lich. rar. 25 ausgegeben worden.

Rh. polycarpum (Hepp) Th. Fr. — M. Fatra: Horná Lúka, auf kryst. Schiefer. Zwischen Fatra Kriváň und Malý Kriváň, auf Quarzit. Ebenso auf dem Hleb (det. A. Schade).

Rh. ambiguum (Naeg.) Zhlb. — M. Fatra: Horní Lúka, Silikatgestein (det. A. Schade).

Rh. calcareum (Weiss) Anzi. — M. Fatra: Hromovo, Kalkstein (det. A. Schade).

Dr. A. Schade: infolge alten Schneckenfrasses und anschließenden Insektenfraße eine Zwischenform zwischen *f. rimosum* und *f. subconcentricum*. Befallen von *Phaeospora rimosicola*.

f. rimosum (Dicks.) Schade. — M. Fatra: Suchý vrch, Kalkstein. — Choč-Gr.: Velký Choč, Dolomit. Šíp bei Královany, Dolomit (det. A. Schade).

Rh. geographicum (L.) DC. — M. Fatra: zw. Fatra Kriváň und M. Kriváň, Quarzit. Hleb, ebenso auf Quarzit (det. A. Schade).

Dr. A. Schade: eine Zwischenform zw. *f. atrovirens* und *f. contiguum*.

f. contiguum (Schaer.) Mass. — M. Fatra: Hleb, Quarzit (det. A. Schade).

f. atrovirens (L.) Mass. — M. Fatra: Hleb, Quarzit (det. A. Schade).

Rh. Montagnei (Flot.) Krb. — Praha: Vraný, Schiefer (det. A. Schade). Máslovice, Silurschiefer (leg. J. Podpěra, det. A. Schade).

Cladoniaceae.

Cladonia chlorophaea (Flk.) Zopf. — Choč-Gr.: am Abhang des Berges Šíp.

f. pachythallina (Wallr.) Wain. — M. Fatra: Hleb-Gipfel.

Cl. furcata var. *pinnata* f. *truncata* Flk. — M. F a t r a: Horná Lúka. Am Weg zw. Šutovo und Hütte unter dem Chlieb.

Cl. gracilis var. *elongata* (Jacq.) Flk. — M. F a t r a: Suchý vrch.

var. *squamosa* (And.) Sands. — M. F a t r a: Hleb-Gipfel.

Cl. pyxidata var. *pocillum* (Ach.) Fw. — V e l. F a t r a: Tlstá. — C h o ě - G r.: in Felsenspalten des Vel. Choč.

Cl. rangiferina f. *tenuior* (Del.) Wain. — M. F a t r a: Hleb-Gipfel.

G y r o p h o r a c e a e.

Umbilicaria cylindrica (L.) Del. — M. F a t r a: Horná Lúka, kryst. Schiefer. Hleb, Quarzit am Westhang.

U. polyphylla (L.) Baumg. — M. F a t r a: Horná Lúka, krystal. Schiefer.

U. deusta (L.) Zhlb. — M. F a t r a: Hleb, Quarzit.

A c a r o s p o r a c e a e.

Acarospora fuscata (Ach.) Arn. — H o r n á L ú k a, krystal. Schiefer (det. A. H. M a g n u s s o n).

A. glaucocarpa (Wnbg.) Krb. — V. F a t r a: Tlstá 1310 m, Kalkstein. — C h o ě - G r.: Vel. Choč, in Dolomitspalten (det. A. H. M a g n u s s o n).

f. *melaniza* Magn. — C h o ě - G r.: Šíp nächst Královany, Dolomit (det. M a g n u s s o n).

f. **ostreata** (Anzi) Jatta. — M. F a t r a: Suchý vrch. — C h o ě - G r.: Vel. Choč, Dolomit (det. M a g n u s s o n).

var. *conspersa* (Fr.) Th. Fr. — M. F a t r a: Suchý vrch, Kalkstein (Annäherungsform — det. M a g n u s s o n).

var. *depauperata* (Krb.) Smith. — C h o ě - G r.: auf einem Kalksteinblocke unter dem Šíp (det. M a g n u s s o n).

A. macrospora (Hepp) Bgl. — C h o ě - G r.: Šíp nächst Královany 1000 m, Dolomit. Vel. Choč, Dolomit (det. M a g n u s s o n).

L e c a n o r a c e a e.

Lecanora calcarea (L.) Smrft. — V. F a t r a: Tlstá 1450 m, Kalkstein. Hromovo 1600 m, Tonkalkstein. — C h o ě - G r.: Vel. Choč 1600 m, Kalkstein.

L. contorta (Hoff.) Stnr. — C h o ě - G r.: Šíp-Abhang,

Dolomit. Dolomitgerölle bei Val. Dubová. — M. F a t r a: Malý Rozsutec, Dolomit.

var. *cinereovirens* (Mass.) Zhlb. — C h o ě - G r.: Šíp-Abhang, Dolomit.

L. coerulea (DC.) Nyl. — V. F a t r a: Kalkfelsenwand unter dem Gipfel des Berges Tlstá. — M. F a t r a: Felsenwände des Suchý vrch.

L. Dominiana Servít — P r a h a: Bei Butovice und Řeporyje, auf Diabas.

Die Pykniden etwas unregelmäßig kugelig, etwa 0.1 mm im Durchmesser, sind ziemlich tief in das Lager eingesenkt, äußerlich durch kleine Erhebungen gekennzeichnet, die auf dem Scheitel weiß bestäubt sind und kleinen Soralen ähneln. Das Perifulkrium ist farblos, 10 μ dick. Das Innere ist in darmartig gewundene Höhlungen geteilt.

Junge Apothezien sind dicht weißlich bestäubt, ebenso der dünne unregelmäßige Lagerrand.

Die Annahme, das diese Art endemisch auf den mittelböhmischen Diabasen wächst, hat sich als unrichtig erwiesen, nachdem von Ö. S z a t a l a (Budapest) ihr Vorkommen in Ungarn und in Maroko festgestellt wurde (Magyar Botan. Lapok XXX., 1931, p. 119 und XXXI., 1932, p. 108).

L. verrucosa Ach. — M. F a t r a: Suchý vrch, über Moose.

L. allophana (Ach.) Röhl. — M. F a t r a: Waldweg zw. Šutovo und Hütte unter dem Chlieb 800 m, Buchen.

L. argopholis f. *viridis* Černohorský in Preslia X., 1933, p. 55. — *L. frustulosa* var. *argopholis* Servít, Flechten aus d. Čechoslov. I., p. 37. — P r a h a: Schiefer bei Libšice (J. P o d p ě r a), Diabas bei Motol und Nová Ves, Silikateinschlüsse im Kalkstein bei Klukovice (M. S e r v í t).

f. *grisea* Černohorský l. c. p. 55. — *L. frustulosa* var. *argopholis* Servít l. c. — P r a h a: Diabas bei Motol (M. S e r v í t).

L. badia (Hoff.) Ach. — M. F a t r a: Horná Lúka, krystal. Schiefer. Hleb, Quarzitgerölle.

L. campestris (Schrad.) Hue. — W. B ö h m e n: Blatná, Granit.

L. carpinea (L.) Wain. — M. F a t r a: Fatr. Magura,

Populus nigra. Am Wege Šutovo—Hütte unter dem Chlieb, Buchen.

L. cenisia Ach. — M. F a t r a: Quarzitgerölle des Hleb. Granit der Magura bei Vrútky. — P r a h a: Diabas bei Butovice.

Die Flechte von Butovice mit Soralen, daher an var. *soredians* Suza (Sborník klubu přírod. Brno, 1928, XI., p. 25) deutend, doch besitzen diese Sorale nicht jene halbkugelige Gestalt, wie sie die Originaldiagnose hervorhebt.

L. chlarona (Ach.) Nyl. — Exs.: Magnusson, Lich. scand. 160. — M. F a t r a: Waldweg zw. Šutovo und die Hütte unter dem Chlieb 800 m, Buchen.

L. dispersa (Pers.) Röhl. — C h o ě - G r.: Šíp-Abhang 1000 m, Dolomit. Vel. Choč, Dolomit. Kalksteinblöcke (Vogelsitzplätze) bei Val. Dubová und an der Straße Lykava—Val. Dubová. — M. F a t r a: Kahmweg Suchý-Kriváň Fatr., Kalkstein.

L. glabrata (Ach.) Malme. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo—Hütte unter dem Chlieb 800 m, Buchen.

L. Hageni Ach. — W. S l o v.: Sliáč, Laubholzrinden (Dr. Fr. Buřil). — M. F a t r a: Abhang der Fatr. Magura, *Populus nigra*.

L. intricata (Schrad.) Ach. — M. F a t r a: Horná Lúka, kryst. Schiefer.

L. intumescens f. *ochrocarpa* Zhlb. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo—Hütte unter dem Chlieb, Buchen.

L. polytropa (Ehrh.) — Rbh. — M. F a t r a: Horná Lúka, krystal. Schiefer.

f. *conglobata* (Krb.) Th. Fr. — M. F a t r a: Horná Lúka, krystal. Schiefer.

f. *illusoria* (Ach.) Leight. — M. F a t r a: Chlieb, Quarzit.

L. rupicola (L.) Zhlb. — M. F a t r a: Magura ober Vrútky, Granit.

var. *neglectula* Zhlb. — M. F a t r a: Horná Lúka, krystal. Schiefer.

Es werden hierer *L. rupicola* Proben gestellt, bei denen das Lager durch CaCl_2O_2 nur im Marke intensiv gefärbt wird, wogegen die Lagerrinde nur punktweise, oder erst nach

mehreren Minuten rötlich wird, daher weniger intensiv reagiert als bei *L. subradiosa*.

L. subfuscata Magn. — M. Fatra: Magura ober Vrútky, Buchen.

L. carbonatica Gyel. — Choč-Gr.: Šíp-Abhang, an einem Dolomitblocke.

L. fragilis var. *subcetrarioides* Zhlb. — Choč-Gr.: Šíp-Gipfel, auf bemoosten Dolomitboden. — M. Fatra: Kahnweg Suchý-Fatr. Kriváň, in Kalkfesspalten.

L. Lamarckii (DC.) Rbh. — V. Fatra: Tlstá 1310 m, Kalkfelsen.

L. muralis var. *diffracta* (Ach.) Rbh. — M. Fatra: Hromovo 1600 m, auf tonhaltigem Kalkstein.

Var. *versicolor* (Pers.) Tuck. — Choč-Gr.: Val. Dubová, Dolomit. Šíp nächst Královany, Dolomit.

L. Reuteri Schaer. — Choč-Gr.: Dolomitfelsen 100 m unter dem Gipfel des Berges Šíp.

Ochrolechia androgyna (Hoff.) Arn. — M. Fatra: Waldweg Šutovo-Hütte unter Chlieb 800 m, Buchen.

Candelariella aurella (Hoff.) Zhlb. — V. Fatra: Tlstá, Kalkfelsen. — Choč-Gr.: Šíp-Abhang, Dolomit. Val. Dubová, Kalksteinblöcke. Vel. Choč, Dolomit. Kalkstein an der Straße Lyková—Val. Dubová. — M. Fatra: Gipfel des Suchý vrch, Kalkstein.

Parmeliaceae.

Parmeliopsis ambigua (Wulf.) Nyl. — M. Fatra: Waldweg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb 800 m, Buchen. — Choč-Gr.: Vel. Choč nächst Ružomberk 1400 m, *Picea excelsa*.

Parmelia aspidota (Ach.) Röhl. — Sliáč, Laubbäume (Fr. Buřil).

P. Bitteriana Zhlb. — Choč-Gr.: Fatr. Magura, *Picea excelsa*.

P. caperata f. *sorediosa* Müll. Arg. — Choč-Gr.: Šíp, *Picea excelsa*.

P. cetrarioides Del. emend. DR. — M. Fatra: Horná Lúka, Buchen.

P. exasperatula Nyl. — M. F a t r a: Fatr. Magura, Abhang gegen Vrútky, Quercus.

P. furfuracea (L.) Ach. — C h o ě - G r.: Vel. Choč, Picea excelsa.

Var. ceratea Ach — M. F a t r a: Suchý vrch, Picea excelsa. Waldweg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb 800 m, Buchen. — C h o ě - G r.: Šíp, Picea excelsa. — Sliáč, Picea excelsa (F r. B u ř i l).

Var. olivetorina (Zopf.) Zhlb. — C h o ě - G r.: Vel. Choč nächst Ružomberk 1400 m, Picea excelsa.

P. laetevirens (Fw.) Rosend. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb 800 m, Buchen. — C h o ě - G r.: Šíp-Abhang, Picea excelsa.

Die Flechten von ersterem Standort von *Abrothalius Parmeliarum* befallen.

P. pertusa (Schr.) Schaer. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb 800 m.

P. physodes (L.) Ach. — C h o ě - G r.: Šíp, Picea excelsa.

Var. labrosa Ach. — C h o ě - G r.: Vel. Choč nächst Ružomberk 1400 m, Picea excelsa.

P. quercina f. *pruinosa* Harm. — M. F a t r a: Fatra Magura-Abhang bei Vrútky.

P. sorediosa (Ach.) Röhl. — M. F a t r a: Horná Lúka, kryst. Schiefer.

P. subaurifera Nyl. — M. F a t r a: Abhang der Fatr. Magura, Quercus. — Sliáč, Laubbäume (F r. B u ř i l).

P. sulcata Tayl. — Sliáč, Laubbäume (F r. B u ř i l). — M. F a t r a: Waldweg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb 800 m, Abhang der Fatr. Magura bei Vrútky.

f. *farinosa* Mer. — M. F a t r a: Abhang der Fatr. Magura bei Vrútky.

P. tubulosa (Schaer.) Bitter — Sliáč, Laubbäume (F r. B u ř i l).

Cetraria cuculata (Bell.) Ach. — M. F a t r a: Malý Kriváň.

C. glauca (L.) Ach. — M. F a t r a: Fatr. Magura, Picea excelsa. Suchý vrch, Picea excelsa.

f. coralloidea (Wallr.) Krb. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo—Mal. Kriváň 1000 m.

C. islandica (L.) Ach. — M. F a t r a: Malý Kriváň. Gipfel des Suchý vrch.

f. platyna Ach. — M. F a t r a: Hleb-Gipfel.

C. pinastri (Scop.) Röhl. — C h o ě - G r.: Vel. Choč 1400 m, *Picea excelsa*.

U s n e a c e a e.

Evernia prunastri (L.) Ach. — Sliáč, Laubbäume (F r. B u ř i l). — M. F a t r a: Patr. Magura nächst Vrútky.

Alectoria cana (Ach.) Leight. — C h o ě - G r.: Vel. Choč, *Picea excelsa*.

A. chalybeiformis (L.) Röhl. — M. F a t r a: Suchý vrch, *Picea excelsa*.

A. implexa var. *capillaris* (Ach.) Stzb. — M. F a t r a: Patr. Magura, *Picea excelsa*.

Ramalina farinosa (L.) Ach. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo-Hütte unter dem Chlieb 800 m, *Fagus sylvatica*.

C a l o p l a c e a e.

Protoblastenia immersa (Web.) Stnr. — M. F a t r a: Suchý vrch-Gipfel, Kalkstein. — V F a t r a: Tlstá-Gipfel 1310 m, Kalkstein.

Pr. incrustans (DC.) Stnr., Zhlb. Catal. Lich. Un. VII, p. 7 excl. synonym. p. p. — V. F a t r a: Tlstá-Gipfel, Kalkstein. -- C h o ě - G r.: Vel. Choč, Kalkfelsen.

Pr. monticola (Ach.) Stnr. — M. F a t r a: Granitblöcke am Bach unter Patr. Magura. — C h o ě - G r.: Straße Lykava—Val. Dubová, Kalkstein. — V. F a t r a: Tlstá 1310 m, Kalkfelsenwand.

P. rupestris (Scop.) Stnr. — M. F a t r a: Strečno, Kalkstein. Gipfel des Berges Suchý vrch, Kalkfelsenwand. — C h o ě - G r.: Steinblöcke an der Straße Lykava—Val. Dubová, ebenso bei Val. Dubová. Vel. Choč, Dolomitfelsen.

var. *rufescens* (Müll.) Zhlb. — M. F a t r a: Dolomitblock unter dem Šíp.

Blastenia Agardhiana f. **albopruinosa** comb. n. — C a l o p l a c a A g a r d h i a n a f. **albopruinosa** (Arn.)

Zhlab. Catal. L. Un. VII, p. 61. — Choč-Gr.: Vel. Choč, Kalkstein.

f. **albomarginata** comb. n. — *C. Agardhiana* f. *albomarginata* (Str.) Zhlab. Catal. L. Un. VII, p. 62. — Choč-Gr.: Vel. Choč, Kalkstein.

Bl. Arnoldiana nom. n. — *Callopisma aurantiacum* var. *nubigenum* Arn. in Verh. d. zool. botan. Gesell. Wien XXI, 1871, p. 1124, Tirol 1875, XIV, p. 478, Flora LXVII, 1884, p. 253, Die Lichenen des frank. Jura 1885, p. 87. — Exs. Arn. 990, Zw. 648 (St. Herb. München, Herb. Suza). — T a t r y B i e l s k é: Kalkfelsen des Gipfels Hlúpy vrch 2000—2050, sowie auf dem Berge Jatky 2000 m (J. S u z a).

Nach Arnold (Tirol XIV, p. 478, Flora 1884, p. 253) kann sein Exsiccata 990 mit Krepelhubers *Callopisma ochraceum* var. *nubigenum* nicht vereinigt werden, und nach dem Auflösen der Sammelart *Callopisma aurantiacum* in *Caloplaca aurantiaca*, *C. flavovirescens*, *C. placidia* etc. ergibt sich die Notwendigkeit, auch dieser Flechte den spezifischen Rank zuzusprechen, weil sie zu keiner von diesen Arten paßt und überdies, infolge des Mangels der Gonidien im Apotheziumgehäuse zur Gattung *Blastenia* gehört, in welcher Beziehung sie übrigens mit *C. ochraceum* var. *nubigenum* Krmp. = *Bl. nubigena* übereinstimmt.

Der epilithische Teil des Lagers bildet keine zusammenhängende gelbe Schicht über dem Steine, was allerdings auch bei *Bl. nubigena* nicht immer der Fall sein muß, sondern nur kleine, in Substratgrübchen eingesenkte oder etwas heraustretende, lebhaft gelbrote bis zinnoberrote, etwa 0.1 mm große Körnchen. Dieselbe bestehen aus Gonidienknäueln, welche von Hyphen dicht umspinnen sind. Einzelne Gonidien messen bis 10 μ . Diese Lagergebilden kommen auch vollkommen in Kalkstein eingesenkt vor. Dann sind die Hyphen rein, wogegen bei den die Steinoberfläche erreichenden Lagerkörnchen dieselbe durch gelbe in KOH rot zerfließende Körnchen interspers sind. Die Markhyphen sind etwas dicker, mehr verzweigt und zahlreicher als bei *Bl. nubigena*.

Die Apothezien sind größer, 0·4 m, zum Schluß halb hervortretend, rot, etwas konkav, flach oder leicht gewölbt, mit ausdauerndem, glattem, die Scheibe nicht überragendem Rand. Das Gehäuse ist besser ausgebildet als bei *Bl. nubigena*, dicker an Apotheziumseiten, außen durch gelbe Körnchen inspers, in der Nachbarschaft des Hypotheziums paraplektenchymatisch, mit dickwandigen Zellen, ohne Gonidien. Das Hypothezium ist cca 40 μ hoch, farblos, aus sehr dichtem Geflecht von 4 μ dicken Hyphen, ohne Körnchen oder Tröpfchen. Unter dem Hypothezium keine oder spärliche Gonidien. Hymenium 70—80 μ hoch, oben mit einem Epithezium aus goldgelben Körnchen. Paraphysen sind unten 2 μ dick, ziemlich deutlich gegliedert, die Endzellen 6 μ breit. Schläuche 55—60 μ lg., 14—15 μ br., fast walzenförmig. Sporen länglich ellipsoidisch, 13—14 μ lg., 5·5—7 μ br., die Scheidewand nimmt ein Viertel bis ein Sechstel der Sporenlänge ein, meistens mit deutlichem Kanal. Durch J wird das Hymenium sowie Hypothezium blau, der verdickte obere Teil der Schlauchmembran intensiver blau. Pykniden meistens an der Lagerperipherie als gelbrote Körnchen, Pyknokonidien stäbchenförmig, 4—6 μ lg., 0·8 μ br.

f. **endocalcina** f. n. — Thallus omnino endocalcinus, entus haud conspicuus. Gemeinsam mit der Hauptform in Arn. 990 und Zw. 648 (St. Herb. München). — T a t r y B i e l s k é: Kalkfelsen des Gipfels von Hlúpy vrch 2000—2050 m (J. S u z a). —

Gelbrote Thalluskörnchen kommen bei dieser Form nicht vor, daher ist der Kalkstein zwischen den Apothezien weiß. Die Apothezien sind meistens größer, bis 0·75 mm im Durchmesser.

Bl. asserigena (Lahm) Zhlb. — V i h o r l a t: Vojvodina unter der Makovica 250 m, Alnus (J. N á d v o r n í k).

Kleine Probe, nur 8 Apothezien in Gesellschaft mit *Caloplaca caesiorufa* f. *corticola*.

B. exsecuta f. *ochracea* Servít & Nádvořník-Javorník in Karpatorußland 500—600 m, Sandstein (J. N á d v o r n í k).

Die Lageroberrinde ist dünn, cca 10 μ dick, leicht schmutzig violett, aus Hyphenzellen gebildet, die bis 8 μ lg., bis 6

μ br. sind. Über der Rinde liegt meistens bis 10 μ dicke hyaline Epinekralschicht. Die Gonidienzone ist mächtig, 120 μ und noch tiefer reichend, unten sind die Gonidien schütterer, oben meistens dicht aneinanderliegend. Die Gonidien sind kugelig oder auch länglich dort, wo sie dichter aneinanderliegen, dann durchschnittlich 10 μ groß, wo sie schütterer verteilt sind kommen einzelne vor, die bis 20 μ im Durchmesser erreichen. Die Hypphen in der Gonidienzone und im Marke bilden ein sehr dichtes Netzwerk, oder vielleicht auch ein Paraplektenchym, doch unter der Gonidienzone können einzelne 3 μ dicke, wenig verzweigte Pilzfäden verfolgt werden.

Unter dem Hypothezium sind meistens Gonidien vorhanden, was mit der Ausbildung des Lagers im Zusammenhange stehen scheint. Ist das Lager dünn oder fast fehlend, dann sind die Apothezien sitzend, mit schmaler Anheftungsfläche, das Kolorit des Exzipulums und Hypotheziums ist lebhafter, die Gonidien unter dem Hypothezium fehlen. Wenn das Lager gut entwickelt ist, sind die Apothezien halb eingesenkt und innen blasser gefärbt, das Hypothezium fast farblos, unter dem Hypothezium dann mehr oder weniger zahlreiche Gonidien.

Solche Formen verbinden *Bl. exsecuta* mit *Cal. conversa*, oder vielleicht richtiger auch *Blastenia conversa*, weil von untersuchten Exsiccaten dieser Art nur bei Anzi 317 die Gonidien in Apotheziumrand höher steigen, so daß lecanorische Frucht entsteht.

Sonst in typischen Exemplaren weicht *Bl. exsecuta* weit von *C. conversa* ab. Bei ersterer Art ist das Lager fast fehlend oder körnig-warzig, die Apothezien sitzend mit fleckig bräunlichem Hypothezium. Bei *C. conversa* ist das Lager regelmäßig rissig gefeldert, die Apothezien in das Lager eingesenkt, meistens mit deutlicherem Lagerrand, farblosem Hypothezium, unter welchem die Gonidienzone liegt.

Bl. leucoraea (Ach.) Th. Fr. — Choč-Gr.: Šíp-Gipfel, auf Dolomithoden. Vel. Choč bei Ružomberk. — M. F a t r a: auf den Gipfel des Suchý vrch auf abgestorbenen Pflanzen.

Bl. nubigena Müll. Arg. in Mém. Soc. Phys. Genève, XVI, 1862, p. 402. — *Caloplaca nubigena* (Krmpl.)

DT., Zhlb. Catal. Lich. Un. VII, p. 160. — Vel. Fatra: Tlstá, auf Kalkfelsen.

Der epilithische Lagerteil ist 20—40 μ dick, oben nicht geebnet, aus dichtem Geflecht von 5—6 μ dicken, durch goldgelbe Körnchen dicht bekleideten Hyphen bestehend. In den Kalkstein dringen die Hyphen bis 300 μ tief, in oberem Teile des Markes bilden sie ein ziemlich dichtes Netzwerk, unten sind sie spärlich und nur 3—4 μ dick. Die Gonidien sind bei unserem Exemplar größer als bei K r e m p e h u b e r s c h e n Urstücken und Arn. 584 b (St. Herb. München), durchschnittlich cca 14 μ groß, einzelne jedoch bei kugeligter Gestalt bis 20 μ , wenn länglich bis 23 μ lg., und 18 μ br. Die Gonidien sind in kleine Gruppen vereint, die von der Oberrinde bis 150 μ tief zerstreut sind. Diese tiefer liegenden Gruppen sind weniger kugelig und häufig hängen 2 bis 3 Gruppen zusammen.

Die vollausgereiften Apothezien sind oben 0.3 mm, unten etwa 0.15 mm breit, 0.2 mm hoch, daher vertikal verhältnismäßig gut ausgebildet. Von der vertikalen Dimension entfällt das meiste auf das Hypothezium, unter welchem die Gonidien auch vollständig fehlen können, welches ähnlich wie das Hymenium durch J blau gefärbt wird. Im Exzipulum ist die radiale Hyphenstruktur wenig deutlich, es scheint eher ein dichtes Geflecht von 5 μ dicken Hyphen zu sein, ziemlich ähnlich dem Hypothezium. Paraphysen 3 μ dick, deutlich kurz gegliedert, oben mäßig verdickt. Sporen anfangs länglich, die Scheidewand etwa ein Drittel der Sporenlänge einnehmend, mit ebenen Flächen. Später sind die Sporen gegen die Enden verchmälert, daher etwas spindelförmig, mit dünnerer Scheidewand, welche bei alten Sporen gyalolechiaartig dünn sein kann. Ein Kanal in der Scheidewand ist meistens vorhanden.

Die goldgelben Körnchen in epilithischen Lagerteile und in äußerster Schicht des Exzipulums sowie in Epithezium zerfließen in KOH karminrot.

Der oberste Teil jüngerer Schläuche wird durch J intensiver blau gefärbt.

f. **dealbata** f. n. — Thallus p. m. p. endocalcinus, color ochraceo aurantiacus thalli solo in granulis minutis, calce

immersis perspicuus. — T a t r y B i e l s k é: Kalkfelsen des Berggipfels Hlúpý vrch 2000 m (J. S u z a).

Caloplaca caesiorufa (Ach.) Flag. — P r a h a: bei Karlík, Diabas.

C. chalybaea (Fr.) Müll. Arg. — C h o ě - G r.: Val. Dubová, Dolomit. — V. F a t r a: Tlštá 1400 m, Kalksteinblöcke.

C. conversa (Krmp.) Jatta — V i h o r l a t: Onokovec, am Weg zw. Užhorod und Petrovci und auf dem Berge Černá hora 200 m, auf Andesit (J. N á d v o r n í k). — C h o ě - G r.: am Abhang des Berges Šíp, Dolomit.

Die meisten Apothezien der Flechte von Petrovci sind gelblich, mit fast gleichfarbigem Rand, nur einige wenige Früchte schwarz. Bei Pflanzen von übrigen Standorten ist es umgekehrt, man findet nur sehr wenige Apotheziumscheiden mit gelblichem Farbenton, ebenso wie es bei mehreren Exsiccaten aus dem Bayer. Staatsherbarium der Fall ist. Die als Charaktermerkmal angegebene Zweifärbigkeit der Früchte ist eben nur bei dem Urstück, respektive Proben von Locus class. gut ausgeprägt. Dagegen Arn. 187, Anzi 317 und eine Flechte aus dem Banat (leg. L o j k a) besitzen fast durchwegs nur schwarzfärbige Apothezien.

Der Lagerbau ist ähnlich demselben von *Blastenia executata*, nur ist die Oberrinde meistens dicker, aus 5—7 μ großen dünnwandigen Hyphenzellen gebildet, durch Körnchen und Klumpen von Mineralstoff undurchsichtig. Die Gonidienzone ist meistens ununterbrochen. Das Mark ähnlich wie die Rinde undurchsichtig.

Habituell ähneln diese Flechten ziemlich gut *C. fulva* var. *cinerata*, doch es besteht ein auffallender Unterschied schon in der Sporengröße.

C. coronata (Krmp.) Stnr. — C h o ě - G r.: Dolomitfelsen unter dem Šíp-Gipfel.

C. Ferrari (Bgl.) Jatta — N. O. B ö h m e n: Zebín nächst Jičín 390 m, Basalt (J. P o d z i m e k). — V i h o r l a t: Orichovec bei Užhorod 195 m, Sandstein (J. N á d v o r n í k). —

In jüngeren Apothezien sind die Gonidien des Lagerandes zahlreich und kleiner, in älteren Früchten dagegen spärlich und groß, bis 24 μ im Durchmesser erreichend. Eben-

solches Bild ist bei *C. Ferrari* var. *pura* Stnr (Sp. or. — in Naturh. Mus. Wien) zu sehen. Vielleicht wäre hier ein stichhaltiger Unterschied gegenüber *C. intumescens* (siehe Steiner in Annal. d. Naturh. Mus. Wien XXXIV, 1921, p. 61) zu suchen. Bei *C. intumescens* nach dem Urstück oder Cotypus (Naturh. Mus. Wien) sind die Gonidien auch in älteren Früchten kleiner. Ferner ist bei *C. intumescens* die Oberrinde des Lagers dicker, 25—40 μ , in äußerem Drittel durch gelbe Körnchen inspers, stellenweise mit hyaliner Epinekralschicht bedeckt, aus vertikalen Hyphen bestehend, deren dünnwandige Zellen länglich, 4—6 μ lg., 3—4 μ br., oder auch fast kugelig, namentlich oben, und in diesem Falle bis 9 μ groß sind.

Unsere *C. Ferrari* besitzt bis 23 μ lange, bis 10 μ breite Sporen, in reifem Zustande von jener charakteristischen Form, wie sie Arnold (Flora LXIV, 1881, p. 312, Tab. VI, Fig. 2—4) gezeichnet hat. In jungen Apothezien findet man jedoch auch junge, kurz ellipsoidische, bis ca 15 μ lange, 9—10 μ breite Sporen mit dickem Septum.

Das Hypothezium ist durch Tröpfchen inspers.

var. **diabasicola** var. n. — Margo apotheciorum vitellinus, saepe crenulatus. Discus dilute vel obscure vitellinus. Hymenium hypotheciumque absque guttulis oleosis, h. e. purum. — Praha: auf Diabas bei Lodenice 250 m.

Durch Mangel der Körnchen oder Tröpfchen im Hypothezium kommt die neue Varietät var. *pura* Stnr. nahe. Bei dieser mesopotamischen Pflanze (Naturh. Mus. Wien) sind die Apothezien etwas größer, mit meistens glattem, orangegelbem Rand und dunkel orangegeleber Scheibe.

C. flavovirescens (Wulf.) DT. — Choč-Gr.: auf einem Dolomitblock des Šíp-Abhanges.

Die Flechte entspricht gut Arn. 385 (*C. flavovirescens* f. *rubescens* — St. Herb. München).

C. fulva var. **cinerata** Lettau in Hedwigia LII., 1912, p. 238. — *C. conversa* f. *cinerata* Zhlb. Catal. L. Un. VII., p. 111. — O. Böhmen: Váp. Podol, Kalkstein (J. Kuťák). — Praha: Zlíchov 250 m, Kalkstein (M. Servít).

Kleine, gegen S. offene Felsenwand bei Zlíchov, mit *Staurothele Ambrosiana* und *Catillaria subgrisea* (siehe Sandort 27 im Beitrag I.).

Wahrscheinlich hierher gehörige Flechte, anatomisch gut Rbh. 922 (= var. *isabelina* Stnr.) entsprechend, habituell durch die von Lettau l. c. hervorgehobene Unterschiede und außerdem das mehr weniger durch Tröpfchen insperse Hypothezium abweichend. Die Sporenform entspricht Rbh. 922, ebenso ihre Größe 13—18 μ lg., 7—8 μ br., daher sind sie kleiner als bei Lettau und in den meisten Literaturangaben, jedoch übereinstimmend mit Steiners Feststellung (Annal. d. Naturh. Mus. Wien XXXIV., 1921, p. 53).

C. lactea (Mass.) Zhlb. — Choč-Gr.: Gipfel des Vel. Choč, Vogelsitzplätze auf Dolomitenfelsen.

f. *saxicola* Zhlb. Catal. Lich. Un. VII., p. 152. — *Gyalolechia lactea* f. *saxicola* Rbh. apud Arn. in Flora LXVII., 1884, p. 257. — Exs.: Rbh. Lich. eur. 694 (St. Herb. München). — M. Fatra: Malý Rozsutec, Dolomitenfelsen.

In der Größe und Form der Apothezien mit Rbh. 694 übereinstimmend, ebenso mit Steiners Angabe über die Sporen (Annal. d. Naturh. Mus. Wien, XX., 1905, p. 374), abweichend durch weniger intensive Färbung der Früchte und durch gut entwickeltes epilithisches, weißliches, rissig-gefeldertes Lager. Bei Rbh. 694 ist das Lager auf dem nach Säuren nicht brausenden Sandstein unregelmäßig in Form zerstreuter Körnchen oder kleiner Schollen von weißlicher, oder aber auch gelblicher bis gelber, durch KOH rot werdender Farbe ausgebildet.

In Zahlb. Catal. Lich. Un. V., p. 800 wird Rbh. 694 bei *Candelariella luteoalba* f. *saxicola* (Hepp) Zhlb. (= *Caloplaca*) zitiert.

C. lamprocheila (DC.) Flag. — Praha: Diabas bei Chuchle (J. Podpěra).

C. pyracea (Ach.) Th. Fr. — Choč-Gr.: Šíp, auf einem Kalksteinblock im Waldschatten.

C. Schistidii (Anzi) Zhlb. — Choč-Gr.: Vel. Choč, auf Moos.

C. stillicidiorum (Whlb.) Lynge. — *C. cerina* var. *stillicidiorum* Zhlb. Catal. Lich. Un. VII., p. 95. — M. F a t r a: Rozsutec, auf abgestorbenem Moos.

Gemeinsam mit *Toninia syncomista* und Spuren von *Lecanora verrucosa*.

f. **chloroleuca** comb. n. — *C. cerina* var. *stillicidiorum* f. *chloroleuca* (Sm.) Hellb., Zhlb. Catal. L. Un. VII., p. 97. — M. F a t r a: Rozsutec, Moos auf Dolomitifelsen. Moos auf Kalkfelsen bei Val. Dubová. Abgestorbene Moose auf dem Vel. Choč.

C. variabilis (Pers.) Müll. — Ch o ě - G r.: Vel. Choč, Vogelsitzplätze auf Kalksteinblöcken. — M. F a t r a: Gipfel des Suchý vrch, Kalkfelsenwand. — V. F a t r a: Tlstá 1400 m, Kalksteinblöcke.

f. *fusca* (Mass.) Jatta. — Ch o ě - G r.: Val. Dubová, Dolomitblöcke. Kalksteinblöcke zw. Lykava und Val. Dubová. Šíp-Abhang, Kalkstein. — N. F a t r a: Suchý vrch, Kalkstein.

C. pruinosa (Krb.) Zhlb. — M. F a t r a: Gipfel des Malý Rozsutec 1300 m, Dolomitifelsen.

Die Flechte entspricht habituell genau den steinbewohnenden Formen von *C. fulgens* und *C. fulgida*, Sporenform dagegen dieselbe wie bei *C. aurea*. Die Sporen sind häufig einzellig, an den Enden charakteristisch ausgezogen, 20—25 μ lg., 6—8 μ br., das Hypothezium durch sehr kleine Tröpfchen dicht inspers.

Die Flechte stimmt mit denjenigen, als *C. pruinosa* von M. S e r v í t aus Montenegro publizierten, und jetzt auch im ostserbischen Material Dr. F r. Z i m m e r m a n n s festgestellten Pflanzen überein, und trotzdem der schwer zugängliche Urstück nicht gesehen wurde, glauben wir diese auffallende Flechte hierher stellen zu dürfen.

C. aurantia (Pers.) Hellb. — M. F a t r a: M. Rozsutec, auf Dolomit. — Ch o ě - G r.: Šíp-Gipfel nächst Královany 1100 m, Kalkstein.

var. *dalmatica* Zhlb. — M. F a t r a: Malý Rozsutec, Dolomit. Suchý vrch, Kalkstein. — Ch o ě - G r.: Šíp 1000 m, Dolomit.

C. cirrochroa (Ach.) Th. Fr. — M. F a t r a: Suchý vrch, Kalkstein.

C. elegans (Link.) Th. Fr. — Ch o ě - G r.: Val. Dubová, Dolomit. Velký Choč.

f. *tenuis* (Whlb.) — Th. Fr. — M. F a t r a: Malý Rozsutec, Dolomit. — V. F a t r a: Tlště-Gipfel 1310 m, Kalkstein.

C. granulosa (Müll.) Jatta. — Ch o ě - G r.: Šíp nächst Královany 1000 m, Dolomit.

Im Vergleich zu Krypt. Vind. 1056 (Naturh. Mus. Wien) sind die Lagerlappen weniger gut ausgebildet.

C. murorum var. *pulvinata* (Mass.) Jatta. — Ch o ě - G r.: Šíp nächst Královany 1000 m, Dolomit.

C. obliterans (Nyl.) Zhlb. — P r a h a: Sv. Jan pod skálou 340 m, Kalkstein.

Die Flechte ist auf Grund eines instruktiven von Herrn Dr. A. H. M a g n u s s o n freundlichst überlassenen Exemplars bestimmt worden.

Theloschistaceae.

Xanthoria parietina (L.) Beltr. — Ch o ě - G r.: Šíp 900 m, Dolomit.

f. *chlorina* (Chev.) Oliv. — M. F a t r a: zw. Šutovo und der Hütte unter dem Chlieb, Laubhölzer.

var. *ectanea* (Ach.) Kicks. — W. S l o v.: Sliač, Laubholzrinde (Dr. F r. B u ř i l).

Buelliaaceae.

Buellia disciformis f. *microcarpa* (Ach.) Mig. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo—Hütte unter dem Chlieb 800 m, *Fagus sylvatica*.

B. leptocline f. *subecrustacea* (Wain.) Stnr. — M. F a t r a: Granit am Wege Šutovo-Hütte unter dem Chlieb.

B. alboatra var. *ambigua* (Ach.) Th. Fr. — *B. epipolia* var. *ambigua* Mong., Zhlb. Cat. Lich. Un. VII., p. 445. — N. W. B ö h m e n: Basalt bei Chomutov (O. K l e m e n t).

Die Oberrinde 10—40 μ dick, farblos, ohne Körnchen, mit wenig sichtbaren Hyphen, oben manchmal etwas dunkel. Darüber bis 40 μ dicke Epinekralschicht. Dieselbe farblos, nicht inspers. Die Gonidienschicht ist unterbrochen, ziemlich dick, mit meistens 10—12 μ , einzeln bis 20 μ großen Gonidien.

Das Mark aus 5—6 μ dicken, dicht aneinander laufenden, häufig verzweigten Hyphen, dazwischen mit mineralischen Partikeln.

var. **pulchra** comb. n. — *B. venusta* f. *pulchra* Senft apud Kuřák in Preslia V., 1927, p. 50. — »A typo differt thallo squamuloso, griseo-rubente, madefacto viridi; apothecia primum plana margine thallode tenui, dein convexa, margine thallode evanescente; sporae fuscae, paraphysae apice clavatae, fuscescentes; thallus K-, Cl-, KCl-.«

Durch Freundlichkeit des Herrn Direktor J. Kuřák haben wir einen Cotypus vom Phyllit des Pekelské údolí bei N. Město n. M. untersuchen können. Schon wegen des in der Originaldiagnose erwähnten Mangels der KOH-Färbung des Lagers, dann wegen der Sporen, die 1 oder 2 longitudinale Teilungswände aufweisen, kann diese Flechte nicht zu *B. epipolia* var. *venusta* gehören. Wir glauben sie richtiger als Varietät von *B. alboatra* unterbringen zu dürfen.

Das Lager besteht aus schuppenförmigen Warzen, die bis 0·8 mm breit und bis 0·3 mm dick sein können. Diese Warzen entstehen einzeln auf dem wenig deutlichen Protothallus. Sie sind anfangs fast halbkugelig und erst später fügen sie sich aneinander in rissig gefelderte Kruste. Die Farbe ist weiß bis grau, selten etwas rötlich, die Oberfläche matt, nach Benetzen mit Wasser gründlich. Junge Apothezien durch weißen Staub und Körnchen auf dem Rande sind den Früchten von *Lecanora coarctata* ähnlich, später sitzend und auch mit ihrem Rande schwarz.

Die Lageroberrinde ist bis 70 μ dick, in unterer Hälfte hyalin, oben durch farblose Körnchen und bis 8 μ große Krystalle undurchsichtig oder leicht violett. Nach Einwirken von HNO_3 verschwinden die Körnchen und Krystale, die Rinde erscheint als eine homogene Masse. In ihrem unteren Teile sind 3—5 μ lange, 0·6 μ dicke Innenräume der Hyphenzellen, in allen Richtungen laufend, sichtbar. Die Gonidienzone ist bis 70 μ dick, meistens ununterbrochen, mit kugeligen, meistens etwa 10 μ , einzeln bis 15 μ großen Gonidien. Das Mark besteht aus 4 μ dicken, stark verzweigten Hyphen, unter welchen wieder farblose Krystale liegen. Das Exzipulum ist innen bräunlich, in äußerer Schicht schwarzbraun, aus dünn-

wandigen, rundlichen, 5—7 μ großen Zellen. Das Hypothezium ist braun, aus eng verschmolzenen 5 μ dicken Hyphen, 90 bis 110 μ hoch. Hymenium farblos, ohne Tröpfchen, durch J satt blau, die Paraphysenenden 5 μ groß. Sporen anfangs vierzellig, reif mit Längswänden bis achtzellig, 18—23 μ lg., 8 bis 9 μ br.

Die Pflanze in Kuták, Lich. Bohem. 395 vom Basalt bei Pardubice gehört auch hierher, obwohl die Sporen spärlicher geteilt sind. Bei dieser Flechte ist eine Pyknidie an den Schnitten beobachtet worden. Dieselbe ist in das Lager völlig eingesenkt, etwas ellipsoidisch, 100 μ hoch, 85 μ breit, mit unten 10—15 μ dicker, farbloser Wand aus dicht verwebten dünnen Hyphen. Oben bei der Mündung ist die Wand 20—25 μ dick und braunschwarz. Pyknokonidien sind jedoch nicht gefunden worden.

B. betulina (Hepp) Th. Fr. — M. F a t r a: Waldweg Šutovo—Hütte unter dem Chlieb 800 m, *Fagus sylvatica*.

B. epipolia var. *venusta* (Krb.) Mong. — C h o ě - G r.: Val. Dubová, Dolomit.

Die KOH-Färbung des Lagermarkes wenig deutlich. Nachdem der Habitus ziemlich gut var. *venusta* entspricht, wiewohl die Pflanze kleiner ist, stellen wir diese Flechte doch hierher und nicht zu *f. calcaria* Stnr. in Annal. Mycol. VIII., 1910, p. 247 und Annal. d. Naturh. Mus. Wien XXXIV., 1921, p. 66. Im Catal. Lich. Un. IV., p. 349 wird diese Form wohl irrtümlich als Synonymum von *Rhizocarpon calcareum* angeführt.

B. subdispersa Mig. — Exs. Kuták Lich. Bohem. 46 (Herb. Servít). — O. B ö h m e n: Kalkstein bei Váp. Podol (J. K u ř á k). — C h o ě - G r.: Vel. Choč, Kalkfelsen. Val. Dubová, Kalksteinblock. Šíp-Gipfel, Kalkfelsen. — M. F a t r a: Suchý vrch, Kalkstein. Hromovo 1600 m, Kalkfelsen.

Die Jodfärbung des Lagermarkes ist auffallend, für Lagermark ungewöhnlich intensiv. So schwarzblau werden gewöhnlich bei den Flechten nur Hymeniumteile gefärbt, wie hier die Lagermarkhyphen, und zwar in unterstem Teile des Lagers. Daher ist hier die Jodfärbung ausgeprägter als S t e i n e r (Verh. zool. botan. Gesell. Wien, LXIX., 1919, p. 62) für den Urstück angibt.

Die Oberrinde und der größte Teil des Markes ist durch Körnchen und bis $16\ \mu$ große farblose Mineralstoffkörner undurchsichtig, im Marke weiß, in der Rinde leicht violett. In unterstem Teile des Markes sind die Körner spärlicher und schon vor Säureeinwirkung die $4\ \mu$ dicken, in alle Richtungen laufenden Hyphen sichtbar. Dieselben werden eben mit J intensiv gefärbt. Obere Teile des Markes werden durch J weniger deutlich gebläut, mit Ausnahme der Schicht unter den Apothezien. Das Hymenium wird durch J ebenfalls intensiv blau, dagegen Exzipulum, teilweise Hypothezium, Lagerrinde und Gonidienschicht bleiben ungefärbt.

Nach Einwirkung von HNO_3 zerfließen die Körnchen. Die Oberrinde, $30\text{--}40\ \mu$ dick, besteht aus dünnwandigen, $4\ \mu$ dicken, vertikal laufenden, kurzgegliederten Hyphen. Die Gonidienschicht ist stellenweise unterbrochen, $60\text{--}110\ \mu$ hoch, mit meistens $10\ \mu$, einzeln bis $17\ \mu$ großen Gonidien, die dicht von $4\ \mu$ dicken Hyphen umspinnen sind. In oberem Teile des Markes sind die Hyphen dicht, größtenteils vertikal gelegen.

Das Exzipulum ist schmal, aus tangentiallaufenden Hyphen bestehend. Dieselben sind farblos, mit Ausnahme von einigen letzten Zellen oben im Rand, welche gebräunt sind. Das Hypothezium ist $70\ \mu$ hoch, in unterer Hälfte bräunlich, oben farblos, aus sehr dicht verwebten, $4\ \mu$ dicken Hyphen bestehend. Der obere Teil wird durch J gebläut. Sporen vierzellig, $17\text{--}19\ \mu$ lg., $7\text{--}9\ \mu$ br.

Diese Flechten entsprechen habituell und anatomisch vorzüglich den Exemplaren von *Diplotomma albo atrum* var. *dispersum* vom Wallberge bei Tegernsee (leg. K r e m p e l h u b e r — St. Herb. München), sowie einer ebenso bestimmten Flechte von Oberer Seealpe in Algäu (leg. Dr. R e h m — St. Herb. München). Hieher gehört ferner eine Flechte aus dem Nachlaß von M ü l l e r A r g. im Exemplar von *Diplotomma albo atrum* var. *epipolium* von Sembranchen (Valais) in der Schweiz (Herb. Servít).

Rinodina Bischoffii f. **guttulata** Servít & Nádvořík, f. n. — Pars inferior hymenii guttulis oleosis dense farcta. — V i h o r l a t: Sokol bei Humenné 400 m, Kalkstein (J. N á d v o r n í k). — C h o ě - G r.: Šíp-Gipfel bei Královany 1000 m, Dolomit. Val. Dubová, Dolomit. — V. F a t r a: Tlstá

1310 m, Kalkstein. — P r a h a: nördlich von Srbsko bei Be-
roun 250 m, Kalkstein (M. S e r v í t).

Das Lager ist meistens kümmerlich ausgebildet, daher
ähnlich wie bei *f. subathallina* Harm.

R. immersa Krb. — *R. Bischoffii* var. *immersa*
Zhlb. Catal. Lich. Un. VII., p. 490. — V. F a t r a: Tlštá
1400 m, Kalkstein.

R. orbata (Ach.) Wain. — Č h o ě - G r.: Velký Choč,
Moos.

R. pyrina (Ach.) Arn. — Exs. Magnusson, Lich. sel.
scand. 84. — M. F a t r a: Südhang der Fatr. Magura, *Populus*
nigra.

R. oreina f. **dispersoareolata** Servít & Nádvořník, n. f. —
Areolae thallinae discretae, vel. etiam p. p. approximatae et
crusta areolata saepe interrupta formantes, raro lobiformes.
— V i h o r l a t: Sevluš 180—200 m, Andesit (J. N á d v o ř -
n í k).

Die Oberrinde ist 25—45 μ dick, bestehend aus 5—7 μ
dicken, vertikal laufenden, kaum verzweigten, ellipsoidisch-
bis kugeligzelligen Hyphen. Die obersten Zellen sind farblos
oder bräunlich, rein oder gelblich inspers. Darüber liegt ca
10 μ dicke farblose Epinekralschicht. Das Mark besteht aus
ähnlichen, vertikal und dicht aneinander laufenden, meistens
wenig verzweigten Hyphen mit kurzen Zellen. In der Nähe der
Gonidien und hauptsächlich unten in der Nähe der gebräun-
ten Unterrinde sind die Hyphen stark verzweigt, mit kugeli-
gen, 6—7 μ großen Zellen, deren Zellwand 0.7 μ dick ist. Das
Mark ist leicht inspers. Der unterste Markteil wird durch J
intensiv blau, sonst nur leicht bräunlich.

Die Pykniden, äußerlich durch einen schwarzen Punkt
gekennzeichnet, sind vollkommen in das Lager eingesenkt,
von etwas unregelmäßiger länglicher Form, 180—200 μ hoch,
90—100 μ breit, mit dünner farbloser Wand und 4—6 μ langen,
0.8—1.2 μ breiten Pyknokonidien.

Gegenüber der Beschreibung von *B. oreina* bei H a r -
m a n d, Lichenes de France, p. 878, ist die Oberrinde bei
dieser Flechte bedeutend dünner. Noch mehr reduziert ist sie
bei *R. oreina* var. *Mougeotiioides* im Exsiccato Suza,
Lich. Bohemosl. 209, wo die Oberrinde höchstens 35 μ dick ist

und vollständig der Epinekralschicht entbehrt. Die Pykno-
konidien sind bei diesem Exsiccacat etwas länger, bis 8μ lg.
und die Jodfärbung des Markes weniger deutlich.

Die KOH-Färbung des Lagers der Flechte von Sevluš
ist recht schwach.

Physciaceae.

Physcia adscendens (Fr.) Oliv. — Choč-Gr.: Šíp
nächst Královany 900—1000 m, Dolomit. — M. Fatra: Ab-
hang der Fatra Magura bei Vrútky, Populus nigra.

Ph. caesia (Hoff.) Hampe. — Choč-Gr.: Šíp-Gipfel,
Dolomit. Velký Choč, Dolomit. Val. Dubová, Vogelsitzplätze
auf Dolomitblöcken.

Ph. lithotea (Ach.) Nyl. — Choč-Gr.: Šíp bei Králo-
vany und Val. Dubová, Dolomit.

Ph. muscigena (Ach.) Nyl. — Choč-Gr.: Velký Choč,
Moos auf Dolomit. Šíp bei Královany, Moos an Dolomit-
felsen.

Résumé.

Lichens de la Tchécoslovaquie.

IV Malá Fatra, Velká Fatra et groupe de Choč avec compléments de la Bohême.

Par M. Servít et Zd. Černohorský.

(Présenté le 10 janvier 1934.)

Ce travail enrichit de deux nouveaux lichens la végé-
tation remarquable des diabas de la Bohême centrale:
Thyrea Černohorskýi et *Caloplaca Ferrari*
var. *diabasicola*. En ce qui touche les pierres calcaires
et les dolomites de la Slovaquie sont remarquables les trouvail-
les suivantes: *Blastenia Arnoldiana* (= *Calo-
placa aurantiaca* var. *nubigena*) et *Buellia*
subdispersa Mig. Les deux espèces ne nous sont connues
jusqu'à présent que des Alpes. La plus intéressante trouvaille
est celle de l'espèce *Caloplaca pruinosa* (Krb.) Zhlb.
décrite par K ö r b e r d'une seule localité de Dalmatie, constaté
par. M. Servít en Monténégro et trouvée maintenant même
en Slovaquie.

Théorie de la divisibilité des nombres fractionnaires d'une classe spéciale.

Par E. BUNICKÝ.

(Présenté le 7 mars 1934.)

§ 1. Appelons *nombre holoïde* (du mot grec *ολος* —entier) tout nombre rationnel h de la forme

$$(1) \quad h = \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdots \frac{p_n}{p_n-1},$$

où p_1, p_2, \dots, p_n sont des nombres entiers premiers, non nécessairement inégaux deux à deux. En réunissant les facteurs égaux $\frac{p_i}{p_i-1}$ dans le second membre, on peut écrire l'équation

(1) sous la forme

$$(2) \quad h = \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{\alpha_n}$$

où p_1, p_2, \dots, p_n désignent des nombres premiers distincts, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ étant des exposants entiers positifs. Nous maintiendrons cette définition du nombre holoïde aussi pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$; d'autres mots le nombre $h = 1$ est par définition holoïde.

On obtient de même un nombre holoïde en posant dans la formule (2) $n = 1, \alpha_1 = 1$.

En écrivant dans ce cas p au lieu de p_1 , on aura

$$(3) \quad h = \frac{p}{p-1}$$

p étant un entier premier quelconque. Nous nommerons un nombre holoïde de la forme (3) *nombre premier holoïde*. La dénomination ordinaire *nombre premier* ne sera employée dans la suite que pour désigner un nombre premier entier. Au

lieu de dire « h est un nombre holoïde» nous dirons souvent plus court « h est holoïde». D'après la formule (1) tous les nombres holoïdes excepté 1 sont plus grands que l'unité.

Conformément à la définition du nombre holoïde le produit des deux ou de plusieurs nombres holoïdes est de même holoïde.

Nous développerons dans la suite une théorie de la divisibilité des nombres holoïdes qui ressemble beaucoup à celle des nombres entiers.

§ 2. *Définitions.* 1) Par analogie avec la théorie des nombres entiers on peut adopter la définition suivante: décomposer un nombre holoïde en facteurs premiers holoïdes ça signifie le représenter sous la forme d'un produit des nombres premiers holoïdes.

D'après la formule (1) ou (2) tout nombre holoïde se décompose en facteurs premiers holoïdes; réciproquement, tout nombre qui est décomposable en facteurs premiers holoïdes est lui-même holoïde. Analogiquement à l'arithmétique des nombres entiers on considère l'identité (3) comme la décomposition d'un nombre premier holoïde et l'identité $1 = 1$ comme la décomposition du nombre holoïde 1.

2) Nous désignerons souvent dans la suite l'ensemble de tous les nombres holoïdes par les mots *domaine des nombres holoïdes* ou plus court *domaine holoïde*.

3) Nous convenons de dire que le nombre holoïde h est divisible par le nombre holoïde g (ou que g est un diviseur holoïde de h , ou que g divise h dans le domaine holoïde), s'il existe un nombre holoïde q qui satisfait à l'égalité $h = gq$. Si g est un diviseur holoïde de h , on nomme h *multiple holoïde* de g .

Remarque. On étend le domaine holoïde sur les nombres relatifs en convenant d'appeler *nombre holoïde négatif* tout nombre holoïde de la forme (1) ou (2) suivi d'un signe moins. En se guidant par l'analogie avec les nombres entiers, on peut généraliser la plupart des propositions ultérieures sur le domaine élargi des nombres holoïdes relatifs. Pour plus de brièveté nous nous restreindrons à la théorie des nombres holoïdes positifs.

§ 3. **Théorème I.** *Tout nombre holoïde h ne peut se dé-*

composer en facteurs premiers holoïdes que d'une seule manière parfaitement déterminée.

Démonstration. Soit d'abord $h = 1$. Le second membre de l'équation (1) étant évidemment plus grand que l'unité, le nombre holoïde $h = 1$ n'admet aucune décomposition outre $1 = \dot{1}$. Soit maintenant h un nombre holoïde plus grand que 1. Supposons que ce nombre admette deux décompositions différentes en facteurs premiers holoïdes. En d'autres termes, supposons que l'on ait simultanément

$$(4) \quad h = \prod_{i=1}^n \frac{p_i}{p_i-1}, \quad (5) \quad h = \prod_{k=1}^m \frac{P_k}{P_k-1},$$

où p_1, p_2, \dots, p_n et P_1, P_2, \dots, P_m sont les deux suites de nombres premiers qui correspondent à ces deux décompositions, les entiers n et m pouvant en général être inégaux. Soit par exemple $n \leq m$. D'après les équations (4) et (5) on a

$$(6) \quad \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \dots \frac{p_n}{p_n-1} = \frac{P_1}{P_1-1} \cdot \frac{P_2}{P_2-1} \dots \frac{P_n}{P_n-1} \cdot \frac{P_{n+1}}{P_{n+1}-1} \cdot \frac{P_{n+2}}{P_{n+2}-1} \dots \frac{P_m}{P_m-1},$$

les facteurs $\frac{P_{n+1}}{P_{n+1}-1}, \frac{P_{n+2}}{P_{n+2}-1}, \dots, \frac{P_m}{P_m-1}$ devant être omis dans le cas où l'on a $n = m$. Ecrivons l'égalité (6) sous la forme

$$(7) \quad \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1} \dots P_m} = \frac{(p_1-1)(p_2-1) \dots (p_n-1)}{(P_1-1)(P_2-1) \dots (P_n-1)(P_{n+1}-1) \dots (P_m-1)}.$$

D'après cette équation les fractions

$$(7') \quad \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1} \dots P_m},$$

$$(7'') \quad \frac{(p_1-1)(p_2-1) \dots (p_n-1)}{(P_1-1)(P_2-1) \dots (P_n-1)(P_{n+1}-1) \dots (P_m-1)}$$

sont égales, le numérateur $p_1 p_2 \dots p_n$ de la fraction (7') étant évidemment plus grand que le numérateur $(p_1-1)(p_2-1) \dots (p_n-1)$ de la fraction (7''). Donc la fraction (7') est reductible, d'où il suit que l'un des facteurs

premiers p_1, p_2, \dots, p_n du produit $p_1 p_2 \dots p_n$ doit être égal à l'un des facteurs premiers P_1, P_2, \dots, P_m du produit $P_1 P_2 \dots P_m$. Soit par exemple

(8) $p_1 = P_1$ et, par suite, $p_1 - 1 = P_1 - 1$. En réduisant par p_1 le premier membre de l'équation (7) et par $p_1 - 1$ le second, on obtient une relation

$$(9) \quad \frac{p_2 p_3 \dots p_n}{P_2 P_3 \dots P_n P_{n+1} \dots P_m} = \\ = \frac{(p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_n - 1)}{(P_2 - 1)(P_3 - 1) \dots (P_n - 1)(P_{n+1} - 1) \dots (P_m - 1)}$$

de la même forme que l'équation (7). Donc on obtiendra à l'aide de l'égalité (9) par les mêmes raisonnements, — en supposant que les nombres premiers p_2, p_3, \dots, p_n et P_2, P_3, \dots, P_m soient numérotés d'une manière convenable, — une suite d'équations

$$(10) \quad p_2 = P_2, p_3 = P_3, \dots, p_n = P_n.$$

En réduisant les deux membres de l'équation (9) respectivement par $p_2 p_3 \dots p_n$ et par $(p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_n - 1)$, on trouve dans le cas où l'on a $n < m$

$$\frac{1}{P_{n+1} P_{n+2} \dots P_m} = \frac{1}{(P_{n+1} - 1)(P_{n+2} - 1) \dots (P_m - 1)},$$

ce qui est impossible. Donc on doit poser $n = m$, d'où suit, d'après les égalités (8) et (10), l'unicité de la décomposition de h en facteurs premiers holoïdes; d'autres mots les décompositions (4) et (5) de h ne peuvent différer que par l'ordre des facteurs.

Remarque. Ainsi à chacun nombre holoïde h plus grand que l'unité correspond une suite de nombres premiers holoïdes dont le produit est égal à h . Nous nommerons cette suite de nombres premiers *suite de la décomposition holoïde* du nombre h ou plus court, — quand il n'y a lieu à aucune ambiguïté, — *décomposition holoïde* de h . Si h est un nombre premier holoïde, sa décomposition holoïde se réduit au nombre h même. La décomposition holoïde du nombre $h = 1$ se réduit à 1 par définition. On peut sousentendre le facteur holoïde 1 dans toute décomposition holoïde sans altérer la valeur du produit correspondant.

À l'aide du théorème I on démontre par un raisonnement

emprunté de la théorie des nombres entiers la proposition suivante.

Théorème II. *Pour que le nombre holoïde h soit divisible dans le domaine holoïde par un nombre holoïde g , il faut et il suffit que la décomposition holoïde de h contienne la décomposition holoïde de g .*

§ 4. **Théorème III.** *Tout nombre entier positif est holoïde.*

Démonstration. Soit N un entier positif quelconque. Si l'on a $N = 1$, N est holoïde par définition. Soit maintenant N un entier plus grand que l'unité. Désignons par $\varphi(x)$ une fonction arithmétique qui exprime, combien il y a de nombres naturels premiers à un entier donné x et non supérieurs à x , et posons

$$\varphi(N) = \varphi_1(N), \quad \varphi[\varphi(N)] = \varphi_2(N), \quad \varphi[\varphi_2(N)] = \varphi_3(N), \dots, \\ \varphi[\varphi_i(N)] = \varphi_{i+1}(N), \dots$$

En prolongeant assez loin la série indéfinie

$$N, \varphi_1(N), \varphi_2(N), \dots, \varphi_\nu(N), \dots,$$

on parviendra évidemment à un terme $\varphi_\nu(N)$ égal à 1, à savoir nous désignerons dans la suite par ν la plus petite valeur de l'indice ν , pour laquelle on a $\varphi_\nu(N) = 1$. D'après la formule qui sert à calculer la valeur de $\varphi(x)$ il vient

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(N) = N \cdot \prod_k \frac{r_k - 1}{r_k}, \quad \varphi_2(N) = \varphi_1(N) \prod_{k_1} \frac{r_{k_1} - 1}{r_{k_1}}, \\ \varphi_3(N) = \varphi_2(N) \cdot \prod_{k_2} \frac{r_{k_2} - 1}{r_{k_2}}, \dots, \\ \varphi_{\nu-1}(N) = \varphi_{\nu-2}(N) \cdot \prod_{k_{\nu-2}} \frac{r_{k_{\nu-2}} - 1}{r_{k_{\nu-2}}}, \\ \varphi_\nu(N) = 1 = \varphi_{\nu-1}(N) \cdot \prod_{k_{\nu-1}} \frac{r_{k_{\nu-1}} - 1}{r_{k_{\nu-1}}}, \end{array} \right.$$

où $r_k, r_{k_1}, r_{k_2}, \dots, r_{k_{\nu-1}}$

désignent respectivement les termes généraux des suites de tous les nombres premiers distincts qui entrent dans les décompositions des nombres $N, \varphi_1(N), \varphi_2(N), \dots, \varphi_{\nu-1}(N)$. En multipliant les égalités (11) et en réduisant par le produit $\varphi_1(N) \varphi_2(N) \dots \varphi_{\nu-1}(N)$, on aura

$$1 = N \cdot \prod_k \frac{r_k - 1}{r_k} \cdot \prod_{k_1} \frac{r_{k_1} - 1}{r_{k_1}} \dots \prod_{k_{v-1}} \frac{r_{k_{v-1}} - 1}{r_{k_{v-1}}},$$

d'où il suit

$$N = \prod_k \frac{r_k}{r_k - 1} \prod_{k_1} \frac{r_{k_1}}{r_{k_1} - 1} \dots \prod_{k_{v-1}} \frac{r_{k_{v-1}}}{r_{k_{v-1}} - 1}$$

Réunissant toutes les suites de nombres premiers $r_k, r_{k_1}, \dots, r_{k_{v-1}}$ en une seule suite de nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_m (qui peut contenir maintenant des nombres premiers égaux), on obtient

$$N = \prod_{i=1}^m \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

Donc le nombre N est holoïde.

Remarque. La dernière équation (11) a nécessairement la forme $\varphi_v(N) = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$. Il en suit que la décomposition holoïde de tout nombre entier contient le nombre holoïde $\frac{2}{1}$.

Théorème IV. *Pour que le quotient $\frac{a}{b}$ de la division d'un nombre holoïde a par un nombre holoïde b soit aussi holoïde, il faut et il suffit que a soit divisible par b dans le domaine holoïde ou, ce qui est équivalent, que la décomposition holoïde de a contienne la décomposition holoïde de b .*

Démonstration. On déduit sans peine cette proposition du théorème II, en ayant en vue la définition de la divisibilité dans le domaine holoïde.

Théorème V. *Pour que le nombre rationnel $R = \frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers positifs, soit holoïde, il faut et il suffit que la décomposition holoïde du numérateur m contienne la décomposition holoïde du dénominateur n .*

Démonstration. On déduit cette proposition immédiatement du théorème IV, en remarquant que les nombres entiers m et n sont holoïdes d'après le théorème III.

Corollaire. Soit $R = \frac{m}{n}$ un nombre rationnel, m et n étant des entiers positifs donnés. Pour discerner, si le nombre R est holoïde ou non, il suffit de former les décompositions holoïdes de m et de n et de regarder, si la décomposition ho-

loïde de m contient celle de n . Dans le premier cas le nombre R est holoïde, dans le second cas ne l'est pas.

Remarque. La méthode indiquée plus haut pour reconnaître, si un nombre rationnel donné est holoïde, conduit souvent aux calculs très longs. On trouvera dans la suite une méthode plus simple, analogue à celle qui sert à décomposer le nombre entier en facteurs premiers. Or préalablement nous ferons attention à plusieurs propositions qui concernent la distribution des nombres rationnels holoïdes et non holoïdes parmi les nombres réels.

§ 5. **Théorème VI.** *Entre deux nombres réels quelconques a et b satisfaisant aux relations*

$$(12) \quad 1 \leq a < b$$

il existe un nombre holoïde h .

Démonstration. Soit d'abord $a = 1$. Déterminons un nombre premier p qui vérifie les relations $1 < \left(\frac{p}{p-1}\right)^a < b$, a étant un entier positif arbitrairement donné. À cet effet il suffit évidemment d'assujettir le nombre premier p à l'inéga-

lité $p > \frac{\sqrt[a]{b}}{\sqrt[a]{b-1}}$ $\sqrt[a]{b}$ désignant la racine arithmétique (ainsi

que toutes les racines analogues dans la suite). Après avoir choisi un certain nombre premier p vérifiant cette inégalité, l'expression $\left(\frac{p}{p-1}\right)^a$ représentera un nombre holoïde cherché qui se trouve entre $a = 1$ et b .

Soit maintenant $a > 1$. Cherchons dans ce cas un nombre premier p qui vérifie les inégalités

$$(13) \quad \frac{p}{p-1} < a, \quad (14) \quad \frac{a}{p-1} < b - a \text{ ou bien les inégalités}$$

respectivement équivalentes (13') $p > \frac{a}{a-1}$, (14') $p > \frac{b}{b-a}$

De plus, si a est un nombre rationnel holoïde de la forme

$$(15) \quad a = \left(\frac{r}{r-1}\right)^\mu \text{ où } r \text{ est un nombre premier et } \mu \text{ est}$$

un entier positif, nous assujétirons le nombre premier p à la condition $p \neq r$, par exemple, à l'inégalité (15') $p > r$. Choisis-

sons maintenant un nombre premier p parfaitement déterminé, assez grand pour satisfaire simultanément aux inégalités (13') et (14') et de plus à l'inégalité (15') dans un cas particulier, où a est un nombre réel de la forme (15). À l'aide d'un tel nombre premier p construisons la série

$$(16) \quad \frac{p}{p-1}, \left(\frac{p}{p-1}\right)^2, \left(\frac{p}{p-1}\right)^3, \dots, \left(\frac{p}{p-1}\right)^v, \dots$$

Le premier terme $\frac{p}{p-1}$ de cette série est plus petit que a en vertu de l'inégalité (13'); d'autre part, on a évidemment $\lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{p}{p-1}\right)^v = +\infty$. Il en résulte que l'on peut indiquer deux termes $\left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1}$ et $\left(\frac{p}{p-1}\right)^n$ de la série (16) qui satisfont aux relations

$$(17) \quad \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} \leq a \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^n, \quad n \text{ étant un entier positif, au moins égal à 2. Or dans chacune des inégalités (17) le signe de l'égalité est exclu.}$$

En effet, chacune des égalités $a = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1}$, $a = \left(\frac{p}{p-1}\right)^n$ n'est possible que si a est une puissance d'un nombre premier holoïde $\frac{p}{p-1}$ avec un exposant entier positif $n-1$ ou n , c'est-à-dire un nombre de la forme (15).

On aurait donc dans chacun de ces deux cas particuliers respectivement $\left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^\mu$ ou $\left(\frac{p}{p-1}\right)^n = \left(\frac{r}{r-1}\right)^\mu$ et, par suite, d'après le théorème I, $p = r$, $n-1 = \mu$ ou bien $p = r$, $n = \mu$. Ainsi on aurait dans les deux cas $p = r$, ce qui est impossible en vertu de l'inégalité (15'). Donc les relations

$$(17) \text{ prennent la forme (17')} \quad \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} < a < \left(\frac{p}{p-1}\right)^n. \text{ À cause de la première inégalité (17')} \text{ et d'après la relation (14) on a}$$

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^n - \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{p-1} < \frac{a}{p-1} < b - a, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^n - \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} < b - a.$$

Il en suit à l'aide des inégalités (17')

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^n - a < \left(\frac{p}{p-1}\right)^n - \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} < b - a, \text{ d'où il vient}$$

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^n < b \text{ et, d'après la seconde inégalité (17'), } a < \left(\frac{p}{p-1}\right)^n < b.$$

On a donc, en posant $\left(\frac{p}{p-1}\right)^n = h$, (18) $a < h < b$, où h est un nombre holoïde cherché entre a et b .

Remarque. Le nombre holoïde h ainsi obtenu a la forme d'une puissance du nombre premier holoïde $\frac{p}{p-1}$. Or au moyen de ce nombre h on peut trouver entre a et b de nombres holoïdes, dont la décomposition contient tant que l'on veut de facteurs premiers holoïdes distincts. En effet, soit h un nombre holoïde quelconque qui satisfait aux relations (18) et qui contient dans sa décomposition holoïde m facteurs premiers holoïdes distincts $\frac{p_i}{p_i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), p_1, p_2, \dots, p_m étant des nombres premiers entiers correspondants. Désignons par β_1 un entier positif arbitrairement choisi et cherchons à déterminer un nombre premier q_1 qui vérifie la relation

$$(19) \quad h \left(\frac{q_1}{q_1-1}\right)^{\beta_1} < b \text{ ou une relation équivalente}$$

$$(19') \quad q_1 > \frac{\sqrt[\beta_1]{b}}{\sqrt[\beta_1]{b} - \sqrt[\beta_1]{h}}$$

Soit q_1 un nombre premier parfaitement déterminé qui satisfait à l'inégalité (19') et qui est différent de tous les nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_m , par exemple, qui surpasse tous ces nombres. Le nombre premier q_1 étant ainsi défini, on aura $a < h < h \left(\frac{q_1}{q_1-1}\right)^{\beta_1} < b$. Donc, en posant (20) $h \left(\frac{q_1}{q_1-1}\right)^{\beta_1} = h_1$, il vient $a < h_1 < b$. Ainsi nous avons trouvé un nombre holoïde h_1 , qui est situé de même entre a et b et qui contient dans sa décomposition un nouveau facteur premier holoïde $\frac{q_1}{q_1-1}$ avec un exposant β_1 arbitrairement choisi, outre les fac-

teurs premiers $\frac{p_1}{p_1-1}, \frac{p_2}{p_2-1}, \dots, \frac{p_m}{p_m-1}$ du nombre holoïde h .

En appliquant la formule (20) d'abord au nombre holoïde $h = \left(\frac{p}{p-1}\right)^n$ déjà construit entre a et b , on obtient un nouveau nombre holoïde h_1 , situé de même entre a et b . En appliquant ensuite la formule (20) au nombre h_1 , on obtient entre a et b un nouveau nombre holoïde h_2 ; puis on appliquera la même formule à h_2 et ainsi de suite. Après avoir répété cette opération k fois on trouvera entre a et b un nombre holoïde H de la forme

$$H = \left(\frac{p}{p-1}\right)^n \cdot \left(\frac{q_1}{q_1-1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{q_2}{q_2-1}\right)^{\beta_2} \dots \left(\frac{q_k}{q_k-1}\right)^{\beta_k}$$

dont la décomposition contient $k + 1$ facteurs premiers holoïdes distincts $\frac{p}{p-1}, \frac{q_1}{q_1-1}, \frac{q_2}{q_2-1}, \dots, \frac{q_k}{q_k-1}$, le nombre k et les exposants $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ pouvant avoir des valeurs entières positives arbitrairement choisies.

Théorème VII. *Entre deux nombres réels quelconques a et b qui satisfont aux relations (12') $1 \leq a < b$ il existe un nombre rationnel non holoïde v .*

Démonstration. Construisons entre a et b au moyen de la méthode indiquée plus haut un nombre holoïde h . Désignons par γ un entier positif arbitrairement donné d'avance et déterminons un nombre premier q qui vérifie la relation

$$(21) \quad h \left(\frac{q-1}{q}\right)^\gamma > a \quad \text{ou une relation équivalente}$$

$$(21') \quad q > \frac{\sqrt[\gamma]{h}}{\sqrt[\gamma]{h} - \sqrt[\gamma]{a}}.$$

Soit maintenant q un nombre premier qui vérifie l'inégalité (21') et qui de plus n'est égal à aucun des nombres premiers dont dépendent les nombres premiers holoïdes de la décomposition holoïde de h ; par exemple supposons que q surpasse tous ces nombres premiers. Le nombre premier q étant ainsi défini, posons $v = h \left(\frac{q-1}{q}\right)^\gamma$. Le nombre v est

évidemment rationnel; de plus il satisfait aux inégalités $a < h \left(\frac{q-1}{q}\right)^\gamma < h < b$, d'où il suit $a < \nu < b$. Mais en vertu de l'identité $\nu = h : \left(\frac{q}{q-1}\right)^\gamma$ ce nombre ν , d'après le théorème IV, n'est pas holoïde. En effet, le nombre premier q étant plus grand que tous les nombres premiers dont dépend la décomposition holoïde de h , la décomposition holoïde du diviseur $\left(\frac{q}{q-1}\right)^\gamma$ n'est pas sûrement contenue dans la décomposition holoïde du dividende h . Ainsi nous avons trouvé entre a et b un nombre rationnel non holoïde ν .

Théorème VIII. *Entre deux nombres réels a et b qui vérifient les relations (12') il existe une infinité de nombres rationnels holoïdes et de même une infinité de nombres rationnels non holoïdes.*

Démonstration. Construisons entre a et b à l'aide du théorème VI un nombre holoïde h_1 , ensuite un nombre holoïde h_2 entre h_1 et b , puis un nombre holoïde h_3 entre h_2 et b et ainsi de suite. Donc, n désignant un entier positif arbitraire, on peut intercaler entre a et b des nombres holoïdes h_1, h_2, \dots, h_n vérifiant les inégalités $a < h_1 < h_2 < \dots < h_n < b$ et, par suite, inégaux entre eux. Le nombre n pouvant croître à l'infini, il existe entre a et b une infinité de nombres holoïdes. De même on obtient à l'aide du théorème VII une suite de nombres rationnels non holoïdes $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ vérifiant les inégalités $a < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n < b$, n étant un entier positif quelconque. Il en suit qu'il existe entre a et b une infinité de nombres rationnels non holoïdes.

Corollaires. L'ensemble de tous les nombres rationnels étant dénombrable, on démontre sans peine à l'aide des théorèmes VIII et III les propositions suivantes.

a) L'ensemble de tous les nombres rationnels se décompose en deux ensembles infinis, à savoir l'ensemble dénombrable de tous les nombres holoïdes et l'ensemble dénombrable de tous les nombres rationnels non holoïdes.

b) Tous les nombres rationnels situés entre 0 et 1 ne sont pas holoïdes. Le nombre 1 est holoïde, et tous les nombres rationnels plus grands que l'unité se décomposent en deux en-

sembles infinis dénombrables, à savoir l'ensemble de nombres holoïdes plus grands que l'unité et l'ensemble de nombres rationnels non holoïdes plus grands que l'unité, dont aucun ne se réduit à un nombre entier.

c) L'ensemble de tous les nombres positifs holoïdes se compose de l'ensemble infini dénombrable de tous les entiers positifs et de l'ensemble infini dénombrable de tous les nombres holoïdes plus grands que l'unité qui ne se réduisent pas aux nombres entiers.

Pour démontrer l'existence d'une infinité de tels nombres holoïdes qui ne se réduisent pas aux nombres entiers, il suffit de remarquer que d'après la première partie du théorème VIII entre deux entiers positifs consécutifs quelconques n et $n + 1$ il existe une infinité de nombres rationnels holoïdes dont aucun ne se réduit certainement à un entier.

§ 6. Mettons nous maintenant à l'exposition d'une méthode simplifiée qui sert à reconnaître, si un nombre rationnel donné est holoïde ou non, et à construire sa décomposition holoïde dans le cas, où le nombre éprouvé est holoïde. Soit h un nombre holoïde, plus grand que l'unité. Nous supposons ce nombre représenté sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers positifs, premiers entre eux. On a par définition

(22)
$$\frac{m}{n} = \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{p_k}{p_k-1}\right)^{\alpha_k},$$
 où p_1, p_2, \dots, p_k sont des nombres premiers distincts, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ étant des entiers positifs quelconques. Nous conviendrons d'appeler les fractions $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}, \left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2}, \dots, \left(\frac{p_k}{p_k-1}\right)^{\alpha_k}$ éléments de la décomposition holoïde du nombre $h = \frac{m}{n}$; de plus nous appellerons

p_1, p_2, \dots, p_k et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ respectivement les nombres premiers de ces éléments et les exposants de ces éléments. Dans le cas où l'on a $k > 1$ nous supposerons que les nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_k soient numérotés dans l'ordre décroissant; d'après cette convention on aura

(23)
$$p_1 > p_2 > \dots > p_k.$$

Conformément aux inégalités (23) nous nommerons les éléments successifs

$$\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}, \left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2}, \dots, \left(\frac{p_k}{p_k-1}\right)^{\alpha_k}$$

de la décomposition holoïde du nombre $\frac{m}{n}$ respectivement *premier, second, ..., k-ième élément*.

En vertu de l'équation (22) la fraction irréductible $\frac{m}{n}$ résulte après une réduction éventuelle de la fraction

$$(22') \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}}{(p_1-1)^{\alpha_1} \cdot (p_2-1)^{\alpha_2} \dots (p_k-1)^{\alpha_k}} \quad \text{Or à cause des inégalités}$$

(23) le numérateur de la fraction (22') ne contient outre le facteur $p_1^{\alpha_1}$ que les nombres premiers moindres que p_1 ; de même le dénominateur de cette fraction ne peut contenir que des nombres premiers moindres que p_1 . Donc le facteur $p_1^{\alpha_1}$ doit entrer dans la décomposition du numérateur m de la fraction $\frac{m}{n}$, tous les autres facteurs premiers de m étant moindres que p_1 ; quant au dénominateur n il ne peut de même contenir que les nombres premiers moindres que p_1 . Ainsi on arrive aux propositions auxiliaires suivantes.

a) Soit h un nombre holoïde plus grand que l'unité, représenté par une fraction rationnelle irréductible $\frac{m}{n}$. De plus soit p_1 le nombre premier maximal (ou unique) dans la décomposition du numérateur m avec un exposant maximal α_1 . Les nombres p_1 et α_1 définissent d'une manière univoque le premier élément de la décomposition holoïde de h , à savoir ce premier élément est défini par l'expression $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}$

Remarque. Ainsi on peut calculer à l'aide de la proposition a) le premier élément de la décomposition holoïde d'un nombre holoïde $h > 1$, représenté sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, sans avoir d'avance la formule de la décomposition holoïde de h . Nous désignerons l'opération du calcul du premier élément à l'aide de la proposition a) par les mots *sépa-*

ration du premier élément de la fraction $\frac{m}{n}$. De plus nous appliquerons dans la suite cette opération aux fractions rationnelles même sans savoir, si une fraction donnée est holoïde ou non; on nommera dans ce cas le premier élément ainsi obtenu le *premier élément d'essai* ou le *premier élément facultatif*.

b) Le dénominateur n d'une fraction rationnelle irréductible $\frac{m}{n}$ qui est plus grande que l'unité et qui représente un nombre holoïde ne peut contenir dans sa décomposition que des nombres premiers moindres que le nombre premier maximal (ou unique) p_1 dans la décomposition du numérateur m .

Indiquons maintenant deux propositions que l'on déduit immédiatement de la définition du nombre holoïde et de la proposition b).

c) Toute fraction rationnelle régulière n'est pas holoïde.

d) Une fraction rationnelle $\frac{m}{n}$ irréductible et plus grande que l'unité, dont le dénominateur n contient dans sa décomposition un nombre premier qui est plus grand que le nombre premier maximal de la décomposition du numérateur m , représente un nombre non holoïde.

Définition. Nous convenons de nommer une fraction rationnelle $\frac{m}{n}$ qui a l'une des propriétés indiquées dans les propositions c) et d) fraction *manifestement non holoïde* ou *manifestement indécomposable*. Ainsi une fraction manifestement non holoïde $\frac{m}{n}$ est soit moindre que l'unité, soit plus grande que l'unité, mais dans ce cas le dénominateur n doit contenir dans sa décomposition un nombre premier plus grand que le nombre premier maximal de la décomposition du numérateur m .

Soit $\frac{m}{n}$ de nouveau une fraction rationnelle irréductible qui représente un nombre holoïde, dont la décomposition holoïde est exprimée par l'équation (22), les nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_k vérifiant comme auparavant les inégalités (23). Définissons une suite de fractions rationnelles

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$$

par les équations

$$(24) \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{n} : \left(\frac{p_1}{p_1-1} \right)^{\alpha_1} = \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_1}{n_1} : \left(\frac{p_2}{p_2-1} \right)^{\alpha_2} = \frac{m_2}{n_2}, \dots, \\ \frac{m_{i-1}}{n_{i-1}} : \left(\frac{p_i}{p_i-1} \right)^{\alpha_i} = \frac{m_i}{n_i}, \dots, \quad \frac{m_{k-2}}{n_{k-2}} : \left(\frac{p_{k-1}}{p_{k-1}-1} \right)^{\alpha_{k-1}} = \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}}, \\ \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}} : \left(\frac{p_k}{p_k-1} \right)^{\alpha_k} = \frac{m_k}{n_k}. \end{array} \right.$$

De plus nous conviendrons de calculer toutes les fractions

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$$

les fractions $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ ainsi calculées *quotients auxiliaires*

de la décomposition holoïde du nombre $\frac{m}{n}$. D'après les équations (22) et (24) on a

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1}{n_1} = \left(\frac{p_2}{p_2-1} \right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{p_3}{p_3-1} \right)^{\alpha_3} \dots \left(\frac{p_{k-1}}{p_{k-1}-1} \right)^{\alpha_{k-1}} \cdot \left(\frac{p_k}{p_k-1} \right)^{\alpha_k}, \\ \frac{m_2}{n_2} = \left(\frac{p_3}{p_3-1} \right)^{\alpha_3} \dots \left(\frac{p_{k-1}}{p_{k-1}-1} \right)^{\alpha_{k-1}} \cdot \left(\frac{p_k}{p_k-1} \right)^{\alpha_k}, \\ \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}} = \left(\frac{p_k}{p_k-1} \right)^{\alpha_k}, \quad \frac{m_k}{n_k} = 1. \end{array} \right.$$

Ayant en vue les équation (25), on peut énoncer la proposition suivante.

e) Tous les quotients auxiliaires $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ du nombre holoïde $\frac{m}{n}$ sont aussi des nombres holoïdes, et le dernier quotient $\frac{m_k}{n_k}$ est égal à 1.

Il est à remarquer que l'on peut former le tableau d'équations (24) et la suite de quotients auxiliaires pour un nombre

holoïde $\frac{m}{n}$ plus grand que l'unité exclusivement au moyen de la proposition *a*). En effet, à cause des inégalités (23) les fractions $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}$, $\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2}$, ..., $\left(\frac{p_k}{p_k-1}\right)^{\alpha_k}$ représentent le premier, le second, ..., le k -ième éléments successifs de la décomposition holoïde du nombre $\frac{m}{n}$, et en même temps toutes ces fractions ne sont, — d'après les équations (25), — que respectivement les premiers éléments des nombres holoïdes $\frac{m}{n}$, $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, ..., $\frac{m_{k-1}}{n_{k-1}}$. On peut donc obtenir les équations (24) de la manière

suivante: on trouve le premier élément $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}$ de $\frac{m}{n}$ à l'aide de la proposition *a*) et l'on calcule le quotient auxiliaire $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n} : \left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}$ sous la forme d'une fraction irréductible;

puis on trouve le premier élément $\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2}$ de $\frac{m_1}{n_1}$ et l'on calcule le second quotient auxiliaire $\frac{m_2}{n_2}$, et ainsi de suite. En pro-

longeant de tels calculs assez loin, on construit successivement toutes les équations (24). Nous nommerons l'ensemble d'équations (24), construites de la façon indiquée plus haut, *tableau*

de la décomposition holoïde du nombre holoïde $\frac{m}{n}$. Or d'un

point de vue formel on peut commencer à construire un tel tableau pour toute fraction rationnelle plus grande que l'unité; on construira évidemment au moins la première équation du

tableau, même sans savoir, si la fraction donnée $\frac{m}{n}$ est holoïde

ou non. Nous appellerons un tel tableau *tableau facultatif* de la décomposition holoïde. Nous construirons dans la suite ces tableaux facultatifs seulement pour les fractions rationnelles positives irréductibles, plus grandes que l'unité et non manifestement indécomposables. De plus nous conviendrons de ne pas arrêter le prolongement d'un tableau facultatif que si l'on

arrive à un quotient auxiliaire $\frac{m_k}{n_k}$ soit égal à 1, soit manifestement indécomposable.

ment indécomposable.

Si l'on pose dans un système d'équations de la forme (24)

$\frac{m_k}{n_k} = 1$, on en déduit l'équation (22). Donc il en vient la proposition suivante.

f) Si le tableau facultatif de la décomposition holoïde, construit pour un nombre rationnel $\frac{m}{n}$ plus grand que l'unité et non manifestement indécomposable, finit par un quotient auxiliaire $\frac{m_k}{n_k} = 1$, ce nombre $\frac{m}{n}$ est holoïde, et l'on obtient sa décomposition holoïde en effectuant le produit de tous les éléments $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}, \left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2}, \dots, \left(\frac{p_k}{p_k-1}\right)^{\alpha_k}$

D'autre part on déduit immédiatement de la proposition e) le corollaire suivant.

g) Si le tableau facultatif de la décomposition holoïde, construit pour un nombre rationnel $\frac{m}{n}$ plus grand que l'unité et non manifestement indécomposable, finit par un quotient auxiliaire $\frac{m_k}{n_k}$ manifestement indécomposable, ce nombre $\frac{m}{n}$ n'est pas holoïde.

Démontrons maintenant une propriété très importante des tableaux facultatifs de la décomposition holoïde, toutes les désignations restant partout les mêmes que dans le système d'équations (24).

h) Dans chaque tableau facultatif de la décomposition holoïde qui contient plus d'une équation les nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_k , dont dépendent les éléments successifs $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}, \left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2}, \dots, \left(\frac{p_k}{p_k-1}\right)^{\alpha_k}$ du tableau, vont en décroissant.

Démonstration. Le nombre $\frac{m}{n}$ pour lequel on a construit le tableau est une fraction rationnelle irréductible, plus grande que 1 et non manifestement indécomposable. De plus ce tableau contient au moins deux équations; d'autres mots le quotient auxiliaire $\frac{m_1}{n_1}$ n'est ni égal à 1 ni manifestement indécomposable.

Soient maintenant $\frac{m_{i-1}}{n_{i-1}}, \frac{m_i}{n_i}$ deux quotients auxiliaires consécutifs quelconques du tableau, dont on sépare respectivement les éléments $\left(\frac{p_i}{p_i-1}\right)^{\alpha_i}$ $\left(\frac{p_{i+1}}{p_{i+1}-1}\right)^{\alpha_{i+1}}$ pour $i = 1$ on aura évidemment $m_0 = m, n_0 = n$. On a par définition $m_{i-1} = p_i^{\alpha_i} \sigma$, où σ est un nombre entier qui ne peut contenir que des facteurs premiers moindres que p_i . Ainsi on aura

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{m_{i-1}}{n_{i-1}} : \left(\frac{p_i}{p_i-1}\right)^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i} \sigma}{n_{i-1}} : \left(\frac{p_i}{p_i-1}\right)^{\alpha_i} = \frac{\sigma (p_i-1)^{\alpha_i}}{n_{i-1}}.$$

Donc le numérateur m_i de la fraction irréductible $\frac{m_i}{n_i}$ doit diviser le produit $\sigma (p_i-1)^{\alpha_i}$ qui ne contient, — de même que σ , — que les facteurs premiers moindres que p_i ; par suite, m_i ne contient aussi que les facteurs premiers moindres que p_i . Or p_{i+1} est le nombre premier maximal de la décomposition de m_i . On a donc nécessairement $p_{i+1} < p_i$ pour chaque paire de nombres premiers p_i, p_{i+1} dont dépendent les éléments successifs quelconques $\left(\frac{p_i}{p_i-1}\right)^{\alpha_i}, \left(\frac{p_{i+1}}{p_{i+1}-1}\right)^{\alpha_{i+1}}$ du tableau; d'autres mots les inégalités (23) sont vraies pour chaque tableau facultatif contenant plus d'une équation.

Remarque. Le raisonnement reste le même, si l'on admet que le tableau facultatif soit infini; mais on verra de la proposition suivante que cette hypothèse est inadmissible.

i) Chaque tableau facultatif de la décomposition holoïde finit par un quotient auxiliaire $\frac{m_k}{n_k}$ soit égal à 1, soit manifestement indécomposable.

En effet, dans le cas contraire on ne pourrait obtenir que les quotients auxiliaires plus grands que 1 et non manifestement indécomposables, ce qui permettrait de prolonger le tableau à l'infini. Mais d'après la proposition h) un tel tableau infini doit conduire à une suite infinie de nombres premiers positifs décroissants $p_1, p_2, \dots, p_n \dots$, ce qui est impossible.

En résumant les résultats obtenus dans les propositions c), d), i), g), f), on obtient le théorème suivant.

Théorème IX. Soit $\frac{m}{n}$ une fraction rationnelle irréductible, m et n désignant des entiers positifs premiers entre eux.

Si l'on a $\frac{m}{n} = 1$, le nombre $\frac{m}{n}$ est holoïde.

Si la fraction $\frac{m}{n}$ est manifestement indécomposable, elle est non holoïde.

Soit maintenant $\frac{m}{n}$ une fraction rationnelle plus grande que l'unité et non manifestement indécomposable. Pour une telle fraction on peut construire un tableau facultatif de la décomposition holoïde de la forme (24), au moins la première équation du tableau.

Ce tableau facultatif finit toujours pour une valeur convenable de l'indice k par un quotient $\frac{m_k}{n_k}$ soit manifestement indécomposable, soit égal à 1.

Dans le premier cas le nombre $\frac{m}{n}$ n'est pas holoïde, dans le second il est holoïde, et l'on obtient sa décomposition holoïde en multipliant tous les éléments successifs du tableau.

Remarques. 1) Si l'on pose dans le tableau de la décomposition holoïde (24)

$$\frac{m}{n} = R; \quad \frac{m_i}{n_i} = R_i, \quad \left(\frac{p_i}{p_i - 1} \right)^a = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

on peut représenter ce tableau sous la forme très analogue à l'algorithme de la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers, à savoir

$$(24') \quad \left\{ \begin{array}{l} R \quad q_1 = R_1 \\ R_1 \quad q_2 = R_2 \\ \vdots \\ R_{k-1} : q_k = R_k \end{array} \right| \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{array}$$

Comme auparavant R désigne un nombre rationnel plus grand que l'unité et non manifestement indécomposable; R_k désigne le dernier quotient auxiliaire qui est d'après le théorème IX soit égal à 1, soit manifestement indécomposable.

2) Si l'une des fractions rationnelles R_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$; $R_0 = R$) du tableau (24') est un entier, le nombre R est holoïde. Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème III; or on peut la démontrer sans avoir recours à ce théorème, ce qui donne même une nouvelle démonstration du théorème III. En effet, supposons d'abord que ce soit le dernier quotient auxiliaire R_k qui se réduise à un entier. Ce nombre R_k doit être soit égal à 1, soit manifestement indécomposable. Comme un nombre entier, R_k ne peut pas par définition être manifestement indécomposable. On aura donc $R_k = 1$, d'où il suit, d'après le théorème IX, que le nombre R est holoïde. Supposons maintenant que l'une des fractions restantes R, R_1, \dots, R_{k-1} , par exemple R_{i-1} se réduise à un nombre entier, l'indice i ayant l'une des valeurs $1, 2, \dots, k$; pour $i = 1$ on posera $R_0 = R$. On aura comme plus haut

$$R_{i-1} = \frac{m_{i-1}}{n_{i-1}}, \quad n_{i-1} = 1, \quad R_{i-1} = m_{i-1} = p_i^{\alpha_i} \sigma,$$

où p_i est le nombre premier maximal dans la décomposition du nombre entier R_{i-1} , et α_i est l'exposant maximal de p_i dans cette décomposition, σ désignant la valeur du quotient entier $R_{i-1} : p_i^{\alpha_i}$. En calculant le quotient auxiliaire suivant R_i , on trouve

$$R_i = R_{i-1} : q_i = \frac{p_i^{\alpha_i} \sigma (p_i - 1)^{\alpha_i}}{p_i^{\alpha_i}} = \sigma (p_i - 1)^{\alpha_i}$$

Donc R_i est un nombre entier. En appliquant les mêmes raisonnements à la suite de nombres $R_i, R_{i+1}, \dots, R_{k-1}, R_k$, on trouve que tous ces nombres sont entiers. Donc le dernier nombre R_k de cette suite est aussi entier, d'où il suit, comme nous l'avons vu plus haut, que le nombre R est holoïde. Ainsi la proposition est démontrée. En particulier, d'après cette proposition, si le nombre R est entier, il est holoïde.

§ 7. On peut illustrer la théorie précédente par quelques exemples et problèmes. Ainsi on trouve sans peine les décompositions suivantes:

$$a) 105 = \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^5, \quad b) \frac{14}{3} = \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2, \quad c) \frac{363}{160} = \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2},$$

$$d) \frac{385}{4} = \frac{11}{10} \cdot \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^5 \quad e) \frac{37}{6} = \frac{37}{36} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

Par suite, tous les nombres a) — e) sont holoïdes.

Au contraire, en éprouvant les nombres

f) $\frac{45}{14}$, g) $\frac{301}{92}$, h) $\frac{155}{22}$, i) $\frac{1001}{300}$, on trouve qu'ils sont tous non holoïdes.

Les exemples b), e), g), h) nous seront utiles dans la suite pour éclaircir quelques questions théoriques.

De plus on peut appliquer la théorie exposée plus haut pour la résolution de certains problèmes de la théorie des nombres. Résolvons par exemple le problème suivant: *trouver un nombre entier positif x satisfaisant à l'équation*
 $a\varphi(x) = bx$, où $\varphi(x)$ désigne, combien il y a de nombres naturels premiers à x et non supérieurs à x , a et b étant des entiers positifs donnés.

Écrivons l'équation sous la forme:

$\frac{x}{\varphi(x)} = \frac{a}{b}$. Pour $x = 1$ on a $\frac{a}{b} = 1$. Si l'on a $x > 1$, on aura

$\frac{a}{b} = \frac{p}{p-1} \frac{q}{q-1} \frac{r}{r-1}$, p, q, \dots, r désignant des nombres premiers inégaux de la décomposition de x . Ainsi le problème n'est résoluble que si la fraction $\frac{a}{b}$ est égale soit à 1, soit

à un nombre holoïde, dont la décomposition ne contient que les nombres premiers holoïdes au premier degré. Dans le premier cas le problème n'a qu'une seule solution $x = 1$; dans le second cas la solution cherchée s'exprime par la formule $x = p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma$ avec les exposants entiers positifs arbitraires $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, les nombres premiers p, q, \dots, r étant, d'après le théorème I, parfaitement déterminés par la décomposition holoïde de la fraction $\frac{a}{b}$. On résout par la méthode analogue une équation plus compliquée, à savoir $ax = b\varphi_\nu(x)$, a, b et ν étant des entiers positifs donnés et $\varphi_\nu(x)$ désignant une itération d'ordre ν de la fonction arithmétique $\varphi(x)$.

§ 8. Les définitions et les propositions de la théorie des nombres holoïdes ont beaucoup de traits analogues avec les éléments de la théorie des nombres entiers. Plus précisément nous avons en vue les propositions de la théorie des nombres que l'on peut déduire directement de l'unicité de la décomposition

du nombre entier en facteurs premiers, en laissant de côté l'algorithme d'Euclidé. En remplaçant dans ce cycle de définitions et de propositions les mots «nombre entier», «diviseur», «divise», «divisible», «multiple», «nombre premier», «nombres premiers entre eux» respectivement par les mots «nombre holoïde», «diviseur holoïde», «divise, divisible dans le domaine holoïde», «multiple holoïde», «nombre premier holoïde», «nombres premiers entre eux dans le domaine holoïde», on obtient les définitions et les propositions correspondantes de la théorie des nombres holoïdes. Citons par exemple quelques définitions: le commun diviseur holoïde de plusieurs nombres holoïdes c'est un nombre holoïde qui divise tous ces nombres dans le domaine holoïde; le plus petit commun multiple holoïde de plusieurs nombres holoïdes donnés c'est le plus petit nombre holoïde qui est divisible dans le domaine holoïde par tous les nombres donnés; les nombres holoïdes a et b s'appellent premiers entre eux ou relativement premiers dans le domaine holoïde, si leur plus grand commun diviseur holoïde est égal à 1. Citons maintenant les textes des propositions principales du cycle mentionné.

a) Le nombre holoïde $h = a^\alpha b^\beta \dots c^\gamma$, dont la décomposition contient des nombres premiers holoïdes inégaux a, b, \dots, c avec les exposants entiers positifs $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, a $(\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\gamma + 1)$ diviseurs holoïdes distincts. L'ensemble de tous ces diviseurs coïncide avec l'ensemble de tous les termes du produit

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha) \cdot (1 + b + b^2 + \dots + b^\beta) \dots (1 + c + c^2 + \dots + c^\gamma).$$

En désignant par s la somme de tous les diviseurs holoïdes de h , on a

$$s = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \dots \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1}.$$

b) Le plus grand commun diviseur holoïde de plusieurs nombres holoïdes donnés est égal au produit de tous les nombres premiers holoïdes qui entrent simultanément dans les décompositions de tous les nombres donnés, pris avec les exposants minimaux dans toutes ces décompositions. S'il n'y a pas du tout de facteurs premiers holoïdes communs, le plus grand commun diviseur holoïde est égal à 1.

c) L'ensemble de tous les diviseurs holoïdes communs de plusieurs nombres holoïdes donnés coïncide avec un ensemble de tous les diviseurs holoïdes du plus grand commun diviseur holoïde de tous les nombres donnés.

d) En divisant plusieurs nombres holoïdes par leur plus grand commun diviseur holoïde, on obtient une suite de nombres dont le plus grand commun diviseur holoïde est égal à 1.

e) Le plus petit commun multiple holoïde de plusieurs nombres holoïdes donnés est égal au produit de tous les nombres premiers holoïdes distincts qui se rencontrent dans les décompositions de tous les nombres donnés, pris avec les exposants maximaux dans toutes ces décompositions. Si chacun des nombres donnés holoïdes est égal à 1, leur plus petit commun multiple est de même égal à 1.

f) Le plus petit commun multiple holoïde de deux nombres holoïdes est égal à leur produit, divisé par leur plus grand commun diviseur holoïde.

g) Un nombre holoïde a , qui est relativement premier dans le domaine holoïde à chacun de plusieurs nombres holoïdes b_1, b_2, \dots, b_m , est relativement premier à leur produit $b_1 b_2 \dots b_m$.

h) En divisant deux nombres holoïdes par leur plus grand commun diviseur holoïde, on obtient deux quotients premiers entre eux dans le domaine holoïde.

i) Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres holoïdes qui sont relativement premiers deux à deux dans le domaine holoïde est égal au produit de tous ces nombres.

Toutes ces propositions offrent une analogie parfaite avec la théorie de la divisibilité des nombres entiers. Et pourtant on ne peut pas fonder la théorie de la divisibilité des nombres holoïdes sur quelque chose de semblable à l'algorithme d'Euclide. Ça provient déjà de ce que le domaine holoïde ne forme pas, comme on le verra aussitôt, un module; en d'autres termes la somme ou la différence de deux nombres holoïdes ne représente pas dans tous les cas de même un nombre holoïde. Par exemple les nombres 6 et $\frac{23}{22}$ sont holoïdes, mais leur somme $6 + \frac{23}{22} = \frac{155}{22}$ n'est pas holoïde [voir exemple h) du paragraphe 7]. De même la somme $\frac{9}{4} + \frac{47}{46} = \frac{301}{92}$ des nombres holoïdes $\frac{9}{4}$ et $\frac{47}{46}$ n'est pas

holoïde [exemple *g*) du paragraphe 7]. La différence $\frac{3}{2} - \frac{7}{6} = \frac{1}{3}$ des nombres premiers holoïdes $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{6}$ est égale à la fraction $\frac{1}{3}$ manifestement non holoïde. Au contraire, la somme des nombres holoïdes $\frac{14}{3}$ et $\frac{3}{2}$ est égale au nombre holoïde $\frac{37}{6}$ [exemples *b*) et *e*) du paragraphe 7]. Donc la différence $\frac{37}{6} - \frac{14}{3} = \frac{3}{2}$ des nombres holoïdes $\frac{37}{6}$ et $\frac{14}{3}$ est aussi holoïde.

Ainsi la manque de la division avec un reste et avec un quotient incomplet ne permet pas de construire dans le domaine holoïde une théorie des congruences analogue à celle de la théorie des nombres entiers. C'est pourquoi nous avons crû inutile d'incorporer dans le domaine holoïde le nombre zéro, quoique ça soit possible d'un point de vue formel.

Résumé.

Théorie de la divisibilité des nombres fractionnaires d'une classe spéciale.

Par E. Bunický.

(Présenté le 7. mars 1934.)

1) *Définitions.* a) Appelons *nombre holoïde* tout nombre rationnel *h* de la forme

$$(1) \quad h = \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdots \frac{p_n}{p_n-1}$$

p_1, p_2, \dots, p_n étant des nombres premiers, non nécessairement inégaux deux à deux. En réunissant des facteurs égaux dans le second membre, on peut écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad h = \left(\frac{p_1}{p_1-1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_2}{p_2-1} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{p_n}{p_n-1} \right)^{\alpha_n};$$

p_1, p_2, \dots, p_n désignent maintenant des nombres premiers dis-

tinets, a_1, a_2, \dots, a_n étant des entiers positifs quelconques. Au lieu de « h est un nombre holoïde» nous dirons souvent plus còurt « h est holoïde».

b) Le nombre 1 est holoïde par définition. Le nombre h de la forme $h = \frac{p}{p-1}$, où p est un nombre premier quelconque, s'appelle *nombre premier holoïde*.

c) Décomposer un nombre holoïde en facteurs premiers holoïdes ça signifie le représenter sous la forme d'un produit des nombres premiers holoïdes. L'identité $1 = 1$ exprime par définition la décomposition du nombre holoïde 1; l'identité $\frac{p}{p-1} = \frac{p}{p-1}$ exprime la décomposition du nombre premier holoïde $\frac{p}{p-1}$.

d) Le nombre holoïde g est un *diviseur holoïde* du nombre h , si le quotient $\frac{h}{g}$ est aussi holoïde. On nomme h *multiple holoïde* de g , si g est un diviseur holoïde de h .

2) Les nombres holoïdes ont les propriétés suivantes.

I. a) Tout nombre holoïde ne peut se décomposer en facteurs premiers holoïdes que d'une seule manière. b) Pour que le nombre holoïde h soit divisible par un nombre holoïde g , il faut et il suffit que la décomposition holoïde de h contienne la décomposition holoïde de g . c) Soit $\varphi(x)$ une fonction arithmétique qui exprime combien il y a de nombres naturels, premiers à un entier x et non supérieurs à x . En désignant par N un entier positif quelconque plus grand que l'unité, on aura

$$(3) \quad \frac{N}{\varphi(N)} = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \cdot \dots \cdot \frac{r}{r-1}$$

où p, q, \dots, r sont des nombres premiers distincts de la décomposition de N . Donc la fraction $\frac{N}{\varphi(N)}$ est holoïde. Désignant par $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) les itérations successives de la fonction $\varphi(x)$, soit ν le premier indice dans la suite

$\varphi(N), \varphi_2(N), \dots, \varphi_{\nu-1}(N), \varphi_\nu(N)$, pour lequel a lieu l'égalité $\varphi_\nu(N) = 1$. En vertu de cette égalité on peut écrire l'identité

$$N = \frac{N}{\varphi(N)} \frac{\varphi(N)}{\varphi_2(N)} \frac{\varphi_2(N)}{\varphi_3(N)} \dots \frac{\varphi_{v-2}(N)}{\varphi_{v-1}(N)} \cdot \varphi_{v-1}(N) \text{ sous la forme}$$

$$(4) \quad N = \frac{N}{\varphi(N)} \cdot \frac{\varphi(N)}{\varphi_2(N)} \frac{\varphi_{v-1}(N)}{\varphi_v(N)},$$

d'où il suit, d'après la formule (3), que tout nombre naturel est holoïde. De plus l'équation (4) donne la règle de la décomposition de N en facteurs premiers holoïdes.

d) Soit $\frac{m}{n}$ un nombre rationnel, m et n étant des entiers

positifs. Pour que le nombre $\frac{m}{n}$ soit holoïde, il faut et il suffit que la décomposition en facteurs premiers holoïdes de m contienne la décomposition holoïde de n .

II. a) Entre deux nombres réels quelconques a et b satisfaisant aux relations $1 \leq a < b$ il existe une infinité de nombres holoïdes et de même une infinité de nombres rationnels non holoïdes. b) L'infinité dénombrable de tous les nombres rationnels positifs se décompose en deux ensembles infinis dénombrables, à savoir l'ensemble infini dénombrable de nombres holoïdes et l'ensemble infini dénombrable de nombres rationnels positifs non holoïdes. c) L'infinité dénombrable de nombres holoïdes se compose de l'ensemble infini dénombrable de nombres naturels et de l'ensemble infini dénombrable de tous les nombres holoïdes qui ne sont pas entiers.

III. On peut remplacer la règle I. d) qui sert à discerner, si un nombre donné rationnel est holoïde, par une règle plus simple. Soit $\frac{m}{n}$ une fraction rationnelle, m et n étant des entiers positifs premiers entre eux. Si cette fraction 1^o) est plus petite que l'unité ou 2^o) que la décomposition du dénominateur n contient un nombre premier qui est plus grand que le nombre premier maximal de la décomposition du numérateur m , le nombre $\frac{m}{n}$ n'est pas holoïde; dans chacun de ces deux cas nous dirons que le nombre $\frac{m}{n}$ est *manifestement non holoïde*. Soit

maintenant $\frac{m}{n}$ une fraction rationnelle irréductible, plus grande

que l'unité et non manifestement non holoïde. Désignons par p_1 le nombre premier maximal de la décomposition du numérateur m et par α_1 l'exposant maximal de p_1 dans cette décomposition; appelons maintenant l'expression $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}$ *premier élément de la décomposition holoïde* du nombre $\frac{m}{n}$ ou plus court *premier élément* de $\frac{m}{n}$. Divisons le nombre $\frac{m}{n}$ par son premier élément $\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1}$ et mettons le quotient sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{m_1}{n_1}$. Si cette fraction est plus grande que l'unité et de plus n'est pas manifestement non holoïde, divisons le nombre $\frac{m_1}{n_1}$ par son premier élément $\left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2}$ et calculons de nouveau le quotient sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{m_2}{n_2}$. Si ce quotient est de nouveau plus grand que l'unité et n'est pas manifestement non holoïde, nous le divisons par son premier élément $\left(\frac{p_3}{p_3-1}\right)^{\alpha_3}$ et ainsi de suite. On conviendra de n'arrêter le prolongement de tels calculs que si l'on obtient un quotient qui sera ou bien égal 1, ou bien manifestement non holoïde. Or on démontre sans peine que les nombres premiers p_1, p_2, p_3, \dots vont en décroissant; il en suit que l'on arrivera toujours à un quotient $\frac{m_k}{n_k}$ qui sera 1^o) soit égal à 1, 2^o) soit manifestement non holoïde. Dans le premier cas le nombre $\frac{m}{n}$ est holoïde, et le produit

$$\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{p_2}{p_2-1}\right)^{\alpha_2} \cdot \left(\frac{p_k}{p_k-1}\right)^{\alpha_k}$$

donne sa décomposition holoïde; dans le second cas le nombre $\frac{m}{n}$ n'est pas holoïde.

IV On transpose sans peine dans la théorie des nombres holoïdes les notions du plus grand commun diviseur, du

plus petit commun multiple et des nombres premiers entre eux; de plus on démontre à l'aide des propositions I *a*), *b*) un cycle de théorèmes, liés avec ces notions et analogues aux théorèmes correspondants de la théorie des nombres entiers (à titre d'exemple on peut citer les règles du calcul du plus grand commun diviseur ou du plus petit commun multiple au moyen de la décomposition des nombres donnés en facteurs premiers holoïdes; ou bien la proposition: en divisant deux nombres holoïdes par leur plus grand commun diviseur, on obtient les quotients holoïdes premiers entre eux, etc.).

Mais cette analogie avec la théorie des nombres entiers n'est pas assez profonde.

En effet, l'ensemble de tous les nombres holoïdes ne forme pas un module. Par exemple, on vérifie par les méthodes indiquées plus haut que la somme de deux nombres holoïdes $\frac{14}{3}$ et $\frac{3}{2}$ est holoïde; mais la somme des nombres holoïdes 6 et $\frac{23}{22}$ ainsi que la somme des nombres holoïdes $\frac{9}{4}$ et $\frac{47}{46}$ n'est pas holoïde. Donc on ne peut pas établir dans la théorie des nombres holoïdes la notion de la division avec un reste et avec un quotient incomplet par une voie analogue à celle de la théorie des nombres entiers; de même on ne peut pas construire quelque chose de parfaitement analogue à l'algorithme d'Euclide ou à la théorie des congruences.

VI.

Sur la variation des arbitraires et certaines coordonnées normales de la dynamique.

Par WLADIMÍR WÁCLAV HEINRICH à Prague.

(Présenté le 7. mars 1934)*

Le premier paragraphe du présent mémoire n'est qu'un bref aperçu des recherches aujourd'hui en partie bien connues. Je ne les donne que pour introduire le lecteur dans un ordre d'idées qui nous sera utile dans la suite.

Comme une espèce de vague coup d'oeil rétrospectif je me permets d'ajouter.

Il y a bien des années j'avais imaginé deux moyens extrêmement simples, fortement propres à la construction de toute une foule des éléments canoniques, très variés. J'ai vérifié l'utilité de ces moyens par d'innombrables exemples et je me plaisais à en faire usage. Ils m'ont guidé bien loin au delà de mes connaissances de cette époque.

Avant de les publier je fus assez heureux d'apprendre qu'à ce point de vue j'ai été devancé par M. Paul Epstein.***) C'est en traitant les théories modernes des atomes que ce savant avait déjà découvert la notion de l'impulsion moyenne — même quelques années avant moi. D'ailleurs le principe de l'idée remonte jusqu'à Delaunay.

Je n'ai donc insisté à la publication de mes propres recherches. Et en effet je poursuivais tout un autre but et cela

*) Le présent Mémoire fut transmis à Monsieur le Secrétaire de la Société Royale le 7. janvier 1933. Il me fut retourné avec la demande de réduire notablement le texte. Malheureusement même dans la nouvelle forme l'impression immédiate n'était pas possible à défaut de ressources nécessaires. C'est ainsi que la présentation devant la Société n'a eu lieu qu'à la date fixée ci-dessus.

**) Zeitschrift für Physik. VIII. Band, 1922, p. 211, p. 305.

dans une branche de science bien éloignée de celle cultivé par l'auteur susmentionné.

Pendant les années suivantes j'eus la satisfaction de trouver que l'idée de M. Epstein, légèrement perfectionnée, fut acceptée généralement dans les théories modernes des atomes. Plus tard elle a passée même dans les traités concernant la physique mathématique. (Par exemple Born Atommechanik I., Frank-Riemann-Weber Differentialgl. II, p. 52.) Ce n'est que pendant les toutes dernières années que j'ai commencé à désapprouver ma propre négligence.

Et en effet la vraie portée de l'idée Delaunay-Epstein semble avoir restée incomprise par les géomètres. Son extrême fécondité dans la mécanique céleste ne fut appréciée ni exploitée par aucun auteur.

Même les traités les plus modernes comme ceux de Birkhof, Andoyer et Brown n'en font aucune mention.

Voilà pourquoi je ne peux plus hésiter à développer les notions du paragraphe un.

Je tiens à démontrer qu'elles sont extrêmement graves de conséquences.

C'est ce que je vais faire dans toute une série des mémoires ultérieurs.

Donc en reprenant mes propres recherches au point de vue susmentionné je vais les faire dans la forme d'il y a bien des années.

Dans le paragraphe deux j'étudie la variation des arbitraires en cas du problème de deux corps. On trouve que la méthode de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi n'est pas à préférer, quoique étant favorisée dans tous les traités de mécanique céleste presque exclusivement. Le retour aux idées de Lagrange-Delaunay, c'est-à-dire l'emploi de la notion de l'impulsion moyenne, séculaire réduite le nombre de crochets à calculer de quinze à trois. En dehors de cet avantage énorme, l'explication du sens des constantes canoniques s'opère quasi automatiquement (c'est à dire sans penser).

Dans le paragraphe trois je construis les éléments séculaires-moyens d'une solution périodique.

A cet occasion je développe une méthode remarquable-

ment simple et courte effectuant la réduction du problème des trois corps.

Les éléments trouvés représentent la solution complète de la question comment réduire les points représentatifs d'une solution périodique ou séculaire aux points représentatifs normaux, se mouvant sur des circonférences. L'avantage de cette forme normale devient remarquable par le fait qu'on peut étudier ensuite le voisinage d'une solution périodique quelconque par les mêmes méthodes qu'on recherche d'ordinaire la proximité des mouvements Képlériens. Il se montre — entre autre — que la question de stabilité se présente sous forme d'un problème classique des perturbations, où la distance du point représentatif de la solution périodique originaire (centre de libration) joue le rôle du paramètre de petite masse troublante.

§ 1. La variation des arbitraires et la notion du moment séculaire.

1. Nous allons envisager le problème suivant:

Supposons les équations du mouvement d'une forme quelconque, pas nécessairement celle de Hamilton, c'est à dire canonique. Supposons en outre que ces équations contiennent un potentiel cinétique qui peut être partagé en deux parties L_1 et L_2 , toutes deux, fonctions des coordonnées et de leurs vitesses et du temps.

L_1 soit une fonction telle que le système plus simple, ne contenant que L_1 , ait pu être intégré par une méthode quelconque.

Nous n'envisageons pas seulement les cas intégrables par la séparation des variables comme ceux de Jacobi, Liouville et Stäckel.

Nous allons faire l'hypothèse que la forme finale obtenue, par exemple, par la méthode des coefficients indéterminés se présente sous la forme des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes procédant suivant les multiples des variables angulaires qui sont elles mêmes fonctions linéaires du temps.

Cette intégrale du problème partiel, qui ne tient compte

que d'une partie du potentiel cinétique renfermera les constantes d'intégration.

Nous allons nous demander, comment effectuer la variation de ces constantes, afin d'aborder le problème complet, qui prend en considération aussi l'existence de la deuxième partie du potentiel cinétique.

Nous allons partir — pour fixer les idées — des équations du mouvement les plus simples à la Euler en coordonnées rectangulaires

$$m_k \ddot{x}_k = X_k = \frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad m_k \ddot{y}_k = Y_k = \frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad m_k \ddot{z}_k = Z_k = \frac{\partial V}{\partial z_k},$$

$$k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Transformons les coordonnées rectangulaires en coordonnées généralement curvilignes φ_k , quelconques. Ces coordonnées généralisées au sens de Lagrange, étant choisies le plus convenablement possible, nous allons obtenir les équations du mouvement à la Lagrange et les équations à la Hamilton qui leur sont équivalentes

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial V}{\partial \varphi_k}, \quad L = T + V, \quad V = V_1 + V_2$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi_k}, \quad \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k}, \quad (2)$$

$$\tilde{H} = \sum \dot{\varphi}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} - T - V_1 - V_2 = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2$$

J'emploie la notation de Lagrange. Le point signifie la dérivation, T désignant la force vive du système, V le potentiel des forces.

Supposons, pour fixer les idées, trois degrés de liberté seulement. Admettons en outre que les équations du mouvement dans le cas plus simple, où \tilde{H} se réduit à \tilde{H}_1 — soient intégrables au moyen des séries trigonométriques généralisées absolument et uniformément convergentes — procédant suivant les multiples d'autant d'arguments qu'il y a de degrés de liberté.

Les séries ainsi trouvées s'écrivent:

$$Q_k = a_o + \Sigma a_{m_1, m_2, m_3} e^{i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)}$$

$$\varphi_k = b_o + \Sigma b_{m_1, m_2, m_3} e^{i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)}$$

m_k , signifiant tous les nombres entiers positifs et négatifs,

$$i = \sqrt{-1}, \quad u_k = n_k t + k_k$$

On aura donc en composant les deux transformations :

$$x = A_o + \Sigma A_{m_1, m_2, m_3} e^{i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)}, \quad u_1 = n_1 t + k_1, \quad (m_k \text{ entiers pos. et neg.})$$

$$y = B_o + \Sigma B_{m_1, m_2, m_3} e^{i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)}, \quad u_2 = n_2 t + k_2, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$z = C_o + \Sigma C_{m_1, m_2, m_3} e^{i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)}, \quad u_3 = n_3 t + k_3, \quad (3)$$

$$A_{m_1, m_2, m_3} = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi x(u_1, u_2, u_3) e^{-i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)} du_1 du_2 du_3,$$

$$B_{m_1, m_2, m_3} = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi y(u_1, u_2, u_3) e^{-i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)} du_1 du_2 du_3,$$

$$C_{m_1, m_2, m_3} = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi z(u_1, u_2, u_3) e^{-i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3)} du_1 du_2 du_3$$

Donc nous admettons que les résultats de l'intégration partielle, auxquelles nous fûmes conduit, ne soient plus canoniques.

Theorème I. En choisissant pour coordonnées angulaires les formes linéaires u_1, u_2, u_3 — je dis que les coordonnées scalaires, conjuguées, — qui effectuent en même temps la variation des constantes arbitraires du problème complet — seront données par les expressions suivantes

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} du_1 du_2 du_3, \quad \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} du_1 du_2 du_3,$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} \right] = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} du_1 du_2 du_3. \quad (4)$$

Ja vais appeler ces nouvelles coordonnées, les moments séculaires, ou les impulsions séculaires.

Les coordonnées scalaires, ou les moments séculaires se trouvent très facilement, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux quadratures — dans la plupart des problèmes de la mécanique céleste et de la mécanique rationnelle.

En effet elles représentent les parties non-périodiques constantes, toutes connues (d'après la terminologie de H. Poincaré) ou séculaires (d'après la terminologie de la mécanique céleste).

On voit tout de suite que les coordonnées normales ainsi définies résolvent complètement le problème général formulé dans la préface de ce mémoire, en réduisant le mouvement des points représentatifs de l'équilibre au simple mouvement uniforme sur les circonférences (cercles).

Voici les équations du mouvement nouvelles qui effectuent la variation des arbitraires dans le cas du problème complet:

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s_k}, \quad \frac{ds_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5)$$

où nous avons posé

$$H = \sum \dot{u}_k \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] - [T] - [V_1] - V_2, \quad s_k = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right]$$

en désignant la partie constante, séculaire, toute connue — par le signe des crochets.

La démonstration du théorème est très simple:

Nous avons choisi pour nouvelles variables angulaires les expressions u_1, u_2, u_3 . D'après la théorie bien connue de Lagrange-Hamilton, on aura pour les nouvelles variables conjuguées, c'est-à-dire les »moments«

$$U_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1}, \quad U_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2}, \quad U_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3}.$$

J'emploie la notation de Lagrange. Le point signifie la dérivée, T désignant la force vive du système, transformée au moyen de nos séries écrites plus haut. Les moments trouvés d'après Lagrange n'effectuent pas la variation des arbitraires. Ils seront en général donnés par les séries périodiques à trois variables.

Je dis que les coordonnées nouvelles, canoniques et conjuguées avec les variables angulaires, choisies, — seront données par les équations (5).

Les équations canoniques du mouvement expriment la condition pour que l'accroissement

$$dP' = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} du_k - \left(\sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial u_k} - T - V_1 - \mu R \right) dt, \quad V_2 = +\mu R \quad (6)$$

soit une différentielle totale, exacte. Donc nous les écrivons sous la forme suivante

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} = -\frac{\partial H}{\partial u_1}, \quad \frac{dU_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u_2}, \quad \frac{dU_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u_3},$$

$$H = \sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 - \mu R. \quad (7)$$

T signifie la force vive du système, $V = V_1 + \mu R$ l'énergie potentielle.

Nous en concluons qu'à fortiori l'accroissement

$$dP = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} du_k - \left(\sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 \right) dt = \sum \frac{\partial P}{\partial u_k} du_k + \frac{\partial P}{\partial t} dt \quad (8)$$

réduit à sa partie première, ne contenant aucune fonction perturbatrice μR , sera une différentielle exacte.

Cette équation est exprimée par des séries. Elle pourra donc être scindée en une partie périodique et une qui ne l'est pas, et nous aurons

$$d[P] = \sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] du_k - \left(\dot{u}_k \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] - [T + V_1] \right) dt = \sum \frac{\partial [P]}{\partial u_k} du_k + \frac{\partial [P]}{\partial t} dt,$$

$$d\{P\} = \sum \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right\} du_k - \left(\dot{u}_k \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right\} - \{T + V_1\} \right) dt =$$

$$= \sum \frac{\partial \{P\}}{\partial u_k} du_k + \frac{\partial \{P\}}{\partial t} dt. \quad (9)$$

Nous désignons la partie séculaire, c'est-à-dire apériodique par des crochets $[\]$, et la partie périodique par des accolades $\{ \}$.

Les trois dernières conditions peuvent s'écrire aussi

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = \sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1, \quad \frac{\partial P}{\partial u_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k},$$

$$-\frac{\partial [P]}{\partial t} = \sum \dot{u}_k \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] - [T + V_1], \quad \frac{\partial [P]}{\partial u_k} = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right],$$

$$-\frac{\partial \{P\}}{\partial t} = \sum \dot{u}_k \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right\} - \{T + V_1\}, \quad \frac{\partial \{P\}}{\partial u_k} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right\}. \quad (10)$$

Nous allons employer ensuite le critère bien connu de Jacobi-Radau. Nous avons choisi pour nouvelles variables angulaires les mêmes variables qu'auparavant. Donc, il faudra démontrer que la différence

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} d u_k - \sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] d u_k &= \sum \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] \right) d u_k = \\ &= \sum \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right\} d u_k = d S \end{aligned} \quad (11)$$

est une différentielle totale, exacte. Mais la chose est évidente parce que les équations montrent par définition que la fonction S de Jacobi-Radau (11) coïncide nécessairement avec la fonction purement périodique $\{P\}$, mise en évidence ci-dessus (10).

On trouve donc enfin:

$$S = \{P\}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \{P\}}{\partial t} \quad (12)$$

On pourrait dire aussi: dS est une différentielle totale, puisque les conditions

$$\frac{\partial \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right]}{\partial u_l} = \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_l}}{\partial u_k} = 0$$

seront toujours remplies pour $k > l$ ainsi que pour $k = l$.

En effet, le premier membre sera nul, par la définition du moment séculaire qui est nécessairement constant et indépendant de la fonction linéaire du temps u_l .

Et le deuxième membre devra être indépendant de la coordonnée angulaire u_k représentant la variable scalaire, conjuguée de Lagrange.

D'après le critère de Jacobi-Radau, il faudra ajouter à la nouvelle fonction caractéristique la dérivée $\frac{\partial S}{\partial t}$ et nous n'avons qu'à retourner à l'équation originaire (6), qui s'écrira cette fois, puisque nous avons choisi les moments séculaires pour nouvelles variables

$$dP = \sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] d u_k - \left(\sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 + \mu R + \frac{\partial \{P\}}{\partial t} \right) dt$$

ou d'après (10)

$$= \sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] du_k - \left(\sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 + \mu R - \sum \dot{u}_k \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right\} + \right. \\ \left. + \{T + V_1\} \right) dt = \sum \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] du_k - \left(\sum \dot{u}_k \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right] - [T + V_1] + \mu R \right) dt \quad (13)$$

c. q. f. d.

Ajoutons pour plus de clarté que dans les conditions que nous avons supposé jusqu'à présent (où la fonction hamiltonienne ne renferme pas le temps explicite) on aura même

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \{P\}}{\partial t} = 0$$

de sorte que la partie qui augmente la fonction caractéristique d'après Jacobi-Radau se réduit nécessairement à zéro.

Et en effet, les équations du mouvement (7) et tout particulièrement celles, où la fonction perturbatrice n'existe pas admettent l'intégrale de l'énergie, à la Jacobi

$$H_1 = \sum \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 = -C(s_k)$$

L'équation (8) montre alors que

$$dP = \sum \frac{\partial P}{\partial u_k} du_k + C dt$$

donc

$$d[P] = \sum \frac{\partial [P]}{\partial u_k} du_k + C dt,$$

$$d\{P\} = \sum \frac{\partial \{P\}}{\partial u_k} du_k$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\partial \{P\}}{\partial t} = \sum \dot{u}_k \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right\} - \{T + V_1\} = 0 = -\frac{\partial S}{\partial t} \text{ c. q. f. d.}$$

On pourrait raisonner aussi comme il suit.

Les équations du mouvement à la Hamilton ne sont que le premier système de Pfaff, appartenant à la forme différentielle, linéaire dP .

Une telle forme peut toujours être changée en une autre forme équivalente. Le premier système de Pfaff appartenant à la nouvelle forme constituera les nouvelles équations du mouvement.

Or la forme différentielle linéaire dP peut être changée

sans détruire la forme canonique des équations qui s'en déduisent — par exemple, en ajoutant une différentielle totale, exacte. En effet cette différentielle totale ne contribue en rien à la formation du premier système de Pfaff.

Nous allons prendre pour cette différentielle totale — d'après les équations écrites plus haut — la fonction S qui d'après (9) apparaît en réalité comme une différentielle totale et nous aurons:

c. q. f. d.

Donc nous avons réussi à effectuer au moyen du théorème I — la variation des constantes en forme canonique, quoique partant des coordonnées non canoniques.

Et rien n'empêche de répéter une telle opération plusieurs fois.

2. Voici une méthode très simple servant à effectuer de telles répétitions presque automatiquement.

Décomposons la fonction des forces vives en formes des degrés, marqués chaque fois par l'indice

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (14)$$

Nous aurons d'après Euler

$$2T = \sum \left(\dot{x} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \dot{z} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = 2 \sum \dot{u}_k \frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}_k} + \sum \dot{u}_k \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_k} + T_0 \quad (15)$$

on bien

$$2[T] = \sum \dot{u}_k \left(2 \left[\frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}_k} \right] + \left[\frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_k} \right] + T_0 \right) \quad (16)$$

On n'aura qu'à introduire chaque fois les séries effectuant la variation des constantes, ensuite pour former les moments appartenants aux nouvelles équations canoniques — on isolera les parties séculaires des coefficients des vitesses choisies — et ainsi de suite.

Nous aurons même d'ordinaire

$$T_1 = T_0 = 0, T = T_2 \quad (17)$$

On en juge immédiatement d'après (16) que

$$\frac{\partial [T]}{\partial \dot{u}_k} = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} \right]. \quad (18)$$

3. Nous allons donner une extension du théorème énoncé à la page 5., 6. qui nous sera utile dans la suite.

Nous allons supposer que le temps figure explicitement dans les arguments des termes trigonométriques des développements de la fonction hamiltonienne et dans la transformation des coordonnées. Afin d'élucider tous les points essentiels nous allons procéder avec plus de détails. On part d'ordinaire des équations canoniques appartenant à un système canonique des variables quelconques u_k ,

$$U_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k}, \quad \frac{du_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial U_k}, \quad \frac{dU_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (a)$$

et la fonction hamiltonienne

$$H = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \dot{u}_2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} \dot{u}_3 - T - V_1 - V_2; \quad V_2 = \mu R \quad (b)$$

Il s'agit d'un système non conservatif qui n'admet pas l'intégrale première à la Jacobi en général.

On pose d'abord afin d'éviter le temps explicite

$$u_4 = u = nt + k, \quad \frac{du}{dt} = n = \frac{\partial(nv + H)}{\partial v}, \quad \frac{dU_4}{dt} = \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial(nv + H)}{\partial u}, \quad U_4 = v, \quad (d')$$

et l'on aura un système à quatre degré de liberté

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial U_k}, \quad \frac{dU_k}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial u_k}, \quad (e')$$

avec la fonction caractéristique

$$H' = nv + H. \quad (f)$$

Ce nouveau système admet une intégrale première à la Jacobi

$$H' = nv + H = h. \quad (g)$$

En choisissant une partie

$$H'_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \dot{u}_2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} \dot{u}_3 - T - V_1$$

accessible à une intégration partielle, on trouve

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} = U_1 = L_0 + L_1 \cos \tilde{\Theta} + L_2 \cos 2 \tilde{\Theta} + \dots,$$

$$\tilde{\Theta} = m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0 + m_3 u_3^0 + m_4 (nt + k)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} = U_2 = G_0 + G_1 \cos \tilde{\Theta} + G_2 \cos 2 \tilde{\Theta} + \dots,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_3} = U_3 = H_3 + H_1 \cos \tilde{\Theta} + H_2 \cos 2 \tilde{\Theta} + \dots, \quad (c)$$

$$u_1^0 + \{u_1\} = u_1 = n_1 t + k_1 + l_1 \sin \tilde{\Theta} + l_2 \sin 2 \tilde{\Theta} + \dots, \\ u_1^0 = n_1 t + k_1, \quad u_4 = u_4^0 = u,$$

$$u_2^0 + \{u_2\} = u_2 = n_2 t + k_2 + g_1 \sin \tilde{\Theta} + g_2 \sin 2 \tilde{\Theta} + \dots, \quad u_2^0 = n_2 t + k_2,$$

$$u_3^0 + \{u_3\} = u_3 = n_3 t + k_3 + h_1 \sin \tilde{\Theta} + h_2 \sin 2 \tilde{\Theta} + \dots, \quad u_3^0 = n_3 t + k_3.$$

Les accolades telles que $\{u_k\}$, signifient la partie purement périodique de développement — notation d'ailleurs devenue déjà contumière dans le présent mémoire.

Nous allons former les expressions

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \dot{u}_1^0 + \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_1^0} \dot{u}_1^0 + \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_2^0} \dot{u}_2^0 + \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_3^0} \dot{u}_3^0 + \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_4^0} \dot{u}_4^0 \\ \dot{u}_2 &= \dot{u}_2^0 + \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_1^0} \dot{u}_1^0 + \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_2^0} \dot{u}_2^0 + \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_3^0} \dot{u}_3^0 + \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_4^0} \dot{u}_4^0 \\ \dot{u}_3 &= \dot{u}_3^0 + \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_1^0} \dot{u}_1^0 + \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_2^0} \dot{u}_2^0 + \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_3^0} \dot{u}_3^0 + \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_4^0} \dot{u}_4^0 \\ \dot{u}_4 &= \dot{u}_4^0 = \dot{u} \end{aligned} \quad (d)$$

et poser:

$$\tau = \dot{u}_1 U_1 + \dot{u}_2 U_2 + \dot{u}_3 U_3 + \dot{u}_4 U_4 = \dot{u}_1^0 \tilde{U}_1 + \dot{u}_2^0 \tilde{U}_2 + \dot{u}_3^0 \tilde{U}_3 + \dot{u}_4^0 \tilde{U}_4 \quad (h)$$

en définissant par là, nouvelles coordonnées à la Lagrange u_k^0 , et leurs moments conjugués \tilde{U}_k :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= U_1 \left(1 + \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_1^0} \right) + U_2 \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_1^0} + U_3 \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_1^0} \\ \tilde{U}_2 &= U_1 \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_2^0} + U_2 \left(1 + \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_2^0} \right) + U_3 \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_2^0} \\ \tilde{U}_3 &= U_1 \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_3^0} + U_2 \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_3^0} + U_3 \left(1 + \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_3^0} \right) \\ \tilde{U}_4 &= U_1 \frac{\partial \{u_1\}}{\partial u_4^0} + U_2 \frac{\partial \{u_2\}}{\partial u_4^0} + U_3 \frac{\partial \{u_3\}}{\partial u_4^0} + U_4, \quad U_4 = v. \end{aligned} \quad (e)$$

Cette transformation sera évidemment canonique, puisqu'on aura [d'après (h)]

$$U_1 \delta u_1 + U_2 \delta u_2 + U_3 \delta u_3 + U_4 \delta u_4 - \tilde{U}_1 \delta u_1^0 - \tilde{U}_2 \delta u_2^0 - \tilde{U}_3 \delta u_3^0 - \tilde{U}_4 \delta u_4^0 = 0 = (\tau - \tau) dt \quad (j)$$

On trouvera donc les équations du mouvement

$$\frac{du_k^0}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial u_k^0}, \quad \frac{\partial \tilde{U}_k}{dt} = - \frac{\partial H'}{\partial u_k^0}, \quad H' = n v + H, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

Il s'agit maintenant de passer de variables $u_k^0 \tilde{U}_k$, aux variables $u_k^0, [\tilde{U}_k]$, les crochets signifiant la partie séculaire, toute connue, constante.

On aura

$$\tilde{U}_1 du_1^0 + \tilde{U}_2 du_2^0 + \tilde{U}_3 du_3^0 + \tilde{U}_4 du_4^0 - [\tilde{U}_1] du_1^0 - [\tilde{U}_2] du_2^0 - [\tilde{U}_3] du_3^0 - [\tilde{U}_4] du_4^0 = dS'' \quad (k)$$

puisque le même raisonnement qu'auparavant page 8. montre que la dite différence est une différentielle exacte.

C'est ainsi que nous avons obtenu les équations canoniques, à quatre degré de liberté qui s'écrivent d'après le théorème (4) (5) de la page 5, 6.

$$\frac{du_k^0}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial s_k}, \quad \frac{ds_k}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial u_k^0}, \quad [\tilde{U}_k] = s_k, \quad (1)$$

$$H'' = n[v] + \sum i_k^0 s_k - [T] - [V_1] - \mu R,$$

Ajoutons, qu'à la formation de la dite partie séculaire vont contribuer non seulement les termes constants de U_k , mais encore les termes périodiques, provenant de $\{U_k\}$, et $\frac{\partial \{u_k\}}{\partial u_i^0}$, et jouissant d'un même argument $k \ominus$

Nous allons former, afin d'illustrer la méthode, d'après(e) par exemple:

$$[U_2] = G_0 + \frac{m_2}{2} (l_1 L_1 + 2l_2 L_2 + 3l_3 L_3 + \dots) + \frac{m_2}{2} (g_1 G_1 + 2g_2 G_2 + 3g_3 G_3 + \dots) + \frac{m_2}{2} (h_1 H_1 + 2h_2 H_2 + 3h_3 H_3 + \dots) \quad (m)$$

D'après les équations du problème simplifié, on vérifiera facilement les formules

$$\frac{dU_1}{dt} = -m_1 \frac{\partial H_1'}{\partial \Theta}, \quad \frac{dU_2}{dt} = -m_2 \frac{\partial H_1'}{\partial \Theta}, \quad \frac{dU_3}{dt} = -m_3 \frac{\partial H_1'}{\partial \Theta},$$

$$\frac{dv}{dt} = -m_4 \frac{\partial H_1'}{\partial \Theta} \quad (n)$$

ce qui donne immédiatement les intégrales

$$U_2 = U_1 \frac{m_2}{m_1} + (G), \quad U_3 = U_1 \frac{m_3}{m_1} + (H), \quad v = U_1 \frac{m_4}{m_1}, \quad (G), (H), \quad (p)$$

signifiant les constantes d'intégration. On trouvera ensuite facilement au moyen de (n) les relations:

$$m_2 L_1 = m_1 G_1, m_2 H_1 = m_3 G_1, m_1 H_1 = m_3 L_1, m_2 L_2 = m_1 G_2, \text{ etc. (p')}$$

Donc si l'on formera d'après (c) l'expression

$$\Theta = \tilde{\Theta} + \Theta_1 \sin \tilde{\Theta} + \Theta_2 \sin 2\tilde{\Theta} + \Theta_3 \sin 3\tilde{\Theta} + \dots \quad \Theta_k = m_1 l_1 + m_2 g_1 + m_3 h_1, \quad (\text{q})$$

l'expression recherchée (m) pourra être mise en la forme élégante de Delaunay

$$[U_2] = G_0 + \sum \frac{k G_k \Theta_k}{2}$$

où nous avons utilisé les formules (p').

Maintenant il faudra repasser aux trois degrés de liberté. Écrivons à cet effet l'équation (m') qui sera une conséquence des deux équations (j) et (k),

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + U_3 du_3 + U_4 du_4 - [\tilde{U}_1] du_1^0 - [\tilde{U}_2] du_2^0 - [\tilde{U}_3] du_3^0 - [\tilde{U}_4] du_4^0 = dS \quad (\text{m}')$$

donc, puisque

$$u_4 = u_4^0 = u = nt + k, \quad U_4 = v$$

on en juge immédiatement

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{1}{n} \frac{\partial S}{\partial t} = v - [\tilde{U}_4] \quad (\text{p})$$

l'expression $[\tilde{U}_4]$ étant donnée par (e).

En ajoutant au premier membre

$$(\Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1 - \mu R) dt - (\Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1 - \mu R) dt = 0$$

on pourra écrire en employant la notation (b)

$$\sum_{k=1,2,3} U_k du_k - H dt - \sum_{k=1,2,3} [\tilde{U}_k] du_k^0 + \left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right) dt = dS, \quad (\text{q})$$

Les deux premiers termes du premier membre sont une différentielle exacte, ce qui équivaut aux équations canoniques qui nous servaient de point de départ (a). De même le deuxième membre représente une différentielle exacte — on en juge que le reste fait aussi une différentielle exacte.

Donc on peut écrire, les équations canoniques qui effectuent la variation des arbitraires dans le cas du problème

complet

$$\frac{d u_k^0}{d t} = \frac{\partial H'''}{\partial [\tilde{U}_k]}, \quad \frac{d [\tilde{U}_k]}{d t} = - \frac{\partial H'''}{\partial u_k^0}, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$H''' = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{r}$$

$$H''' = H + (v - [\tilde{U}_4]) n.$$

Nous avons mentionné que le système non réduit c'est-à-dire à quatre degré de liberté admet une intégrale première à la Jacobi

$$H' = F'''' = n v + \Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1 - \mu R = h. \tag{s}$$

De même le problème partiel accessible à l'intégration intermédiaire au moyen des séries admet l'intégrale

$$n v + \Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1 = C(s_k). \tag{t}$$

Cette intégrale exprimée au moyen des variables u_k s_k , pourra être scindé en une partie séculaire, constante [] et une partie purement périodique { },

$$n[v] + n\{v\} + [\Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1] + \{\Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1\} = C(s_k)$$

donc:

$$n[v] + [\Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1] = C(s_k) \tag{u}$$

$$n\{v\} + \{\Sigma \dot{u}_k U_k - T - V_1\} = 0 \tag{v}$$

C'est à dire on pourra écrire la nouvelle fonction hamiltonienne en parfait analogie avec le résultat moins général (où le temps ne figure pas explicitement) (5) p. 6.

$$H''' = \Sigma \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 - \mu R + (v - [\tilde{U}_4]) n$$

$$= \left[\Sigma \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 \right] + \left\{ \Sigma \dot{u}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_k} - T - V_1 \right\} - \mu R + [v] n +$$

$$+ \{v\} n - [\tilde{U}_4] n \tag{w}$$

donc en vertu de (u), (v)

$$H''' = [v] n + [\Sigma \dot{u}_k U_k] - [\tilde{U}_4] n + [-T - V_1] - \mu R = C(s_k) -$$

$$- [\tilde{U}_4] n - \mu R \tag{z}$$

Voici donc l'extension du théorème I pour le cas où le temps figure explicitement sous les signes trigonométriques, c'est-à-dire où il s'agit d'un système non conservatif, n'admettant plus aucune intégrale à la Jacobi:

Théorème II.

On partira des équations (a). En se bornant à l'intégration du problème partiel, on obtiendra plus généralement les coordonnées u , sous la forme

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + \Sigma A_{m_1, m_2, m_3, m} e^{i(m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0 + m_3 u_3^0 + m u)}, & u_k^0 &= n_k t + k_k, \\ u_2 &= u_2^0 + \Sigma B_{m_1, m_2, m_3, m} e^{i(m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0 + m_3 u_3^0 + m u)}, & u_4 &= u = nt + k \\ u_3 &= u_3^0 + \Sigma C_{m_1, m_2, m_3, m} e^{i(m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0 + m_3 u_3^0 + m u)}, \end{aligned}$$

$$A_{m_1, m_2, m_3, m} = \frac{1}{\pi^4} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi u_1(u_1^0, u_2^0, u_3^0, u) e^{-i(m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0 + m_3 u_3^0 + m u)} du_1^0 du_2^0 du_3^0 du,$$

$$B_{m_1, m_2, m_3, m} = \frac{1}{\pi^4} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi u_2(u_1^0, u_2^0, u_3^0, u) e^{-i(m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0 + m_3 u_3^0 + m u)} du_1^0 du_2^0 du_3^0 du,$$

$$C_{m_1, m_2, m_3, m} = \frac{1}{\pi^4} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi u_3(u_1^0, u_2^0, u_3^0, u) e^{-i(m_1 u_1^0 + m_2 u_2^0 + m_3 u_3^0 + m u)} du_1^0 du_2^0 du_3^0 du,$$

En choisissant pour coordonnées angulaires les formes linéaires u_1^0, u_2^0, u_3^0 , je dis que les coordonnées scalaires, conjuguées — qui effectuent en même temps la variation des constantes arbitraires du problème complet vont être données par les expressions suivantes

$$[\tilde{U}_1] = \frac{1}{\pi^4} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{U}_1 d u_1^0 d u_2^0 d u_3^0 d u$$

$$[\tilde{U}_2] = \frac{1}{\pi^4} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{U}_2 d u_1^0 d u_2^0 d u_3^0 d u$$

$$[\tilde{U}_3] = \frac{1}{\pi^4} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{U}_3 d u_1^0 d u_2^0 d u_3^0 d u$$

$\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3$ étant définies par (e).

Voici les équations du mouvement nouvelles qui effectuent la variation des arbitraires dans le cas du problème complet (r)

$$\frac{d u_k^0}{d t} = \frac{\partial H'''}{\partial \tilde{U}_k}, \quad \frac{d U_k}{d t} = -\frac{\partial H'''}{\partial u_k^0}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (p)$$

$$H''' = H + (v - [\tilde{U}_4]) n$$

Dans le cas particulier que nous avons poursuivi en détail on trouvera

$$[\tilde{U}_1] = L_o + \sum \frac{k L_k \Theta_k}{2}, \quad [\tilde{U}_2] = G_o + \sum \frac{k G_k \Theta_k}{2},$$

$$[\tilde{U}_3] = H_o + \sum \frac{k H_k \Theta_k}{2},$$

Il sera donc $v = U_1 \frac{m_4}{m_1}$. (n)

$$(v - [\tilde{U}_4]) n = n \frac{m_4}{m_1} (U_1 - [\tilde{U}_4]) = n \frac{m_4}{m_1} \left(L_o + L_1 \cos \tilde{\Theta} + \right.$$

$$\left. + L_2 \cos 2 \tilde{\Theta} + \dots - L_o - \frac{1}{2} (L_1 \Theta_1 + 2 L_2 \Theta_2 + 3 L_3 \Theta_3 + \dots) \right)$$

L'expression $[U_4]$, donnée ci-dessus, peut être déterminée par la même méthode qu'auparavant $[U_2]$ p. 13., 14.

§ 2. La variation des arbitraires du mouvement elliptique.

Nous allons employer le théorème démontré p. 5. afin de déduire les éléments canoniques du mouvement elliptique en partant des formules générales, bien connues, définissant ce mouvement. Les formules finales coïncident nécessairement avec celles de Lagrange, resp. Hamilton-Jacobi et mettent bien en évidence la possibilité d'une variation des arbitraires en forme canonique. Le calcul se rattache le plus intimement aux théories classiques — La définition des coordonnées normales — les moments (impulsions) séculaires — amène une simplification considérable, quand on le compare aux calculs de Lagrange. Il faut calculer seulement trois expressions analogues aux crochets de celui-ci, — au lieu de quinze dans la méthode usuelle.

Nous allons employer la même notation que Tisserand (Mécanique céleste, tome I p. 174 et suivantes). Les équations du mouvement sont: l. c. p. 178.

$$\frac{d x}{d t} - \frac{\partial \Omega}{\partial x'} = 0, \quad \frac{d y}{d t} - \frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 0, \quad \frac{d z}{d t} - \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{d x'}{d t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{d y'}{d t} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{d z'}{d t} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

$$\Omega = T - U = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} - \frac{f \mu_1}{r},$$

$f = k^2$ (constante d'attraction), $\mu_1 = 1 + m$ (masses), $k^2 \mu_1 = n^2 a^3$.

Les coordonnées exprimées par les éléments elliptiques s'écrivent l. c.

$$\begin{aligned} x &= a (\cos u - e) (\cos \Theta \cos \omega - \sin \Theta \sin \omega \cos i) - \\ &- a \sqrt{1 - e^2} \sin u (\cos \Theta \sin \omega + \sin \Theta \cos \omega \cos i) = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ y &= a (\cos u - e) (\sin \Theta \cos \omega + \cos \Theta \sin \omega \cos i) - \\ &- a \sqrt{1 - e^2} \sin u (\sin \Theta \sin \omega - \cos \Theta \cos \omega \cos i) = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta \\ z &= a (\cos u - e) \sin \omega \sin i + a \sqrt{1 - e^2} \sin u \sin i \cos \omega = \\ &= \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta. \end{aligned}$$

En modifiant légèrement la notation de Tisserand, nous avons posé:

$$\begin{aligned} \varphi &= i, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \alpha' = \beta_1, \quad \alpha'' = \gamma_1 \\ \beta &= \alpha_2, \quad \beta' = \beta_2, \quad \beta'' = \gamma_2 \\ \gamma &= \alpha_3, \quad \gamma' = \beta_3, \quad \gamma'' = \gamma_3 = \cos i. \end{aligned} \quad (20)$$

Nous aurons ensuite à employer les relations bien connues

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 &= 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 &= \gamma_3 = \cos i. \end{aligned} \quad (21)$$

Les équations du mouvement elliptique donnent l. c. p. 180

$$\begin{aligned} \xi &= a (\cos u - e), \quad \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin u, \quad \zeta = 0, \quad u - e \sin u = nt + x = M, \\ x &= -nt_0, \quad \xi' = \frac{d\xi}{du} = -a \sin u, \quad \eta' = \frac{d\eta}{du} = a \sqrt{1 - e^2} \cos u, \end{aligned} \quad (22)$$

$$dM = du (1 - e \cos u), \quad \xi'^2 + \eta'^2 = ar (1 + e \cos u), \quad \xi \eta' - \eta \xi' = ar \sqrt{1 - e^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{na}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial M} = \frac{a}{r}, \quad T = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{f\mu}{r} - \frac{f\mu}{a}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = \xi \beta_1 - \eta \alpha_1, \quad \frac{\partial x}{\partial \Theta} = -\alpha_2 \xi - \beta_2 \eta, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta', \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{na}{r} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \xi \beta_2 - \eta \alpha_2, \quad \frac{\partial y}{\partial \Theta} = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta', \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{na}{r} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = \xi \beta_3 - \eta \alpha_3, \quad \frac{\partial z}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \alpha_3 \xi' + \beta_3 \eta', \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{na}{r} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

En choisissant pour coordonnées angulaires M , ω , Θ , nous n'avons ensuite qu'à calculer

$$\frac{\partial T}{\partial M} = \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial M} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial M} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial M} = \dot{x} \frac{\partial x}{\partial M} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial M} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial M}, \quad (23)$$

En effet, déjà Lagrange en démontrant ses équations

du mouvement en coordonnées curvilignes avait remarqué qu'il sera généralement

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{k}} = \frac{\partial x}{\partial u_k} \quad \text{où j'emploie la notation (3) de la page 5. du présent}$$

Mémoire.

Nous aurons donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{M}} &= \frac{na}{r} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial M} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial M} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial M} \right) = \\ &= \frac{na^2}{r^2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right\} = \frac{na^2}{r^2} (\xi'^2 + \eta'^2) = na^2 \frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u} \end{aligned} \quad (24)$$

Pour trouver le moment séculaire il faudra calculer la valeur moyenne

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{M}} \right] = \frac{na^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u} dM = \frac{na^2}{\pi} \int_0^\pi (1 + e \cos u) du = na^2 = L \quad (25)$$

Le calcul des deux autres moments est plus court:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} &= \dot{x} \frac{\partial x}{\partial \omega} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial \omega} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial \omega} = \\ &= \frac{na}{r} [(\alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta') (\xi \beta_1 - \alpha_1 \eta) + (\alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta') (\xi \beta_2 - \eta \alpha_2) + \\ &\quad + (\alpha_3 \xi' + \beta_3 \eta') (\xi \beta_3 - \eta \alpha_3)] \\ &= (\xi \eta' - \eta \xi') \frac{na}{r} = \frac{na}{r} ar \sqrt{1 - e^2} = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \mathfrak{G} = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right]. \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} &= \dot{x} \frac{\partial x}{\partial \Theta} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial \Theta} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial \Theta} = \\ &= \frac{na}{r} [(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta) (\alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta') - (\alpha_2 \xi + \beta_2 \eta) (\alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta')] \\ &= (\xi \eta' - \eta \xi') (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \frac{na}{r} = a \sqrt{1 - e^2} r \frac{na}{r} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) = \\ &= na^2 \sqrt{1 - e^2} \cos i = H = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Rappelons pour plus de clarté les différentes étapes du calcul:

Nous avons choisi pour nouvelles coordonnées angulaires les coordonnées généralisées au sens de Lagrange, l'anomalie moyenne M , la distance du périhélie aux noeuds ω , et la longitude du noeud ascendant Θ .

Il fallait chercher — d'après la règle de Lagrange — les trois moments (les impulsions) $\frac{\partial T}{\partial \dot{M}}$, etc. conjugués à celles-ci au moyen de l'expression bien connue de l'énergie cinétique. Donc il faut regarder pendant le cours entier du calcul les éléments a, e, i comme constantes absolues.

Nous n'avons ensuite qu'à rechercher les parties non périodiques, séculaires, ou toutes connues — d'après la terminologie de H. Poincaré — pour obtenir les coordonnées normales, ou le soit disant moments (impulsions) séculaires qui effectuent déjà la variation des arbitraires.

Les équations du mouvement après la variation des arbitraires s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial M}, & \frac{d\mathfrak{G}}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \omega}, & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{G}}, & \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial H}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} F &= \dot{M} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{U}} \right] + \dot{\omega} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right] + \dot{\Theta} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} \right] - [T] - [U] - \mu R_1 = \\ &= \dot{M} L + \dot{\omega} \mathfrak{G} + \dot{\Theta} H - \frac{\dot{M} L + \dot{\omega} \mathfrak{G} + \dot{\Theta} H}{2} - \frac{k^2 \mu_1}{a} - \mu R_1 = \\ &= \frac{\dot{M} L}{2} - \frac{k^2 \mu_1}{a} - \mu R_1 = \frac{k^2 \mu_1}{2a} - \frac{k^2 \mu_1}{a} - \mu R_1 = -\frac{k^2 \mu_1}{2a} - \mu R_1, \\ 2T &= \dot{M} L + \dot{\omega} \mathfrak{G} + \dot{\Theta} H, \quad U = \frac{k^2 \mu_1}{r}, \quad [U] = \frac{k^2 \mu_1}{a}, \quad n^2 a^3 = k^2 \mu_1, \quad \mu_1 = 1 + m. \end{aligned}$$

Nous avons ajouté — pour plus de généralité — une fonction perturbatrice μR_1 .

On vérifiera immédiatement:

$$\frac{\partial}{\partial L} \left(-\frac{k^2 \mu_1}{2a} \right) = n,$$

et en effet: $L = k \sqrt{\mu_1} \sqrt{a}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{k^2 \mu_1}{L^2}, & \frac{\partial}{\partial L} \left(-\frac{k^4 \mu_1^2}{2L^2} \right) &= \frac{k^4 \mu_1^2}{L^3} = \frac{k^4 \sqrt{\mu_1^4}}{k^3 \sqrt{\mu_1^3} \sqrt{a^3}} = \\ &= \frac{k \sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}} = n \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Il faut mentionner que notre calcul, si court qu'il soit surpasse les résultats de la méthode de Lagrange-Poisson et

Hamilton-Jacobi aussi à un autre point de vue. Les coordonnées nouvelles impliquent déjà — pour ainsi dire d'un trait de plume — l'anomalie moyenne M — variable — comme une fonction linéaire du temps.

Par contre les méthodes susmentionnées — ne donnant comme résultat que la constante M_0 — c'est à dire l'anomalie moyenne appartenant à une certaine époque fixe — exigent une transformation canonique ultérieure, ou un procédé à la Laplace-Delaunay (Charlier *Mechanik des Himmels* I p 252-254) pour arriver à notre résultat, obtenu directement.

§ 3. Les éléments séculaires, canoniques d'une solution périodique.

Pour démontrer l'utilité du théorème qui nous occupe nous allons passer à la généralisation la plus large possible en formulant l'énoncé du problème suivant:

Étant données les coordonnées d'une solution périodique des équations du mouvement de la dynamique — au moyen des développements absolument et uniformément convergents — comment varier les constantes arbitraires de ces séries.

A cet effet il faudra chercher nouvelles variables canoniques du caractère expliqué par le théorème du § 1. p. 5.

D'après ce qui a été dit il ne s'agit que de bien choisir les coordonnées normales, séculaires ou bien les éléments séculaires de la solution périodique en question, les coordonnées angulaires étant exprimées comme fonction linéaires du temps et les variables scalaires étant formé par les parties toutes connues, séculaires des moments de Lagrange.

Une telle forme normale facilite énormément une variation ultérieure des arbitraires et elle va nous permettre de réduire les points représentatifs — aux points se mouvant sur des circonférences.

La solution du problème donne une généralisation de la célèbre transformation de Delaunay à autant d'arguments qu'il y a de degrés de liberté (ou variables angulaires).

Heureusement le calcul est d'une extrême simplicité, de sorte que la transformation pourra toujours être effectuée.

Envisageons pour fixer les idées le problème des trois

corps dans un plan. Prenons les coordonnées bien connues barycentriques de Jacobi-Allegret et étudions une solution périodique de la deuxième sorte de Poincaré

Les expressions des coordonnées sont de la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 L &= A_1^0 + \Sigma A_1 \cos(i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0), \\
 G &= A_2^0 + \Sigma A_2 \cos(i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0), \\
 L' &= A_3^0 + \Sigma A_3 \cos(i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0), \\
 M &= n_1 t + k_1 + \Sigma B_1 \sin(i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0), \\
 \pi - \pi' &= k_2 + \Sigma B_2 \sin(i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0), \\
 M' &= n_3 t + k_3 + \Sigma B_3 \sin(i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0),
 \end{aligned} \tag{28}$$

$u_1^0 = n_1 t + k_1$, $u_2^0 = k_2$, $u_3^0 = n_3 t + k_3$, $\mathfrak{G}' = c - k$, $\mathfrak{G} = K = G$ avec la condition $i_1 n_1 + i_3 n_3 = 0$,

voir par ex. Poincaré Méth. nouvelles I, p. 127.

Les séries procèdent suivant les multiples des trois arguments. Il est à noter que les coefficients A^0_k , A_k , B_k , k_k sont développés suivant les puissances d'une petite quantité μ qui n'est que la représentante des petites masses.

Autrement ces coefficients ne sont que les fonctions des variables scalaires e , e' , a , a' .

Poincaré avait donné en détail les règles qui servent à la formation de ces séries. Plus tard monsieur Kobb*) a proposé quelques modifications plus avantageuses qui deviennent même indispensables dans le cas du problème qui nous occupe. La notation employée se rapproche de si près de celle de Poincaré et de Charlier que nous voyons à peine nécessité d'en dire davantage. Nous allons, calculer d'abord l'expression de la force vive en partant des coordonnées rectangulaires de Jacobi-Allegret que voici:

x_1 , x_2 désignent les coordonnées rectangulaires de la première planète, de masse m par rapport au corps central (de masse \mathfrak{M}).

x_1' , x_2' les coordonnées barycentriques rectangulaires de la seconde planète de masse m' par rapport au centre de gravité du système «corps central — la première planète».

La réduction, si longue et si bien connue — et cela depuis la forme rectangulaire jusqu'aux formules finales de Char-

*) Charlier Mechanik des Himmels II p. 216 et seq.

lier s'effectue immédiatement par la simple transformation de l'expression de la force vive et la recherche de sa partie constante c'est à dire séculaire, nonpériodique.

Les équations originaires du mouvement s'écrivent

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{d'x_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x'_i}, \quad i = 1, 2$$

$$y_i = \varrho \frac{dx_i}{dt} = \varrho \dot{x}_i, \quad y'_i = \varrho' \frac{d'x_i}{dt} = \varrho' \dot{x}'_i, \quad \varrho = \frac{\mathfrak{M} m}{\mathfrak{M} + m}, \quad \varrho' = \frac{m' (\mathfrak{M} + m)}{\mathfrak{M} + m + m'}$$

$$F = \frac{\varrho}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \varrho \frac{1}{2} (\dot{x}'_1^2 + \dot{x}'_2^2) - \frac{k^2 \mathfrak{M} m}{r} - \frac{k^2 \mathfrak{M} m'}{\bar{r}'} - \frac{k^2 m m'}{\Delta}$$

$$k^2 \varrho = a^3 n^2, \quad k^2 \varrho' = a'^3 n'^2. \quad (29)$$

ϱ, ϱ' sont les soit-disant masses fictives de Jacobi, les dénominateurs r, \bar{r}', Δ des trois dernières fractions désignent chaque fois la distance mutuelle des masses figurant aux numérateurs. Nous allons dénommer \bar{r}' la distance du troisième corps m' , du centre de gravité des masses \mathfrak{M} et m , et poser;

$$\Phi = \frac{\varrho}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k^2 \mathfrak{M} m}{r}, \quad \Phi' = \varrho \frac{1}{2} (\dot{x}'_1^2 + \dot{x}'_2^2) - k^2 \frac{\mathfrak{M} m'}{\bar{r}'},$$

$$\mu R = \frac{k^2 \mathfrak{M} m'}{r'} - \frac{k^2 \mathfrak{M} m'}{\bar{r}'} - \frac{k^2 m m'}{\Delta}, \quad m = \alpha_1 \mu, \quad m' = \alpha_2 \mu \quad (30)$$

En effectuant la variation des arbitraires d'après les règles du § 1. dans le cas des problèmes partielles où F se réduit resp. à Φ et Φ' on serait conduit à retrouver les éléments canoniques analogues à ceux que nous avons obtenu dans le § 2. Par contre notre but est d'obtenir en même temps la réduction du problème dans un plan, à trois degré de liberté seulement.

C'est pourquoi nous utilisons les formules et la règle du § 1. ad 2. en posant

$$T = \frac{\varrho}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \quad T' = \frac{\varrho'}{2} (\dot{x}'_1^2 + \dot{x}'_2^2), \quad (31)$$

$$2T = \dot{M} \frac{\partial T}{\partial \dot{M}} + \dot{\pi} \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}}, \quad 2T' = \dot{M}' \frac{\partial T'}{\partial \dot{M}'} + \dot{\pi}' \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}'},$$

et nous aurons

$$2[T] = \dot{M} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{M}} \right] + \dot{\pi} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}} \right], \quad (32)$$

et de même

$$2 [T'] = \dot{M}' \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{M}'} \right] + \dot{\pi}' \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}'} \right]. \quad (33)$$

En effet il suffira de ne retenir dans T , T' p. 23. que les termes renfermant \dot{M} , \dot{M}' par contre on pourra supprimer les deux autres produits contenant $\dot{\pi}^2$, $\dot{\pi}'^2$, puisqu'il s'agira seulement des dérivées premières par rapport à $\dot{\pi}$, $\dot{\pi}'$ les deux dernières vitesses π , π' , étant nul dans le cas du mouvement elliptique.

Les deux dernières formules se transforment en

$$2 [T] = L \dot{M} + \mathfrak{G} \dot{\pi}, \quad 2 [T'] = L' \dot{M}' + \mathfrak{G}' \dot{\pi}'. \quad (34)$$

Donc en somme, en separant les parties séculaires, on obtient

$$\begin{aligned} L &= \varrho n a^2 = k \sqrt{\varrho} \sqrt{a}, & \mathfrak{G} &= k \sqrt{\varrho} \sqrt{a} \sqrt{1 - e^2} \\ L' &= \varrho' n' a'^2 = k \sqrt{\varrho'} \sqrt{a'}, & \mathfrak{G}' &= k \sqrt{\varrho'} \sqrt{a'} \sqrt{1 - e'^2}, \end{aligned} \quad (35)$$

Il serait superflu d'écrire expressément les équations canoniques correspondant à la fonction caractéristique

$$\begin{aligned} F &= \dot{M} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{M}} \right] + \dot{M}' \left[\frac{\partial T'}{\partial \dot{M}'} \right] - [T] - [T'] - \frac{k^2 \mathfrak{M} m}{a} - \frac{k^2 \mathfrak{M}' m'}{a'} + \mu R = \\ &= - \frac{k^2 m \mathfrak{M}}{2 a} - \frac{k^2 m' \mathfrak{M}'}{2 a'} + \mu R. \end{aligned} \quad (36)$$

Cette dernière fonction ne renferme — on le sait bien — dans le cas du problème dans le plan, qui nous occupe, les éléments π et π' que dans la combinaison $\pi - \pi'$.

De là découle l'existence de l'intégrale des aires:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \pi}, \quad \frac{d\mathfrak{G}'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \pi'} = - \frac{\partial F}{\partial \pi}, \quad \text{donc} \quad \frac{d(\mathfrak{G} + \mathfrak{G}')}{dt} = 0, \quad \mathfrak{G} + \mathfrak{G}' = c$$

et la partie séculaire de l'expression de la force vive s'écrit

$$\begin{aligned} 2 [T + T'] &= L \dot{M} + L' \dot{M}' + \mathfrak{G} \dot{\pi} + \mathfrak{G}' \dot{\pi}' = \\ &= L \dot{M} + L' \dot{M}' + K (\dot{\pi} - \dot{\pi}') + c \dot{\pi}'. \end{aligned}$$

Nous allons choisir pour coordonnées, généralisées au sens de Lagrange, les trois angles M , $\pi - \pi'$, M' .

Ainsi nous n'avons qu'à former les moments séculaires en recherchant les coefficients de \dot{M} , $\dot{\pi} - \dot{\pi}'$, \dot{M}' dans la dernière équation,

et nous trouvons les variables canoniques

$$L, K, L', \\ M, \pi - \pi', M',$$

et la réduction à trois degrés de liberté est faite.

Donc les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial M}, \quad \frac{dK}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial(\pi - \pi')}, \quad \frac{dL'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial M'}, \\ \frac{dM}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L}, \quad \frac{d(\pi - \pi')}{dt} = \frac{\partial F}{\partial K}, \quad \frac{dM'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L'}, \quad (37)$$

Notons que dans ce problème simplifié la fonction représentant la force vive est donnée par l'expression

$$2[T + T'] = L\dot{M} + L'\dot{M}' + K(\dot{\pi} - \dot{\pi}') + c\dot{\pi}' \quad (38)$$

Donc nous pouvons partir des équations dernières et étudier la nouvelle substitution (28) p. 22. de ce paragraphe, définissant la solution périodique en question.

En suivant la méthode 2. p. 10. du premier paragraphe, nous n'avons qu'à former les dérivées des coordonnées angulaires

$$\dot{M} = n_1 + \Sigma(i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3) B_1^{i_1 i_2 i_3} \cos \tilde{\Theta}, \quad \tilde{\Theta} = i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0, \\ \dot{\pi} - \dot{\pi}' = \Sigma(i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3) B_2^{i_1 i_2 i_3} \cos \tilde{\Theta}, \quad (39) \\ \dot{M}' = n_3 + \Sigma(i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3) B_3^{i_1 i_2 i_3} \cos \tilde{\Theta},$$

et à multiplier celles-ci par les développements de L, L' (28)

En recherchant les parties séculaires des coefficients de u_1^0, u_2^0, u_3^0 dans ces produits, nous aurons à prendre les mêmes précautions qu'auparavant. Il faudra comprendre dans la partie séculaire du résultat des multiplications des séries susdites non seulement les termes constants, c'est à dire provenant de deux facteurs — constantes pures — mais encore les produits des termes trigonométriques en cos ou sin du même argument

Donc

$$\frac{\cos}{\sin} (i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0) \frac{\cos}{\sin} (i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0) = \\ = \frac{1}{2} \pm \frac{\cos 2(i_1 u_1^0 + i_2 u_2^0 + i_3 u_3^0)}{2}.$$

De même il faudra respecter dans les premières dérivées

(28) aussi les termes renfermant n_2 quoique $n_2 = 0$, puisqu'il faut obtenir les dérivées $\frac{\partial T}{\partial M}$ etc.

Il va sans dire qu'on pourra omettre le dernier terme dans l'expression de la force vive — à savoir — $c\pi'$ puisqu'il ne contribue en rien à la partie séculaire, constante de cette fonction. En effet il reste constant (resp. nul), dans l'approximation qui nous occupe et devient tout au plus purement périodique par la transformation en question.

Voici les parties constantes, séculaires des coefficients de i_1^0, i_2^0, i_3^0 , qui nous intéressent uniquement et constituent les éléments canoniques — séculaires de notre solution périodique — recherchée.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1^0 + \frac{1}{2} \Sigma i_1 (A_1^{i_1 i_2 i_3} B_1^{i_1 i_2 i_3} + A_2^{i_1 i_2 i_3} B_2^{i_1 i_2 i_3} + A_3^{i_1 i_2 i_3} B_3^{i_1 i_2 i_3}), \\ \eta_1 &= n_1 t + k_1 = M \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} \Sigma i_2 (A_1^{i_1 i_2 i_3} B_1^{i_1 i_2 i_3} + A_2^{i_1 i_2 i_3} B_2^{i_1 i_2 i_3} + A_3^{i_1 i_2 i_3} B_3^{i_1 i_2 i_3}), \\ \eta_2 &= k_2 = \pi - \pi' \\ \xi_3 &= A_3^0 + \frac{1}{2} \Sigma i_3 (A_1^{i_1 i_2 i_3} B_1^{i_1 i_2 i_3} + A_2^{i_1 i_2 i_3} B_2^{i_1 i_2 i_3} + A_3^{i_1 i_2 i_3} B_3^{i_1 i_2 i_3}), \\ \eta_3 &= n_3 t + k_3 = M', \end{aligned} \tag{40}$$

Notons que d'après la construction de la solution périodique en question — les termes séculaires, c'est à dire les termes dans lesquels $i_1 = i_2 = i_3 = 0$, de même que les termes critiques, tels que $i_1 n_1 + i_3 n_3 = 0$, ne figurent du tout dans les développements.

Donc les éléments séculaires qui nous occupent, consistent uniquement de coefficients des termes périodiques.

Rien de plus aisé que d'arranger tous les calculs ultérieurs avec de tels éléments d'une manière facile. On pourra toujours s'inspirer de la théorie de Delaunay pour ne calculer qu'avec les éléments elliptiques originaires. C'est ainsi que les éléments trouvés ne servent que d'intermédiaires et leur rôle est dû à cette circonstance que les équations différentielles liant ces éléments sont plus simples et plus accessibles à l'analyse que celles, dans lesquelles figuraient les éléments elliptiques.

En effet, on s'aperçoit que nos expressions finales (40), représentent les fonctions des éléments elliptiques

$$\xi_1 = \xi_1(a, e, a'), \quad \xi_2 = \xi_2(a, e, a'), \quad \xi_3 = \xi_3(a, e, a')$$

e' pouvant être éliminé au moyen de l'intégrale des aires.

Donc il suffira de calculer les dérivées $\frac{\partial a}{\partial \xi_1} \frac{\partial e}{\partial \xi_1}$ etc. au moyen des formules

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \frac{\partial \xi_1}{\partial a} da + \frac{\partial \xi_1}{\partial e} de + \frac{\partial \xi_1}{\partial a'} da', \\ d\xi_2 &= \frac{\partial \xi_2}{\partial a} da + \frac{\partial \xi_2}{\partial e} de + \frac{\partial \xi_2}{\partial a'} da', \\ d\xi_3 &= \frac{\partial \xi_3}{\partial a} da + \frac{\partial \xi_3}{\partial e} de + \frac{\partial \xi_3}{\partial a'} da', \end{aligned} \quad (41)$$

pour obtenir ensuite immédiatement les dérivées d'une nouvelle fonction perturbatrice R

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1} = \frac{\partial R}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \xi_1} + \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \xi_1} + \frac{\partial R}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial \xi_1}, \text{ etc.}$$

Nous trouvons donc en somme que chaque solution périodique peut être transformée très facilement à la forme canonique.

La transformation entière, dont nous venons de donner le bref aperçu, pourrait être caractérisée comme une généralisation de l'opération à la *De la un a y* à plusieurs arguments angulaires.

La solution périodique est donnée finalement par les coordonnées scalaires, devenues constantes pures, et les variables angulaires, exprimées en fonction linéaires du temps. Les mouvements moyens, c'est à dire les coefficients du temps dans ces formes sont commensurables entre eux.

Or *Poincaré* avait démontré qu'on peut toujours faire disparaître ces moyens mouvements jusqu'à un, en changeant les variables convenablement par une substitution linéaire à coefficients entiers.*)

Donc en partant du système originaire (40) de variables normales, obtenues dans le présent paragraphe

*) *Poincaré Methodes nouvelles* I p. 121.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1, \quad \xi_2 = c_2, \quad \xi_3 = c_3 \\ \eta_1 &= n_1 t + k_1, \quad \eta_2 = k_2, \quad \eta_3 = k_3 \end{aligned} \quad (42)$$

il sera toujours permis de supposer $n_2 = n_3 = 0$, c'est ce que nous ferons désormais.

De cette façon le calcul s'attache à nouveau à la forme originaire de Delaunay, procédant suivant les multiples d'un seul argument.

Du point de vue de la théorie de la stabilité de l'équilibre en mouvement, expliquée dans la préface de ce mémoire, on dirait.

Les points représentatifs de la solution périodique sont devenues fixes, à l'exception de l'un d'entre eux, qui décrit la circonférence d'un cercle.

Pour illustrer le présent exposé relatif à la notion des éléments séculaires, je vais en donner une application.

Supposons une masse nulle de l'astéroïde attirée par deux masses mobiles, égales l'une à 1 et l'autre à μ et décrivant (par un mouvement uniforme) deux circonférences concentriques autour de leur centre de gravité commun, supposé fixe. Imaginons de plus que la masse de l'astéroïde se meuve dans le plan de ces deux circonférences. Si nous considérons les solutions obtenues pour ce problème restreint, nous obtenons facilement un grand nombre de solutions qui appartiennent en général à la première sorte de Poincaré. Plusieurs auteurs se sont occupé de la construction complète des orbites de cette catégorie. Citons parmi eux surtout K. Schwarzschild, qui a discuté les orbites du type Hécube. (Astr. Nachr. B. 160 Karl Schwarzschild Über die periodischen Bahnen vom Hecubatypus.)

Si l'on essaye ensuite de passer au cas plus général, où la planète perturbatrice (Jupiter) décrit une ellipse autour du Soleil. (problème astéroïdique) il se montrera que le problème change entièrement de caractère par suite de la non-existence de l'intégrale de l'énergie. C'est ainsi que Schwarzschild n'a pu constater l'existence de solutions périodiques du problème astéroïdique que dans le cas de commensurabilité

de grands nombres.**) C'était lui et probablement sous l'influence de son célèbre mémoire précité*) — bien des auteurs — ont dénié principalement l'existence des solutions périodiques à la Hécube dans le cas plus général où la planète troublante décrit une ellipse autour de la planète centrale.

M. A. Wilkens et après lui Klose ont de même longtemps dénié l'existence de ces solutions et sont allés jusqu'à abandonner l'idée principale des solutions périodiques.**)

Or j'ai réussi à démontrer le contraire. En partant des solutions de la première sorte de Poincaré-Schwarzschild du problème restreint — j'ai découvert les premières solutions à la Hécube du problème plus général, astéroïdique. J'ai étudié ces solutions dans le *Bul. Astron.* 1922 tome II série II p. 425 et plus tard certaines solutions plus générales du même type dans les *Monthly Notices de la Soc. Astron. Royale de Londres* 1925. LXXXV p. 625.

Reprenons l'étude du Mémoire inséré dans le *Bul. Astron.* l. c. Pour atteindre mon but je fus obligé d'imaginer le résultat d'une suite des opérations à la Delaunay et d'en tirer certaines conséquences, analogues aux recherches des solutions périodiques se trouvant à proximité des simples mouvements Képlériens.

Par contre dans ce qui suit je vais faire voir qu'on peut toujours supprimer les transformations à la Delaunay — tout en arrivant au même résultat que j'avais obtenu l. c. A cet effet il suffira de remplacer les éléments de Schwarzschild, qui me servaient de point de départ l. c. par les éléments séculaires définis dans le mémoire présent (§ 3.). Cette fois encore les séries trouvées resteront même absolument et uniformément convergentes.

Voici la forme des séries de Schwarzschild l. c. A. N. en employant la même notation que l. c.

*) Karl Schwarzschild: Über weitere Classen periodischer Lösungen des Dreikörperproblem *Astr. Nachr.* Band 147 (18) No 3522 p. 289.

**) A. Wilkens *Astr. Nachr.* 195(1913) 4676°. P. 385—412.

$$L = L_0 + \frac{k^2 m'}{N'} \sum' \frac{i C_{i i'}}{i + i'} \cos (N' (i + i') t + i \lambda_0 + i' \gamma_0)$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \frac{k^2 m'}{N'} \sum' \frac{i' C_{i i'}}{i + i'} \cos (N' (i + i') t + i \lambda_0 + i' \gamma_0) \quad (43)$$

$$\lambda = \lambda_0 + P t - \frac{k^2 m'}{N'} \sum' \left(\frac{3 k^4}{N' L_0^4} \frac{i C_{i i'}}{(i + i')^2} + \frac{1}{i + i'} \frac{\partial C_{i i'}}{\partial L} \right) \times$$

$$\sin (N' (i + i') t + i \lambda_0 + i' \gamma_0)$$

$$\gamma = N' t - \frac{k^2 m'}{N'} \sum' \frac{1}{i + i'} \frac{\partial C_{i i'}}{\partial \mathfrak{G}} \sin (N' (i + i') t + i \lambda_0 + i' \gamma_0)$$

$$P = \frac{k^4}{L_0^3} - n' - k^2 m' \sum' \frac{\partial D_i}{\partial L} \cos i \zeta_0 = N'$$

$$2 [T] = \dot{\lambda} L + \dot{\gamma} \mathfrak{G}, \quad (44)$$

$$\mathfrak{G} = L - G = k \sqrt{a} (1 - \sqrt{1 - e^2})$$

λ signifiant la longitude moyenne.

Voici les expressions des éléments canoniques, obtenues par la méthode expliquée plus haut:

$$\xi_1 = L_0 - \frac{k^4 m'^2}{2 N'^2} \sum' \frac{i C_{i i'}}{(i + i')^2} \left\{ i^2 \left(\frac{3 k^4}{N' L_0^4} \frac{C_{i i'}}{i + i'} + \frac{1}{i} \frac{\partial C_{i i'}}{\partial L} \right) + i' \frac{\partial C_{i i'}}{\partial \mathfrak{G}} \right\},$$

$$\xi_2 = \mathfrak{G}_0 - \frac{k^4 m'^2}{2 N'^2} \sum' \frac{i' C_{i i'}}{(i + i')^2} \left\{ i^2 \left(\frac{3 k^4}{N' L_0^4} \frac{C_{i i'}}{i + i'} + \frac{1}{i} \frac{\partial C_{i i'}}{\partial L} \right) + i' \frac{\partial C_{i i'}}{\partial \mathfrak{G}} \right\},$$

$$\eta_1 = \lambda_1 = \lambda_0 + N' t,$$

$$\eta_2 = \gamma_1 = \gamma_0 + N' t.$$

Donc en somme on peut toujours remplacer la suite des transformations à la Delaunay que j'avais imaginé dans le Bul. Astr. l. c. — par une opération unique, indiquée plus haut et ensuite répéter mon étude de l. c. en retrouvant enfin le même résultat, qui établit l'existence de solutions séculaires de bifurcation à la Hécube même dans le cas plus général du problème astéroïdique.

Résumé.

Sur la variation des arbitraires et certaines coordonnées normales de la dynamique.

Par. W. W. Heinrich.

(Présenté le 7. mars 1934.)

L'auteur étudie le cas très étendu des équations du mouvement de Lagrange et Hamilton-Jacobi, où l'on réussit à intégrer partiellement le problème du mouvement au moyen des séries trigonométriques de Weierstrass à plusieurs arguments.

L'auteur donne indépendamment ses résultats en forme de deux théorèmes dont les notions principales remontent d'ailleurs à Delaunay et Paul Epstein.

C'est surtout un développement complet des dites notions — poursuivi dans toutes les conséquences qui l'amène à proposer de remplacer par les dites théorèmes les théories bien connues de Hamilton, Liouville et Stäckel. L'avantage mémorable consiste en un raccourcissement énorme des calculs et en une quasiautomatique interprétation géométrique des constantes canoniques.

Dans le § 2 l'auteur procède aux applications. Il démontre que le pénible calcul proposé par Lagrange pour la variation des constantes arbitraires dans le mouvement elliptique peut être réduit de quinze à trois crochets de Lagrange. C'est ainsi que la méthode apparaît même plus simple que celle d'Hamilton-Jacobi, sans compter la détermination automatique des constantes canoniques.

Dans le § 3 l'auteur trouve certains éléments normaux d'une solution périodique. On pourrait appeler ces éléments les éléments séculaires ou les éléments moyens.

Ces éléments séculaires permettent d'attaquer le problème de voisinage analytique de l'orbite en question au moyen des mêmes méthodes qu'avait choisi Henri Poincaré pour l'étude du voisinage des simples orbites Képlériennes.

Voici une autre manière d'expliquer la méthode.

Déjà Laplace fait une distinction précise entre l'étude d'équilibre autour d'une position fixe et l'étude de l'équilibre en mouvement. C'est ainsi qu'on parle des points représenta-

tifs de l'équilibre, fixes et mobiles. Je vais appeler la solution périodique en question la solution génératrice. Dans le cas de n degrés de liberté la génératrice sera donnée par n points dans un plan, leur positions étant indiquées au moyen des coordonnées polaires. Le rayon vecteur est fixé par la coordonnée canonique, scalaire, l'angle polaire par la coordonnée angulaire correspondante.

Or on démontre en somme:

La génératrice périodique pourra toujours être réduite au cas très simple, où tous les points représentatifs se meuvent sur les circonférences des cercles (où même, où tous les points d'équilibre se réduisent à des positions fixes à l'exception du dernier qui se meut dans un cercle).

Les éléments ainsi définis sont beaucoup plus simples et avantageux que les coordonnées normales bien connues de Poincaré.*)

En effet les éléments de l'illustre auteur ne sauraient être accessibles qu'au prix des calculs presque inextricables. Par contre la construction des éléments en question équivaut à une transformation unique à la Delaunay.

*) Méth. nouvelles t. II. p. 369.

VII.

Ernährung, Organogene und Regeneration.

(*Régénération, organogènes et correlation*).

Von Dr B. NĚMEC.

(Vorgelegt am 7. März 1934.)

Schon D u h a m e l (1758) hat die Ansicht ausgesprochen, daß es scheint, daß der Saft, welcher die Wurzeln bilden soll, die Tendenz hat abwärts zu strömen, wogegen jener, welcher die Knospen erzeugen soll, sich aufwärts zu bewegen bestrebt. D u h a m e l unterscheidet also zweierlei Bildungs-saft, einen wurzelbildenden und einen anderen knospenbildenden. S a c h s (1898) führt an, daß er schon im J. 1863 und 1865 Versuche anstellte, welche ihn überzeugten, daß grüne Pflanzen Substanzen bilden, welche die Anlage und Entwicklung der Blüten bedingen. Er kam durch weitere Versuche zur Überzeugung, daß die Pflanze spezifische Substanzen erzeugt, welche zu den Stellen der Organanlagen strömen und hier ihre Anlage sowie die weitere Entwicklung bestimmen. Er denkt dabei nicht auf plastische oder Nährstoffe im breitesten Sinne. Er stellte sich jene Substanzen als spezifische Stoffe vor, welche schon in sehr geringer Menge oligodynamisch wirken.

Die experimentelle Morphologie entwickelte sich zunächst in einer den S a c h s s c h e n Ansichten widersprechenden Richtung. G o e b e l und K l e b s, welche sich am meisten mit diesen Fragen beschäftigten, sprachen die entscheidende Bedeutung der Menge der Nährstoffe oder ihrem gegenseitigen quantitativen Verhältnis zu. Nur für die Gallen wurde die S a c h s s c h e Hypothese fast allgemein angenommen, obzwar auch hier neben Wuchsenzymen noch anderen Faktoren eine Bedeutung zugesprochen wurde (W. M a g n u s).

Die Entdeckung der Hormone bei den Tieren und dem Menschen wirkte auch auf die Pflanzenphysiologie. Es kann heutzutage nicht mehr daran gezweifelt werden, daß auch die Pflanzen in bestimmten Organen oder ihren Teilen, resp. in gewissen Zellgruppen Stoffe erzeugen, welche lokal oder an andere Stellen transportiert bestimmte physiologische Vorgänge auslösen oder bewirken. Das betrifft vorwiegend Wachstumsvorgänge und formative Prozesse. Es ist ein Verdienst der W e n t-schen Schule, daß die sog. Auxine so gut und vielseitig bekannt sind. Es ist ein großes Verdienst, daß F. W. W e n t einen organbildenden Stoff zu isolieren vermochte, und zwar die Rhizokalien, d. h. wurzelbildende Substanzen (1829). Er hat auch eine Theorie aufgestellt, welche es möglich macht die Polarität der Pflanzenorgane zu erklären. Elektrische Potentialdifferenzen bewirken seiner Meinung nach, daß saure Stoffe im Stengel abwärts, basische aufwärts strömen. Zu den ersteren gehören Auxine und wurzelbildende Stoffe, zu den zweiten würden wahrscheinlich knospenbildende Substanzen gehören (W e n t F. W. 1932).

Die Literatur über Phytohormone ist während der letzten Jahre bedeutend herangewachsen, so daß es mir unmöglich ist, sie hier anzuführen. Ich werde mich nur auf ganz nötige Zitationen beschränken. Als ich vor zwei Jahren eine Physiologie des Pflanzenwachstums in meiner Muttersprache schrieb, benützte ich für Phytohormone, welche formative Vorgänge bestimmen, die Bezeichnung *Organogene*. Man könnte dann von *Rhizogenen*, *Phyllogenen*, *Anthogenen*, *Blastogenen* usw. sprechen. F. W. W e n t und B o u i l l e n n e (1933) schlagen für wurzelbildende Stoffe das Wort *Rhizokalien* vor.

Die Versuche, über welche ich hier berichten will, wurden im Winter und Frühjahr der letzten drei Jahre (1931 bis 1933) ausgeführt. Ich benützte zu denselben Keimpflanzen, welche in den Kotyledonen reichliche Reservestoffe enthalten (*Vicia faba*, *Aesculus hippocastanum*, *Lupinus albus*, *Helianthus annuus*). In dieser Abhandlung werde ich mich am eingehendsten mit *Aesculus* beschäftigen, weil seine Keimpflanzen leicht und sicher zahlreiche Adventivknospen und Wurzeln bilden, wogegen die Epi- und Hypokotyle der übr-

gen drei Arten nur Adventivwurzeln bilden. Aus den Schnittflächen quillt bei *Aesculus* in ziemlich großer Menge ein Aesculin enthaltender Saft hervor, welcher es unmöglich macht die fraglichen Organogene zu isolieren. Auf ihr Vorhandensein und ihre Wirkung kann daher nur indirekt geschlossen werden.

Dazu hilft besonders die Methode von Einschnitten, welche in verschiedener Richtung in die Epikotyle geführt werden. Ich habe seinerzeit diese Methode auch beim Studium der Restitutionsvorgänge an Wurzelspitzen benutzt (1905). Da hat sich ergeben, daß auf den Verlauf der Restitution die Richtung, in welcher die Einschnitte geführt werden, bedeutend einwirkt. Ursache davon ist ohne Zweifel die Anhäufung von plastischen und anderen Stoffen an bestimmten Orten sowie die Richtung, in welcher sie strömen.*)

In Stengeln und Wurzeln strömen die im Wasser gelösten Stoffe am schnellsten in der Längsrichtung. Viel langsamer strömen sie in der Querrichtung. Es hängt dies mit dem Gesamtverlaufe der Leitungsbahnen zusammen, welche in diesen Pflanzenteilen im Ganzen in der Längsrichtung verlaufen. Auch in den Epikotylen von *Aesculus* verlaufen die Leitungsbahnen in der Längsrichtung. Natürlich berühren sich auch zahlreiche Siebröhren oder Gefäße mit ihren Längswänden oder sie sind nur durch parenchymatische Zellen von einander getrennt. Daher ist auch eine Strömung in der Querrichtung nicht ganz ausgeschlossen. Wenn der Einschnitt in das Epikotyl quer geführt wird, so sammeln sich die strömenden Stoffe

*) Ich will hier bemerken, daß eine ähnliche Methode jüngst auch Snow (1932) benutzt hat. Er hat an Keimpflanzen von *Vicia faba* ebenfalls die Wirkung von oben oder von unten geführter Einschnitte untersucht, um die Natur des Kambialreizes kennen zu lernen. Er kommt zum Schlusse, daß in den Stengeln ein Stoff streng polar von oben nach unten strömt, der die Kambialtätigkeit aufrecht hält. Denn blattlose Streifen, welche nur oben mit dem Stengel zusammenhängen, weisen eine Kambialtätigkeit auf, solche jedoch, welche nur unten mit dem Stengel zusammenhängen, nicht, obzwar sie mehr Baustoffe aus den Kolyledonon erhalten können, als die oberen. Da der Kambialreiz auch durch feuchte Leinwand zugeleitet werden kann, so handelt es sich wohl um einen Stoff und nicht etwa um mitogenetische Strahlen.

unter ihm sowie oberhalb desselben, wenn sie schräg geführt werden, so strömen die Stoffe der schrägen Wundfläche entlang, obzwar mit einer verringerten Geschwindigkeit. Je schräger der Schnitt geführt wurde, desto schneller und ausgiebiger können die Stoffe der Wundfläche entlang strömen.

Die Versuche wurden so ausgeführt, daß etwa 3 cm

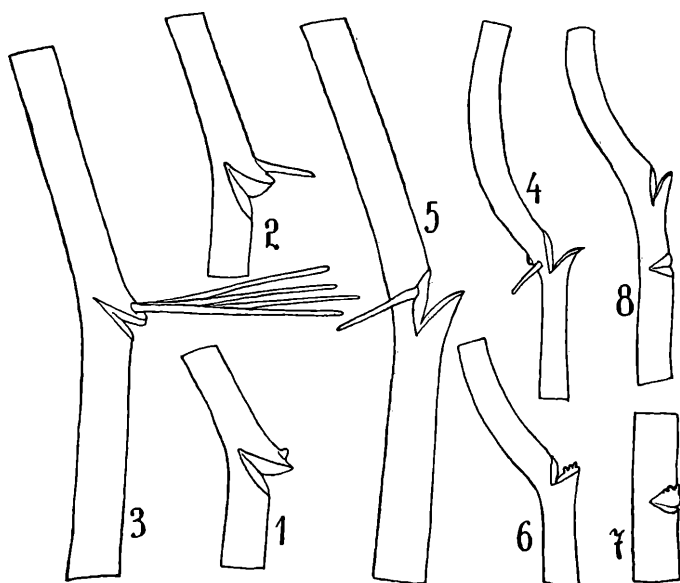


Fig. 1—8. Epikotyle von *Aesculus hippocastanum*, welche am 30. I. angeschnitten wurden, am 23. II. In Fig. 1—5 Adventivwurzeln, 6. u. 7. Adventivknospen.

oberhalb der Kotyledonen eben ausgewachsene Epikotyle quer oder schräg unter verschiedenen Winkeln abgeschnitten oder ein wenig über die Hälfte angeschnitten wurden. Dann wurden die Keimpflanzen unter große Glasstürze, wenn es sich um den Einfluß der Dunkelheit handelte, unter Zinkstürze gestellt. Ohne Stürze trocknen in unserem Mansardgewächshause die Schnittflächen zu schnell ab und es entstehen dann weder Adventivwurzeln noch Adventivknospen.

Zunächst verfolgte ich die Entstehung der Adventivwurzeln. Ich werde hier einen Versuch beschreiben. Epikotyle von *Aesculus hippocastanum* wurden am 30. I. 1931 etwas über

die Hälfte ihres Durchmessers quer, oder schräg von oben, oder schräg von unten angeschnitten. Die Keimpflanzen wurden im temperierten Gewächshaus unter Glasstürze gestellt. Am 12. II. erscheinen an den schräg von unten angeschnittenen Epikotylen nahe beim Ende des durch den Einschnitt gebildeten Keiles Höckerchen (Fig. 1), welche am 14. II. zu Adventivwurzeln heranwuchsen (Fig. 2), die am 20. II. schon 2,6 bis 3 cm lang waren (Fig. 3). Sie wuchsen radiär vom Epikotyl, annähernd horizontal. Ein Epikotyl bildete 2 bis 4 Wurzeln. An Epikotylen, welche schräg von oben angeschnitten wurden, erschienen Höckerchen erst am 14. II., und zwar an der nicht verwundeten Flanke ein wenig höher als der Einschnitt reicht. (Fig. 4.) Am 16. II. erschienen schon Adventivwurzeln. Seltener erscheinen Adventivwurzeln an der Kante zwischen der Wundfläche und der intakten Oberfläche des Epikotyls (Fig. 5). An quer angeschnittenen Epikotylen erschienen nur bei wenigen Keimpflanzen Adventivwurzeln erst am 20. II.

Zahlreiche Versuche wurden so angestellt, daß das Epikotyl etwa in $\frac{1}{3}$ seiner Höhe oberhalb der Kotyledonen quer abgeschnitten wurde, worauf der Epikotylstumpf etwa 1 bis 2 cm unter seinem Ende quer oder schräg von unten oder oben angeschnitten wurde. Diese Epikotyle bildeten nie Wurzeln, obzwar sie ebenso ernährt wurden wie vor der Dekapitation. Erst wenn sich an den apikalen Wundflächen Adventivknospen gebildet haben, konnte durch neue Einschnitte, welche unter den früheren geführt wurden, die Bildung von Adventivwurzeln ausgelöst werden. Dieser Versuch entspricht jenem, welchen Czaja (1931) an *Taraxacum*-Wurzeln ausgeführt hat.

Andere Versuche wurden mit Keimpflanzen ausgeführt, welche nach der Operation ins Dunkle unter einen Zinksturz gestellt wurden. Am 15. II. wurden Pflanzen, welche am Licht erwachsen, die Blattspreiten abgeschnitten und die Epikotyle in üblicher Weise seitlich angeschnitten. Die Endknospen haben schon ihr Wachstum eingestellt. Am 10. III. war an den Epikotylen noch keine einzige Adventivwurzel zu sehen. Auch am 20. III., wo die apikalen Wundflächen schon zahlreiche kleine Knospenanlagen besaßen, besaß das Epiko-

tyl noch keine Adventivwurzeln. Unterdessen begannen die Terminalknospen zu wachsen. Sie waren natürlich etioliert und am Ende hakenförmig gekrümmt. Die ersten Adventivwurzeln brachen die Rinde oberhalb der schräg von unten geführten Einschnitte am 21. III. durch. Auch die ein wenig später an den apikalen Wundflächen sprossenden Adventivknospen hatten eine hakenförmig gekrümmte Sproßspitze (G o e b e l 1920).

In einem anderen Versuche wurden Epikotyle von am Lichte erwachsenen Keimpflanzen am 21. II. seitlich angeschnitten und ins Dunkle unter einen Zinksturz gestellt. Am 10. III. waren bei Pflanzen, welche schräg von unten oder quer angeschnitten wurden, an den üblichen Stellen oberhalb der Einschnitte Adventivwurzeln, die einige mm lang waren, entwickelt. Man sieht im Vergleiche mit dem vorherigen Versuche, daß die Anwesenheit der Blattspreiten für die Bildung von Adventivwurzeln von sehr großer Bedeutung ist. Gleiche Pflanzen, jedoch ohne Blattspreiten, besaßen unter sonst gleichen Bedingungen noch keine Adventivwurzeln. Am 20. III. sind die Wurzeln länger, nicht unter 6 mm. Unterdessen sind die Blätter verbräunt, und zwar zunächst die Blättchen, später auch die Blattstiele. Nun beginnen die Endknospen zu wachsen und an den akroskopischen Wundflächen erscheinen zahlreiche Adventivknospen. Am 20. III. wurden einige Epikotyle unter den ursprünglichen Einschnitten von neuem angeschnitten und obzwar sie keine grüne Blätter besitzen, bilden sie im Verlaufe von 15 Tagen oberhalb der Einschnitte Adventivwurzeln.

Knospen, welche im Dunklen etioliert zu wachsen begannen, besaßen hakenförmig gekrümmte Spitzen. Ebenso wie die Spitzen der Hauptachsen, waren auch diejenigen der Seitenknospen, ja auch jene der Adventivknospen gekrümmt. Da alle diese Sprosse in feuchter Luft wachsen, kann es sich nicht um eine passive Krümmung handeln. Auch die erhöhte Luftfeuchtigkeit kann nicht entscheidend sein, da Sprosse, welche am Licht unter einem Glassturz wachsen, nicht gekrümmt sind. Es handelt sich daher nur um den Einfluß der Dunkelheit, wie es auch bei vielen anderen Pflanzen der Fall ist. Über die oekologische Bedeutung, sowie über die Entste-

hung dieser hackenförmigen Krümmungen gibt G o e b e l (1920) einen eingehenden Bericht.

In feuchter Luft entstehen an den Epikotylen die Adventivwurzeln etwa 14 Tage nach der Verwundung. In trockener Luft erscheinen sie überhaupt nicht. Höchstens werden sie endogen angelegt, sie durchdringen jedoch die Rinde nicht. Bei manchen krautigen Pflanzen ercheinen sie viel früher, so z. B. an den Hypokotylen von *Helianthus annuus* schon nach drei Tagen. Wenn es an den Epikotylen von *Aesculus* so lange dauert, ehe die Wurzeln erscheinen, so könnte man es vielleicht so erklären, daß hier die Stellen oberhalb der Einschnitte, wo sie erscheinen sollen, schwächer ernährt werden, da die Kotyledonen unter den Einschnitten inseriert sind. Diese Erklärung trifft jedoch nicht völlig zu. Man kann ganz ähnliche Versuche bei *Aesculus* an den Hypokotylen anstellen und es stellt sich heraus, daß es etwa 11 Tage dauert, ehe die Adventivwurzeln erscheinen.

So wurden am 11. I. 1932 Hypokotyle quer oder schräg etwa 7 mm unter den Hypokotylen angeschnitten und die Keimpflanzen in Sägespähne gepflanzt. Am 22. I. waren fast an allen Hypokotylen Adventivwurzeln zu sehen. Ihre Stellung war dieselbe wie an ähnlich operierten Epikotylen, nur daß sie hier häufiger direkt an den Wundflächen erscheinen. Daß sie etwa um 3 Tage früher erscheinen als an den Epikotylen, ist erstens dem Umstande zuzuschreiben, daß sich die Hypokotyle in Sägespähnen befanden, und weiter daß die Stelle ihrer Entstehung direkt durch die aus den Kotyledonen abwärts strömenden Baustoffe versorgt wurde. Auch an den Hypokotylen konnte durch schräg von oben geführte Einschnitte die Bildung von Adventivwurzeln an der intakten Flanke hervorgerufen werden. Daneben kam es auch zur Bildung von Adventivwurzeln direkt an der oberen Wundfläche. Auch wenn durch ein röhrenförmiges Messerchen aus dem Hypokotyl ein Querzylinder ausgeschnitten wurde, erscheinen oberhalb der Öffnung ringsherum am Hypokotyl Adventivwurzeln.

Wogegen also die Adventivwurzeln in feuchter Luft an den Epikotylen etwa 14 Tage nach der Verwundung zum Vor-

schein kommen, dauert es etwa drei Wochen, ehe die Adventivknospen erscheinen. Dieselben sitzen, ganz spezielle Umstände ausgenommen, am Kallus, welcher an der Wundfläche gebildet wird. Der Kallus hat seinen Ursprung im Kambium, er bildet einen rigförmigen Schwulst an der quer geführten Wundfläche. Auch die Adventivknospen sitzen dicht gedrängt in einem Ring am Kallus. Sie entstehen endogen.

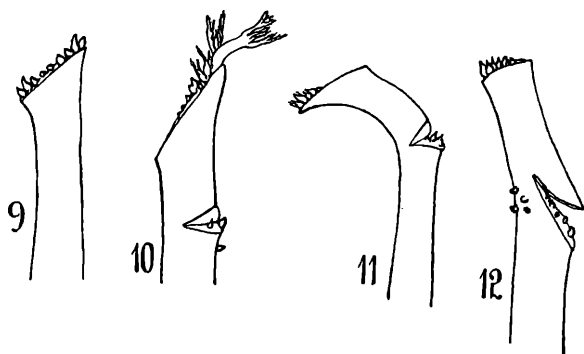


Fig. 9—12. Dekapitierte und angeschnittene Epikotyle von *Aesculus* vier Wochen nach der Verwundung. An den apikalen Schnittflächen Adventivknospen, in Fig. 12 auch an der intakten Flanke.

Wird das Epikotyl quer durchgeschnitten, so entstehen die Adventivknospen ringsherum am Kalluswulst und wachsen anfangs ziemlich gleichmäßig heran. Später wachsen einige kräftig heran, die übrigen bleiben in ihrer Entwicklung zurück. Wird der Schnitt schräg geführt, so können die Adventivknospen am Kallus, soweit der Winkel nicht etwa größer als 45° ist, ebenfalls gleichmäßig an der Wundfläche entstehen (Fig. 9). Ist jedoch der Winkel, den die Schnittfläche mit der Längsachse des Epikotyls schließt, größer, so entsteht der Kallus und später auch die Adventivknospen zuerst an der Spitze des Stumpfes, also an der oberen Hälfte der Wundfläche (Fig. 10), die untere Hälfte kann knospenlos bleiben. Auch wachsen die der Spitze genäherten Knospen stärker heran als die niedriger liegenden (Fig. 10).

Ich habe auch die Dekapitation mit einem seitlichen Einschnitt kombiniert. Zunächst wurde das Epikotyl quer

dekapitiert und etwa 1 cm tiefer ein Quereinschnitt geführt. An allen Wundflächen entsteht ein Kallus, er ist am stattlichsten an der oberen Wundfläche des Einschnittes. Aber auch an der unteren bildet sich ein Kallus und die beiden können verwachsen (Fig. 14, 17). Zuerst erscheinen Adventivknospen an der apikalen Wundfläche. Sehr häufig haben sie oberhalb der intakten Flanke einen Vorsprung. Derselbe äußert sich später häufig darin, daß an dieser Flanke die Adventivknospen stärker heranwachsen (Fig. 13, 14). Hierauf erscheinen Adventivknospen an der unteren Wundfläche des Einschnittes (Fig. 17, oberer Einschnitt). Ich war nicht wenig überrascht, als ich fand, daß schließlich auf der oberen Wundfläche des Einschnittes Adventivknospen entstehen (Fig. 13, 14, 15, 17 unterer Einschnitt). Sehr selten entstehen am Kallus der oberen Wundfläche Adventivknospen früher als an der unteren (Fig. 7).

Zweitens wurden Epikotyle quer dekapitiert und etwa 1 cm unter dem Ende schräg von unten angeschnitten. Es entstanden Adventivknospen an der unteren Wundfläche, aber zuweilen auch etwa in der Höhe des Einschnittes an der intakten Flanke des Epikotyls (Fig. 12). Niemals wurden in diesem Versuche Adventivknospen auch an der oberen Wundfläche des Einschnittes gebildet. An der intakten Flanke des Epikotyls hatten auch an der apikalen Wundfläche die adventiven Knospen einen deutlichen Vorsprung (Fig. 12).

Drittens wurde das Epikotyl quer dekapitiert und außerdem durch einen seitlichen Einschnitt schräg von oben verwundet. An der unteren Wundfläche entstanden Adventivknospen in der Nähe der Spitze des Lappens (Fig. 16), zuweilen erschienen solche auch an der oberen Wundfläche.

In weiteren Versuchen wurden unter der apikalen Wundfläche zwei Einschnitte geführt. Wenn die Einschnitte quer und von entgegengesetzten Seiten geführt wurden, so konnten an allen apikalen Wundflächen Adventivknospen erscheinen (Fig. 17). Wenn der untere Einschnitt quer und der obere schräg von oben geführt wurde, so konnten ebenfalls an allen Wundflächen Adventivknospen hervorbrechen (Fig. 19). Immer haben die an der Spitze des keilförmigen Lappens (Fig. 18) oder oberhalb der intakten Flanke entstehenden Knospen

(Fig. 20) Vorsprung gehabt. Waren beide Einschnitte tief genug, so konnten an der apikalen Endfläche die Adventivknospen ausbleiben (Fig. 18).

Schließlich wurden Epikotyle schräg dekapitiert und durch einen Quereinschnitt verwundet. An der apikalen Wundfläche erschienen die Adventivknospen zunächst an der Spitze des keilförmigen Stumpfes und wuchsen hier auch am stärksten, gleichgültig ob der Einschnitt an dieser oder an der gegenüberliegenden Seite geführt wurde (Fig. 11).

Bei der Besprechung der oben registrierten experimentell erreichten Resultate will ich von der Annahme ausgehen, daß im Epikotyl basipetal Organogene strömen, welche die Wurzelbildung veranlassen, akropetal jedoch andere Organogene, welche Knospenbildung bedingen. Ich will nun prüfen, ob die Tatsachen mit dieser Annahme übereinstimmen.

An der Basis des Epikotyls sitzen die Kotyledonen, welche die Pflanze mit plastischen Stoffen versorgen. Daß die Assimilate der grünen Blätter zur Wurzelbildung nicht notwendig sind, beweisen Versuche, wo die Pflanzen auch im Dunklen Adventivwurzeln bildeten. Daß die aus den Kotyledonen aufwärts strömenden Stoffe für die Wurzelbildung nicht entscheidend sind, beweist der Umstand, daß die Wurzeln an Stellen entstehen, wo die geringste Anhäufung dieser Stoffe zu erwarten ist.

Hingegen stimmen die Versuchsergebnisse mit der Anschauung überein, daß die Rhizogene basalwärts strömen. Sie häufen sich daher in den keilförmigen, durch schräg von unten geführte Einschnitte gebildeten Lappen wie in einer Sackgasse an (Fig. 1—3) und an diesen Lappen entstehen die Wurzeln zuerst. Wurde der Einschnitt schräg von oben geführt, so häufen sich die fraglichen Substanzen am meisten oberhalb der intakten Verbindungsstelle zwischen dem oberhalb und unterhalb des Einschnittes befindlichen Epikotylteile. Hier entstehen wirklich die Adventivwurzeln (Fig. 4, 5). Die an der Seite des Einschnittes basalwärts strömenden Organogene bewegen sich schräg der Wundfläche entlang abwärts und konzentrieren sich eben oberhalb der engen Verbindung zwischen dem oberen und unteren Teile des Epikotyls. Die Anhäufung der Organogene findet hier nicht an der

Wundfläche statt, sondern in der intakten Flanke und hier werden auch meist die Wurzeln gebildet. Wird das Epikotyl durch einen Querschnitt verwundet, so häufen sich die Rhizogene oberhalb der Wundfläche, aber sie können sich teilweise auch seitlich in der Querrichtung bewegen und an der intakten Flanke den Weg nach abwärts finden. Jedenfalls

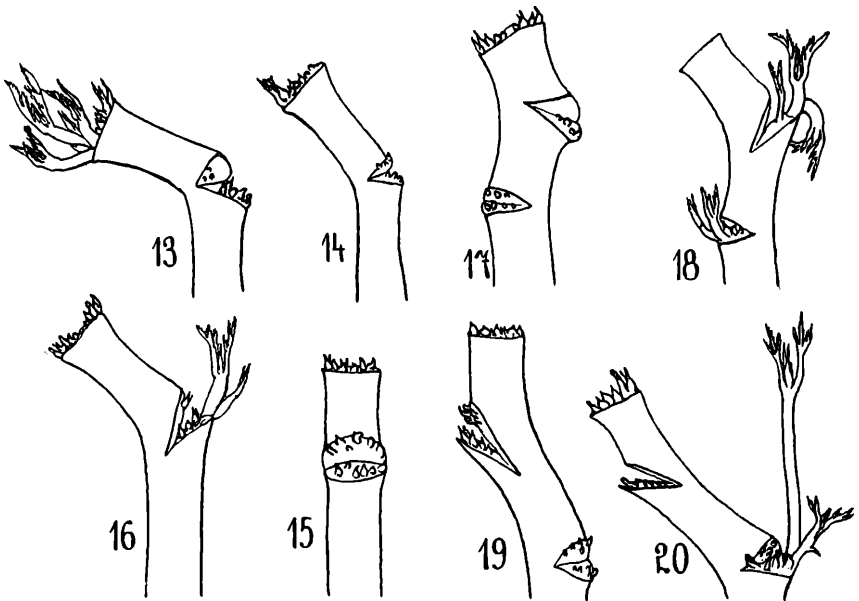


Fig. 13—20. Dekapitierte und angeschnittene Epikotyle von *Aesculus* mit Adventivknospen. Fünf Wochen nach der Verwundung.

braucht es hier nicht zu einer so großen Anhäufung der Organogene zu kommen, wie bei schräg von unten geführten Einschnitten. In der Tat entstehen oberhalb der Querschnitte die Adventivwurzeln später als an Epikotylen, die schräg von unten angeschnitten wurden.

Somit spricht in bezug auf die Wurzelbildung nichts gegen die Annahme, daß ihr Entstehen durch basalwärts strömende Organogene veranlaßt wird. Es handelt sich weiter um die Knospenbildung. Nach der Ansicht von F. W. Went strömen die Knospenorganogene in den Stengeln akropetal. Es ist ganz natürlich, daß sie sich am oberen Ende eines dekapitierten Epikotyls anhäufen und hier die Knospenbil-

dung verursachen. Sie strömen auch einer schrägen Wundfläche entlang akropetal und fördern daher in dem keilförmigen obersten Teile des schräg dekapitierten Stumpfes die Bildung der Adventivknospen (Fig. 10, 11). Dasselbe kommt auch an schräg von oben angeschnittenen Epikotylen zum Vorschein (Fig. 16, 18).

An quer angeschnittenen Epikotylen erscheinen natürlich an der unteren Wundfläche die Adventivknospen zuerst (Fig. 11). Denn da kommt es unter dem Einschnitte zur Stauung der fraglichen Stoffe, welche sich in der Querrichtung nur sehr langsam bewegen. Es kann auch vorkommen, daß unter dem Einschnitte Adventivknospen an der intakten Oberfläche des Epikotyls hervorbrechen (Fig. 10). Später erscheinen sehr häufig Adventivknospen auch am Kallus der oberen Wundfläche (Fig. 13, 14, 15, 17, 19, 20). An Quereinschnitten kommt es nur dann vor, wenn der Kallus der unteren mit jenem der oberen Wundfläche verwächst (Fig. 15, 17, 19, 20). Niemals erschienen solche Adventivknospen an Einschnitten, welche von unten, seltener an solchen, welche von oben geführt wurden (Fig. 16, 19). Zur Erklärung dieser gewissermaßen gegen die Polarität sprechenden Adventivknospen ist es notwendig die innere Struktur der beiden Kalli zu untersuchen.

Am besten lassen sich diese Verhältnisse an medianen Längsschnitten untersuchen, wo schon die Adventivknospen angelegt sind. Zunächst wollen wir Epikotyle betrachten, welche durch einen Quereinschnitt verwundet wurden (Fig. 14). Der apikale Kallus ist teilweise mit dem basalen verwachsen, etwa in der gestrichelten Zone in der Fig. 21. Das durchschnittene Gefäßbündel ist durch eine neu gebildete, bogenförmige oder S-förmige Leitungsbahn verbunden (punktierte Bahn in Fig. 21), welche meist aus Tracheiden und Siebelementen besteht. Dieselbe ist im basalen Kallus rechtwinkelig gegen die Kallusoberfläche gerichtet. Es ist wahrscheinlich, daß sich hier nach Herstellung der Verbindung die von unten kommenden Stoffe anhäufen, besonders weil hier die Tracheiden und Bastelemente meist senkrecht zur Oberfläche des Kallus sowie zum Verlauf der Leitungselemente des ursprünglichen Gefäßbündels orientiert sind. Es ist somit recht

wahrscheinlich, daß hier eine Anhäufung der Organogene stattfinden kann, deren Folge ihr Austritt in den Kallus und eine Knospenbildung eben gegenüber der Verbindungsstelle

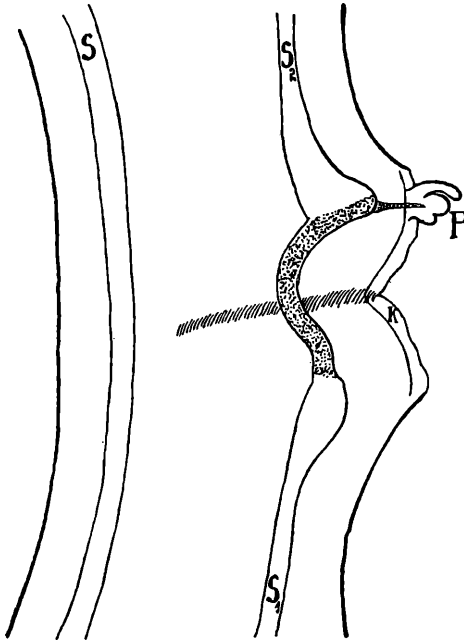


Fig. 21. Medianer Längsschnitt durch ein vor vier Wochen quer angeschnittenen Epikotyl vom *Aesculus*. *S* Gefäßbündel an der intakten Seite, *S*, *S*₁ Gefäßbündel oberhalb und unterhalb des Einschnittes. *K* Korkschiebt am Kallus, *P* Adventivknospe am oberen Kallus. Die beiden Kalli sind in der gestrichelten Zone verwachsen, die Gefäßbündel *S*₂ u. *S*₁ sind durch ein neues Bündel (punktiert) verbunden.

der neuen Leitungsbahn mit dem ursprünglichen Gefäßbündel ist. Der Verlauf der Tracheiden sowie der übrigen Elemente des Bündels ist etwa jenem gleich, wie ihn Simon (1908, Fig. 8) zeichnet. In Epikotylen, welche schräg von oben angeschnitten wurden, umlaufen die neuen Leitungsbahnen den ganzen Einschnitt (Fig. 22) und auch hier setzen sie annähernd senkrecht auf das ursprüngliche Gefäßbündel im basalen Kallus an, und eben hier entstehen Adventivknospen (Fig. 16, 19).

Der Verlauf der neuen Verbindungsbahnen läßt daher eine Erklärung im Sinne der apikalwärts strömenden Organogene zu. Sie häufen sich an der Ansatzstelle der neuen Leitungsbahnen an die ursprünglichen Gefäßbündel an, treten

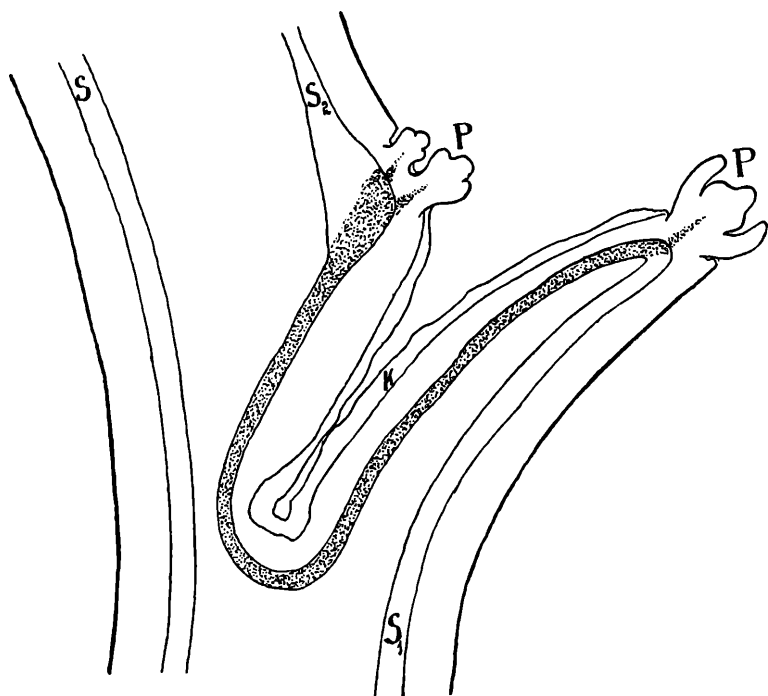


Fig. 22. Wie Fig. 21, aber nach einem schräg von oben geführten Einschnitt. P Adventivknospen oberhalb und unterhalb des Einschnittes. Die Gefäßbündel S_1 und S_2 sind durch ein neues Bündel (punktiert) verbunden.

hier in das Parenchym des Perizykels aus und veranlassen in der Zone des Ansatzes die Bildung von Adventivknospen.

Zur Zeit, wo oberhalb des Einschnittes Adventivwurzeln angelegt werden, ist die Verbindung zwischen den zerschnittenen Gefäßbündeln noch nicht hergestellt. Nach völliger Ausbildung der Verbindung werden keine Adventivwurzeln oberhalb des Einschnittes gebildet.

Die beschriebenen Versuche stehen daher in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Knospenbildung durch

apikalwärts, die Wurzelbildung durch basalwärts strömende Organogene veranlaßt wird. Wo die Strömung unterbrochen wird, oder wo sich die fraglichen Stoffe anhäufen, da kommt es zur Anlage dieser Adventivbildungen.

Es darf jedoch nicht unberührt gelassen werden, daß sich einige Ergebnisse auch durch die ältere Polaritätslehre erklären lassen. Die Wurzeln werden möglichst basal, die Knospen möglichst apikal gebildet. Gegen diese Erklärung spricht zunächst der Umstand, daß die Knospen auch am basalen Kallus erscheinen können (Fig. 14—18). Da müßte man, was die Knospenbildung betrifft, mit einer Bipolarität rechnen. Aber an isolierten Stücken der Epikotyle kommt es nie zu einer solchen Bipolarität. Sie wird durch den Verlauf der neuen Leitungsbahnen ziemlich leicht im Sinne der apikalwärts strömenden Organogene erklärt. Außerdem kann die Polaritätslehre kaum jene Fälle erklären, wo auch an der intakten Flanke des Epikotyls Adventivknospen erscheinen (Fig. 12). Die Polaritätslehre wird die Wurzelbildung so erklären, daß die Wurzeln möglichst basal entstehen. Da ist es wiederum schwierig Fälle zu erklären, wo dieselben an der intakten Flanke oberhalb des schräg von oben geführten Einschnittes zum Vorschein kommen (Fig. 4). Nach der Polaritätslehre sollten hier überhaupt keine Wurzeln entstehen. Aber die Erscheinungen der Polarität können durch die Annahme von basal- und apicalwärts strömenden Organogenen erklärt werden. Dann sind auch jene Fälle leicht zu erklären, wo Knospen oder Wurzeln an der intakten Flanke des Epikotyls erscheinen.

Was die Beziehung der Ernährung zur Bildung von Adventivwurzeln und Knospen betrifft, so lassen sich nur formale Abhängigkeiten feststellen. Es ist selbstverständlich, daß ohne Baustoffe keine neuen Organe gebildet werden können. Aber bei *Aesculus* ließe sich nur die Knospenbildung mit der Strömung und Anhäufung der Baustoffe aus den Kotedonen in Zusammenhang bringen. Die Baustoffe strömen im Epikotyl aufwärts, aber in derselben Richtung strömen auch die vermutlichen Blastogene. Es muß also zu einer Koinzidenz kommen, bei welcher es unmöglich ist den Einfluß der Organogen- und der Baustoffanhäufung zu trennen.

Deutlicher sprechen die Versuche über die Bildung von Adventivwurzeln. Sie entstehen immer da, wo sich eine Anhäufung von basalwärts strömenden Stoffen vermuten läßt. Da jedoch im Epikotyl basalwärts kaum nennenswerte Mengen von Baustoffen strömen, besonders im Dunklen, so sprechen die Versuche dafür, daß hier Anhäufungen von anderen Stoffen entscheidend wirken. Im Hypokotyl, wo die Baustoffe abwärts strömen, verhält sich die Wurzelbildung ebenso wie in den Epikotylen, höchstens daß sie hier schneller vor sich geht. Denn wenn Hypokotyle von *Aesculus* und gleichzeitig knapp oberhalb der Insertion der Kotyledonen auch die Epikotyle angeschnitten wurden, waren die Adventivwurzeln an den Hypokotylen schon mehrere mm lang, wo sie an den Epikotylen erst als niedrige Höckerchen, die eventuell erst die Rinde durchbrochen haben, zu beobachten waren.

Zur Ergänzung der vorigen Versuche werde ich solche mit den Keimpflanzen von *Vicia faba* kurz anführen. Die Kotyledonen sind hypogaeisch, nach einer Verwundung des Epikotyls erscheinen ganz sicher Adventivwurzeln am sechsten Tage. Die 1·5 bis 2 cm langen Epikotyle wurden etwa 5 mm oberhalb der Insertion der Kotyledonen durch ein wenig über die Hälfte des Durchmessers reichende, quer, schräg von oben oder von unten geführte Einschnitte verwundet. Die Pflanzen wurden in Sägespäne gesetzt und bis über die Einschnitte mit denselben verschüttet. Erstens die durch von oben geführte Einschnitte verwundeten Epikotyle. Die Keimpflanzen wurden ins Dunkle gestellt. Die Adventivwurzeln entstehen hier nur an der intakten Flanke gegenüber dem Einschnitte (Fig. 23, 24), sehr selten etwas höher (Fig. 25). Dieser Versuch gelang immer ungestört, sein Ergebnis gleicht analogen Versuchen mit *Aesculus* (Fig. 4). Zweitens schräg von unten geführter Einschnitt. Die Adventivwurzeln entstehen an dem keilförmigen Lappen (Fig. 26, 27), seltener, wenn der Einschnitt noch tiefer geführt wurde, auch an der intakten Flanke knapp oberhalb des Einschnittes (Fig. 28). Drittens quer geführte Einschnitte. Adventivwurzeln entstehen hier oberhalb des Einschnittes, nur wenn der Einschnitt tiefer reicht, auch an der intakten Flanke.

Wenn die Einschnitte den ganzen Gefäßbündelring

durchschnitten haben, so daß das Epikotyl mit dem Stumpf nur durch die Rinde und Epidermis zusammenhängt, so stellt das Epikotyl sein Wachstum ein, an seiner Basis bilden sich jedoch keine Adventivwurzeln. Im Sinne der Organogenhypothese ließe sich das so auffassen, daß das Epikotyl sein Wachstum und gleichzeitig auch die Produktion des Organogens einstellt.

Des Weiteren wurden die Epikotyle durch zwei übereinander geführte Einschnitte verwundet. Erstens schräg von unten geführte Einschnitte. Da kommt es sehr viel darauf an, ob die beiden Einschnitte gleich tief geführt wurden oder nicht. Im ersten Falle erscheinen an beiden Lappen Adventivwurzeln, am oberen in größerer Anzahl als an dem unteren (Fig. 30). Das beweist wiederum, daß die Anlage der Adven-

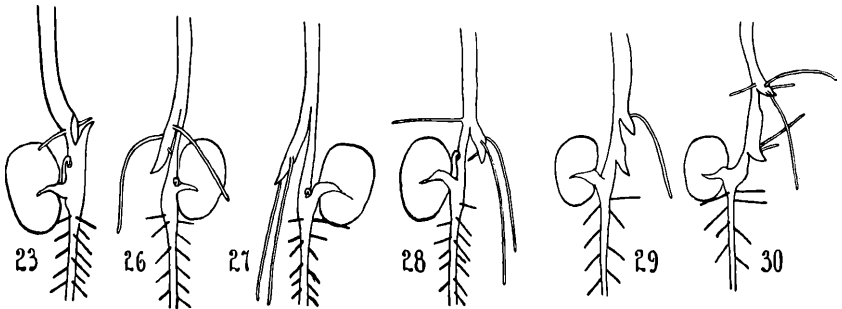


Fig. 23, 26.—30. Keimpflanzen von *Vicia faba*, deren Epikotyle von der Seite angeschnitten wurden, 7 Tage nach der Verwundung. In Verbindung mit den Einschnitten sind Adventivwurzeln erschienen.

tivwurzeln durch irgendwelche von der Spitze hinabströmende Stoffe hervorgerufen wird. Würde es sich nur um die Polarität handeln, so ließen sich am unteren Lappen mehr Wurzeln erwarten. Wird der obere Einschnitt ein wenig tiefer geführt als der untere, so erscheinen Adventivwurzeln nur an dem oberen Lappen (Fig. 29). Wenn der untere Einschnitt ein wenig tiefer geführt wurde als der obere, so können an beiden Lappen Wurzeln in gleich großer Anzahl erscheinen.

Andere Epikotyle wurden durch einen unteren schräg von unten und einen oberen schräg von oben geführten Einschnitt verwundet. Immer erschienen Wurzeln an der intakten

Flanke, und zwar oberhalb des oberen Einschnittes, wenn derselbe tiefer reichte als der untere (Fig. 31), oder unter demselben, wenn der obere Einschnitt seichter war als der untere (Fig. 32, 34). Außerdem erscheinen Adventivwurzeln meist auch an dem unteren Lappen (Fig. 31, 32, 34).

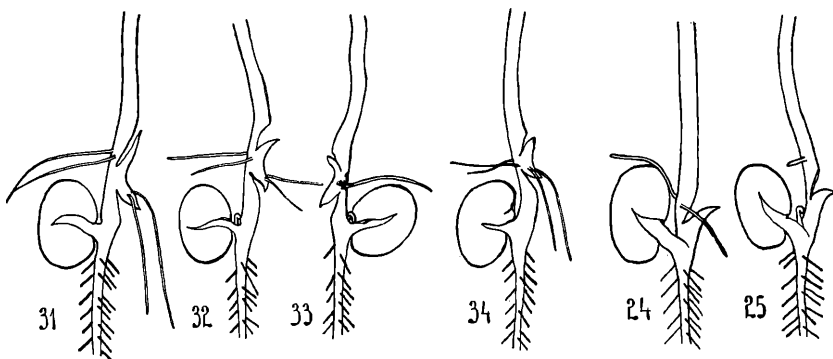


Fig. 24, 25, 31.—34. Keimpflanzen von *Vicia faba*, deren Epikotyle einmal oder zweimal angeschnitten wurden. In Verbindung mit den Einschnitten sind Adventivwurzeln erschienen.

Auch diese Versuche zeigen, daß sich durch die Tiefe und Richtung der Einschnitte der Ort, wo die Adventivwurzeln entstehen sollen, leicht bestimmen läßt. Aber es läßt sich aus ihnen auch folgern, daß sich die Verhältnisse nicht durch eine Polarität des Epikotyls erklären lassen, außer wenn man dieselbe so auffaßt, daß sie durch ein Hinabströmen von bestimmten Substanzen zu Stande kommt. Durch eine, ich möchte sagen magnetähnliche Polarisierung wäre es nicht gut zu erklären, warum nach zwei schräg von unten geführten Einschnitten oberhalb des oberen mehr Wurzeln als oberhalb des unteren (Fig. 29, 30) entstehen, oder warum an den intakten Flanken die Wurzeln oberhalb des oberen Einschnittes erscheinen (Fig. 31). Hingegen lassen sich alle Versuche durch die Annahme der Rhizogene, welche aus der Endknospe hinabströmen und sich durch die Einschnitte aufhalten, sowie durch ihre Richtung ablenken lassen, ungezwungen erklären.

Diese Versuche ergänzte ich noch durch andere, wo die Hypokotyle den Keimpflanzen von *Vicia faba* angeschnitten wurden. Das Hypokotyl von *Vicia faba* mißt nur 3 bis 5 mm.

Zu den Versuchen wurden Keimpflanzen erwählt, die relativ lange Hypokotyle besaßen.

Keimpflanzen von *Vicia faba*, deren Epikotyl 6—10 mm lang war, wurden am 13. II. verwundet, und zwar durch Einschnitte, welche in das Epikotyl oder das Hypokotyl geführt wurden. Am 19. II. besitzen die meisten schon Adventivwurzeln. Die Epikotyle waren durchschnittlich 8 cm, die Hypokotyle 5 mm lang.

Keimpflanzen, deren Epikotyle angeschnitten wurden, besaßen wenige Adventivwurzeln. Ihre Stellung entsprach den oben beschriebenen Versuchen.

Die Einschnitte in das Hypokotyl, welches etwa 5 mm lang ist, wurden quer oder schräg von unten und oben geführt. Die Adventivwurzeln entstanden in derselben Weise, wie am Epikotyl. Nur entstehen hier Adventivwurzeln häufiger auch an der oberen Wundfläche selbst. Bei schräg von unten geführten Einschnitten erscheinen Adventivwurzeln nur an dem keilförmigen Lappen oberhalb des Einschnittes, obzwar sich die Wurzeln, wenn ihre Entstehung von der Zufuhr der Baustoffe aus den Kotyledonen abhängig wäre, eher an der intakten Flanke erwarten ließen. Wurde der Schnitt schräg von oben geführt, so entstehen zunächst ähnlich wie am Epikotyl die Wurzeln an der intakten Flanke gegenüber dem Einschnitte. Dazu treten dann noch einige Wurzeln an der Wundfläche selbst. Bei quer geführten Einschnitten entstehen Adventivwurzeln nur oberhalb des Einschnittes.

Schließlich wurde den Keimpflanzen die Hauptwurzel knapp unter der Insertion der Kotyledonen abgeschnitten und die Epikotyle 1 cm höher von vorne angeschnitten. Die Pflanzen besaßen am sechsten Tage Adventivwurzeln, welche dieselbe Lage zu den Einschnitten einnahmen wie im vorigen Versuche. Außerdem erscheinen an der Basis des Hypokotyls, d. h. knapp unter der Insertion der Kotyledonen, ringsherum Adventivwurzeln, jedoch unter dem Einschnitt in geringerer Anzahl als an der gegenüberliegenden Flanke. Auch hier erscheinen die Wurzeln in Übereinstimmung mit der Hypothese, daß von der Endknospe Rhizogene nach unten strömen und durch die Einschnitte gestaut oder schräg abgelenkt werden.

Die Zahl der am Hypokotyl durch die Einschnitte her-

vorgerufenen Adventivwurzeln ist im Durchschnitt nicht höher als jener, welche am Epikotyl zur Entstehung gebracht werden. Das spricht für die Annahme, daß die Zufuhr von plastischen Stoffen aus den Kotyledonen nicht entscheidend ist.

Zahlreiche Versuche wurden des Weiteren mit Keimpflanzen von *Helianthus annuus* (groß- und weißsamige Sorte) ausgeführt. Sie sind zu einigen Versuchen besonders darum geeignet, weil sie schon drei Tage nach der Operation Adventivwurzeln erscheinen lassen. Aber die Zone, in welcher sie an abgeschnittenen oder angeschnittenen Hypokotylen Adventivwurzeln bilden, kann bis 4 cm lang sein, so daß ihre Beziehungen zur vermutlichen Strömung und Anhäufung der Rhizogene nicht so durchsichtig sind wie bei *Aesculus* und *Vicia faba*. Man muß die frühesten Stadien, wo die Wurzeln eben die Rinde durchbrechen, untersuchen. Und da findet man dieselben Verhältnisse wie z. B. bei *Vicia faba*. Nur daß bei *Helianthus* viel mehr Wurzeln angelegt werden und daß nach schräg von oben geführten Einschnitten auch oberhalb des Einschnittes Wurzeln entstehen, daneben aber auch an der intakten Flanke gegenüber dem Einschnitte. Werden schräg von unten oder quer geführte Einschnitte tiefer geführt, so entstehen auch an der intakten Flanke oberhalb des Einschnittes Adventivwurzeln. Werden den Keimpflanzen die Kotyledonen abgeschnitten, so wird die Zahl der am Hypokotyl entstehenden Wurzeln bedeutend herabgesetzt und zwar gleichgültig, ob die Endknospe mit abgeschnitten wurde oder nicht. Dies ließe sich so erklären, daß die Kotyledonen im Keimungsstadium bei *Helianthus* nicht nur plastische Baustoffe, sondern auch Rhizogene liefern.

Auch *Lupinus albus* hat epigaeische Kotyledonen. Wie bei *Helianthus* läßt sich daher auch bei seinen Keimpflanzen nicht der Einfluß der plastischen Stoffe von den eventuellen Rhizogenen auseinanderhalten. Werden die Hypokotyle etwa 5 mm oberhalb des Überganges zur Keimwurzel abgeschnitten, so erscheinen schon am fünften Tage kurze Adventivwurzeln oberhalb der Einschnitte. Die ersten und reichlichsten Würzelchen brechen an dem keilförmigen Lappen hervor, der durch einen von unten nach oben geführten Einschnitt ent-

standen ist. Hierauf folgen Hypokotyle, welche quer angeschnitten wurden. Schließlich folgen Hypokotyle, welche schräg von oben angeschnitten wurden. An denselben entstehen Adventivwurzeln etwa gleichzeitig oberhalb des Einschnittes und an der gegenüberliegenden intakten Flanke. Wird an der intakten Flanke 1 cm oberhalb des schräg von oben geführten Einschnittes noch ein zweiter Quereinschnitt geführt, so erscheinen gegenüber dem unteren Einschnitte keine Adventivwurzeln.

Wird die Keimwurzel am Übergang in das Hypokotyl abgeschnitten und das letztere etwa 1 cm höher angeschnitten, so entstehen Adventivwurzeln zunächst oberhalb des Einschnittes, später auch — und zwar bei allen Einschnittsarten — an der intakten Flanke, aber in geringerer Anzahl als über dem Einschnitte. Etwa gleichzeitig entstehen Adventivwurzeln auch an der Basis des Hypokotyls, zwar ringsherum, aber an der intakten Flanke in geringerer Anzahl. Im Vergleich mit Keimpflanzen, denen die Hauptwurzeln belassen wurden, besitzen jene, welchen sie abgeschnitten wurden, weniger Adventivwurzeln. Die ersteren besaßen am sechsten Tage nach der Operation durchschnittlich 11 Adventivwurzeln, die letzteren 8. Das kann mit der Anhäufung der aus den Kotyledonen abwärts strömenden plastischen Stoffe ebenso wie mit jener der Rhizogene zusammenhängen.

An *Lupinus* wurden auch Versuche angestellt, welche entscheiden sollten, ob es die Endknospe ist oder die Kotyledonen, welche mit der Wurzelbildung in Korrelation stehen. Es wurden Hypokotylen, die 3—4 cm lang waren, die Keimwurzeln abgeschnitten. Einer Partie (A) wurden die Kotyledonen sowie die Endknospe belassen, der zweiten (B) wurde ein Kotyledon, der dritten (C) ein Kotyledon und die Endknospe, der vierten (D) nur die Endknospe abgeschnitten, worauf die Hypokotyle am 23. IV. 1932 in Knopsche Lösung gestellt und am Licht belassen wurden. Am 26. IV. zeigen sich an der Basis der Hypokotyle Anschwellungen, am 27. IV. haben an allen Hypokotylen Adventivwurzeln die Rinde durchbrochen. Die meisten Wurzeln besitzen Hypokotyle der Gruppe A, die wenigsten sind in C. Am 28. IV. besitzen Hypokotyle der Gruppe A in vier Reihen Adventiv-

wurzeln, und zwar ein Hypokotyl durchschnittlich deren 11, in der Gruppe B 8, in C 3, in D 10 Wurzeln. Die Wurzeln sind 1—6 mm lang. Am 29. IV. besitzen: A 13, B 10, C 4, D 11 Wurzeln, am 30. IV. A 13, B 10, C 4, D 12 Wurzeln. Am 3. V. hat die Gruppe A durchschnittlich 8·8 cm lange Hypokotyle mit je 16 4 cm langen Wurzeln, B 7 cm lange Hypokotyle mit je 12 3·8 cm lange Wurzeln, C 7 cm lange Hypokotyle mit je 8 3·1 cm langen Wurzeln, D 8 cm lange Hypokotyle mit je 14 6·1 cm langen Wurzeln.

Man kann folgern, daß hier die Kotyledonen zur Bildung der Wurzeln genügen, das Entfernen eines Kotyledons setzt jedoch ihre Zahl sowie ihr Wachstum deutlich herab. Daß die Wurzeln in der Gruppe D (zwei Kotyledonen, Endknospe entfernt) am zahlreichsten und stattlichsten sind, läßt sich dadurch erklären, daß ihnen alle Baustoffe zur Verfügung stehen, da die Endknospe entfernt wurde. Wenn nur ein Kotyledon vorhanden ist (B und C), so bewirkt die Entfernung der Endknospe eine deutliche Herabsetzung der Wurzelzahl und ihrer Länge. Das läßt sich gut im Sinne der von K o ř í n e k (1922) entdeckten Korrelationsempfindlichkeit erklären.

Hierauf wurden am 9. V. die basalen Teile der Hypokotyle samt den Wurzeln abgeschnitten und die Hypokotyle wiederum in K n o p s c h e Lösung gestellt. Am 24. V. besitzen in A alle Hypokotyle durchschnittlich 6 3 cm lange Wurzeln, in B ebenfalls alle Hypokotyle je 5 4·5 cm lange Wurzeln, in C besitzt nur ein Hypokotyl zwei 3 und 4 cm lange Wurzeln, in D besitzen alle Hypokotyle durchschnittlich 5 3·5 cm lange Wurzeln.

Auch hier äußert sich die Korrelationsempfindlichkeit ganz deutlich, wenn man die Pflanzen der Gruppe B und C vergleicht. Seitenknospen sind bis zum Ende des Versuches nicht erschienen. Die Endknospe ist hier also nicht zur Wurzelbildung nötig. Vergleicht man Pflanzen der Gruppe A und D, so scheint es sogar, daß das Vorhandensein der Endknospe nachteilig auf die Wurzelbildung einwirkt. Aber wenn ein Kotyledon abgeschnitten wird, so wird die Pflanze gegen den korrelativen Einfluß der Endknospe empfindlicher gemacht und dann äußert sich ihre Entfernung als deutlich nachteilig für die Bildung und das Wachstum der Adventivwurzeln.

In einer vorläufigen Mitteilung (Němec 1930) habe ich über das Ergebnis von Versuchen mit dem *Bacterium (Pseudomonas) rhizogenes* Ricker berichtet, welche bei der Regeneration der *Cichorium*-Wurzeln die Bildung von Adventivknospen unterdrücken, hingegen die Anlage von Adventivwurzeln an den Tumoren veranlassen. Ich wollte nun erfahren, ob das *Bacterium* der Nährlösung zugesetzt bei meinen Versuchspflanzen ebenfalls die Bildung von Adventivwurzeln beeinflussen würde. Zum Vergleich wurden noch drei andere Bakterien benutzt, und zwar erstens eine nicht näher bestimmte weiße coccus-artige Fäulnisbakterie, zweitens eine gelbe Fäulnis-*Sarcina* und *B. proteus*. Die Mikroben wurden an Agar in Eprouvetten kultiviert. Sie wurden mit Hilfe einer Platinöse von 14 Tage alten Kulturen in 100 ccm Knopscher Lösung übertragen, in welche dann die Hypokotyle in gleichmäßigen Entfernungen gestellt wurden. Die Lösungen waren anfangs getrübt, bald klärten sie sich jedoch, da sich die Bakterien am Boden der Schalen abgesetzt hatten.

Ich wählte die Knopsche Lösung, weil es sich mir nicht darum handelte eine weitere Vermehrung der Mikroben zu erreichen. Es genügte, wenn sie einige Zeit am Leben blieben und eventuell irgend welche Stoffe an die Lösung abgaben. Außerdem war es nötig durchschnittlich 20 Hypokotyle in eine Schale zu stellen, um die individuellen Unterschiede zu eliminieren und da war es kaum zu erwarten, daß man die Reinheit der Kulturen erhalten hätte, wenn der Nährlösung organische Stoffe zugesetzt worden wären.

Am 8. IV. wurden um 9:30 vorm. 5—6 cm lange Hypokotyle von *Helianthus annuus* in 100 ccm Knopscher Lösungen gestellt, welchen:

1. *P. rhizogenes*,
2. die weiße Fäulnisbakterie,
3. die gelbe Fäulnissarzine,
4. *Bacillus proteus* zugesetzt wurden.

In einer weiteren Kultur (5) wurden die Hypokotyle in reine Knopsche Lösung gestellt.

Einige Hypokotyle besaßen die Kotyledonen und die Endknospe (*a*), anderen wurden die Kotyledonen abgeschnitten, die Endknospe jedoch belassen (*b*), der letzten Gruppe

wurden die Kotyledonen samt der Endknospe durch einen dicht unter derselben geführten Querschnitt abgeschnitten (*c*). Die Kulturen standen am Licht im warmen Gewächshaus.

Am 11. IV. besaßen einige Hypokotyle der Gruppen *a* und *b* in den Kulturen 1—4 ganz kurze, eben aus der Rinde durchbrochene Würzelchen. In reiner Knopflösung sind die Enden der Hypokotyle nur angeschwollen.

Am 12 IV. um 8:30 vorm. 1. *a* Von 9 Pflanzen besitzen 5 Hypokotyle bis 6 mm lange Wurzeln, die übrigen Hypokotyle sind an ihrem Ende stark angeschwollen. *b* alle Hypokotyle haben bis 5 mm lange Wurzeln gebildet, aber ihre Anzahl ist geringer als in *a*. *c* alle Hypokotyle an ihrem Ende geschwollen.

2. *a* Von 10 Pflanzen besitzt nur eine Pflanze keine Wurzeln. Die Wurzeln sind bis 6 mm lang. *b* Die Hälfte der Pflanzen besitzt bis 6 mm lange Wurzeln, *c* besitzen keine Wurzeln.

3. Von 13 Pflanzen besitzen 4 Hypokotyle bis 2 mm lange Wurzeln, bei den übrigen ist das Ende stark angeschwollen und höckerig. *b* Alle Pflanzen besitzen ganz kurze Wurzeln, *c* ein Drittel der Pflanzen besitzt kurze Wurzeln.

4. *a*. Von acht Pflanzen besitzt nur eine ganz kurze Wurzeln, die übrigen sind an ihrer Basis stark angeschwollen. *b*. Die Hälfte der Pflanzen besitzt ganz kurze, eben durchbrechende Wurzeln. *c*. Keine Wurzeln, nur starke Anschwellung an der Basis der Hypokotyle.

5. *a*. Von neun Pflanzen besitzt nur eine kurze Wurzeln. *b*. Keine Pflanze besitzt Wurzeln, *c* von acht Pflanzen besitzen vier Hypokotyle ganz kurze, eben durchbrechende Wurzeln.

Am 13. IV. um 8 vorm.

1. *a*. Alle Hypokotyle besitzen bis 2 cm lange Wurzeln. Durchschnittlich besitzt jede Pflanze 14 Wurzeln. *b*. Alle Pflanzen besitzen bis 9 mm lange Wurzeln. *c*. Von neun Pflanzen besitzen drei Hypokotyle bis 3 mm lange Wurzeln.

2. *a*. Alle Pflanzen tragen Wurzeln, die bis 1·5 cm lang sind. Durchschnittlich besitzt jede Pflanze 21 Wurzeln. *b*. Alle Pflanzen besitzen 9 bis 9 mm lange Wurzeln. *c*. Alle Pflanzen besitzen bis 8 mm lange Wurzeln.

3. Alle Pflanzen besitzen Wurzeln, die bis 1·2 cm lang sind. Durchschnittlich hat jedes Hypokotyl 16 Wurzeln. *b*. Alle

Pflanzen besitzen bis 6 mm lange Wurzeln, *c* ebenso, nur sind die Wurzeln kürzer (bis 2 mm).

4. *a*. Alle Pflanzen haben bis 15 durchschnittlich 9 cm lange Wurzeln. *b* und *c*. Alle Pflanzen tragen Wurzeln, welche bei *c* ein wenig länger sind als bei *b*.

5. *a*. Von neun Pflanzen haben 6 Hypokotyle Wurzeln gebildet, deren Zahl durchschnittlich 4 ist, die maximale Länge 1·3 cm. In *b* besitzt ein Drittel, in *c* zwei Drittel der Hypokotyle eben durchbrochene Wurzeln.

Am 14. IV. um 4 nachm.

1. *a*. Die Wurzeln sind bis 3 cm lang, *b* die Wurzeln sind bis 1 cm lang, *c* von neun Pflanzen haben 5 bis 8 mm lange Wurzeln, 4 Pflanzen besitzen noch keine Wurzeln.

2. *a*. Wurzeln bis 2·9 cm lang, *b* Wurzeln bis 1 cm lang, *c* Wurzeln bis 1·2 cm lang.

3. *a*: Ebenso (wie in 1 und 2, *b* wie 2. *b*, *c* die Wurzeln maximal 5 mm lang.

4. *a*. Wie in 1—3, die Zahl der Wurzeln kleiner, dafür sind die Wurzeln kräftiger. *b* und *c* die Wurzeln bis 1·3 cm lang.

5. *a*. Alle Hypokotyle haben durchschnittlich 6 Wurzeln gebildet. Ihre maximale Länge beträgt 1·1 cm. *b*. Alle Pflanzen besitzen Wurzeln, welche höchstens nur 2 mm lang sind. *c*. Von 8 Pflanzen haben sechs Wurzeln gebildet.

Es läßt sich nicht bestreiten, daß die der Nährlösung zugesetzten Mikroben die Wurzelbildung beschleunigen und nachdem dieselben die Rinde durchgebrochen haben, auch ihr Längenwachstum stimulieren. Für die Wurzelbildung ist das Vorhandensein der Kotyledonen wichtiger als jenes der Endknospe. Dennoch ist besonders am Anfang des Versuches deutlich zu sehen, daß die Anwesenheit der Endknospe die Wurzelbildung fördert. Jedoch auch Keimpflanzen, welchen sowohl die Kotyledonen als auch die Endknospen abgeschnitten wurden, bilden meistens Wurzeln. Von den der Nährlösung zugesetzten Bakterien wirkt *P. rhizogenes* nur am Anfang des Versuches stärker als die übrigen Arten.

Ich werde noch einen ähnlichen Versuch beschreiben. 3·5—4 cm lange Hypokotyle von *Helianthus annuus*, denen

die Hauptwurzel abgeschnitten wurde, wurden in nachfolgende Flüssigkeiten gestellt:

1. Aufschwemmung von drei zehn Tage alten gelben Sarcinakulturen in Knopscher Lösung (50 ccm).

2. Aufschwemmung von drei vierzehn Tage alten weißen Coccuskulturen in Knopscher Lösung (50 ccm).

3. Aufschwemmung von drei vierzehn Tage alten Kulturen von *P. rhizogenes* in Knopscher Lösung (50 ccm).

4. Aufschwemmung von drei vierzehn Tage alten Kulturen von *P. rhizogenes* in Knopscher Lösung (200 cm).

5. In reine Knopsche Lösung (50 ccm).

Der Versuch wurde am 1. IV. 1932 um 10—10½ Uhr vorm. angestellt. Die Kulturen wurden am Licht belassen.

Am 4. IV. um 8 Uhr vorm. sind die Hypokotyle an ihrem Ende in den Flüssigkeiten 1—4 angeschwollen, in 1 haben schon einige Adventivwurzeln an der Basis des Hypokotyls eben die Rinde durchbrochen. In reiner Knopscher Lösung sind die Hypokotyle an ihrer Basis kaum angeschwollen. An demselben Tag um 4 Uhr nachm. haben auch in der Flüssigkeit 3 einige Wurzeln die Rinde durchbrochen.

Am 5. IV. um 8 Uhr vorm.: 1. Von 18 Hypokotylen besitzen 7 Exemplare 2—9 mm lange Wurzeln, bei den übrigen brechen die Würzelchen eben die Rinde durch. — 2. Von 9 Hypokotylen haben 6 Exemplare 1—2 mm lange Wurzeln, bei den anderen brechen die Würzelchen eben die Rinde durch. — 3. Von 9 Hypokotylen besitzen alle Wurzeln, sie sind meist 2—3 mm lang, eine Wurzel ist 8 mm lang. — 4. Von 19 Hypokotylen besitzen 13 Exemplare Wurzeln, die höchstens 2 bis 2,5 mm lang sind, nur zwei Wurzeln sind 7 und 8 mm lang. — 5. Kein einziges Hypokotyl besitzt Wurzeln. Das Ende der Hypokotyle weist nur eine Anschwellung mit kleinen Höckerchen auf.

Am 6. IV. 10 Uhr vorm.:

1. Alle Hypokotyle besitzen Wurzeln, die sich 9—22 mm weit vom Ende erstrecken. Sie sind bis 21 mm lang. Durchschnittlich trägt jede Pflanze 20 Wurzeln.

2. Alle Hypokotyle tragen Wurzeln, sie sind dünner und dichter gestellt als in 1. Sie erstrecken sich bis 14 mm vom Ende der Hypokotyle und sind bis 12 mm lang. Durchschnitt-

lich besitzt jedes Hypokotyl 23 Wurzeln.

3. Alle Hypokotyle besitzen Wurzeln, die sich bis 22 mm von der Basis des Hypokotyls erstrecken. Sie sind stark und bis 3 cm lang. Durchschnittlich trägt jedes Hypokotyl 22 Wurzeln.

4. Alle Hypokotyle tragen Wurzeln, welche sich bis 20 mm vom Ende des Hypokotyls erstrecken. Durchschnittlich trägt jedes Pflänzchen 21 Wurzeln. Die Wurzeln sind bis 2.2 cm lang.

5. Alle Pflanzen tragen Wurzeln, die sich bis 14 mm weit vom Ende des Hypokotyls erstrecken. Die längsten messen 6 mm. Im Durchschnitt trägt jedes Hypokotyl 8.6 Wurzeln.

Am 8. IV. sind die Unterschiede nicht mehr so auffallend. In der Knopschen Lösung sind die Wurzeln dünn und höchstens 2.4 mm lang, in den Flüssigkeiten mit Bakterien deutlich stärker und länger (bis 4 cm). Die Zahl der Wurzeln an den Hypokotylen ist jedoch annähernd in allen Kulturen die gleiche (27).

Der Versuch bringt im ganzen gleiche Resultate, wie der vorher beschriebene. Der Unterschied zwischen den in einer Mikrobensuspension und in reiner Knoplösung befindlichen Hypokotylen war überraschend auffallend. Die Mikroben fördern die Anlage und das Wachstum der Wurzeln sehr stark und im anfänglichen Stadium wirkt auch hier *P. rhizogenes* am intensivsten.

Die oben beschriebenen Versuche sprechen für die Annahme, daß aus der Endkospe (*Vicia faba*, *Aesculus hippocastanum*) oder aus den Laubblättern und Kotyledonen (*Aesculus*, *Helianthus*, *Lupinus*) Stoffe hinabströmen, welche die Wurzelbildung veranlassen. Diese Stoffe gelang es F. W. Went aus der Pflanze exosmieren zu lassen und abzufangen, worauf er ihren organogenen Einfluß erweisen konnte. Das Rhizogen ist thermostabil und nicht spezifisch. Das brachte mich auf den Gedanken die Rhizogene aus Knospen und Blättern, welche durch heißes Wasser getötet wurden, zu extrahieren und zu untersuchen, ob ihre Zusetzung zur Kulturflüssigkeit die Bildung der Adventivwurzeln beeinflußt. Endknospen, Blätter, Stengel oder Kotyledonen wurden in dest. Wasser

bis zum Sieden auf 3 Minuten erwärmt, abgekühlt und 30 Min. stehen gelassen. Dann wurde zu der Flüssigkeit K n o p s c h e Nährlösung zugesetzt und in dieses Gemisch Hypokotyle, denen die Hauptwurzel abgeschnitten wurde, gestellt. Gewöhnlich wurde auf 100 cm H₂O 5 g frische Pflanzensubstanz genommen.

Zunächst ein Versuch mit einem Extrakt aus Keimpflanzen von *Vicia faba*. Als Versuchsmaterial dienten 3—3·5 cm lange Hypokotyle von *Helianthus annuus*. Am 24. II. wurden dieselben in 1. Knop + gleiche Menge H₂O, 2. ein Dekokt aus Endknospen von *Vicia faba* + gl. Menge K n o p, 3. ein Dekokt aus grünen Blättern von *Vicia faba* + gl. Menge K n o p, 4. ein Dekokt aus blattlosen Stengelteilen von *Vicia faba* vermischt mit gleicher Menge von K n o p gestellt.

Am 3. III. sind die Hypokotyle 8—11 cm lang und tragen in 1. durchschnittlich 19, in 2. 57, in 3. 17, in 4. 45 Wurzeln. In 2. stehen die Wurzeln sehr dicht und sind dünn etwa 12 mm lang, in 1. sind sie dicker, ebenso in 3., in 4. sind sie wiederum dünn und stehen dicht.

In einem anderen Versuch wurde ein Dekokt aus Keimpflanzen von *Helianthus annuus* benutzt. Er wurde aus Kotyledonen wachsender Keimpflanzen, andererseits aus Hypokotylen hergestellt. Das Dekokt wurde mit gleichen Teilen K n o p s c h e r Nährlösung vermischt.

Am 29. II. wurden um 4 nachm. Hypokotyle von *Helianthus annuus* 1. in ein Dekokt aus Kotyledonen samt der Endknospe + gl. Teil K n o p, 2. in ein Dekokt aus Hypokotylen + gl. Teil K n o p, 3. in Knop + gl. Teil dest. Wasser gestellt. Am 5. III. um 9 vorm. ist in 1. die Flüssigkeit getrübt, die Hypokotyle tragen durchschnittlich 18 bis 8 mm lange Wurzeln. In 2. ist die Flüssigkeit klar, jedes Hypokotyl trägt durchschn. 18 bis 11 mm lange Wurzeln. In 3. tragen 4 von 14 Hypokotylen je 5 höchstens 6 mm lange Wurzeln.

Auch hier wirkten Dekokte aus den Kotyledonen oder Hypokotylen fördernd auf die Wurzelbildung, sowie deren Wachstum ein. Weiterer Versuch: Hypokotyle von *Helianthus annuus* wurden am 9. III. 1. in K n o p + gl. Teil dest. Wasser gestellt. Ein Teil (a) besaß Kotyledonen, der andere nicht (b) 2. in ein Dekokt von Kotyledonen + gl. Teil dest. Wasser

wiederum mit (a) und ohne (b) Kotyledonen. Am 16. III. besitzen in 1. die Hypokotyle *a* durchschnittlich 23, *b* 8 Wurzeln, in 2. die Hypokotylen *a* 25, *b* 12 Wurzeln.

Der Einfluß der aus den Kotyledonen extrahierten Stoffe ist zwar vorhanden, aber nicht zu stark. Deutlicher äußert er sich an Hypokotylen, denen die Kotyledonen abgeschnitten wurden.

Schließlich ein Versuch mit stärkerem Extrakt. 15 g Kotyledonen von *Hel. annuus* wurden in 50 ccm Wasser zum Sieden erhitzt, dann 1 Stunde stehen gelassen, worauf der Extrakt mit 100 ccm Knop verdünnt wurde. Am 15. III. wurden in das Gemisch 3—4 cm lange Hypokotyle von *Helianthus annuus* gestellt (1), andere (2) in verdünnten Knop ($\frac{1}{3}$ Knop, $\frac{2}{3}$ dest. Wasser). Am 21. III. tragen in 1 die Hypokotyle durchschn. 34, in 2 nur 4 Wurzeln. Schon am 19. III. trugen die Hypokotyle in 1 einige eben durchbrechende Wurzeln, in 2 waren keine vorhanden.

In diesem Versuche ist der Einfluß des Dekoktes aus Kotyledonen auf die Wurzelbildung unbestreitbar.

Erwähnen will ich noch Versuche, wo Pflanzenteile durch Chloroformdämpfe getötet wurden, worauf das Chloroform verdunsten gelassen wurde. Dann wurden die toten Pflanzenteile mit dest. Wasser übergossen und in das so gewonnene Extrakt wurden Hypokotyle von *Helianthus annuus* gestellt. Im Vergleiche mit Hypokotylen im Knop entwickelten sie mehr Wurzeln, jedoch ein bischen weniger als in einem Dekokt. Doch waren die Unterschiede zwischen dem Extrakt und dem Dekokt ziemlich gering.

Will man die Versuche mit Dekokten oder Extrakten bewerten, so darf nicht vergessen werden, daß äußere Umstände, physikalische wie chemische, das Wurzelwachstum und offenbar auch die Wurzelbildung sehr stark beeinflussen. Schon schwache Moorextrakte, kolloidale Stoffe, Mineralsalze, Gase stimulieren die Bildung und das Wachstum von Adventivwurzeln. Ich verweise auf die Arbeit von Hilitzer (1932) und Zimmermann (1933), wo man weitere Literatur finden wird.

P. W. Zimmermann et cons. (1933) haben gezeigt, daß nach Behandlung der Stengel mit Kohlenmonoxyd an

denselben zahlreiche Adventivwurzeln in feuchter Luft entstehen, oder schon vorhandene Wurzelanlagen zum Wachsen stimuliert werden. Das Gas ist spezifisch für die Wurzelbildung, Knospenbildung wird durch dasselbe nicht veranlaßt. Dieses Ergebnis beweist, daß ziemlich einfache Verbindungen die Wurzelbildung veranlassen können. Welche Stoffe in den Dekokten und Extrakten oder in den Bakteriensuspensionen die Wurzelbildung veranlassen, muß weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Daß die Endknospen auf das Wachstum, die anatomische und formative Entwicklung der Sprosse einen regulativen Einfluß ausüben, haben mehrere Arbeiten bewiesen. K i s s e r beobachtete, daß nach dem Abschneiden der Endknospe das Stengelwachstum herabgesetzt wird. Durch das Ankleben der Endknospe wird das Wachstum restituiert. K i s s e r und P o p p (1932) behaupten, daß in den Endknospen Stoffe entstehen, welche das Wachstum der Internodien regulieren, ähnlich wirken beleuchtete Blätter. Auch F l i r y (1932) findet, daß die Endknospe das Wachstum der Stengels stofflich beeinflusst. Ähnlich wirkt menschlicher Speichel. Für das Streckungswachstum bei *Asparagus plumosus* und *Sprengeri* hat O s t e r h u i s (1931) nachgewiesen, daß die Entfernung der Sproßspitze ein wenig, diejenige der Sproßspitze samt den Achselknospen das Wachstum der Internodien völlig zum Stillstande bringt. Aus der Spitze wandern Stoffe aus, welche sich in Gelatine auffangen lassen und sowohl die Zellstreckung als auch die Zellteilung beeinflussen. C z a j a (1931) nimmt an, daß aus den Endknospen irgend welche Kraft ausströmt welche dem Organismus eine einheitliche Führung verleiht. Er glaubt, daß es sich nur um einen stofflichen Einfluß des Meristems handeln kann und daß Wuchsstoffe die polare Orientation der Zellen bestimmen.

S n o w (1931, 1932) kommt zum Resultate, daß aus der Endknospe bei den dikotylen Pflanzen Stoffe auswandern, welche das Auswachsen der Achselknospen verhindern. Gleichzeitig erhalten sie das Internodienwachstum sowie ihre Verdickung. Hierauf wurde schon oben hingewiesen. V a n d e r L e k (1925) hat bewiesen, daß an verholzten Zweigen die Entfernung der Knospen die Wurzelbildung verhindert. Daß diese

Wurzelbildung durch einen in Laubblättern entstehenden Stoff geschieht, haben F. W. Went (1929) sowie Bouillinne und Went (1933) in ausführlichen Versuchen bewiesen. F. W. Went (1932) hat schließlich versucht die Polarität der Pflanzen durch eine in entgegengesetzter Richtung vor sich gehende Strömung von basischen und sauren Stoffen auf Grund von elektrischen Potentialdifferenzen im Pflanzenorgan zu erklären.

Die von mir ausgeführten Versuche stehen mit der Ansicht, daß Rhizogene in den Stengeln abwärts, die Blastogene (d. h. knospenbildende Stoffe) aufwärts, also akroskop strömen, vollkommen in Übereinstimmung. Ja manche Versuche, welche hauptsächlich auf in verschiedener Richtung geführten Einschnitten beruhen, lassen sich kaum anders erklären. Eine genügend ergiebige Zuleitung der Baustoffe ist zwar als formale Bedingung unerläßlich, sie ist jedoch nicht für die Organbildung entscheidend. Auch zeigen die Versuche über Wurzelbildung in verschiedenen Flüssigkeiten, daß ziemlich geringe Substanzdosen genügen, um die Wurzelbildung sehr stark zu beeinflussen. Die Kötyledonen und Endknospen, aber auch die Stengel und Blätter enthalten Stoffe, welche die Wurzelbildung bedeutend zu stimulieren vermögen. Auch Bakterien, welche ja nach neueren Befunden Wachstumsstoffe bilden können, beeinflussen die Wurzelbildung, besonders *P. rhizogenes*, von welchem ich nachgewiesen habe, daß es die Knospenbildung verhindert, hingegen die Wurzelbildung veranlaßt.

Allerdings ist die Organbildung ein sehr komplizierter Vorgang und die Organogene sind wohl nur einer von den vielen Faktoren, welche dabei mitspielen. Vom Mechanismus der formativen Vorgänge erklärt er nichts. Man könnte ihn zu den auslösenden Faktoren zählen, welche Klebs für die Entwicklung der Pflanzen in Anspruch nahm.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Epikotyle und Hypokotyle von *Aesculus hippocastanum*, *Vicia faba*, *Helianthus annuus* und *Lupinus albus* wurden durch in verschiedener Richtung geführte Einschnitte ver-

wundet. Aus den Orten, an welchen dann Adventivwurzeln und Knospen angelegt werden, kann gefolgert werden, daß in den Epikotylen und Hypokotylen Stoffe abwärts wandern, welche die Wurzelbildung, aufwärts jedoch solche, welche die Knospenbildung veranlassen. Durch die Richtung der Einschnitte lassen sich die Orte, an welchen die Wurzeln oder Knospen entstehen sollen, bestimmen oder verlegen. Sie können auch an intakten Flanken der Stengel entstehen, wenn sich hier die fraglichen Stoffe anhäufen. Es können dies nicht bloße Baustoffe sein, deren Vorhandensein allerdings eine formale Bedingung ist. Denn für die Wurzeln sind es an Epikotylen Stoffe, welche von der Spitze abwärts wandern und das sind sicher nicht aus den Kotyledonen direkt strömende Baustoffe. Die »organbildenden Stoffe« werden als Organogene bzw. Rhizogene und Blastogene bezeichnet. Die Rhizogene entstehen entweder in der Endknospe, in den epigaeischen Kotyledonen, oder in Laubblättern. Wo die Blastogene entstehen, kann bisher nicht sicher gesagt werden.

Dekokte oder Extrakte aus Endknospen oder epigaeischen Kotyledonen stimulieren stark die Wurzelbildung an Hypokotylen von *Helianthus annuus*. Dasselbe gilt von Bakteriensuspensionen in Knopscher Nährlösung. Besonders die Suspension von *Pseudomonas rhizogenes* stimuliert sehr stark die Wurzelbildung. Es kann jedoch noch nicht behauptet werden, daß in diesen Versuchen dieselben Stoffe zur Wirkung gelangen, wie in der lebenden Pflanze selbst. Jedenfalls stehen diese Versuche mit den ersteren in vollem Einklange.

Summary.

Regeneration, organogens, and coordination.

The epicotyls and hypocotyls of *Aesculus hippocastanum*, *Vicia faba*, *Lupinus albus*, *Helianthus annuus* have been wounded by deep incisions made in different directions. Adventitious roots and buds appear on places where they may be expected, if their formation were caused by accumulation

of hormones — organogens — streaming longitudinally in the stems either from the apex to the basis (rhizogens, causing the formation of roots) or in the opposite direction (blastogens, causing the formation of buds). It is possible to determine the position of new roots and buds by incisions made in different directions. The storage substances of cotyledons are necessary for the formation of roots and buds, but they are rather a formal condition of their development.

Decoctions or extracts from buds, leaves, or cotyledons (*Helianthus annuus*) dissolved in Knops solution stimulate the formation and growth of roots. Suspensions of some bacteria, especially of *Pseudomonas rhizogenes* have the same effect. Nevertheless the author will not affirm, that in these experiments the same substances work as in the living plant.

L I T E R A T U R

- Bein E. 1932, Unters. ü. d. Korrel. zw. Blattstiel u. Blattspreite. Mitt. d. Inst. f. allg. Bot., Hamburg. 9.
- Bouillenne R. et Went F. W., 1933, Rech. expér. sur la néoform. des racines etc. Ann. Jard. bot. Buitenzorg. 43.
- Czaja A. Th., 1931, Der Einfluß von Korrelationen auf Restitution und Polarität. Ber. d. Bot. Ges. 49.
- Dostál R., 1930, Otázka vnitřní sekrece u rostlin. — La question de la sécrétion interne dans les plantes. Brno.
- Duhamel de Monceau, 1758, La physique des arbres. Paris.
- Fliry M., 1932, Zur Wirkung der Endknospe auf die Hypokotylstreckung der Dikotylenkeimlinge. Jahrb. f. wiss. Bot. 77.
- Göebel K., 1902, Über Regeneration im Pflanzenreich. Biol. Ctb. 22.
- , 1906, Allgemeine Regenerationsprobleme. Int. bot. Kongr. Wien. 1905.
- , 1908, Einleitung in die exp. Morphologie d. Pflanz. Leipzig.
- Hilfizer A., 1932, Über den Einfluß der Humusstoffe auf das Wurzelwachstum. Beih. bot. Ctbt. 49, I.
- Kisser u. Popp, 1931, Unters. ü. Wachstums- u. Differenzierungsvorgänge an dikotyl. Keimpfl. etc. Anz. Akad. Wien, math. naturw. Kl. 68.
- Kořínek J., 1922, O korrelacích mezi dělohou a úžlabním pupenem. Spisy přír. fak. Mas. univ. Brno, 1922, č. 16.
- , 1922, O korelační citlivosti u rostlin. Rozpr. Č. Akad. XXX. č. 40.
- , 1923, Über die Empfindlichkeit der Korrelationen bei den Pflanzen. Autorefer. Arch. f. Entw. mech. 52.

- K ü s t e r E., 1925, Pathologische Pflanzenanatomie. 3. Aufl. Jena.
L e k H. A., v. d. 1925, Ower de wortelforming van houtige stekken. Utrecht.
- M a g n u s W., 1914, Die Entstehung der Pflanzengallen. Jena.
- N a v e z A. E., 1933, Growth promoting substance and elongation of roots. Journ. Gen. Physiol.
- N ě m e c B., 1905, Studien über Regeneration. Berlin.
—, 1930, Bakterielle Wuchsstoffe. Ber. d. d. bot. Ges. 48.
- N i e t h a m m e r A., 1928, Stimulationswirkungen im Pflanzenreich. Biol. gener. 4.
—, 1932, Die Pollenkeimung und chem. Reizwirkungen etc. Bioch. Ztt. 249.
- O s t e r h u i s J., 1931, Der Einfluß der Knospen auf das Stengelwachstum von *Asparagus plumosus* und *A. Sprengeri*. Rec. d. tr. bot. Néerl. 28.
- S a c h s J., 1882, Stoff- und Form der Pflanzenorgane. Arb. a. d. bot. Inst. Würzburg.
—, 1898, Physiologische Notizen. Jena.
- S i m o n S., 1908, Exp. Unters. ü. d. Entst. von Gefäßverbindungen. Ber. d. d. bot. Ges. 26.
- S n o w R., 1925, The correlative inhibition of growth of axillary buds. Ann. of Bot. 39.
—, 1931, 32, Experiments on growth and inhibition. Proc. R. Soc. London, I., 108, II., 108, III., 111.
—, 1932, Growth regulators in plants. New Phylologist. 31.
- S ö d i n g H., 1926, Über d. Einfl. d. jungen Inflor. a. d. Wachst. d. Schaftes. Jb. f. wiss. Bot. 65.
- U y l d e r t J. E., 1931, De inloed van groeistof of planten met intercalaire groei. Utrecht.
- W e n t F. W., 1929, On a substance causing rootformation. Proc. kon. Ak. Amsterdam. 32.
—, 1932, Eine botanische Polaritätstheorie. Ib. f. wiss. Bot. 76.
- W e n t A., 1930, Über wurzelbildende Substanzen bei *Bryophyllum calycinum*. Ztt. f. Bot. 23.
- Z i m m e r m a n, C r o c k e r, H i t c h c o c k, 1933, Initiation and stimulation of roots from exposure of plants to carbon monoxd gas. Contr. Boyce Thomson Inst. V., 1.
-

VIII.

Hyetisogrady Evropy.

(*Les hyetisogradients de l' Europe.*)

Napsal **BOHUSLAV HRUDIČKA.**

(Předloženo 7. března 1934.)

Prací, sledujících změny srážek v ročním průběhu na velkých oblastech, je mnoho. K dosažení srovnatelnosti roční srážkové periody na rozličných místech je třeba vyloučiti působení nestejného absolutního množství srážek na srovnávaných místech. To se děje buď vyjádřením měsíčních množství srážek v % roční sumy srážek, jde-li o vyloučení nestejných délek měsíců, Angotovým pluviometrickým excesem, koeficientem a veličinou Fischerovou. Za přibližné charakteristiky ročního chodu srážek na území Evropy bylo používáno zejména polohy ročního srážkového maxima a minima,¹⁾ amplitudy roční srážkové periody,²⁾ polohy těžiště srážkového rozdělení a doby polovičních srážek.³⁾

Při studiu srážkové periody je výhodné použití obměny metod, jichž upotřebili při zkoumání o teplotě vzduchu W. Köppen,⁴⁾ E. Rubinstein,⁵⁾ o teplotě a tlaku vzduchu R. Spi-

¹⁾ G. Hellmann, Untersuchungen über die jährliche Periode der Niederschläge in Europa. Sitzungsber. d. preuß. Akademie der Wissenschaften 1924, XI.

²⁾ A. Supan, Die Verteilung des Niederschlags auf der festen Erdoberfläche. Met. Mitteilungen, Ergänzungsheft 124, 1898, S. 51 Die mittlere jährliche Regenschwankung.

³⁾ B. Hrudíčka, Příspěvek k prozkumu ombrické kontinentality v Evropě. Spisy odboru čs. společnosti zeměpisné v Brně C 3, 1933.

⁴⁾ W. Köppen, Der jährliche Temperaturgang in der gemäßigten Zone. Meteorol. Zeitschrift XLIII, 1926, str. 161.

⁵⁾ E. Rubinstein, Der jährliche Gang der Lufttemperatur, Met.

taler,⁶⁾ totiž sledovati změny srážek od měsíce k měsíci. Intensita těchto změn se přiléhavě vyjádří rozdílem srážek dvou sousedících měsíců, udaným v % hodnoty roční srážkové amplitudy. Tak nabudeme hodnot nezávislých na roční sumě srážek a charakterisujících změny srážkové od měsíce k měsíci nezávisle na velikosti rozpětí mezi extrémními hodnotami, — tedy navzájem dobře srovnatelných.

Gradientsy ročního chodu srážek, vyjádřené uvedeným způsobem,⁷⁾ jsou zobrazeny na mapách I.—XII.⁸⁾

Od ledna k únoru (mapa I.) nastává téměř v celé Evropě pokles srážek. Oblasti vzestupu srážek jsou malého rozsahu a tvoří několik ostrovů. Vzestupný gradient je jednak v sev. cípu poloostrova Skandinávského a na severních ostrovech (Vardö + 13·5%, Björn öy + 34·8%), na vých. pobřeží Velké Británie (Aberdeen + 5·4%), v sev. části poloostrova Pyrenejského (Guarda + 21·1%), v oblasti západních Alp (Gap + 19·4%), v jihozáp. části stepné plošiny jihoruské (Chisinau + 10·4%), v záp. části nížiny Valašské (Corabia + 8·9%), v záp. části středoruského a středopolského nížinného pásu (Pinsk + 7·4%), ve střední části poloostrova Balkánského (Bitolj + 59·0%, Kavála + 30·7%) a ojedinele i jinde. Hranice mezi kladnými a zápornými gradienty jsou v této době silně proměnlivé, takže je lze vymeziti pouze povšechně. Na mapě

Zeitschrift XLIV, 1927, str. 13. Též E. Rubinstein, *Klimat SSR I. Leningrad*. Srov. M. Bogolepov, *Über die zahlenmäßige Bestimmung der Kontinentalität des Klimas in Sibirien*. *Met. Zeitschr.* XLIX, 1932, str. 258.

⁶⁾ R. Spitaler, *Der jährliche Verlauf der Temperatur und des Luftdruckes auf der Erde*. Veröff. d. met. Observatoriums auf dem Donnersberge XVII, Prag, 1931.

⁷⁾ Základní číselný materiál poskytl díla E. Alt, *Klimakunde von Mittel- und Süd-Europa*, Berlin 1932, B. J. Birkeland, N. J. Föyn, *Klima von Nordwesteuropa und den Inseln von Island bis Franz-Josef-Land*, Berlin 1932, Hellmann, *Untersuchungen...*, K. Knoch, *Meteorologisches Taschenbuch VIII*, Leipzig 1931. Měsíční srážková množství byla vesměs přepočtena na stejnou délku měsíců rovnou $\frac{1}{12}$ roku. Všechny použité normály jsou dlouhodobé.

⁸⁾ Přehled prací o srážkových poměrech v Evropě podávají citovaná díla E. Altova a G. Hellmannova.

jsou oblasti kladných gradientů vyčárkovány. Záporné gradienty jsou absolutně neveliké. Pouze místy v oblastech ombrických oceanických klesají pod -20% (Bergen — 32.8%), Ste Honorine du Fay — 46.6% , Cartagena — 30.2% , Caltanissetta — 24.0%). Hyetisogradienta -10% je zakreslena na mapě. Ojediněle se vyskytují gradienty menší -10% i na místech na mapě nevyznačených. (Wien — 26.9% , Budapest — 11.6% , Obir — 12.6% , Bihač — 19.3% , Warszawa — 10.2% , Lund — 15.8% .)

Mezi únorem a březnem se situace obrací. Většina evropské pevniny je oblastí kladných gradientů (viz mapu II.), které v souvislé oblasti nížiny Uherské a Hornoitalské a ve vých. části poloostrova Pyrenejského vystupují nad $+20\%$. (Wien $+40.4\%$, Bologna $+27.1\%$, Ciudad Real $+39.1\%$.) Kladné hodnoty přes 20% se objevují ojediněle i jinde. (Paris $+26.9\%$, Puy de Dôme $+27.9\%$, Münster $+23.9\%$, Airolo $+24.2\%$, Kijev $+25.5\%$, Braila $+29.3\%$.) Rozhraní mezi kladnými a zápornými gradienty postupuje zhruba podél pobřeží; hlouběji do pevniny zasahuje pouze na plošině Fenskandie a přilehlých částech ruské tabule. Severozápadním okrajem poloostrova Skandinávského a Velké Britanie s Irskem probíhá hyetisogradienta -20% . Na jihu Evropy je oblast záporných gradientů pod -20% omezena na její jižnější cípy poloostrova Apeninského, Balkánského a na přilehlé ostrovy.

Od března k dubnu pokračuje táž situace v zesílené míře. Území Evropy je opět většinou oblastí kladných gradientů. Nad $+20\%$ vystupují v rozsáhlé oblasti ve střední Evropě (Suwalki $+32.7\%$, Pinsk $+30.9\%$, Budapest $+37.2\%$, Beograd $+56.1\%$, Bitolj $+56.4\%$, Milano $+45.6\%$, München $+28.7\%$), v již. části jihoruské plošiny, na severu poloostrova Pyrenejského a v jižní Francii (Teruel $+37.5\%$, San Sebastian $+45.1\%$, Toulouse $+48.8\%$, Izieux $+43.8\%$). Jinde jsou vyšší hodnoty ojedinělé (Moulins $+22.2\%$, Agnone $+21.8\%$). Hyetisogradienta nulová jde opět podél pobřeží. Do pevniny vniká hlouběji na plošině Finské a na nížině Německé, zvláště v její západní části. Záporné gradienty pod -20% jsou na jihu poloostrova Pyrenejského (Gibraltar -31.1%), ve vých. části poloostrova Balkánského (Kavála

— 24·0%), na severozáp. pobřeží Irska, Velké Británie a poloostrova Skandinávského (Blacksod Point — 33·3%, Bergen — 32·8%, Vardö — 29·7%) a v jihozápadní části německé nížiny s přilehlými oblastmi německého středohoří (Münster — 37·6%, Freudenstadt — 69·0%). Záporné hodnoty se objevují i ve vyšších polohách alpských, nízké ve francouzském centrálním masivu (Spittal — 8·8%, Airolo — 4·0%, Puy de Dôme — 55·8%). (Mapa III.)

Gradienty květen—duben jsou opět na téměř celé pevnině kladné. Rozhraní mezi kladnými a zápornými gradienty je posunuto blíže k pobřeží. Na poloostrově Apeninském ustoupila hyetisograda nulová oproti poměrům před měsícem k severu do trupu pevniny. Záporné hodnoty menší než — 20% se objevují pouze ojediněle v oblasti klimatu středomořského (Lisboa — 31·1%, Messina — 31·7%, Sevastopol — 30·4%). Kladné hodnoty gradientů přestupují + 20% na veliké oblasti v nitru pevniny, kde místy stoupají až nad + 40%. Je to v souvislé ploše v Českoněmeckém středohoří a v přilehlých částech Německé nížiny (Bayreuth + 62·9%, Poznaň + 48·0%), v centru poloostrova Balkánského a Pyrenejského (Kjustendil + 62·1%, Užice + 41·9%, Plovdiv + 58·6%, Valladolid + 41·9%, Teruel 42·5%). (Mapa IV.)

Mezi květnem a červnem zabírají záporné gradienty na severozápadě Evropy pouze malou uzavřenou oblast, která zaujímá sev. část Velké Británie a jihozápadní část Norska (Aberdeen — 37·8%, Florö — 15·1%, Thorshavn — 16·0%). Na jihu se území záporných gradientů oproti předcházejícímu období rozšířilo a zabírá značnější části jihoevropských poloostrovů (Santiago — 38·5%, Ciudad Real — 50·0%, Milano — 52·6%, Bari — 41·2%, Thessaloníke — 31·1%). Na veliké části pevniny přesahují gradienty hodnotu + 20%. Menší než + 20% jsou v záp. části nížiny Uherské a oblastech okolních (Budapest + 9·3%, Osijek + 2·1%), v záp. části Německé nížiny a přilehlých částech Českoněmeckého středohoří (Berlin + 7·5%) a na ruské tabuli v pruhu na severovýchod od vrchoviny Valdajské (Leningrad + 10·9%, Moskva + 12·3%). Směrem do nitra pevniny stoupají gradienty přes + 40%; těchto hodnot dosahují na veliké ploše ve východní a jihových. Evropě (Perm + 45·5%, Orenburk + 60·7%, Odessa + 77·1%, Wilno

† 47·7%, Lwów + 56·6%, Cluj + 47·8%, Burgaz + 59·6%). (Mapa V.)

Mezi červnem a červencem jsou v Evropě záporné gradienty na jižní, kladné na severní polovině pevniny. Při jihoevropském pobřeží klesají záporné gradienty pod -20% (Bordeaux $-66\cdot7\%$, Gap $-41\cdot8\%$, Perugia $-53\cdot7\%$, Bihač $-41\cdot0\%$, Budapest $-53\cdot5\%$, Bitolj $-53\cdot9\%$, Burgaz $-65\cdot4\%$). Směrem k severu následuje pak poměrně úzký pruh přechodný s gradienty mezi -20% až $+20\%$, který přechází ve výraznou oblast kladných gradientů nad $+20\%$, zabírající severní a severozápadní Evropu. Na severozáp. části nížiny Německé a na jižní části nížiny Skandinávské přesahují gradienty $+40\%$ (Hamburg + $60\cdot0\%$, Poznaň + $62\cdot0\%$, Karlstad + $60\cdot4\%$), menší oblast vysokých gradientů je na sev. části Baltského štítu (Sodankylä + $50\cdot0\%$). Ojedinele se vyskytují veliké gradienty i jinde v Pobaltí (Leningrad + $43\cdot5\%$), ve Velké Británii (Aberdeen + $70\cdot3\%$) a Irsku (Malin Head + $41\cdot0\%$). (Mapa VI.)

Gradienty od července k srpnu (mapa VII.) jsou výrazem situace obracející se od léta k zimě. Oblasti přímořské mají kladné gradienty, pevninské záporné. Obor kladných gradientů zasahuje hlouběji do pevniny na poloostrově Finském a v přilehlé části ruské tabule. Nad $+40\%$ stoupají gradienty na jižním pobřeží Norska a v Irsku (Lister + $43\cdot2\%$, Birr Castle + $52\cdot5\%$). Oblast záporných gradientů na pevnině vykazuje v nitru pevniny hodnoty menší než -20% . Silná tendence k nízkým gradientům je na nížinách; pod -40% klesají na nížině Německé (Poznaň $-62\cdot0\%$), v jižních částech ruské tabule (Odessa $-57\cdot1\%$, Saratov $-68\cdot2\%$), na nížině Valašské a přilehlých částech Thráckého masivu (Corabia $-73\cdot3\%$, Kjustendil $-86\cdot2\%$). Záporné gradienty nalézáme též v nitru severní části poloostrova Pyrenejského (Santiago $-7\cdot0\%$, Teruel $-5\cdot0\%$).

Mezi srpnem a zářím se tato situace dále rozvíjí. Kladné gradienty vystupují na jihoevropských poloostrovech, na atlantském pobřeží francouzském a na západním pobřeží skandinávském. Ostatní pevnina i s britskými ostrovy má gradienty záporné. Obojí gradienty jsou absolutně veliké, což svědčí o výrazně vyvinuté situaci (Valladolid + $77\cdot4\%$, Gal-

lipoli + 55·3%, Bordeaux + 43·6%, Bodö + 79·4%; Birr Castle — 90·0%, Stockholm — 63·4%, Wilno — 70·2%). Přechodné oblasti mezi — 20% až + 20% zabírají pruhy neveliké šířky. Vysoké kladné gradienty mají největší rozšíření na poloostrově Pyrenejském, nízké záporné na středních částech britských ostrovů, na nížině Skandinávské a na pobaltské části ruské tabule. (Mapa VIII.)

Od září k říjnu (mapa IX.) mají opět oceanické oblasti kladné gradienty, pevnina záporné. Záporné gradienty jsou však v absolutních hodnotách oproti poměrům předešlého období malé. Oblast kladných gradientů vniká na západě i na jihu poměrně hluboko do pevniny; od jihu až na území naší republiky.⁹⁾ Objevují se i na jižní části ruské tabule (Saratov + 20·0%, Věrnoleninsk + 12·5%, Kijev + 2·1%, Zdobunów + 3·3%). Nad + 40% vystupují gradienty v souvislých oblastech na již. části Velké Británie a na záp. pobřeží francouzském (Hull + 88·2%, Oxford + 90·3%, Nantes + 64·3%), na celém poloostrově Apeninském (Bologna + 68·6%, Messina + 59·4%) a na jihozáp. části poloostrova Balkánského (Durřest + 64·5%). Záporné gradienty objevují se v nízkých hodnotách souvisle na sev. části ruské tabule (Kem — 45·7%, Kostroma — 43·9%) a v oblasti ležící podél osy zátoka Gdanská — jezero Bodmanské (Königsberg — 33·3%, Friedrichshafen — 42·4%).

Mezi říjnem a listopadem (mapa X.) se posunuje hyetogram gradienta nulová od pevniny k pobřeží. Kladné gradienty má sev. část Velké Británie a Irsko, jihozáp. polovice poloostrova Pyrenejského, jižní části poloostrovů Apeninského a Balkánského s přilehlými ostrovy a východní oblasti ruské tabule. Kladné gradienty nad + 20% se objevují na malé pobřežní oblasti Velké Británie a Irska (Stornoway + 20·8%, Malin Head + 25·6%), na jihu poloostrova Pyrenejského

⁹⁾ Diference mezi množstvím srážek v září a říjnu použil A. Gregor ke znázornění pronikání srážkového vlivu jižního na území Československa. Viz mapu: Rozdíl srážek mezi zářím a říjnem. (Vliv moře Adriatického.) Atlas republiky Československé. — Oblasti kladných gradientů vnikající od Adrie do pevniny souvisejí, jak je z naší mapy IX pěkně zřejmé, s drahami středo-mořských níží.

(Gibraltar + 50·3%) a na jihovýchodní části poloostrova Balkánského (Istambul + 42·6%, Kavála + 64·0%, Athénai + 56·9%). Na celé zbývající ploše Evropy vystupují gradienty záporné, které nabývají zvláště nízkých hodnot v souvislé oblasti zabírající jižní část poloostrova Skandinávského a Velké Británie se západní částí evropského trupu. V nitru této oblasti klesají gradienty pod -40% (Hull $-52\cdot9\%$, Paris $-42\cdot3\%$, Besançon $-51\cdot9\%$, Airolo $-57\cdot7\%$, Spittal $-69\cdot6\%$, Ancona $-50\cdot7\%$). Ojedinele se objevují menší gradienty v sev. Skandinávii a v sev. Rusku (Sodankylä $-25\cdot9\%$, Archangelsk $-25\cdot6\%$, Kostroma $-22\cdot0\%$).

Mezi listopadem a prosincem (mapa XI.) zaujímá jihoevropská oblast kladných gradientů pouze okraje pobřeží a Středomořské ostrovy (Lisboa + 17·0%, Caltanissetta + 24·0%, Kérkyra + 25·7%, Naxos + 20·3%, Istambul + 18·1%); do pevniny vniká hlouběji na plošině jihoruské a středoruské (Kijev + 2·1%, Moskva + 5·3%). Na západě vystupují kladné gradienty na ostrovech Britských (Blacksod Point + 22·2%). Odtud se šíří do nížiny Německé a okolí, pronikají až do oblasti alpské; na sever zasahují do střední části poloostrova Skandinávského (Uccle + 25·0%, Münster + 19·6%, Stettin + 11·6%, Wien + 11·5%, Zürich + 16·1%). Ojedinele se objevují kladné gradienty ve vysokých polohách francouzského středohoří (Puy de Dôme + 27·9%) a Pyrenejí (Pic du Midi + 22·5%) a na ostrovech Severního ledového moře (Björn öy + 17·4%). Nejnižší záporné gradiendy jsou na sev. části poloostrova Pyrenejského a přilehlé části Francouzské nížiny (Bordeaux $-30\cdot8\%$, Valladolid $-41\cdot9\%$, Zaragoza $-43\cdot5\%$), kolem zálivu Botnického (Vasa $-31\cdot6\%$, Haparanda $-38\cdot2\%$, Bodö $-54\cdot4\%$) a v protáhlém pásmu při jihoevropském pobřeží (Izieux $-42\cdot2\%$, Genova $-50\cdot4\%$, Milano $-56\cdot1\%$, Bihač $-48\cdot2\%$, Kjustendil $-44\cdot8\%$, Plovdiv $-58\cdot6\%$).

Gradienty od prosince k lednu jsou téměř v celé Evropě záporné. (Mapa XII.) Kladné gradienty má západní pobřeží poloostrova Skandinávského (Bergen + 2·3%, Bodö + 16·2%, Vardö + 5·4%), některé polohy ve Francouzském středohoří, v Pyrenejích a při jihových. pobřeží poloostrova Pyrenejského (Puy de Dôme + 51·2%, Pic du Midi + 18·0%, Barce-

lona + 12·3%, Cartagena + 25·6%), v oblasti Karpat a Thráckého masivu (Horodenka + 4·5%, Plovdiv + 6·9%). Hyetisogradients nulová není na mapě zakreslena, poněvadž kladné gradienty nejsou vyvinuty výrazně. Území s kladnými gradienty jsou na mapě vyčárkována. Ani záporné gradienty nejsou na trupu pevniny absolutně veliké. Pod — 20% klesají v jihovýchodní části poloostrova Skandinávského, na pobřeží Baltu a Severního moře (Härnösand — 31·3%, Helsinky — 24·4%, Königsberg — 29·2%, Vestervig — 52·4%) a na ostrovech Britských (Aberdeen — 73·0%, Falmouth — 50·5%, Malin Head — 46·2%, Valentia — 34·9%), dále jsou rozšířeny v pruhu podél čáry Rýnsko-Rhôneké (Uccle — 40·6%, Freudenstadt — 55·2%, Chamonix — 40·0%), v Estremaduře a přilehlých oblastech na poloostrově Pyrenejském (Lisboa — 22·6%, Guarda — 35·0%), při pobřeží adrijském a na nížině Uherské (Pola — 61·5%, Budapest — 25·6%, Durrëst — 52·7%), při západním pobřeží Černého moře (Simferopol — 34·4%, Istanbul — 37·2%) a na jižní Rusi (Voronež — 25·0%).

Hyetisogradients na mapách I.—XII. znázorňují změny srážek během roku v Evropě. Metodou rozdílů srážek v sousedících měsících lze též dospěti k charakteristice, vyjadřující, zda roční průběh srážek je jednoduchý, t. j. stoupá-li množství srážek od měsíce nejmenších srážek k měsíci největších srážek a odtud spadá nepřerušeně, či zda-li se vyskytují podružná maxima nebo minima, a v jaké míře porušují jednoduchý průběh srážek. Ať je totiž roční srážkový chod jakéhokoli tvaru, vždy, sledujeme-li rozdíly srážek ve dvou sousedících měsících, musí se součet diferencí kladných a diferencí záporných sobě rovnati. U jednoduchého chodu srážek jsou součty kladných i součty záporných diferencí rovny roční srážkové amplitudě. Je-li tedy roční průběh srážek jednoduchý, je součet vzestupů srážek (nebo součet poklesů) stejně veliký jako amplituda, jsou-li v ročním chodu poruchy, je součet vzestupů (poklesů) větší než amplituda. K číselnému vyjádření stupně rušenosti ročního průběhu srážek lze užítí poměru součtu vzestupů (poklesů) k amplitudě. Při jednoduchém chodu srážek je u d a v a t e l tohoto poměru 1, při rušeném větší než 1, podle toho, jak mocně jsou poruchy ročního průběhu srážek vyvinuty. Vysoká hodnota udavatele

svědčí o nevýrazné roční periodě srážkové. Na mapce XIII. je zakreslena isočára kvocientu 1·2, která odděluje zhruba oblasti s jednoduchým ročním průběhem srážek od oblastí, kde vzájemné prostupování několika klimatických vlivů vytváří výrazná podružná maxima a minima. Ombrický přechodné oblasti jsou jednak na jihu Evropy, na přechodu z klimatického okresu středomořského, a na západě, na přechodu od oceanického klimatu atlantského k podnebním poměrům pevniny.¹⁰⁾ S vysokými hodnotami kvocientu se shledáváme na styčných plochách, kde dvojí klimatický vliv primární se zhruba vyvažuje. Nejvyšší kvocienty jsou jednak v nitru poloostrova Pyrenejského (Valladolid 1·6, Zaragoza 1·7), v severní a střední Itálii (Bologna 1·6, Milano 1·8), při severních hranicích poloostrova Balkánského (Sarajevo 1·6, Kjustendil 1·7, Bitolj 2·2), ve vysokých polohách francouzského centrálního masivu (Puy de Dôme 1·9) a na východním pobřeží Velké Británie (Aberdeen 1·8, Hull 1·9). Roční vývoj srážek od stavu lednového pro Stornoway (oceanický), Kazaň (kontinentální) a Milano (přechodný) znázorňuje obr. XIV.

Obraz ročního průběhu srážek v Evropě, jak jej podávají hyetisogrady na mapách I.—XII., je pouze přibližným znázorněním skutečných poměrů. Vystižení podrobností je možné pouze při studiu srážek na menších oblastech, kde lze použití husté sítě pozorovacích míst a tak přihlédnouti detailně k působení klimatických vlivů regionálních, po př. lokálních a kde je možné použití materiálu úplně srovnatelného.

¹⁰⁾ Srov. mapu u H. Reniera, Die Hauptwindrichtungen bei Niederschlag in Europa, Zeitschr. f. ang. Meteorologie XLIX, 1932, str. 330, jež ukazuje přechodné oblasti celkem souhlasně s naší mapou XIII.

Résumé.*Les hyetisogradients de l'Europe.*

Par B. Hruďka.

(Présenté le 7 mars 1934.)

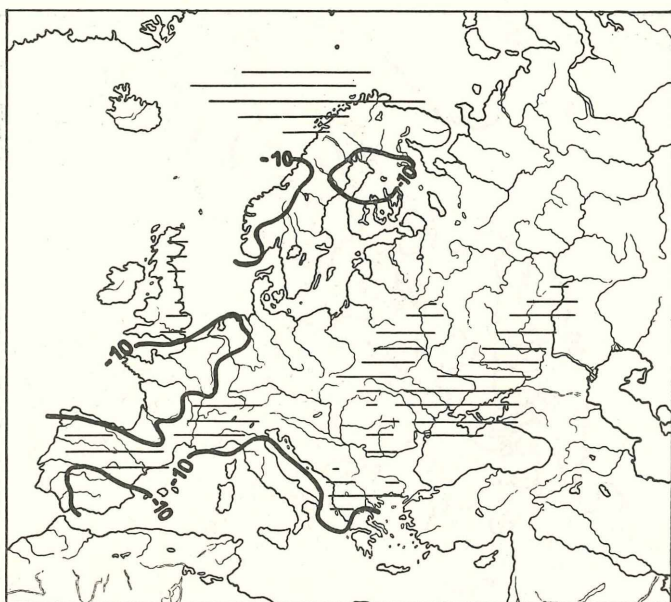
L'auteur exprime le parcours annuel des précipitations atmosphériques en Europe par la valeur des différences dans les précipitations atmosphériques au cours de deux mois voisins, indiquées en % de l'amplitude annuelle de précipitations. Voir les cartes des hyetisogradients de I à XII. Pour exprimer les anomalies dans le parcours de la courbe annuelle des précipitations atmosphériques, l'auteur se sert du rapport

$$K = \frac{[\Delta_1 + \Delta_2 + \dots \Delta_n]}{A}$$

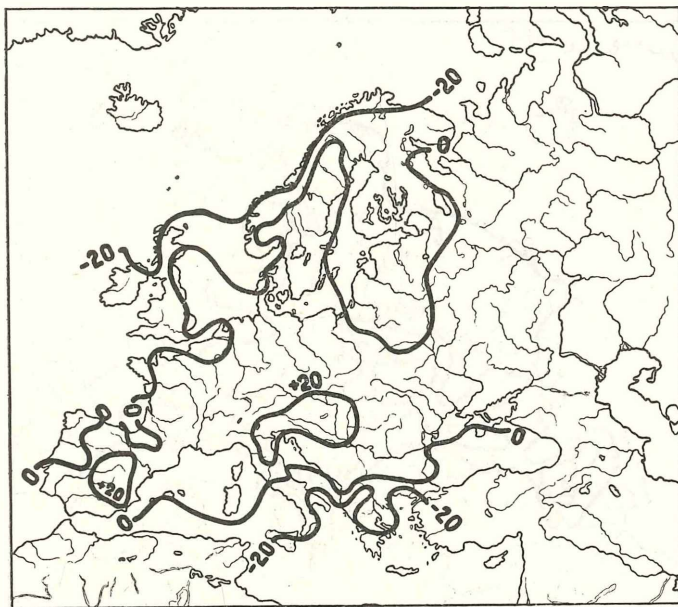
$[\Delta_1 + \Delta_2 + \dots \Delta_n]$ = total des valeurs représentant l'augmentation mensuelle dans le parcours annuel des précipitations atmosphériques, A = amplitude annuelle des précipitations.

Les sphères à une période simple de précipitations présentent un $K = 1$, les sphères à des maxima et minima secondaires dans le parcours annuel de précipitations enregistrent un $K > 1$. La valeur de K monte avec la valeur croissante des maxima et minima secondaires. La carte No XIV présente une ligne $K = 1.2$ délimitant approximativement les sphères de transition, au point de vue oblique, entre les climats océanique et continental.

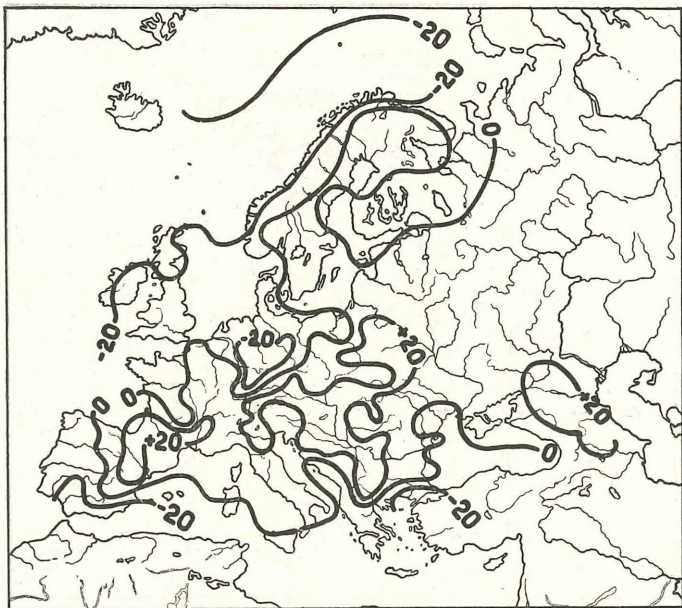
L'institut géographique de l'Université Masaryk
de Brno.



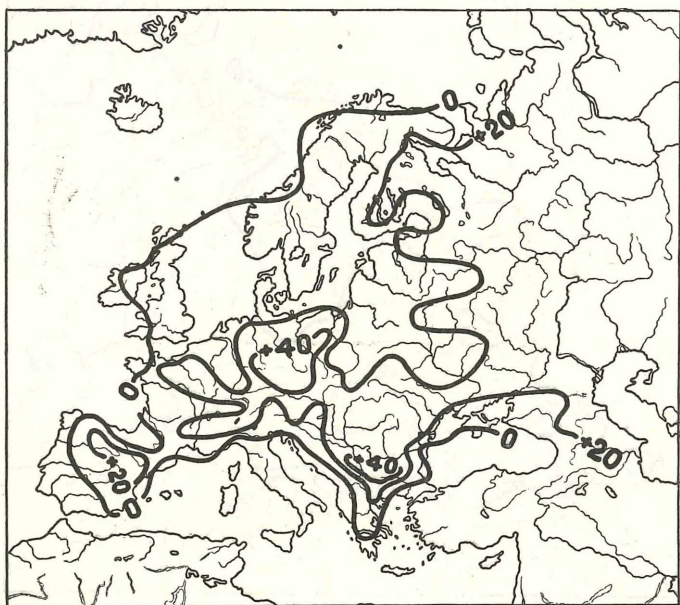
I. Leden—únor (Janvier—février).



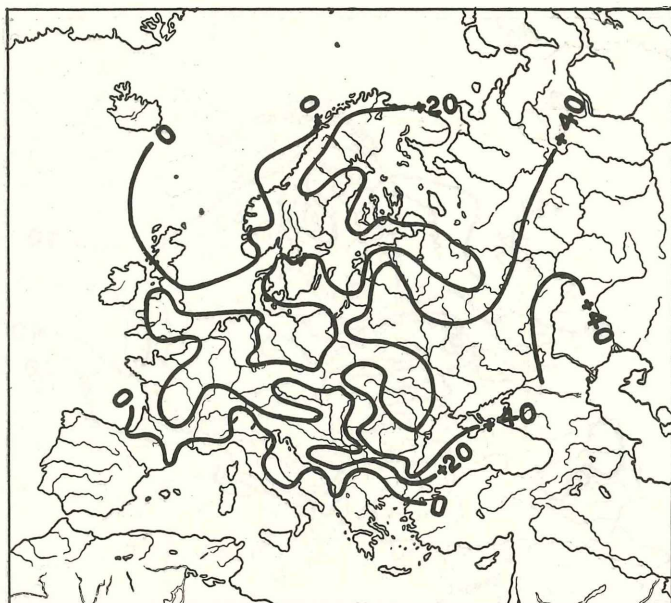
II. Únor—březen (Février—mars).



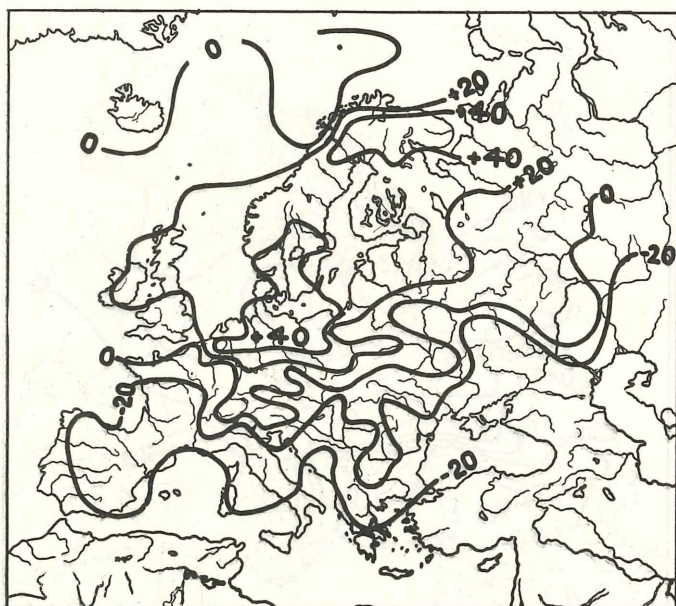
III. Březen—duben (Mars—avril).



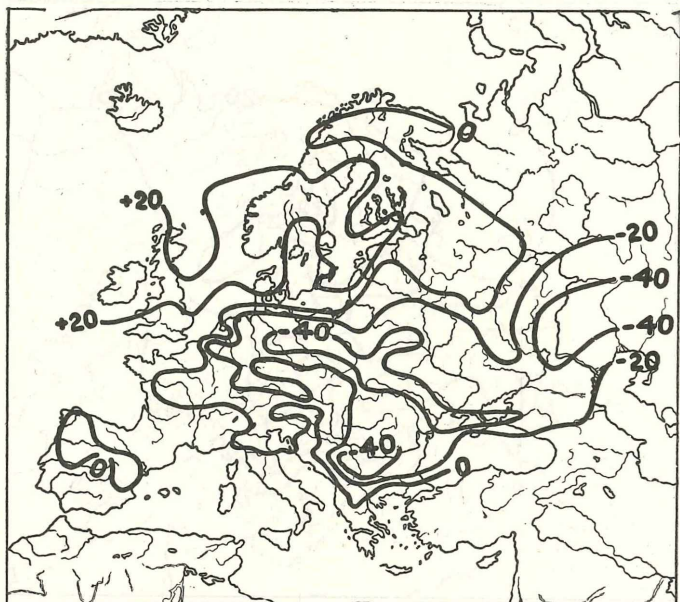
IV. Duben—květen (Avril—mai).



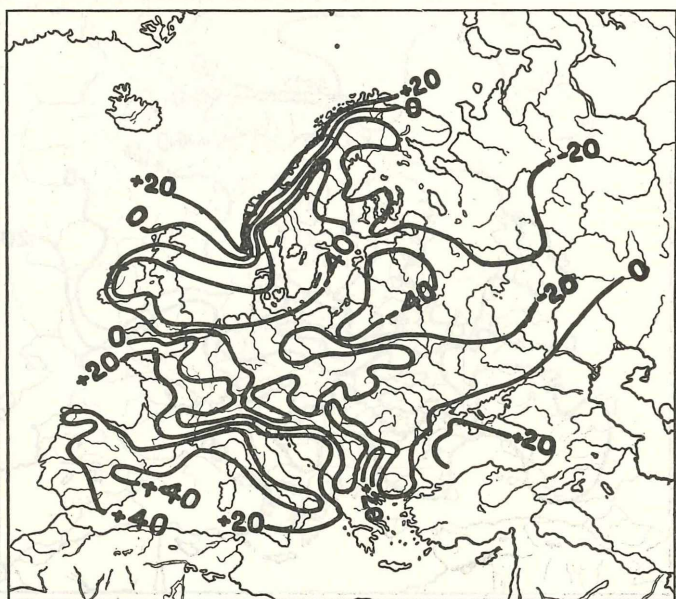
V. Květen—červen (Mai—juin).



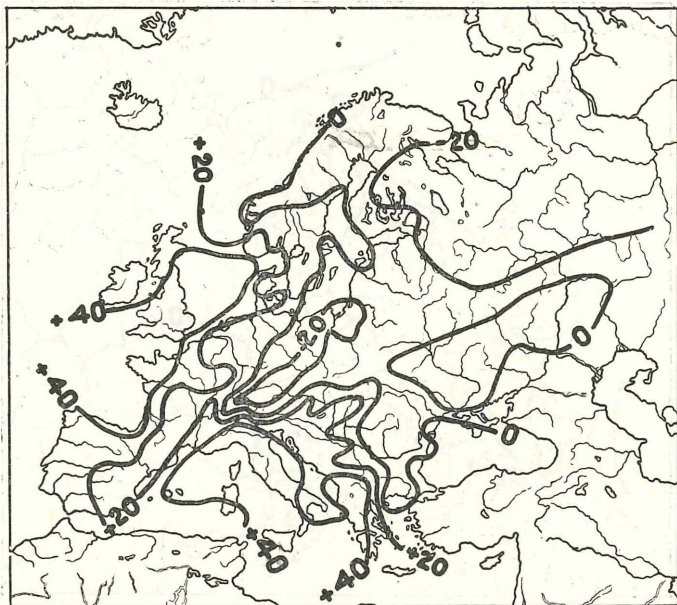
VI. Červen—červenec (Juin—juillet).



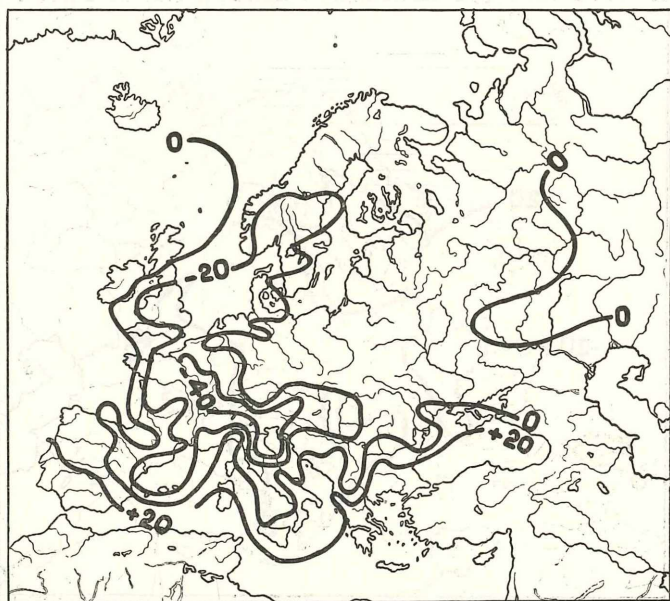
VII. Červenec—srpen (Juillet—août).



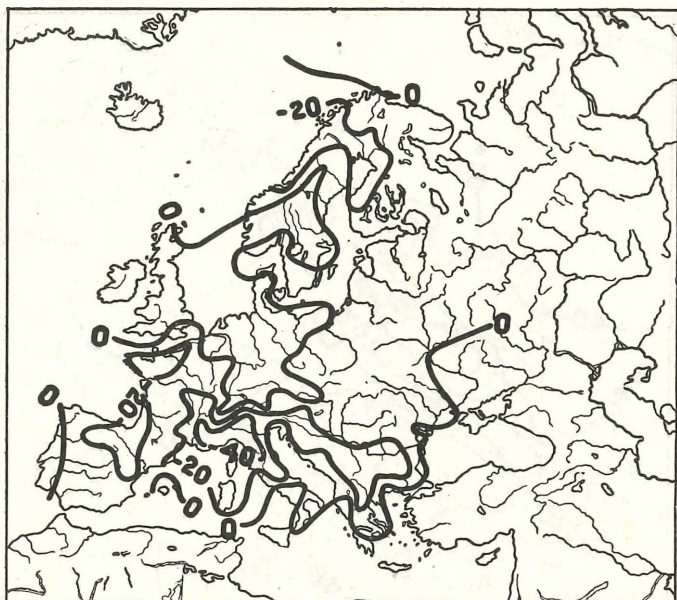
VIII. Srpen—září (Août—septembre).



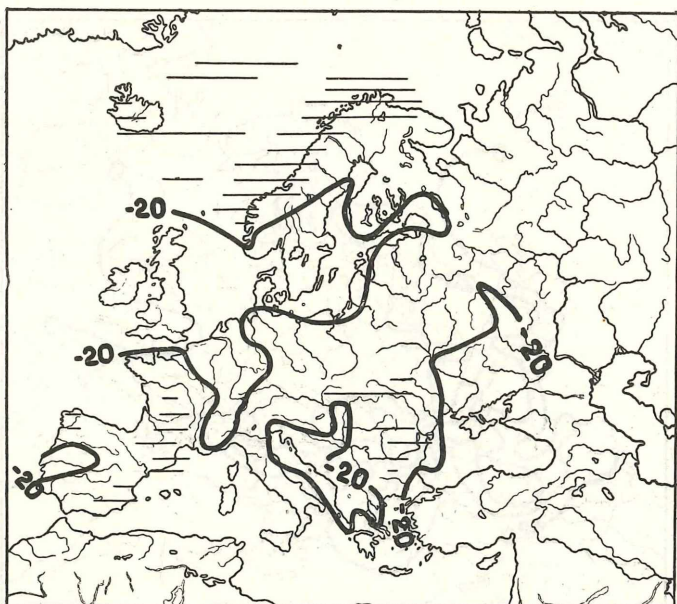
IX. Září—říjen (Septembre—octobre).



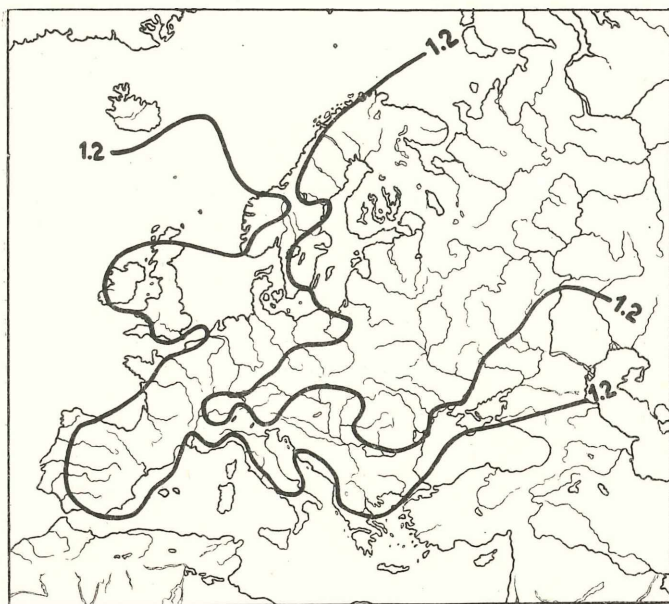
X. Říjen—listopad (Octobre—novembre).



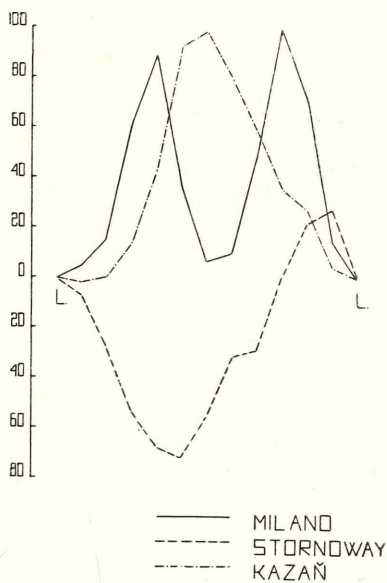
XI. Listopad—prosinec (Novembre—décembre).



XII. Prosinec—leden (Décembre—janvier).



XIII.



XIV.

IX.

Sur la dérivée approximative unilatérale.

Par VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 7 mars 1934.

§ 1. Résultats.

Soit $x(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $[0,1]$.¹⁾ Soit $t \in [0,1]$; s'il existe un ensemble mesurable E , dont la densité droite au point t est égale à un^2) tel que la limite (finie ou infinie)

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$

existe, alors cette limite s'appelle la dérivée approximative de $x(t)$ au point t du côté droit. Plus généralement: s'il existe un ensemble mesurable E , dont la densité supérieure droite au point t est au moins égale à un nombre positif α , tel que la limite (finie ou infinie)

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$

existe, alors cette limite s'appelle un nombre dérivé de $x(t)$ au point t du côté droit de densité α . On a des définitions analogues pour le côté gauche.

¹⁾ Notations: $[a, b] = \underset{t}{E} (a \leq t \leq b)$, $(a, b) = \underset{t}{E} (a < t < b)$ $[a, b) = \underset{t}{E} (a \leq t < b)$ etc. Il ne s'agit dans cette note que des nombres réels.

²⁾ Notations: μE signifie la mesure de l'ensemble (linéaire et mesurable) E . La limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \mu[E.(t, t+h)]$ s'appelle la densité droite de l'ensemble E au point t , dans le cas où elle existe. Plus généralement, le nombre $\limsup_{h \rightarrow 0^+} h^{-1} \cdot \mu[E.(t, t+h)]$ s'appelle la densité supérieure droite de l'ensemble E au point t . Par le symbole $\lim_{t' \rightarrow t} f(t')$ nous allons désigner la limite de $f(t')$ quand t' tend vers t , tout en restant contenu toujours dans l'ensemble E . Le symbole $a \in E$ signifie: „ a est un élément de l'ensemble E “.

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions $x = x(t)$ d'une variable réelle t , qui sont définies et continues dans $[0,1]$, avec la définition usuelle de la distance.³⁾ Alors on peut énoncer le théorème suivant:

Il existe un résiduel⁴⁾ R tel que toute fonction $x \in R$ possède les propriétés suivantes:

1. Dans aucun point $t \in (0,1)$, la fonction $x(t)$ n'admet de dérivée approximative *finie* ni du côté droit ni du côté gauche.

2. Au contraire, il existe un ensemble parfait et non vide M (dépendant de la fonction x) tel que la fonction $x(t)$ possède une dérivée approximative (et même une dérivée ordinaire) du côté droit, égale à $+\infty$ dans chaque point $t \in M$. (On a des énoncés analogues pour les quatre combinaisons droit ou gauche, $+\infty$ ou $-\infty$.)

3. Mais, dans aucun point $t \in (0,1)$, les deux dérivées approximatives unilatérales de la fonction $x(t)$ n'existent pas *simultanément*.⁵⁾

L'énoncé 1. est un cas particulier du théorème démontré dans ma note »Sur la dérivabilité des fonctions continues«;⁶⁾ l'énoncé 2. a été démontré par M. S. Saks;⁷⁾ le but de cette note est la démonstration de l'énoncé 3.; au surplus, nous allons démontrer un théorème plus précis⁸⁾ que voici et dont l'énoncé 3. est une conséquence immédiate:

Théorème. Soit B l'ensemble de toutes les fonctions $x \in C$ qui jouissent de la propriété suivante:

³⁾ La distance des deux fonctions $x \in C$, $y \in C$ est égale à $\text{Max}_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$; alors C est un espace complet.

⁴⁾ Toutes les notions relatives, tant qu'il s'agit des ensembles de fonctions, sont à interpréter relativement à l'espace C . Un ensemble $M \subset C$ s'appelle un résiduel, si $C - M$ est un ensemble de première catégorie. C lui-même étant de seconde catégorie, un résiduel ne peut pas être vide.

⁵⁾ C'est-à-dire: à chaque $t \in (0,1)$ on peut faire correspondre un côté (c) (droit ou gauche) tel que la dérivée approximative de la fonction $x(t)$ du côté (c) n'existe pas au point t .

⁶⁾ A paraître dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Charles, No. 129.

⁷⁾ On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fundamenta Mathematicae* 19 (1932), p. 211—219.

⁸⁾ Qui pourrait encore être précisé davantage.

à chaque $t \varepsilon (0,1)$ on peut faire correspondre un côté (c) (droit ou gauche) tel que deux au moins des trois nombres $-\infty$, 0 , $+\infty$ soient des nombres dérivés de $x(t)$ au point t du côté (c) de densité $1/4$.

Alors B est un résiduel.

§ 2. Démonstration.

n étant un nombre entier ($n > 2$), posons pour $x \varepsilon C$, $t \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$, $u \varepsilon (0, n^{-1})$:

$$F_1^n(x; t, u) = E_h \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} > n, 0 < h \leq u \right);$$

$$F_2^n(x; t, u) = E_h \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} < -n, 0 < h \leq u \right);$$

$$F_3^n(x; t, u) = E_h \left(\left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right| < \frac{1}{n}, 0 < h \leq u \right);$$

$$F_4^n(x; t, u) = E_h \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} > n, 0 > h \geq -u \right);$$

$$F_5^n(x; t, u) = E_h \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} < -n, 0 > h \geq -u \right);$$

$$F_6^n(x; t, u) = E_h \left(\left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right| < \frac{1}{n}, 0 > h \geq -u \right).$$

Pour $i = 1, 2, \dots, 6$, désignons par $E_i^n(x)$ l'ensemble de toutes les valeurs $t \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$ qui satisfont à la condition suivante: pour chaque $u \varepsilon (0, n^{-1})$, on a $\mu F_i^n(x; t, u) \leq 1/4$. Posons encore

$$G_i^n(x) = [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - E_i^n(x)$$

et

$$M^n(x) = G_1^n(x) G_2^n(x) + G_1^n(x) G_3^n(x) + G_2^n(x) G_3^n(x) + \\ + G_4^n(x) G_5^n(x) + G_4^n(x) G_6^n(x) + G_5^n(x) G_6^n(x).$$

Soit C_n l'ensemble de toutes les fonctions $x \varepsilon C$, pour lesquelles $M^n(x) = [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$; posons encore $D_n = C - C_n$, $H = \prod_{n=3}^{\infty} C_n$.

Si $x \varepsilon H$ et si $t \varepsilon (0,1)$, on peut évidemment trouver deux nombres entiers i, k (où l'on a ou bien $1 \leq i < k \leq 3$ ou bien $4 \leq i < k \leq 6$) tel que l'on ait $t \varepsilon G_i^n(x) G_k^n(x)$ pour une infinité de valeurs de l'indice n ; il s'ensuit évidemment $x \varepsilon B$; on a donc $H \subset B$ et il suffit de démontrer que H est un résiduel;

pour cela, il suffit de démontrer que les ensembles D_n sont non denses. Pour démontrer enfin cette dernière assertion, il suffit de démontrer les deux lemmes suivants:

Lemme 1^{er}. D_n est un ensemble fermé.

Lemme 2^{ème}. K étant une sphère (ouverte) quelconque de l'espace C , l'ensemble $K - D_n$ n'est pas vide.

Pour démontrer le lemme 1^{er}, nous allons démontrer tout d'abord le lemme suivant:

Lemme 3^{ème}. Soient n, i deux nombres entiers, $n > 2$, $1 \leq i \leq 6$. Soit $x_l \in C$, $t_l \in E_i^n(x_l)$ pour $l = 1, 2, 3, \dots$. Soit $t_l \rightarrow \tau$; soit $x_l(t) \rightarrow x(t)$ uniformément pour $0 \leq t \leq 1$; alors on a $\tau \in E_i^n(x)$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $i = 1$, les autres cas pouvant être traité d'une manière complètement analogue. On a $t_l \in [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$, d'où $\tau \in [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$. Soit maintenant $u \in (0, n^{-1}]$; on a donc $\mu F_1^n(x_l; t_l, u) \leq \frac{1}{4}u$. c'est-à-dire

$$\mu E_h \left(\frac{x_l(t_l + h) - x_l(t_l)}{h} \leq n, 0 < h \leq u \right) \geq \frac{3}{4}u$$

pour $l = 1, 2 \dots$. Posons⁹⁾

$$N(u) = \limsup_{l \rightarrow \infty} E_h \left(\frac{x_l(t_l + h) - x_l(t_l)}{h} \leq n, 0 < h \leq u \right);$$

donc $\mu N(u) \leq \frac{3}{4}u$. Pour $h \in N(u)$, on a pour une infinité de valeurs de l la relation

$$\frac{x_l(t_l + h) - x_l(t_l)}{h} \leq n, \text{ d'où } \frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leq n;$$

on a donc pour $u \in (0, n^{-1}]$:

$$N(u) \subset E_h \left(\frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leq n, 0 < h \leq u \right),$$

$$\mu E_h \left(\frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leq n, 0 < h \leq u \right) \geq \mu N(u) \geq \frac{3}{4}u,$$

d'où $\mu F_1^n(x; \tau, u) \leq \frac{1}{4}u$, donc $\tau \in E_1^n(x)$.

Démonstration du lemme 1^{er}. Soit n un nombre entier ($n > 2$). Soit $x_l \in D_n$ pour $l = 1, 2, 3, \dots$; soit $x_l(t) \rightarrow x(t)$ uniformément pour $0 \leq t \leq 1$. Il existe donc une suite t_1, t_2, \dots

⁹⁾ Nous posons $\limsup_{l \rightarrow \infty} N_l = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} N_l$.

telle que $t_l \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - M^n(x_l)$; il faut démontrer l'existence d'un nombre $\tau \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - M^n(x)$. On peut supposer que la limite $\lim_{l \rightarrow \infty} t_l = \tau$ existe.¹⁰⁾ Soient i, k ($i \neq k$) deux nombres entiers tels que l'on ait ou bien $1 \leq i \leq 3, 1 \leq k \leq 3$ ou bien $4 \leq i \leq 6, 4 \leq k \leq 6$. On a donc

$$t_l \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x_l) G_k^n(x_l) \text{ pour } l = 1, 2, \dots$$

En choisissant la notation d'une manière convenable, on peut supposer que

$$t_l \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x_l) = E_i^n(x_l)$$

pour une infinité de valeurs l . En appliquant le lemme 3^{ème} à une suite partielle de la suite x_1, x_2, \dots , on voit que

$$\tau \varepsilon E_i^n(x) = [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x) \subset [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x) G_k^n(x).$$

Cette relation étant vraie pour tous les couples i, k considérés, on a

$$\tau \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - M^n(x).$$

Démonstration du lemme 2^{ème}. Soit n un nombre entier, $n > 2$; soit K une sphère de l'espace C . Il existe un polynôme $w(t) \varepsilon K$. Ensuite, on peut trouver deux nombres positifs p, r satisfaisant aux conditions suivantes:

1. pour $0 \leq t < t' \leq 1$ on a $\left| \frac{w(t') - w(t)}{t' - t} \right| < p$;

2. les relations $z \varepsilon C, \text{Max}_{0 \leq t \leq 1} |z(t)| < r$ entraînent la relation

$$w + z \varepsilon K.$$

Posons

(1) $\varrho = 7/16, \eta = 1/65, \delta = 1/15,$

d'où

(2) $1/4 - \varrho/2 - 2\eta > 0, \frac{2}{3} \varrho (1 - 2\delta) > \frac{1}{4}.$

Choisissons encore un nombre pair m satisfaisant aux conditions suivantes:

(3) A) $4/m < 1/n$ (donc $m > 12$), $\frac{2}{3} m r \left(\frac{1}{4} - \frac{\varrho}{2} - 2\eta \right) > p + n.$

B) Les relations $0 \leq t < t' \leq 1, t' - t \leq m^{-1}$

¹⁰⁾ Dans le cas contraire, on peut se borner à une suite partielle de la suite x_1, x_2, \dots

entraînent l'inégalité

$$(4) \quad |w(t) - w(t')| < \eta r = r/65.$$

Ceci fait, définissons une fonction $z = z(t)$ par les conditions suivantes:

1. pour $(s - \delta) m^{-1} \leq t \leq (s + \delta) m^{-1}$ (*s impair*, $1 \leq s \leq m - 1$) soit

$$z(t) = w\left(\frac{s}{m}\right) - w(t);$$

2. pour $(s - \delta) m^{-1} \leq t \leq (s + \delta) m^{-1}$ (*s pair*, $2 \leq s \leq m - 2$) soit

$$z(t) = \frac{r}{2} + w\left(\frac{s}{m}\right) - w(t);$$

3. pour $(s + \delta) m^{-1} \leq t \leq (s + 1 - \delta) m^{-1}$ (*s entier*, $1 \leq s \leq m - 2$) soit $z(t)$ une fonction linéaire;

4. pour $0 \leq t \leq (1 - \delta) m^{-1}$ soit $z(t) = z\left(\frac{1 - \delta}{m}\right)$;

5. pour $(m - 1 + \delta) m^{-1} \leq t \leq 1$ soit $z(t) = z\left(\frac{m - 1 + \delta}{m}\right)$.

D'après (4), on a $-r < -r_1 r < z(t) < r/2 + \eta r < r$, donc $w + z \in K$. Il nous reste à démontrer que $w + z \in C - D_n$, c'est-à-dire $w + z \in C_n$; donc: il nous reste à démontrer l'assertion suivante:

si $t_0 \in [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$, alors on a $t_0 \in M^n(w + z)$.

Soit donc t_0 un nombre de l'intervalle $[n^{-1}, 1 - n^{-1}]$; il existe alors un nombre impair s tel que $(s - \delta) m^{-1} \leq t_0 < (s + 2 - \delta) m^{-1}$; on en tire (voir (3)) $s \geq 3$, $s + 2 \leq m - 2$ d'où (m étant un nombre pair) $s + 2 \leq m - 3$. Nous allons distinguer huit cas:

- I. $(s - \delta) m^{-1} \leq t_0 < (s + \delta) m^{-1}$; II. $t_0 = (s + \delta) m^{-1}$;
- III. $(s + \delta) m^{-1} < t_0 \leq (s + 1/2) m^{-1}$;
- IV. $(s + 1/2) m^{-1} < t_0 < (s + 1 - \delta) m^{-1}$;
- V. $(s + 1 - \delta) m^{-1} \leq t_0 < (s + 1 + \delta) m^{-1}$;
- VI. $t_0 = (s + 1 + \delta) m^{-1}$;
- VII. $(s + 1 + \delta) m^{-1} < t_0 \leq (s + 3/2) m^{-1}$;
- VIII. $(s + 3/2) m^{-1} < t_0 < (s + 2 - \delta) m^{-1}$.

Premier cas: $(s - \delta) m^{-1} \leq t_0 < (s + \delta) m^{-1}$. Posons d'abord $u = (s + \delta) m^{-1} - t_0$, donc $0 < u \leq 2\delta m^{-1} \leq n^{-1}$

Pour $0 < h \leq u$ on a¹¹⁾

$$\frac{w(t_0 + h) + z(t_0 + h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} = 0, \text{ donc}$$

$$\mu F_3(w + z; t_0, u) = u > \frac{1}{4} u, \text{ donc } t_0 \varepsilon G_3^n(w + z).$$

Posons ensuite $u = (s + 1 - \delta) m^{-1} - t_0$, d'où $0 < u \leq m^{-1} \leq n^{-1}$. Pour $(s + 1/2) m^{-1} \leq t \leq (s + 1 - \delta) m^{-1}$, on a évidemment

$$\begin{aligned} z(t) &\geq z\left((s + 1/2) m^{-1}\right) = \frac{1}{2} \left(z\left(\frac{s + \delta}{m}\right) + z\left(\frac{s + 1 - \delta}{m}\right) \right) > \\ &> \frac{1}{2} \left(-\eta r + \frac{r}{2} - \eta r \right) = r \left(\frac{1}{4} - \eta \right); \end{aligned}$$

d'autre part $z(t_0) < \eta r$. Pour $(s + 1/2) m^{-1} - t_0 \leq h \leq (s + 1 - \delta) m^{-1} - t_0 = u$ on a donc (voir (3))

$$\frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} > \frac{r}{u} \left(\frac{1}{4} - 2\eta \right) \geq m r \left(\frac{1}{4} - 2\eta \right) > p + n,$$

d'où

$$\frac{w(t_0 + h) + z(t_0 + h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} > n;$$

on a donc ($u \leq m^{-1}$, $\delta = 1/15$)

$$\mu F_1^n(w + z; t_0, u) \geq (1/2 - \delta) m^{-1} > 1/4 u,$$

d'où $t_0 \varepsilon G_1^n(w + z)$. On a donc

$$t_0 \varepsilon G_1^n(w + z) \cap G_3^n(w + z) \subset M^n(w + z).$$

Deuxième et troisième cas:

$(s + \delta) m^{-1} \leq t_0 \leq (s + 1/2) m^{-1}$. Posons d'abord $u = t_0 - (s - 1 + \delta) m^{-1}$; donc $0 < u < 3/2 m^{-1} \leq n^{-1}$. Pour $(s - 1 + \delta) m^{-1} \leq t \leq (s - 1 + \delta) m^{-1} + \varrho(1 - 2\delta) m^{-1}$ on a

$$\begin{aligned} z(t) &\geq z\left((s - 1 + \delta) m^{-1} + \varrho(1 - 2\delta) m^{-1}\right) = \\ &= (1 - \varrho) z\left(\frac{s - 1 + \delta}{m}\right) + \varrho z\left(\frac{s - \delta}{m}\right) > (1 - \varrho) \left(\frac{r}{2} - \eta r \right) - \varrho \eta r \\ &= r \left(\frac{1}{2} - \frac{\varrho}{2} - \eta \right); \end{aligned}$$

d'autre part, on a

¹¹⁾ Remarquons que la fonction $w(t) + z(t) = w(sm^{-1})$ est constante pour $t \varepsilon [(s - \delta) m^{-1}, (s + \delta) m^{-1}]$.

$$z(t_0) \leq z((s + 1/2)m^{-1}) = \frac{1}{2} \left(z\left(\frac{s + \delta}{m}\right) + z\left(\frac{s + 1 - \delta}{m}\right) \right) \\ < \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2} + r_1 r + r_1 r \right) = r \left(\frac{1}{4} + \eta \right).$$

Donc, pour

$$t_0 - (s - 1 + \delta)m^{-1} - \varrho(1 - 2\delta)m^{-1} \leq -h \leq t_0 - \\ - (s - 1 + \delta)m^{-1} = u$$

on a (d'après (3))

$$\frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} < -r \left(\frac{1}{4} - \frac{\varrho}{2} - 2\eta \right) \cdot \frac{2m}{3} < -p - n,$$

d'où

$$\frac{w(t_0 + h) + z(t_0 + h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} < -n,$$

d'où (voir (2))

$\mu F_5^n(w + z; t_0, u) \leq \varrho(1 - 2\delta)m^{-1} > \varrho(1 - 2\delta)^{2/3}u > 1/4u$,
c'est-à-dire $t_0 \in G_5^n(w + z)$.

Séparons maintenant le deuxième et le troisième cas. Pour $t_0 = (s + \delta)m^{-1}$ posons $u = 2\delta m^{-1}$, donc $0 < u \leq m^{-1} \leq n^{-1}$. Pour $0 > h \geq -u$ on a ¹¹⁾

$$\frac{w(t_0 + h) + z(t_0 + h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} = 0, \text{ donc } u F_6^n(w +$$

$+ z; t_0, u) = u > \frac{1}{4}u$, donc $t_0 \in G_6^n(w + z)$. Dans le deuxième cas,

on a donc $t_0 \in G_5^n(w + z) \cap G_6^n(w + z) \subset M^n(w + z)$.

Pour $(s + \delta)m^{-1} < t_0 \leq (s + 1/2)m^{-1}$ posons $u = t_0 - (s + \delta)m^{-1}$; donc $0 < u < m^{-1} \leq n^{-1}$. Pour $0 > h \geq -u$ on a ¹²⁾ (voir (3))

$$\frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} = \left(z\left(\frac{s + 1 - \delta}{m}\right) - z\left(\frac{s + \delta}{m}\right) \right) : \left(\frac{1 - 2\delta}{m} \right) > \\ (5) \quad > \left(\frac{r}{2} - 2r_1 \right) m = r \left(\frac{1}{2} - 2r_1 \right) m > n + p,$$

d'où

$$(6) \quad \frac{w(t_0 + h) + z(t_0 + h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} > n;$$

¹²⁾ Les relations (5), (6) sont vraies pour toutes les valeurs t_0 , h , pour lesquelles on a $(s + \delta)m^{-1} \leq t_0 \leq (s + 1 - \delta)m^{-1}$, $h \neq 0$, $(s + \delta)m^{-1} \leq t_0 + h \leq (s + 1 - \delta)m^{-1}$. Nous allons utiliser cette remarque dans le quatrième cas.

donc $\mu F_4^n(w + z; t_0, u) = u > \frac{1}{4}u$, donc $t_0 \in G_4^n(w + z)$.

Dans le troisième cas, on a donc

$$t_0 \in G_4^n(w + z) \cap G_5^n(w + z) \subset M^n(w + z).$$

Quatrième cas:

$$(s + \frac{1}{2}) m^{-1} < t_0 < (s + 1 - \delta) m^{-1}.$$

Posons d'abord $u = (s + 1 - \delta) m^{-1} - t_0$, donc

$0 < u < m^{-1} \leq n^{-1}$. Pour $0 < h \leq u$, on a (d'après¹²) la relation (6), d'où

$$\mu F_1^n(w + z; t_0, u) = u > \frac{1}{4}u, \text{ donc } t_0 \in G_1^n(w + z).$$

Posons ensuite $u = (s + 2 - \delta) m^{-1} - t_0$, donc

$0 < u < \frac{3}{2} m^{-1} \leq n^{-1}$. Pour

$$(s + 2 - \delta) m^{-1} - \varrho (1 - 2\delta) m^{-1} \leq t \leq (s + 2 - \delta) m^{-1}$$

on a

$$\begin{aligned} z(t) &\leq z\left(\frac{s + 2 - \delta}{m} - \varrho \frac{1 - 2\delta}{m}\right) = (1 - \varrho) z\left(\frac{s + 2 - \delta}{m}\right) + \\ &+ \varrho z\left(\frac{s + 1 + \delta}{m}\right) < (1 - \varrho) \eta r + \varrho \left(\frac{r}{2} + \eta r\right) = r\left(\frac{\varrho}{2} + \eta\right); \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} z(t_0) &> z((s + \frac{1}{2}) m^{-1}) = \frac{1}{2} \left(z\left(\frac{s + \delta}{m}\right) + z\left(\frac{s + 1 - \delta}{m}\right) \right) \\ &> \frac{1}{2} \left(-\eta r + \frac{1}{2} r - \eta r \right) = r\left(\frac{1}{4} - \eta\right). \end{aligned}$$

Donc: pour $(s + 2 - \delta) m^{-1} - \varrho (1 - 2\delta) m^{-1} - t_0 \leq h \leq (s + 2 - \delta) m^{-1} - t_0 = u$ on a (voir (3))

$$\frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} < -r \left(\frac{1}{4} - \frac{\varrho}{2} - 2\eta \right) \frac{2m}{3} < -p - n,$$

d'où

$$\frac{w(t_0 + h) + z(t_0 + h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} < -n.$$

On a donc (voir (2))

$$\mu F_2^n(w + z; t_0, u) \geq \varrho (1 - 2\delta) m^{-1} > \frac{2}{3} \varrho (1 - 2\delta) u > \frac{1}{4} u,$$

d'où $t_0 \in G_2^n(w + z)$; on a donc

$$t_0 \in G_1^n(w + z) \cap G_2^n(w + z) \subset M^n(w + z).$$

Nous avons donc démontré la relation cherchée $t_0 \varepsilon M^n(w + z)$ dans les cas I, II, III, IV. Les cas V, VI, VII, VIII peuvent être traité évidemment d'une manière complètement symétrique.

Résumé.

Sur la dérivée approximative unilatérale.

Par Vojtěch Jarník.

(Présenté le 7 mars 1934).

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle qui sont définies et continues dans l'intervalle (fermé) $[0,1]$, avec la définition usuelle de la distance. Alors il existe un résiduel R de l'espace C tel que toute fonction $x(t) \varepsilon C$ possède les propriétés suivantes:

1. Dans aucun point $t \varepsilon (0,1)$, la fonction $x(t)$ ne possède de dérivée approximative *finie* ni du côté droit ni du côté gauche.

2. Au contraire, il existe un ensemble M parfait et non vide tel que la dérivée approximative de la fonction $x(t)$ du côté droit existe et soit égale à $+\infty$ dans chaque point $t \varepsilon M$ (on a des énoncés analogues pour les quatre combinaisons: droit ou gauche, $+\infty$ ou $-\infty$).

3. Mais, dans aucun point $t \varepsilon (0,1)$, les deux dérivées approximatives unilatérales de la fonction $x(t)$ n'existent pas *simultanément*.

Les propriétés 1. et 2. sont déjà connues; c'est la démonstration de la propriété 3. qui fait l'objet principal de la note présente.

X.

Un mode de représentation des nombres positifs.

Par MICHEL PETROVITCH prof. à l'Univ. de Beograd.

(Présenté le 11 avril 1934).

1. On sait que tout nombre positif se laisse représenter comme somme d'une série

$$(1) \quad m_0 + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots = m_0 + \sum \frac{1}{m_i}$$

où les m_i sont des entiers positifs.

On peut généraliser ce résultat sous la forme de la proposition suivante:

Etant donnée une suite d'entiers positifs

$$(2) \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \quad (\lambda_0 = 1)$$

tout nombre positif se laisse représenter comme somme d'une série convergente ayant pour termes les fractions irréductibles de la forme

$$(3) \quad \frac{\lambda_k}{n_k}$$

où les n_k sont des entiers positifs.

En effet, le nombre N étant représenté par la série (1), le terme général de la série peut s'écrire

$$(4) \quad \frac{1}{m_k} = \frac{\lambda_k^r}{m_k (m_k + \lambda_k^r)} + \frac{1}{m_k + \lambda_k^r}$$

où r est un entier positif arbitraire.

Si m_k n'est pas divisible par λ_k , on prendra $r = 1$; si m_k a λ_k comme facteur d'ordre s , on prendra $r = s + 1$. Dans les deux cas on aura

$$(5) \quad \frac{1}{m_k} = \frac{\lambda_k}{n_k} + \frac{1}{q_k}$$

où n_k et q_k sont des entiers positifs, n_k n'étant pas divisible par λ_k . La proposition est ainsi démontrée.

En particulier, tout nombre positif N se laisse représenter comme somme d'une série convergente ayant pour termes les fractions irréductibles de la forme

$$(6) \quad \frac{p_k}{n_k}$$

où $p_1, p_2, p_3 \dots$ est la suite naturelle des nombres premiers positifs, et $n_1, n_2, n_3 \dots$ des entiers positifs.

2. Généralement, pour décomposer effectivement un nombre N donné en somme de termes irréductibles (3), il faut connaître explicitement les termes λ_k de la suite (2).

Or, lorsqu'il s'agit de la décomposition en somme de termes de la forme (6), il y a une infinité de nombres N qu'on peut ainsi décomposer sans que cette décomposition exige la connaissance explicite de la suite des nombres premiers.

Ainsi, soit $f(x)$ une fonction quelconque prenant pour $x = 0$ la valeur laquelle, si elle diffère de zéro, est égale à un nombre entier positif, et dont les dérivées de tout ordre prennent pour $x = 0$ la valeur laquelle, si elle diffère de zéro, est l'inverse d'un entier positif.

Telles seraient, par exemple, les fonctions élémentaires

$$e^{\frac{x}{k}}, z^m e^{\frac{x}{k}} \quad (k = \text{entier positif})$$

et leurs diverses combinaisons linéaires; les transcendentes de Bessel

$$J_0(2i\sqrt{x}) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} +$$

$$J_1(2i\sqrt{x}) = 1 + \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} + \frac{x^3}{3!4!} +$$

On aura pour $f(x)$ le développement

$$f(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{M_n \cdot n!}$$

où les M_i sont des entiers positifs, et si l'on pose

$$\frac{d}{dx} [x f(x)] = \varphi(x)$$

on trouve

$$\varphi(x) = M_0 + \frac{2x}{M_1 \cdot 1!} + \frac{3x^2}{M_2 \cdot 2!} +$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad \varphi(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{M_{n-1} \cdot (n-1)!}.$$

En y posant

$$x = \frac{1}{p}$$

où p désigne un nombre premier fixe, arbitrairement choisi, comme la série (7) converge pour toute valeur de x , on aura

$$(8) \quad \varphi\left(\frac{1}{p}\right) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

où

$$(9) \quad \lambda_n = \frac{n}{(n-1)! M_{n-1} p^{n-1}}.$$

La factorielle $(n-1)!$ n'est divisible par aucun nombre premier n ; elle est divisible par tout nombre composé n , sauf pour $n=4$. Donc pour que λ_n soit de la forme $\frac{1}{m_i}$ où m_i est un nombre entier, il faut et il suffit: 1° ou bien que n soit un diviseur de M_{n-1} ; 2° ou bien que n soit un nombre composé autre que 4.

Pour que λ_n soit de la forme irréductible

$$\lambda_n = \frac{p_i}{m_i}$$

il faut et il suffit que n soit un nombre premier autre que p , ne divisant pas M_{n-1} .

En tous cas, le nombre $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ se trouvera décomposé en somme de termes irréductibles $\frac{p_k}{m_k}$ où les p_k sont des nombres premiers et m_k des entiers positifs.

Dans le cas où M_{n-1} n'est pas divisible par n , le nombre $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ est représentable par la somme de deux séries dont l'une est de la forme

$$m_0 + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} +$$

et l'autre de la forme

$$\frac{p_2}{m_2} + \frac{p_3}{m_3} + \frac{p_4}{m_4} +$$

où, les fractions étant réduites à leurs plus simples expressions, p_1, p_2, p_3, \dots est la suite naturelle des nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, ..

Prenons, à titre d'exemple

$$f(x) = e^x;$$

on trouve

$$\varphi(x) = (x+1)e^x$$

On aura donc

$$\varphi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p+1}{p} \sqrt[p]{e}$$

et

$$\lambda_n = \frac{n}{(n-1)! p^{n-1}}$$

de sorte que

$$\frac{p+1}{p} \sqrt[p]{e} = S_1 + S_2$$

où

$$S_1 = 1 + \frac{1}{20 p^5} + \frac{1}{630 p^7} +$$

$$S_2 = \frac{2}{p} + \frac{3}{2 p^2} + \frac{2}{3 p^3} + \frac{5}{24 p^4} + \frac{7}{720 p^6} +$$

Pour $p=1$, en divisant $\varphi(1) = 2e$ par 2, on trouve

$$e = S_1 + S_2$$

où

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{40} + \frac{1}{1260} + \frac{1}{8960} +$$

$$S_2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{48} + \frac{7}{1440} + \frac{11}{7257600} + \dots$$

Pour $p=2$ on trouve

$$\frac{3}{2} \sqrt[2]{e} = S_1 + S_2$$

où

$$S_1 = 2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{640} + \frac{1}{80640} + \frac{1}{1146880} +$$

$$S_2 = \frac{3}{8} + \frac{5}{384} + \frac{7}{46080} + \frac{11}{715891200} + \dots$$

3. Les nombres $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ jouissant de la propriété arithmétique précédemment indiquée, s'expriment de diverses manières par des intégrales définies.

Considérons la fonction

$$f(x) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{M_n}$$

où M_0, M_1, M_2, \dots est une suite d'entiers positifs. Formons les intégrales définies

$$(10) \quad L_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos t} \cos(x \sin t) \Phi_1(r, t) dt$$

$$(11) \quad L_2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos t} \sin(x \sin t) \Phi_2(r, t) dt$$

où Φ_1 et Φ_2 désignent la partie réelle et le coefficient de i dans

$$\frac{d}{dz} [z f(z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{M_{n-1}} z^{n-1}, \quad z = r e^{ti}.$$

On aura

$$(12) \quad \Phi_1(r, t) = M_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{M_{n-1}} r^{n-1} \cos(n-1)t$$

$$(13) \quad \Phi_2(r, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{M_{n-1}} r^{n-1} \sin(n-1)t$$

de sorte que

$$(14) \quad L_1(x) = M_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n r^{n-1}}{M_{n-1}} U_n$$

$$(15) \quad L_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n r^{n-1}}{M_{n-1}} V_n$$

où

$$(16) \quad U_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos t} \cos(x \sin t) \cos(n-1)t dt$$

$$(17) \quad V_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos t} \sin(x \sin t) \sin(n-1)t dt.$$

D'après les formules intégrales connues les deux intégrales (19) et (20) ont la valeur commune

$$U_n = V_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Les deux sommes des seconds membres de (17) et (18) s'écrivent donc

$$L_1(x) = M_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n (rx)^{n-1}$$

$$L_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n (rx)^{n-1}$$

où

$$\mu_n = \frac{n}{(n-1)! M_{n-1}}.$$

Comme les deux fonctions $L_1(x)$ et $L_2(x)$ sont entières, en prenant

$$r = 1, \quad x = \frac{1}{p}$$

où p est un nombre premier arbitrairement choisi, on voit que

$$L_1\left(\frac{1}{p}\right) \text{ et } L_2\left(\frac{1}{p}\right)$$

sont des nombres de l'espèce précédemment indiquée.

On obtiendrait d'autres expressions des nombres $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$ en utilisant d'une manière analogue les formules intégrales connues

$$\int_0^{\infty} \frac{(r+ti)^{-n} + (r-ti)^{-n}}{2} \cos xt \, dt = \frac{\pi}{2} e^{-xr} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

(x et r réels positifs), et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xti}}{(a+ti)^n} \, dt = 2\pi e^{-ax} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

(x réel positif, la partie réelle de a positive), valable pour $n > 1$.

Résumé.*Un mode de représentation des nombres positifs.*

Par Michel Petrovitch.

(Présenté le 11 Avril 1934).

Etant donnée une suite $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ de nombres positifs (avec $\lambda_0 = 1$), tout nombre s'exprime comme somme d'une série convergente ayant pour termes des fractions irréductibles dont le dénominateur est un nombre entier positif, et le numérateur un terme de la suite λ_k .

Généralement, la décomposition effective d'un nombre N en une telle série exige la connaissance explicite des termes de la suite λ_k . Or, lorsque $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ est la suite naturelle des nombres premiers, cette décomposition n'exige pas toujours cette connaissance. L'auteur indique une infinité de nombres N qu'on peut ainsi décomposer sans avoir besoin de connaître chaque terme de la suite des nombres premiers. Tel est, par exemple, le cas des nombres

$$N = 2e, \quad N = \frac{3}{2}\sqrt[3]{e} \quad N = \frac{4}{3}\sqrt[3]{e} \text{ etc.}$$

ainsi que d'une foule de nombres exprimables par des intégrales définies.

XI.

Kolorimetrische Bestimmung von Kobalt in einer Nährlösung und in der Asche von Pflanzenorganen.

(Determination colorimétrique du cobalt dans les liquides nutritifs et dans le cendre des végétaux.)

Pflanzenphysiologisches Institut der Karlsuniversität in Prag.

Von Dr. **JOSEF BABIČKA.**

(Vorgelegt am 11. April 1934.)

Im Jahre 1933—1934 verfolgten wir mit Professor Dr. B. Němec die Bedeutung des Kobalts bei der Ernährung der Pflanzen. Die Bestimmung des Kobalts in den Nährlösungen und in der Asche der Pflanzenorgane wurde durch Heyrovský's polarographische Methode mit der tropfenden Quecksilber-Kathode und auf einem kolorimetrischen Wege, welcher hier beschrieben wird, vorgenommen.

Gleichlaufend mit dieser eigenen Methode wurde eine Reihe von Versuchen mit der kolorimetrischen Methode E. S. Tomula's angestellt. E. S. Tomula arbeitet bei der Bestimmung von Kobalt nachfolgend: In einen 100 ccm Maßkolben werden 40 ccm von der geprüften neutralen kobaltenthaltenden Lösung mit einer Pipette übertragen. Dann werden 5 g Rhodanammonium und 40 ccm Azeton hinzugefügt. Nach Ergänzen auf 100 ccm mit destilliertem Wasser und Durchmischen bekommt man eine für die kolorimetrische Messung geeignete Lösung. Die Intensität der Blaufärbung ist von der Kobaltmenge abhängig. Die Standardlösung soll unter denselben Bedingungen wie die geprüfte Lösung zubereitet werden. Die besten Resultate kann man dann erhalten, wenn man bei der Kolorimetrie eine 20 mm Schicht der Lösung verwendet. So kann man das Kobalt noch in einer Menge von $6 \cdot 10^{-4}$ im Liter bestimmen.

Die Methode E. S. Tomula's gab bei unseren Versuchen im ganzen gute Ergebnisse. Nachteilig war nur, daß man bei dieser Methode eine größere Menge der geprüften Lösung (40 ccm) und der Reagentien (40 ccm Azeton und 5 g Rhodan ammonium) verbraucht. Außerdem trübt sich die Lösung bei dem Mischen des Azetons mit Wasser.

Man hat sich daher bemüht diese Nachteile zu beseitigen. Vogl führte bei der qualitativen Kobaltbestimmung mit Rhodan ammonium die Reaktion mit Amylalkohol ein. Nach dem Durchschütteln übergeht das Kobalt in die amyalkoholische Schicht, welche dadurch blau gefärbt wird. Wenn aber Eisen zugegen ist, so übergeht es gleichwegs in die amyalkoholische Schicht und färbt dieselbe blutrot. Bei Anwendung von Ammoniumazetat kann man jedoch diese lästige Reaktion vermeiden. Das Prinzip dieser Methode ergab den Grund meiner eigenen kolorimetrischen Methode.

Die Bestimmung von Kobalt in der Nährlösung. Die vorteilhaftesten Bedingungen und das Prinzip meiner kolorimetrischen Methode ist, wie folgt: Zu 5 ccm der konzentrierten Lösung von Rhodan ammonium bewährte es sich zunächst 2 ccm der geprüften Lösung, nachher 1 ccm absoluten Aether zuzufügen, durchzuschütteln und nach Zugabe von 2 ccm Amylalkohol wieder stark durchzuschütteln. Nach dem Schütteln trennt sich ziemlich rasch die amyalkoholische Schicht, welche von dem aufgenommenen Kobalt hellblau gefärbt ist. Die Intensität der Färbung dieser Zone ist von der Kobaltmenge in der Lösung abhängig.

Standardlösungen mit bekanntem Kobaltgehalt halten sich gut und man kann sie längere Zeit aufbewahren.

Da wir mit Prof. Dr. B. Němec festgestellt hatten, daß einige Pflanzen (*Vicia faba*, *Lupinus albus*, *Aesculus hippocastanum*, *Salix viminalis*) in den Nährlösungen verhältnmäßig große Mengen von Kobaltverbindungen vertragen ($n/75 \text{ CoCl}_2$, $n/100 \text{ CoCl}_2$), wurde die Methode für diese Konzentrationen verwendet. Später, als wir kenne lernten, das man noch Kobaltmengen von $3 \cdot 10^{-4}$ im Liter bestimmen kann, wurde diese Methode im ganzen Umfange bis zur angeführten Konzentration verwendet.

Die Kobaltbestimmungen in der Asche
von Pflanzen.

Pflanzen, welche in Gegenwart von Kobaltsalzen kultiviert wurden, oder deren Keimpflanzen (48 St. nach der Aussaat in Sägespänen) täglich mehrmals nach einander (bis viermal) je eine halbe Stunde mit einer einprozentigen Lösung von Kobaltchlorid oder Kobaltnitrat behandelt wurden, verbrannten wir nach einer bestimmten Kultivierungszeit im elektrischen Ofen. Die Asche wurde im $n/10$ HCl gelöst und mit $n/10$ LiOH neutralisiert. Bei der Neutralisation wurde darauf geachtet, daß die Lösung nicht alkalisch reagiert, denn es könnte dann in der Kälte zum Auscheiden des blauen basischen Salzes kommen (in der Wärme würde direkt das Hydroxyd ausfallen), das bei der ev. weiteren Zugabe des alkalischen Hydroxyds zum Übergang in das rosarote Hydroxyd $\text{Co}(\text{OH})_2$ führen könnte, welches sich durch atmosphärischen Sauerstoff in das braune Kobalhydroxyd $\text{Co}(\text{OH})_3$ verwandelt.

Nachher überträgt man mit einer Pipette 3 ccm der neutralisierten Lösung in einen Maßkolben, in den man schon vorher 2 ccm konzentrierter Lösung Ammoniumazetat inegebracht hat; dann fügt man 6 ccm Rhodanammonium und 2 ccm absoluten Aether zu und schüttelt ordentlich durch. Nach Zugabe von 2 ccm Amylalkohol wird nochmals durchgeschüttelt. Nach der Trennung der alkoholischen Schicht beginnt man mit der kolorimetrischen Bestimmung. Die Zugabe von Ammoniumazetat hat die Beseitigung der Eisenreaktion zur Folge. Anderfalls würde das Eisen in die amyloalkoholische Schicht übergehen und dieselbe blutrot, oder bei Gegenwart von größeren Mengen der Kobaltsalze rotviolett färben.

Die Asche der unter beschriebenen Bedingungen kultivierten Pflanzen erscheint durch die Kobaltverbindungen bläulich gefärbt, so daß man bei vorsichtigem Glühen die Lokalisation des Kobalts in den Pflanzenorganen verfolgen kann.

Summary.

Colorimetric determination of cobalt in nutrient solutions and in the plant organs.

Cobalt can be determined in nutrient solutions already in amounts of $3 \cdot 10^{-4}$ in liter. The conditions of the colorimetric method are as follows: To a 5 ccm concentrated solution of ammonium rhodanate is added 2 ccm of solution containing cobalt; after that 1 ccm of absolute ether; the solution is shaken and 2 ccm amylalcohol is added, and after considerable shaking a layer of amylalcohol separates, into which the cobalt has passed. The colour of the zone depends upon the amount of cobalt contained in the solution.

The comparative solutions must be prepared in the same manner with an already known amount of cobalt.

When determining cobalt in plant ash, one must work so, that first of all we dissolve that ash in $n/10$ HCl; then we proceed to neutralisation in $n/10$ LiOH and then remove by pipette 3 ccm neutralised solution, then we add 2 ccm of concentrated ammonium acetate, 6 ccm concentrated ammonium rhodanate solution to 2 ccm ether absolute. Shake it and shake again after the addition of 2 ccm amylalcohol. According to the intensity of coloration we ascertain the amylalcohol zone, after comparison with the standard solution the amount of cobalt.

L I T E R A T U R

J. Heyrovský, Použití polarografické metody v praktické chemii. Praha 1933.

E. S. Tomula, Über die colorimetrische Bestimmung des Kobalts für sich und neben Nickel. Z. anal. Chem. 83: 6—14, 1931.

XII.

**Príspevky k poznání periodické barvoměny
pakobylky indické (*Dixippus morosus*
Br. et Redt.).**

(*Contribution à l'étude des changements périodiques de la
coloration chez Dixippus morosus Br. et Redt.*)

Památce svého milého přítele a spolupracovníka

p. Doc. Dr. **JAROSLAVA HAHNA**

připisuje Dr. **VIKTOR JANDA.**

(Se třemi vyobrazeními v textu a 1 tabulkou.)

(Předloženo dne 11. dubna 1934.)

Rychlá barvoměna, která jest podmíněna hlavně změnou polohy pigmentových zrněk v pigmentových buňkách, nebo změnou tvaru těchto buněk a nazývá se, ne právě případně, barvoměnou »fysiologickou«, jest u hmyzu zjevem vzácným a dosud málo prozkoumaným. P r z i b r a m (21) uvádí, že se u hnědých larev *Mantis religiosa* L., které byly chovány při 17° C a přeneseny z rozptýleného denního světla na prudké slunce, objevilo s počátku slabé, později však velmi zřetelné sezelenání celého těla. Po přenesení do chovné klícky se barva právě tak rychle změnila v opačném směru. Z b o ř i l (35) pozoroval ve volné přírodě, že pohlavně dospělá sytě zelená samice *Mantis religiosa* změnila po pěti hodinách barvu v žemlově žlutou a podržela ji po celou další dobu pozorování (celý týden). Přebarvování počalo objevením se podélných žlutých pruhů uprostřed křídel, které se stále více rozšiřovaly. Příčiny těchto změn zbarvení však nebyly oběma autory blíže vyšetřeny.¹⁾ Více zpráv máme o rychlé periodické barvoměně

¹⁾ Také z B r a u e r o v a (2) stručného sdělení o pomalém přebarvování jedné samice *Chyropa vulgaris*, nelze si učiniti určitější představy o tomto ději.

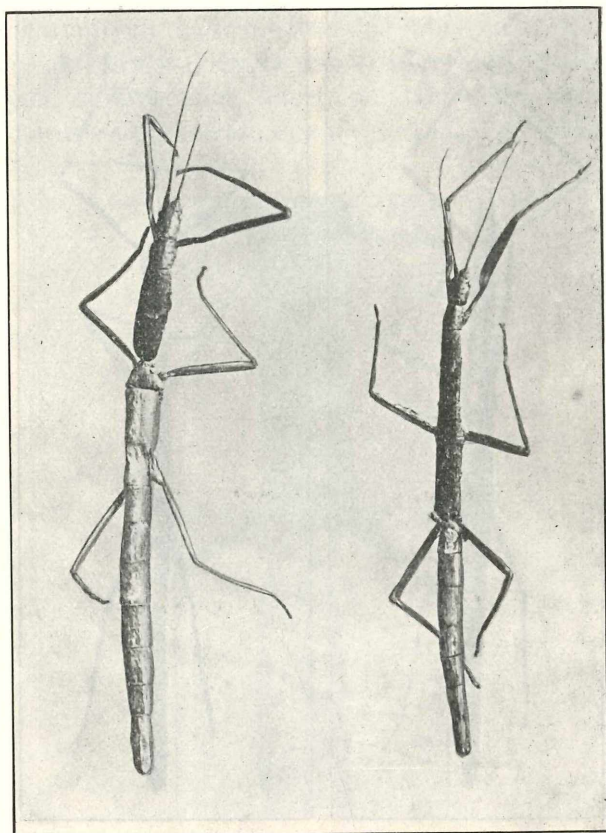
indické pakobyly *Dixippus morosus*. Podle Schleipa (26a) stávají se skoro všechny barevné variety tohoto druhu (kromě zelené) v noci tmněji a ve dne světleji. V epidermálních buňkách *Dixippusa* se vyskytují tři druhy pigmentů: zelený, tmavohnědý a oranžový.²⁾ Zelený pigment jest nehybný, kdežto hnědý a oranžový, který se vyskytuje u tmavších barevných variet mění svoji polohu. V noci se stěhuje hnědý pigment od spodiny epidermálních buněk svislým směrem k jejich povrchu, kdež se ploše rozprostře, kdežto oranžový pigment se rozšiřuje pouze směrem vodorovným. Ve dne se stahují tmavé kožní pigmenty u spodiny buněk v kompaktní hrudkovité shluky. Tato rychlá periodická barvoměna není vyvolána pouze zevními vlivy. Při osvětlení v noci se na př. stanou *Dixippusové* světlejší, kdežto ve dne ztmaví po zatemnění jen zřídka. Periodická barvoměna zůstane zachována i v trvalé tmě po několik týdnů, načež doznívá. Jsou-li *Dixippusové* s tmavými pigmenty chováni po delší dobu ve dne ve tmě a v noci na světle, zachovávají s počátku svůj normální barvoměnný rytmus a teprve po nějaké době se u nich objeví periodická barvoměna »obrácená«. W. Schleip (26c) se domnívá, že by mohly i periodické změny ve výměně látkové působiti na stěhování kožních pigmentů, a zdůrazňuje, že nemohl naléztí žádné innervace kožních pigmentových buněk. H. Giersberg (9) a M. Atzlerová (1) poukazují i na možnost vlivů povahy humorální. H. Prizibram a P. Suster (23) však nesdílejí tohoto mínění a kladou při morfologické barvoměně *Dixippusa* hlavní váhu na impulsy vycházející z očí a na zachování nervového spojení očí s břišním pásmem prostřednictvím mozku.

Při svých pokusech s *Dixippusy*, které jsem původně konal za jiným účelem, jsem pozoroval, že po utažení těla hnědých nebo černých jedinců ligaturou³⁾ v jakékoliv části trupu, nastalo po nějaké době zesvětlení části těla ležící za ligaturou, kdežto oddíl, který souvisel s hlavou, zachoval svůj původní barevný tón.⁴⁾ (Obr. 1.) Rozdílné zbarvení částí těla ležících

²⁾ Podle Giersberga i žlutý.

³⁾ na př. prostředně silnou nití, která se při utažení nezařezává do těla.

⁴⁾ Když jsem dal velmi opatrně ligaturu zvířatům, která byla



1a

1b

Obr. 1.

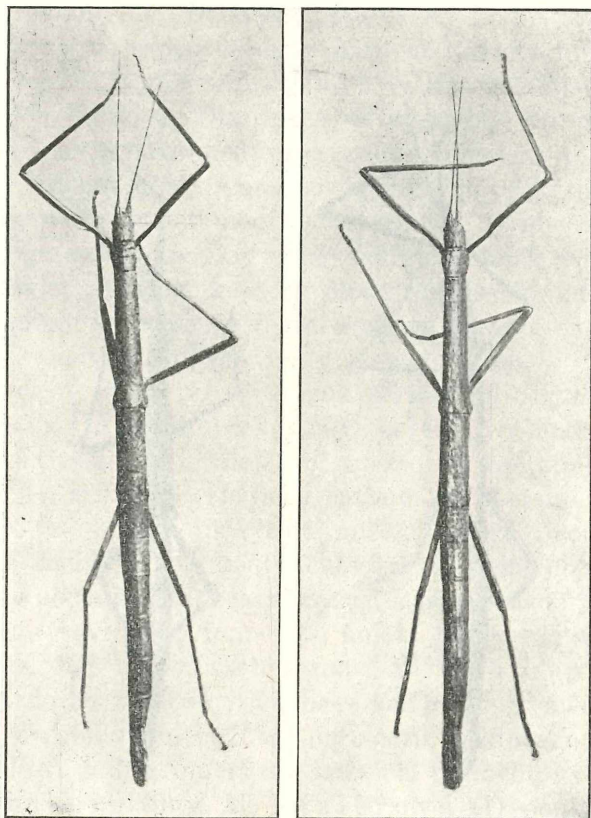
a) Tmavohnědé imago pakobylky indické (*Dixippus morosus*), jehož tělo bylo utaženo ligaturou mezi prvním a druhým párem noh.

b) Tmavohnědá larva *Dixippusa*, jejíž tělo bylo utaženo ligaturou mezi hrudí a zádí.

Části těla ležící za ligaturou silně vybledly.

po obou stranách ligatury patrné i na obr. 3. Odškrtní-li se pouze hlava, vybledne celý trup a jen hlava zůstane tmavou.

právě ve stavu kataleptickém (t. j. ve stavu úplné nehybnosti, do něhož upadají za dne a v němž mají nohy rovně nataženy a k tělu přiloženy), neprobudila se z tohoto stavu, ani když byla ligatura velmi silně utažena a spojení mezi vnitřními orgány značně poru-



Obr. 2.

a) Tmavohnědé imago *Dixippusa* před dáním ligatury.

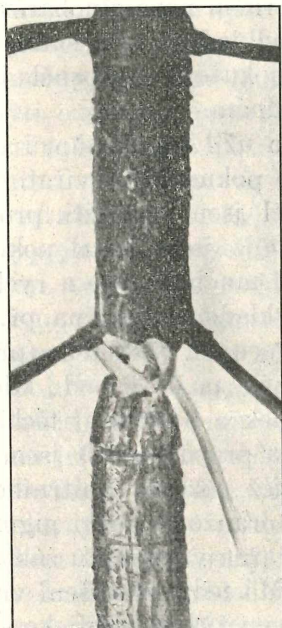
b) Totéž imago asi 10 hodin po utážení ligatury hned za hlavou.
Celý trup zesvětlil.

(Obr. 2.) Tyto pokusy jsme později opakovali s drem J. Hahnem na větším materiálu vždy s týmže výsledkem. Při srovnávání barevných odstínů různých jedinců nebo jednotlivých částí těla bylo užito barevných vzorníků⁵⁾ nebo kon-

šeno. Pouze záď těla se krátkou dobu po utážení ligatury chvěla, načež zase nastal úplný klid v pohybech jako před utážením ligatury. Pohyby noh, které se u některých exemplářů objevily po utážení ligatury, trvaly obyčejně jen kratší dobu.

⁵⁾ R. Jordan's: Farbenskala für Dekorationsmaler, Fürth, 1892. — H. Schmincke u. Comp., Düsseldorf (»soft artist pastel

trolních barevných nátěrů. Barevné tóny pokusných zvířat byly kontrolovány s počátku asi v intervalech jedno- až tříhodinových, v pozdějších dnech pak (případně až do smrti zvířete) nejméně čtyřikrát denně (z rána, v poledne nebo od-



Obr. 3.

Části těla (zadohrudí a zád) *Dixippusa* po obou stranách ligatury, při silnějším zvětšení. Kontrast obou částí těla jest velmi nápadný.

poledne, večer a v noci). Nejnápadnějším byl barevný kontrast mezi částmi spojenými s hlavou a částmi za ligaturou u zvířat s hojným tmavohnědým pigmentem a v období nočního zbarvení. Také u šedých, žlutohnědých a rezavých exemplářů bylo lze dobře pozorovati ony rozdíly, kdežto u zvířat šedožlutých bylo zesvětlení odškrcených částí jen málo výrazné. Zelená zvířata nejevila po zaškrcení žádných změn ve

colors») a vzorník barev fy Günther-Wagner v Hamoveru. Celkem 1090 barevných tónů.

svém zbarvení, neboť chovají převážně zelený pigment, který jest, jak již bylo řečeno, nehybný. Vyblednutí odškrcených částí těla s tmavým pigmentem se dostavilo bez ohledu na to, v které době denní nebo noční byla ligatura dána a byla-li pak zvířata chována stále nebo střídavě na světle nebo ve tmě, nebo v bílém, černém nebo jinobarevném okolí, nebo na různě zbarvených podkladech. Po smrti dr. H a h n a jsem pokračoval v těchto pokusech a dospěl jsem k výsledkům, o nichž v dalším pojednám.

Mimo imag jsem užil k pokusům i larev různého stáří. Celkem bylo vzato do pokusu 393 zvířat. Od uvedení příslušných protokolů musel jsem upustiti pro nedostatek místa. Nejmenší larvy, s nimiž jsem konal pokusy, byly asi 3 cm dlouhé. Larvy reagují mnohem lépe a rychleji než imaga, zejména již stará a vykladená. Tak na př. nastalo u většiny imag zesvětlení odškrcených částí těla (při 20° C) a cca 50% relat. vlhkosti teprve asi po 7—9 hod., kdežto u mladších larev za těchže podmínek a odškrcení těchže částí těla již po 2—3 hod. Za živa i na preparátech⁶⁾ jsem zjistil, že v odškrcených částech těla, jež pozbyly vnitřního spojení s hlavou, zaujal tmavohnědý a oranžový kožní pigment typickou denní polohu, t. j., že jest stažen v kupky u základny epidermálních buněk (*Tab. obr. a*). Má tedy přerušeni vnitřního spojení odškrcených částí s hlavou týž účinek jako světlo, resp. celkový fyziologický stav zvířete ve dne. Podobné vyblednutí trupu jako po odškrcení hlavy nastalo i po úplném odstranění hlavy. V tomto případě musí ovšem býti rána náležitě zalepena parafinem, aby bylo zamezeno větší ztrátě haemolymfy.

Pouhé menší příčné stříhy na hřbetě nebo v bocích nevyvolaly žádného zesvětlení částí za ranou. Části těla související s hlavou, ať již byly od ostatního těla odděleny jen ligaturou, nebo i úplně odříznuty, prodělávají, i když pak hladoví, typickou 24hodinovou periodickou barvoměnu v plném roz-

⁶⁾ Ke konservování těchto preparátů bylo užito fixáže formol-Flemingovy a Zenkerovy a k barvení Heidenhainova haematoxylinu se světlou zelení nebo oranží »G.« Praeparáty určené k histologickému vyšetření jiných orgánů, byly mimo to konservovány i fixáží Hennigsovou a barveny podle Maloryho, Dominiciho a Ehrlichovým haematoxylinem.

sahu a mohou nabýti i extrémních barevných tónů, kdežto oddíly za ligaturou nebo za řezem, zůstávají světlými a u mnohých exemplářů se zdá, že úplně pozbyly schopnosti měniti barvu. Pozorujeme-li velmi pozorně barevné odstíny odškrcených částí těla po více dnů (po případě až do smrti zvířete) v různých dobách denních, můžeme zjistiti u některých exemplářů jisté, byť i nejčastěji jen velmi slabé, kolísání barevného odstínu. Tyto změny, které se mohou objeviti až i po více dnech, mohou býti označeny jako residuum barvoměny. Podobný zjev lze pozorovati i po úplném odříznutí hlavy. Přes to však nutno zdůrazniti, že impulsy vycházející z hlavy mají hlavní a rozhodující vliv na periodickou barvoměnu *Dixippusa*. Vypojením jich lze libovolně změniti noční šat v denní. Vyblédání trupu lze nejdříve pozorovati na hřbetní straně abdomenu, kdežto zbarvení částí postranních a hrudi zůstává poměrně dlouho beze změny. Patrně se zde uplatňuje okolnost, že hřbetní část abdomenu jest poměrně slabě pigmentována, takže úbytek pigmentu se zde stává nejdříve patrným. — Je-li tělo rozděleno dvěma nebo více ligaturami ve tři nebo více částí, zesvětlí všechny odškrcené oddíly těla vyjma ten, který souvisí s hlavou, bez ohledu na polohu ligatur a velikost tělních úseků, jež vznikly po utahnutí ligatur. Necháme-li úplně vyblednouti část těla, jejíž vnitřní spojení s hlavou bylo ligaturou přerušeno a uvolníme pak ligaturu, ztemní opět ona část těla do téhož barevného tónu, jaký má oddíl, který zůstal spojen s hlavou. Kožní tmavý pigment pak zaujme v původně odškrcených částech opět svoji typickou noční polohu (*tab. obr. c*). Po uvolnění více ligatur, ztemní znova všechny ony úseky, které tím nabyly opětného vnitřního spojení s hlavou. Střídavým utahováním a uvolňováním ligatur lze vyvolati i vícekrát za sebou (pozoroval jsem až šestkrát) zesvětlení a ztemnění odškrcených částí, ať jsou zvířata chována za jakýchkoliv poměrů osvětlení, pokud ovšem zůstává hlavový oddíl tmavým. Přejídní polohy pigmentů mezi stavem maximální retrakce a expanse podává *obr. b a d* na přiložené tabulce. Touto metodou lze zvíře přinutiti k rychlému vystřídání extrémního i přechodního nočního a denního zbarvení buď na celém trupu nebo pouze v ně-

kterých jeho oddílech. — Další pokusy jsem provedl tak, že jsem tlakem a pohybem tupě ozubeného kolečka, působícím na povrch těla, rozmačkal všechny vnitřní ústroje ležící v zoně asi 2 mm široké, ale tak, že povrchový chitinový obal nebyl protržen a haemolymfa nemohla z těla vytékat. Tím bylo úplně přerušeno vnitřní organické spojení částí těla ležících před a za místem destrukce. Dobře se k tomuto pokusu hodí zvláště oddíl těla ležící mezi druhým a třetím párem noh. Nutno však toho dbáti, aby nebylo přerušeno vnitřní spojení tělních dutin nahromaděním lymfocytů a zbytků rozrušených tkání v místech, kde tlak působil a nevznikla tak příliš velká vnitřní »ránová uzávěrka.«⁷⁾ Zdaří-li se pokus, nenastane po této operaci buď žádné zesvětlení těla za místem destrukce, nebo jen zesvětlení přechodné. Poněvadž v místě, kde působil tlak kolečka, zůstalo zachováno vnitřní spojení obou tělních oddílů pouze prostřednictvím tělních štav (haemolymfy), usuzuji, že ztemňovací impulsy mohly zde býti přenášeny jen těmito štavami. Pro posouzení výsledků pokusů s utahováním a uvolňováním ligatur bylo důležité zjistiti, zda může býti dostatečným utažením ligatury skutečně úplně přerušeno spojení tělních dutin. Za tím účelem jsem vykonal řadu pokusů, mimo jiné i tak, že jsem do odškrceného zadního oddílu těla vstříkovoal značné množství 50% a 96% alkoholu nebo jiných jedovatě působících látek (na př. solí těžkých kovů). Za krátko byl oddíl, do něhož byla dána injekce, otráven, kdežto přední oddíl žil dále a čile lezl i po mnoha hodinách po injekci. Musely tedy býti obě části těla v místě ligatury velmi důkladně od sebe odděleny. Totéž jsem pozoroval i v případech, kdy jedna z odškrcených částí již propadla hnilobnému rozkladu. Naskýtala se dále otázka, zda by se snad při zesvětlovacích procesech v odškrcených částech těla nemohlo

⁷⁾ Nedoporučuje se prováděti tyto operace nebo i jen pouhé přestřihování břišního pásma v místech ležících hned za hlavou, neboť v těchto místech jest tělní dutina velmi úzká a snadno se uče vnitřní ránovou uzávěrkou, takže se pak dostaví účinek podobný jako po odškrcení hlavy.

Po utažení zaživací roury v různých místech nebo po odstranění některých její částí za použití dvojnásobných ligatur, nenastalo žádné zesvětlení za místem operace.

uplatňovati zvýšení vnitřního tlaku po utažení ligatury. Tuto možnost však nutno vyloučiti z více důvodů. Kdyby tomu tak bylo, pak by na př. nebylo lze dobře pochopiti, proč zbělí vždy jen ty části těla, které pozbyly vnitřního spojení s hlavou a ne i ty, jež s hlavou zůstaly spojeny i když pokus byl tak proveden, že v nich musel být vnitřní tlak větší, než v částech zbavených spojení s hlavou. Zesvětlení se dostavilo i tehdy, když byla odškrcena jen hlava, ač se po tomto zákroku nijak podstatně nezměnily tlakové poměry v trupu. Mimo to se nedostavilo zesvětlení ani po některých injekcích, jimiž byl vnitřní tlak zvýšen. — Výsledky pokusů, o nichž jsem dosud pojednal, vedou mne k těmto závěrům: 1. že z hlavy larev a imag *Dixppusa* vycházejí impulsy, které mají velmi pronikavý vliv na pohyby kožních pigmentů, jež podmiňují periodickou barvoměnu. Tato barvoměna se může dít v normálním rozsahu pouze za součinnosti hlavy. 2. Šíření barvoměnných hlavových impulsů do trupu může se dít i po přerušení spojení mezi vnitřními orgány a zachování jen spojení cestou humorální.

Na zesvětlovací proces v částech, jejichž vnitřní spojení s hlavou bylo ligaturou přerušeno, má vliv nejen stáří zvířete, nýbrž i t e p l o t a. Larvy a imaga, jimž byly dány v různých částech těla ligatury, jsem vystavil hned na to působení teploty — 3°, 0°, 10°, 15°, 22°, 33° 38° a 40° C. U zvířat chovaných v lednici při — 3° C a 0° C nebylo lze zjistiti ani po 24 hod. nějakého zesvětlení odškrcených částí za ligaturou. Vybělovací proces byl zde zastaven jak u imag, tak u larev. Při 10° C postupoval tento proces jen velmi pomalu. Při 22° C nastalo zesvětlení u imag průměrně asi po 8 hod., u larev však již po 1—3 hod. (při relativní vlhkosti cca 50—70%). Při 33° C (a relativní vlhkosti 50—75% se dalo rozeznati vyblédání částí za ligaturou již za ½—¾ hod. Při dalším zvyšování teploty se však již projevuje její brzdící vliv a při teplotě 39° a vyšší se nedostavuje již žádná zřetelnější kontrakce tmavého pigmentu v částech vypojených z vlivu hlavy a nastane více méně silné ochrnutí těla teplem. Nízkými a příliš vysokými teplotami tedy lze zesvětlovací proces, vyvolaný vypojením hlavy, úplně zarazit. Přiměřeně zvýšená teplota podporuje vyblédací děj nejen co do rychlosti, nýbrž i co do intensity,

neboť jejím vlivem lze vyvolati tak silné vybělení, jakého nelze za nižších teplot nikdy dosíci. Při 33° C nastalo na př. u velmi tmavých exemplářů vyblednutí částí za ligaturou až do tónu velmi světle šedého papíru. Poněvadž vyšší teplota působí příznivě na kontrakci kožních pigmentů i u normálních zvířat, jde v našem případě vlastně o sčítání účinků dvou činitelů, totiž teploty a eliminace barvoměnných hlavových impulsů, čímž lze vysvětliti onen neobyčejně silný účinek. Také rychlost a intensita opětného ztemňování těla po uvolnění ligatury závisí na teplotě, která však při vyšších stupních opětné ztemnění poněkud brzdí. — Utáhne-li se tělo (na př. asi uprostřed) ligaturou *a* a po zesvětlení odškrcené části se odškrtí ještě hlava ligaturou *b*, za současného uvolnění ligatury *a*, pak může prouditi haemolymfa z tmavého oddílu těla (který byl právě vypojen z vlivu hlavy) i do vybledlého již okrsku. Přes to však nejen že nenastane žádné zřetelné ztemnění okrsku za ligaturou *a*, nýbrž po nějaké době zesvětlí i okrsek za ligaturou *b*. Z toho by snad bylo možno usuzovati, že předpokládání ztemňovací humorální činitelé se v těle rychle inaktivují.

Dalšími pokusy jsem zkoumal, zda a pokud by mohly působiti na barvoměnné procesy *Dixippusa* vyvolané odškrcením hlavy: 1. případné poruchy ve výměně plynů a systému tracheálního, 2. kysličník uhličitý, 3. vlhkost vzdušná, 4. různé části centrálního nervstva, 5. ultrafialové paprsky, 6. radiové záření a 7. injekce některých látek, zvláště alkaloidů.

Spotřebu kyslíku jsem (hlavně u imag) měřil *Drastichovým* mikrorespirometrem jednak před zaškrcením nebo odstraněním hlavy, jednak po něm (při 16° C). Zjistil jsem, že nenastala ani brzo po operaci ani během 24 hod. po ní, žádná zvláštní změna ve spotřebě tohoto plynu oproti kontrolám. Také průměrný respirační kvotient byl celkem podobný jako u normálních zvířat ($RQ = 0.88$). Hodnoty mnou nalezené souhlasí dobře s údaji *Buddenbrocka* a *Rohra* (4) pro normální zvířata. Nemůže tedy býti vyvoláno zesvětlení odškrcených nebo od hlavy oddělených částí těla nedostatkem kyslíku v nich, který by snad byl vyvolán vlivem odstranění hlavy (resp. hlavového nervstva). Po pouhém odškrcení hlavy nebo po dekapitaci se nemohou uplatniti ani

nějaké zvláštní poruchy v průchodnosti tracheálního systému, neboť v tomto případě zůstanou všechna stigmata volnými a tracheální systém zůstane rovněž, až na několik větví v hlavě, nedotčen. —

S kysličníkem uhličitým jsem konal pokusy tak, že jsem ho vpouštěl do baněk, v nichž byli jednak neporušení Dixippusové s tmavým pigmentem, jednak exempláře, jejichž tělo bylo v různých částech utaženo ligaturou, nebo byli jiným způsobem operováni. Teplota, při níž se narkosa dala byla 18—22° C. V kysličníku uhličitým byla zvířata ponechána $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ hodiny. Pokusy byly konány nejčastěji dopoledne nebo večer. Na počátku narkosy počaly některé exempláře konati prudší dýchací pohyby, jinak ale nejevily žádných nápadnějších změn ve svém chování. Asi po 3 minutách počala zvířata klesati na dno nádoby a zůstala zde obyčejně ležeti na hřbetě, konajíce nohama nepravidelné pohyby a ohýbajíce záď obloukovitě vzhůru a dolů. Potom upadla ve stav nehybnosti. Za narkosy ani bezprostředně po probuzení z ní nejevily ani světlé ani tmavé exempláře žádné změny zbarvení. Tmavé exempláře (s nočním zbarvením) nezměnily barvy ani později, kdežto exempláře světlé (se zbarvením denním) počaly po nějaké době (obyčejně asi po 1—3 hod.) stále více temněti, až jejich tmavé pigmenty dosáhly maximální expanse. V tomto stavu mohly setrvati i po mnoho hodin, načež zase počaly vybledati, často až do nejvyššího stupně zesvětlení. Vlivem kysličníku uhličitého lze libovolně změnit u jinak normálních zvířat denní zbarvení v noční i když jsou zvířata chována po narkose na silném světle nebo i na bílém podkladu. Působí tedy kysličník uhličitý v opačném smyslu než vypojení hlavy. Vlhký kysličník uhličitý měl podobný účinek jako suchý. — Další otázkou bylo, dovede-li kysličník uhličitý zaraziti, po případě překonati vybělovací proces vyvolaný vypojením hlavy. Zjistil jsem, že toho nedovede ani v tom případě, když byla zvířata s odškrcenou hlavou, nebo bezhlavá, chována po narkose kysličníkem uhličitým v úplné tmě, která ztemňovací děje podporuje. Ve všech 33 mnou pozorovaných případech se dostavilo za těchto okolností u tmavých exemplářů právě tak silné zesvětlení částí oddělených ligaturou od hlavy, jako u zvířat nenarkotisovaných. Byli-li vystaveni

působení kysličníku uhličitého černí Dixippusové (s nočním zbarvením), kterým byly již více hodin před narkosou dány ligatury v různých částech trupu, tak, že odškrcené části za ligaturou již silně vybledly, nenastalo v těchto částech po vynětí z kysličníku uhličitého žádné ztemnění. Oddíly těla však, které souvisely s hlavou, nebo hlavy samy (byly-li jen tyto odškrceny) zůstaly i nadále tmavými. Užijeme-li k podobným pokusům exemplářů světlejších barev, na př. světle hnědých (s denním zbarvením), zjistíme, že ať je dáme do kysličníku uhličitého hned po utažení ligatury nebo delší dobu po něm, vždy, že ztemní jen ty části těla, které souvisejí s hlavou, případně jen hlava sama, byla-li jen tato oddělena ligaturou. To nastalo i tehdy, když byla taková zvířata chována po narkose na světle nebo i na světlém podkladu, který zesvětlení podporuje. Nevyvolá tedy kysličník uhličitý ztemnění těla ani jako plyn zvíře obklopující ani jako plyn jím vdechovaný s á m o s o b ě, nýbrž projeví svůj ztemňovací vliv jen za přítomnosti, resp. součinnosti, hlavy a impulsů z ní vycházejících. Bezhlavé fragmenty zůstanou i po silné narkose kysličníkem uhličitým světlými. Při vhodném uspořádání pokusu mohou kysličník uhličitý vdechovati jak části ležící za ligaturou, tak i před ní a přes to ztemní jen tyto. V kysličníku uhličitém máme prostředek, jímž můžeme silně dráždit hlavový orgán, jehož činností jest vyvolána expanse kožního pigmentu a přiměti zvíře k přijmutí nočního zbarvení v kteroukoliv dobu denní. — Mimo to jsem vykonal pokusy s kysličníkem uhličitým tak, že jsem vsunul do nádobky, již tento plyn procházel, jen zadní oddíl těla skrz otvor v plastilinové zátce, který pak byl dokonale utěsněn. V tomto případě ztemnělo po nějaké době celé tělo, přesto, že značná část přídy byla obklopena obyčejným vzduchem. Utáhneme-li u světlého Dixippusa přídu (na př. mezi 2. a 3. párem noh) nepříliš těsnou ligaturou, ale přece jen tak silnou, aby bylo spojení tělních dutin přerušeno a vsuneme část těla za ligaturou do nádobky s kysličníkem uhličitým, ztemní pouze část těla ležící před ligaturou přes to, že trčí do normálního vzduchu, kdežto část těla, která jest přímo v kysličníku uhličitém, nikoliv. Když při jinak podobném uspořádání pokusu nestáhneme tělo ligaturou, ale přestříhneme jen břišní nervové pás-

mo (na př. mezi 2. a 3. párem noh), počne rovněž temněti nejdříve přída (hlava). Z ní se pak šíří ztemnění dále nazad a rozšíří se (není-li vnitřní ránová uzávěrka v místě stříhu příliš veliká) i za ránu na větší část zádě, nebo i na celou zád, takže pak celé tělo ztemní. Z toho plyne, že ztemňující účinek kysličníku uhličitého nemůže se šířiti ze zádě do přídy břišním nervovým pásmem, nýbrž nějakou jinou cestou. Touto cestou jest — jak jsem jinými pokusy⁸⁾ zjistil — systém tracheální. Tento nález by byl v dobrém souhlasu s poznatkem, že se u Dixippusa děje inspirace hlavně abdominálními stigmaty a expirace thorakálními, ač ovšem může i abdomen obstarati nouzovou expirací. — Po uvolnění ligatury (u zvířat, u nichž ztemněla po narkose kysličníkem uhličítým pouze přední část těla před ligaturou) rozšíří se ztemnění z částí těla spojených s hlavou i na vybělené části ležící za místem ligatury, které dříve zůstaly i po narkose kysličníkem uhličítým světlými. To se děje i po přerušení nervového břišního pásma. Uvedené zjevy vedou mne k závěru, že ztemňovací popudy vyvolané kysličníkem uhličítým v hlavě, šíří se z ní do trupu jinou drahou než břišním nervovým pásmem. Poněvadž bylo umožněno další šíření se ztemňovacích impulsů vyvolaných kysličníkem uhličítým pouhým uvolněním ligatury, resp. oběhu tělních šťav, jest na snadě domněnka, že se tak děje i zde cestou humorální. Všeobecně by tedy bylo možno říci, že ztemňovací účinek kysličníku uhličitého se šíří do hlavy cestou tracheální a z hlavy k zádi cestou humorální.

Při počátku éterové narkosy počínají larvy Dixippusů (asi po 5 minutách) konati mírné pohyby předníma nohama i když byly před tím úplně nehybné. Při tom sklánějí tibie a tarsy dovnitř (směrem k femuru) a zase je v dosti pravidelných intervalech vzpřimují. Tyto pohyby trvají asi 5 min. Po 10 až 15minutové expozici parám éterovým, počnou larvy, jedna po druhé, náhle padati na dno narkotisační nádoby. Leží pak obyčejně na znaku rozpráhujíce široce přední nohy, nebo nadzvedají přídu nebo zád v kratších přestávkách. Někdy upadají v narkosu, aniž by před tím konaly nějakých pohybů. Éterovou narkosu snášejí Dixippusové dobře

⁸⁾ se zalepováním abdominálních stigmat.

i když byla vícekrát opakována. U černých a tmavohnědých individuí nenastala žádná změna zbarvení ani za narkosy ani po ní. Také na barvu částí těla, které po utažení ligatury zbledly, neměla éterová narkosa žádného vlivu. U světlých zvířat (s denním zbarvením) se neukázal buď žádný účinek, anebo nastalo jisté ztemnění.

Schleip (26a) nepřikládal změnám vlhkosti v zdušné žádného zvláštního významu při periodické barvoměně *Dixippusa*. Giersberg (9) však pozoroval, že vzduch nasycený vodními parami, nebo ovlhčení větší části těla vyvolá u světlejších exemplářů s tmavým pigmentem ztemnění. Malé lokální ovlhčení však zůstane bez účinku. Přesnějších pokusů ohledně vlivu různých stupňů vzdušné vlhkosti však Giersberg nekonal. S četnými černými, hnědými a rezavými larvami a imagy *Dixippusa*, které měly světlejší denní zbarvení, jsem konal pokusy tak, že jsem měřil polymetrem »Kosmos« stupeň relativní vlhkosti v chovných nádobách a pozoroval, při kterém stupni relativní vlhkosti se počne projevovati ztemňovací účinek a kdy jest největší. Zvířata byla při tom chována v diffusním světle při 20—22° C. Také já jsem pozoroval, že ve vzduchu nasyceném vodními parami (ve vlhké komůrce) nastane zřetelné ztemnění světlejších exemplářů. Toto ztemnění se může státi patrným u mladších larev (délky asi 3 cm) již za $\frac{3}{4}$ hod. a za 2—3 hod. jest již velmi nápadné. Působení vzdušné vlhkosti se však projevuje teprve při značném procentu relativní vlhkosti. U některých exemplářů nebylo lze zjistiti zřetelné reakce ještě ani při 86% relativní vlhkosti a její účinek se zřetelněji projevil teprve kol 90%. Tu se objevily u dobře reagujících zvířat buď jen tmavší skvrny na těle, anebo celé tělo více méně ztemnělo. Maximální expanse tmavých pigmentů však nastane teprve při relativní vlhkosti 95% a větší. Naopak stává-li se vzduch velmi suchým, může nastati zesvětlení, ale tato reakce není nikdy tak zřetelná jako v silně vlhkém vzduchu a někdy se ani neobjeví. — Vsuneme-li do vlhké komůrky pouze záď, na př. světle hnědého *Dixippusa* (s denním zbarvením) a utěsníme dobře otvor komůrky, jímž tělo prochází, zátkou z plastiliny tak, že vyčnívá do okolního vzduchu jen hlava a hrud', ztemní nejdříve přední oddíl těla a pak

teprv žád, i když jest relativní vlhkost vzduchu mimo komůrku jen malá (na př. asi 10—30%). Za příznivých okolností a u dobře reagujících zvířat (larev) lze tento účinek pozorovati již asi za 1 hod. Odškrtneme-li tělo světla hnědého *Dixippusa* ligaturou nepřilíš utaženou, ale přece tak těsnou, že nastane vybělení částí ležících za ní a dáme takové zvíře do vzduchu nasyceného vodními parami, zůstane odškrtený zadní oddíl těla světlým a ztemní jen oddíl před ligaturou, který jest spojen s hlavou. Týž výsledek nastane, když se vsune nepřilíš těsně utažený zadní oddíl těla do vlhké komůrky a předeek z ní vyčnívá do volného vzduchu. Podobný zjev pozoroval i *G i e r s b e r g*. Tento autor se domnívá, že se vlhkostní dráždění šíří ze zádi k předě břišním nervovým pásmem. S tímto názorem však nemohu souhlasiti, neboť ztemnění přídý nastalo při jinak stejném uspořádání pokusu i tehdy, když bylo (aniž byla dána ligatura) břišní pásmo úplně prostřiženo (na př. v středohrudí). Na základě pokusů se zalepováním stigmat se domnívám, v souhlasu s *A t z l e r o v o u* (1), že vlhkostní dráždění se šíří k hlavě systémem tracheálním a že jest zprostředkováno vlhkým vdýchaným vzduchem. Přímo, t. j. bez prostřednictví hlavy, však nedovede vlhkost vzdušná vyvolati ztemnění tělního povrchu, právě tak, jako toho nedovede kysličník uhličitý. Na základě pokusů, které jsem dosud znal s individui zbavenými mozku, zdá se mi dosti pravděpodobným, že se při ztemňovacích dějích vyvolaných vlhkostním drážděním uplatňuje i mozek. — Dále jsem vyšetřoval vliv *n e r v s t v a t r u p u a h l a v y* na periodickou barvoměnu *Dixippusa*. Ukázalo se, že pouhé přerušení spojení mezi jednotlivými úseky břišního nervového pásma, nebo i vynětí některých ganglií břišních a hrudních, nevyvolá ani zesvětlení ani ztemnění okřsků těla ležících za místem operace. Týž výsledek měly i pokusy s přerušováním spojení mezi jednotlivými částmi trupového sympatiku. Výsledky těchto pokusů souhlasí s tím, co bylo již dříve uvedeno. Ani břišní pásmo trupu ani trupová část sympatiku nedovedou samy o sobě (po přerušení spojení s hlavou) udržeti periodickou barvoměnu v normálním rozsahu a nejsou nutny k udržení normální periodické barvoměny částí spojených s hlavou, nebo i jen hlavy samé. Při analýse barvoměnných impulsů vychá-

zejících z hlavy jsem v první řadě obrátil zřetel k hlavovému nervstvu. V hlavě *Dixippusa* jest vedle mozku a podjícenové zauzliny i přední («hlavový») oddíl sympatiku, který souvisí s mozkiem (s třetím jeho oddílem). Jest to zvláště ganglion frontale (před mozkiem) a části sympatiku pod, resp. za mozkiem, *nervus recurrens* a ganglion oesophageum. Za mozkiem nad oesophagem leží dva epitheliální váčkovité orgány záhadného významu, t. zv. »*corpora allata*«. Odstraňoval jsem buď celý mozek i s optickými zauzlinami případně i s hlavovým sympatikem, anebo jen jednotlivé části mozku nebo hlavového sympatiku. Též *corpora allata*. Všiml jsem si zvláště příznaků po odstranění třetího oddílu mozku (*tritocerebrum*) vzhledem k údaji *Atzlerové*, která připisuje tomuto oddílu mozku zvláštní význam při barvoměně.⁹⁾ Po vynětí celého mozku nastalo po více hodinách více méně silné zesvětlení trupu. Různými obměnami operační techniky jsem zjistil, že na periodickou barvoměnu *Dixippusa* mají vliv obzvláště části třetího oddílu mozku (*tritocerebrum*), po jehož oboustranném odstranění nebo proříznutí nastane zřetelné vyblednutí trupu. S třetím oddílem mozkovým souvisí i tykadlová ganglia a proto i po odstranění těchto, když jest touto operací onen oddíl mozku poškozen, mohou někdy nastati poruchy v periodické barvoměně. Tmavý kožní pigment však jest i po odstranění mozku ještě schopen jistých pohybů. Odstranění

⁹⁾ Vynětí mozku nebo jeho částí se dalo jemnými nůžkami, lancetkami, a zahnutými jehlami. Jednotlivé části mozku byly odstraňovány buď za studena nebo kauterem. Mozek byl rozdělován i řezy vedenými nejrůznějšími směry. Vyjímání mozku jest pro jeho značnou velikost a příznivou povrchovou polohu poměrně snadné. Také to jest výhodno, že mozek jest značně kompaktní, nerozplývá se a dobře se dá řezati. Na temeni hlavy byl obyčejně učiněn výstřih v podobě písmene »V« nebo »U«. Nastříhnuté části kůže byly pak nadzvednuty jemnou pincetou a ohnuty tak silně dopředu, že celý mozek byl obnažen. Po operaci byl kožní výstřih opět přiklopen do původní polohy, něco vyteklé haemolymfy bylo řádně osušeno filtračním papírem a rána uzavřena roztaveným 46° parafínem, jenž byl na ní kápnut s nahřáté pipety a po ní a jejím okolí rozprostřen. Mnohem obtížnější jsou operace na hlavovém sympatiku. Dobře si lze při nich vypomoci mírně zahřátou platinovou jehlou kauteru, na níž se příslušný orgán při dotyku přilepí, takže může býti snadno nadzvednut a odpreparován.

některých částí, nebo i celého hlavového sympatiku i s corpora allata nevyvolá zesvětlení trupu a schopnost normální periodické barvoměny zůstane zachována. Zvířata bez hlavového sympatiku mohou tak silně zesvětliti i ztemněti jako normální. Po odstranění corpora allata nenastala u černých exemplářů žádná změna v barevném tónu, kdežto u některých světlých jedinců se dostavilo přechodné ztemnění. Přechodné ztemnění jsem někdy pozoroval i po silnějším lokálním tepelném dráždění temenních částí hlavy ležících skoro bezprostředně nad mozkem a po vyjmutí optických zauzlin. Zvířata (♀) zbavená obou corpora allata žila bez zvláštních poruch až skoro čtyři měsíce (déle ještě než některá normální imaga), hojně žrala, normálně se pohybovala, nejevila žádných poruch v rovnováze těla,¹⁰⁾ upadala ve dne v periodické kataleptické stavy, jevila normální periodickou barvoměnu a ani jinak se nelišila od kontrolních jedinců. Corpora allata nejsou tedy nikterak nutna k zachování života imag. Odstranění podjícnové zauzliny nemělo rovněž žádného vlivu na pohyby kožních pigmentů

Na základě dosavadních svých nálezů se přikláním k názoru, že mozek *Dixippusa* (případně jistá jeho část), nebo nějaký s ním těsně souvisící, nebo v jeho blízkosti ležící orgán, má vliv na periodickou barvoměnu tohoto zvířete a že k uplatnění tohoto vlivu není třeba ani nervového spojení mezi mozkem a hlavovým sympatikem ani spojení nervstva hlavy s nervstvem trupu. Impulsy řídící pohyby tmavých kožních pigmentů *Dixippusa* vycházejí rozhodně z hlavy. Mnoho okolností by nasvědčovalo tomu, že se tyto impulsy dostávají k epidermálním pigmentovým buňkám prostřednictvím tělních šťav, podobně jako u obratlovců inkréty žláz s vnitřní sekrecí. Mohly by tudíž býti barvoměnné impulsy u *Dixippusa* hormonální povahy. O mechanismu hlavového barvoměnného systému *Dixippusa* nelze zatím říci nic určitého. Rovněž jsem nemohl zatím ještě rozhodnouti, zda by se mozek mohl při barvoměně účastniti jen jako orgán innervující, anebo jiným způ-

¹⁰⁾ H e y m a n s nadhodil otázku, zda by snad tyto orgány nemohly míti podobnou funkci jako orgány statické. Nenalezl však pro to žádných dokladů.

sobem. A t z l e r o v á (1) předpokládá u Dixippusa nějaký dosud neznámý orgán barvoměnný. V hlavě Dixippusa jsou sice (i v bezprostředí blízkosti mozku) žláznaté elementy, ale nelze zatím říci, mají-li některé z nich nějaký vztah i k barvoměnným procesům. Ať jest však mechanismus hlavového barvoměnného systému jakýkoliv, tolik nutno přiznati, že se při fyziologické barvoměně Dixippusa uplatňují v mnohem větší míře, než se dosud předpokládalo, vedle činitelů vnějších i vlivy vnitřní. Že má na př. světlo (resp. barva podkladu), jež působí na oči Dixippusa, značný vliv na jeho barvoměnu, nelze nikterak popírati. Snad by i, jak H l o b i l (11) se domnívá, mohlo míti i oko zbavené jakéhokoliv světelného dráždění jistý vliv na chemismus zvířete a působiti na pohyb kožních pigmentů. Jsou zde ale i vnitřní vlivy, které dovedou za jinak stejných zevních podmínek i po vypojení očí (ať již jen funkcionelním nebo i operativním) nahraditi impulsy z nich vycházející, anebo alespoň působiti v podobném smyslu. Když byly na př. vypáleny jen oči a optické zauzliny, nastalo u některých světlých exemplářů po nějaké době ztemnění celého těla, po němž pak následovalo zesvětlení. Také po odstranění očí a optických zauzlin za studena může tělo dočasně značně ztmavěti. Dovedou tedy i za nepřítomnosti očí některé zbylé orgány vyvolati podobný efekt jako oči nedrážděné nebo drážděné světlem. Podobnou kontrakci kožního pigmentu, jakou vyvolává světlo působící na oči, dovede způsobiti i zaškrcení nebo odstranění hlavy a expansi tmavého pigmentu, jakou vyvolává oko zbavené světelného dráždění, přivodí i uvolnění ligatury. P r z i b r a m a S u s t e r (23) soudí, že ztráta morfológické barvoměny jest podmíněna neschopností zvířat zbavených tykadlových ganglií »den vom Auge empfangenen Reiz weiterzuleiten« (p. 268). Uvedl jsem již, že při fyziologické barvoměně nepřichází nervové vedení podráždění z mozku břišním pásmem v úvahu.

Zdá se, že by se mohla při rychlé periodické barvoměně Dixippusa uplatňovati i velmi význačná periodicita ve zvýšení a snížení životní činnosti tohoto zvířete. Lze si představit, že ve dne, kdy zvířata setrvávají ve stavu úplné nehybnosti, vysílá hlavový barvoměnný systém do trupu jen slabé impulsy k pigmentovým buňkám, anebo jich vůbec nevysílá,

takže dojde k podobnému zjevu jako po vypojení hlavy, t. j. ke kontrakci tmavého pigmentu («šat denní»). Večer a v noci, kdy se zvířata stávají čilými, rychle lezou a přijímají potravu, uvádí se snad ve zvýšenou činnost i barvoměnný hlavový mechanismus a vysílá do trupu mnohem silnější impulsy než ve dne, což vede k expansi kožního pigmentu («šat noční»). Výsledek jest v tomto případě podobný, jako po uvolnění ligatury, která spojuje ztemnělou část těla související s hlavou, s částí zesvětlenou. Dráždění vycházející z očí, na něž působí světlo, by mohlo za normálních poměrů snižovati činnost barvoměnného systému a nedostatek tohoto dráždění by mohl působiti v opačném smyslu.

Moje pokusy s cevním systémem nejsou ještě ukončeny. Dosavadní jejich výsledky by mluvily pro to, že se při barvoměně *Dixippusa* asi uplatňují spíše rozdíly v jakosti, než v proudění a tlaku haemolymfy.

Mladší (asi 3 cm dlouhé) černé a hnědé larvy *Dixippusa* byly též ozařovány nefiltrovaným zářením (β a γ) radiového preparátu (5 mg Rael)¹¹⁾ ve vzdálenosti cca 1 cm a pozorován vliv tohoto ozařování na periodickou barvoměnu. Larvy byly v ozařovacích nádobkách obloukovitě stočeny. Za doby latence, kdy se ještě nijak neprojevoval škodlivý účinek ozáření, nebylo lze pozorovati v periodické barvoměně žádných zvláštních anomálií. Nepravidelnosti v pohybech kožního pigmentu se objevily teprve nedlouho před smrtí zvířete. Při silných lokálních aplikacích,¹²⁾ kdy byl radiový preparát přiložen téměř až k tělu (1 mm), objevila se po jisté době více méně ostře ohraničená ložiska destrukce, v nichž se pigmentové kožní buňky úplně oddělily od povrchového chitinu a rozptýlily se v dutině tělesné, kdež byly později, nejspíše nahromadivšími se lymfocyty, ztráveny. Degeneru-

¹¹⁾ Radiový preparát ($RaCl_2$) byl uzavřen v skleněné rource, jejíž stěna byla 0.3 mm silná a propouštěla::

20.3% měkkého záření β

67.3% tvrdého záření β

97.0% měkkého záření γ

99.69% tvrdého záření γ .

Doby ozařování byly 1—48 hod., dávky 0.037—1.80 mcd (milli-curie détrit.)

¹²⁾ doby ozáření 9—18 hod. (0.34—0.68 mcd.)

jší pigmentové buňky a jejich jádra se abnormálně zvětšily. U zvrdevatělých okrsků vytvořily lymfocyty mohutné shluky, které vyplňovaly někdy i celou polovinu dutiny tělesné. Tyto shluky tvořily massu složenou ze silně protáhlých vřetenovitých buněk, takže činila dojem kompaktní tkáně. Posléze byl v takovýchto místech vnitřek těla pokryt pouze tenkým povlakem povrchového chitinu, skrz který prosvítala modro zelená haemolymfa.

Účinky ultrafialových paprsků na periodickou barvoměnu *Dixippusa* jsem zkoušel pomocí křemenortuťové lampy *Bachovy*.¹³⁾ Ozařována byla jednak neporušená zvířata (černá, hnědá i rezavá) v době denního i nočního zbarvení, jednak zvířata jimž byly některé části těla utaženy ligaturou buď bezprostředně před ozářením, nebo delší dobu po něm, kdy odškracené části již zbělely. Vzdálenost zvířat od hořáku byla 60 cm. K filtraci ultrafialového světla bylo použito speciálního filtru Společnosti pro výrobu křemenortuťových lamp v Hanavě. Doba ozáření byla ½ hod. až 6 hod. Ozařování ultrafialovými paprsky v dávkách mnou užitých nemělo žádného význačného vlivu na rychlou barvoměnu *Dixippusa*. U některých exemplářů nastalo po ozařování jisté zesvětlení, u jiných opět slabší ztemnění, ale teprve po více hodinách, nebo až druhý den, což mohlo býti vyvoláno i vlivy jinými. K podobnému výsledku došla též *Atzlerová* (1). Odškracené části těla zbělely po ozařování ultrafialovým světlem právě tak, jako za normálních poměrů, resp. podržely svůj světlý barevný tón.

Zkoumal jsem též vliv injekcí, zvláště alkaloidů na periodickou barvoměnu *Dixippusa*. Injekce byly

¹³⁾ Standardní model pro střídavý proud. Délka světelného oblouku 120 mm, třípolový hořák, svítivost cca 2500 svíček, svorkové napětí 175—185 V. Mnou užitý hořák vydal ve vzdálenosti 60 cm bez filtru 1 jednotku horského slunce (j. h. s.) za 1·5 min. Určení dosí bylo provedeno metodou *Bering-Meyer-Kellerovou*, zdokonalenou *Schullem* a *Aliusem*. Při orientačních pokusech bylo užito *Kellerova* dosimetru. Literaturu a bližší údaje o těchto dósovacích metodách viz v mé práci: »Über die Wirkung der Radiumstrahlen und des ultravioletten Lichtes auf die Färbung, Metamorphose und den Sauerstoffverbrauch der Puppen von *Tenebrio molitor*. *Biologia Generalis* 1934.

dávány Liebergovou tuberkulinovou celoskleněnou stříkačkou, dělenou na setiny cm^3 , jednak do neporušených individuí s denním nebo nočním zbarvením, jednak do částí těla oddělených od hlavy ligaturou a to buď hned nebo delší dobu po zaškrcení. Podle velikosti zvířat (larev i imag) bylo vstříknováno obyčejně $\frac{5}{100}$, $\frac{10}{100}$ nebo $\frac{20}{100}$ cm^3 a jen výjimečně více. Při injekcích bylo dbáno, aby tělo nebylo příliš ovlhčeno, vzhledem k zkušenostem o vlivu vlhkosti na barvoměnu. Proto bylo místo injekce po vytažení jehly ihned pečlivě osušeno od prosáklé haemolymfy nebo injekční tekutiny a ranka pak uzavřena parafinem. Teplota, při níž byla zvířata po injekcích chována, byla 18—22° C. Relativní vlhkost byla udržována mezi cca 40—60%. K zjištění případného účinku zvýšení vnitřního tlaku vlivem injekce na pigmentové buňky, byla vykonána i nyní ještě řada pokusů s tímž negativním výsledkem, jak bylo již dříve uvedeno.

Také injekce fyziologického roztoku (0.6% NaCl) do zbledených odškrcených částí těla nevyvolaly žádné zvláštní změny zbarvení. Z alkaloidů jsem užil k injekcím curare, strychnin,^{14a)} atropin, chinin,^{14b)} coffein^{14c)} a digitalin v roztocích vodných nebo ve fyziologickém roztoku. Injekce $\frac{20}{100}$ cm^3 0.2% roztoku curare vyvolaly u jinak neporušených larev a imag, majících kožní pigment v denní poloze, silné ztemnění obyčejně již asi po třech až čtyřech hod. Po této expansi pigmentu následovala mnohdy i velmi silná retrakce. U černých exemplářů s pigmentem ve stavu maximální expanse nevyvolaly injekce curare žádné změny v barvě. Ještě nápadnější účinek než uvedený roztok měl 1 a 2% roztok curare. Když byla larvám nebo imagům, majícím denní zbarvení, odškrcena hlava delší dobu před injekcí, nebo krátce před ní, nastalo po těchže dávkách jako dříve, asi po 2—4 hod. ztemnění odškrcených částí. Byla-li černým Dixippusům krátce před injekcí curare odškrcena jen hlava, nenastalo vůbec žádné zesvětlení trupu. Teprve druhého dne, když účinek curare pominul, počal se projevovati zesvětlovací účinek vypojení hlavy. Když byly dány injekce curare do odškrcených částí

^{14a)} strychninum nitricum, ^{14b)} chininum hydrochloricum, ^{14c)} coffeinum natriobenzoicum.

těla černých exemplářů teprve tehdy, když ony části již úplně vybledly a dosáhly nejvyššího stupně retrakce kožního pigmentu, ztemněly opět do tak tmavého nebo ještě tmavšího tónu, než měla část spojená s hlavou. Dovede tedy curare vyrovnati vybělovací vliv eliminace hlavy, resp. dekapitace a vyvolati podobnou expansi kožních pigmentů jako příslušné hlavové popudy. Curare vyvolá ztemnění trupu i bez přítomnosti hlavy a tím se liší jeho účinek značně od účinku kysličníku uhličitého a vzdušné vlhkosti, které, jak řečeno, uplatní svůj ztemňující vliv pouze za normálního spojení trupu s hlavou. Zkoušel jsem dále rozhodnouti, zda působí curare na kožní pigment přímo nebo prostřednictvím jiných orgánů. Nechal jsem působiti ve vlhké komůrce roztok curare přímo na malé kousky kůže vyňaté ze zesvětlených částí trupu. Bohužel vadí zde velmi ta okolnost, že se v takových kožních výřezech brzo zastavuje pohyb pigmentu, takže výsledky nebyly přesvědčivé.

Pokusy, které byly provedeny se *strychninem* a *atropinem* tímž způsobem jako s curare, měly podobný výsledek. I zde ztemněly po injekcích jak celá zvířata, mající denní zbarvení, tak vybledlé části trupu, jejichž vnitřní spojení s hlavou bylo přerušeno. Ztemnění zvířat bez ligatur vyvolaly i 1% roztoky *chininu* a *coffeinu*. *Digitalin* (cris.) ve zředění 1 : 100 ($10/_{100}$ cm³) neměl však na zbarvení světlých exemplářů žádného vlivu a působil jedovatě.

Celkem lze říci, že všechny mnou užitá alkaloidy (až na *digitalin*) měly ztemňující vliv.

S d r e m H a h n e m jsme zkoumali, zda by lze vyvolati ztemnění odškrcených a zesvětlených částí těla injekcí haemolymfy z částí tmavých nebo ztemnění světlých individuí injekcemi haemolymfy z tmavých individuí. Výsledky však, k nimž jsme dospěli, nejsou dostatečně průkazné. Pozorovali jsme sice, že může nastati v okolí místa injekce ztemnění, často i na dosti rozsáhlém okrsku, ale našli jsme též, že lokální ztemnění (byť i menší) může nastati i v okolí jiných ran bez jakékoliv injekce. Zkusil jsem též transplantovati hlavy ze ztmavělých individuí na zesvětlená a naopak. Přesazené hlavy se sice dobře přitmelily srážející se haemolymfou, nebo byly mimo to ještě přitmeleny parafinem, ale,

jak jsem očekával, neobjevil se žádný vliv přesazené hlavy na barvu trupu, nýbrž všechna individua se chovala tak, jako by byla hlava úplně odstraněna. Na řezné ploše se totiž vytvořila velmi rozsáhlá vnitřní ránová uzávěrka chitinovité povahy, která přerušila vnitřní spojení mezi hlavou a trupem. Nelze tedy této metody použití k řešení nadhozeného problému.

O vnitřních činitelích, kteří působí na barvoměnu u členovců, máme velmi málo zpráv. Jsou však mezi nimi některé, které poukazují na existenci látek: hormonální povahy i u těchto bezobratlých a k jejich účasti při barvoměně.¹⁵⁾ K o l l e r (13) našel, že odejme-li se C r a n g o n u, který zčernal na černém podkladu, něco krve a vstříkne se zvířeti, které zesvětlilo na bílém podkladě, nabude toto asi po 10—30 min. o něco tmavšího tónu. K o l l e r a P e r k i n s (18) dále ukázali, že v očních stopkách karnátů jest látka povahy hormonu, která vyvolá kontrakci červených a žlutých chromatoforů u zvířat, která jsou přizpůsobena temnu, nebo jsou slepá a jejichž chromatofory jsou ve stavu expanse. P e r k i n s a S n o o k (19) připravili i výtahy z vysušených očí *Palaemona* a našli, že i když byly sterilisovány varem, vyvolaly na kouscích kůže kontrakci chromatoforů. Extrakty z očí *Crangona* působí i na chromatofory *Palaemonetes*. Z obratlovců bych poukázal zvláště na *Phrynosomu*. R e d f i e l d (24) ukázal, že provede-li se transfuse krve ze zvířete, které vlivem dráždění vybledlo, do jiného zvířete, které jest tmavé, nastane i u něho zesvětlení. Velmi rychle se dostaví reakce, jsou-li drážděny nadledviny. Účinnou látkou jest tu prý adrenalin. Zajímavo jest, že ani zde nebylo lze dokázati nějaké přímé innervace chromatoforů.

Posléze bych ještě upozornil na P a r k e r o v o (17) učení o neurohumoralismu u obratlovců. Bližší údaje a nálezy týkající se tohoto předmětu podává práce S c h a r r e r o v a (25). Lze-li toto učení aplikovati i na bezobratlé nelze zatím říci.

¹⁵⁾ O dosavadních výzkumech o vnitřní sekreci u bezobratlých pojednám podrobněji na jiném místě.

V ý k l a d t a b u l k y.

a) Sagittální řez částí epidermis tmavohnědého *Dixippusa* z oddílu těla ležícího *za* ligaturou a velmi silně vybledlého. Tmavohnědý pigment se soustředil ve spodní části buněk a tvoří dosti kompaktní shluky. Tutéž polohu zaujímá tento pigment u normálních zvířat ve dne («denní poloha pigmentu»).

b) Stěhování tmavohnědého pigmentu k povrchu epidermálních buněk v části těla ležící *za* místem ligatury, nedlouho po jejím uvolnění («přechodní poloha pigmentu»).

c) Sagittální řez částí epidermis z oddílu těla ležícího *za* místem ligatury více hodin po uvolnění ligatury. Tmavohnědý pigment se přemístil až na zevní povrch buněk a zde se rozšířil ve směru vodorovném, čímž nabyla kůže opět svého původního tmavého zbarvení. Tutéž polohu zaujímá tmavý pigment u normálních zvířat v noci («noční poloha pigmentu»).

d) Zpětný pohyb tmavého pigmentu směrem k základně buněk po opětném utažení ligatury («přechodní poloha pigmentu»).

Résumé.

Contribution à l'étude des changements périodiques de la coloration chez Dixippus morosus Br. et Redt.

Par V. Janda.

(Présenté le 11 avril 1934.)

Si nous étranglons le corps des exemplaires bruns ou noirs de *Dixippus* à l'aide d'une ligature (par exemple par un fil) à un point quelconque, la région située derrière la ligature prend quelques heures après l'opération une couleur beaucoup plus claire que celle de la région située avant la ligature dont la communication avec la tête n'a pas été interrompue.

Si la ligature est placée immédiatement derrière la tête, le corps entier pâlit, tandis que la tête conserve une couleur foncée. Les résultats restent les mêmes quand après l'opération on tient les insectes à la lumière ou dans l'obscurité. Dans les parties du corps devenues plus claires on voit le pigment brun des cellules épidermiques former de petites agglomérations dans la partie basale de ces cellules. Il présente

donc la distribution qu'on observe normalement pendant le jour ou chez des individus élevés à la lumière.*) Après la décapitation on observe le même changement dans la coloration du corps qu'après la mise de la ligature. Les parties du corps situées avant la ligature présentent les changements périodiques normaux dans la coloration qui s'effectuent au cours de 24 heures. Au contraire, les régions situées derrière la ligature restent claires et ne subissent ordinairement que des changements très peu prononcés dans leur coloration (changements résiduels). Si plusieurs ligatures sont faites à la fois, toutes les régions du corps pâlisent, sauf celle qui reste en communication avec la tête. Quand les ligatures sont enlevées, toutes les régions pâlies reprennent le même teint que présente la partie restée en communication avec la tête. En mettant et en enlevant plusieurs fois des ligatures on peut provoquer des changements réitérés dans la coloration des régions séparées. Si à l'aide d'une roue dentée nous détruisons tous les organes internes**) dans une zone étroite (2 mm environ) sans que la chitine soit détériorée et à condition que l'haémolymphe puisse circuler à travers la zone endommagée, la partie du corps située derrière la zone en question, ne pâlit pas du tout ou n'accuse qu'un changement passager dans le teint. Les faits exposés ci-dessus prouvent que la tête donne naissance aux impulsions qui dirigent les mouvements du pigment des cellules épidermiques et que ces impulsions peuvent se propager dans le corps aussi par voie humorale (haémolymphe). La rapidité du processus de la décoloration des régions du corps séparées par la ligature est en raison inverse à l'âge de l'insecte et en raison directe avec la température. On peut ralentir le changement de couleur ou l'arrêter complètement sous l'influence des températures basses. Par voie d'application des températures élevées (près de + 33° C) on peut rendre les parties séparées par la mise de la ligature beaucoup plus claires qu'à des températures normales.

La consommation d'oxygène (à + 16° C) ainsi que le quo-

*) Pendant la nuit les grains du pigment sont dispersés près de la surface externe des cellules pigmentaires.

**) Cette expérience réussit le mieux quand on fait promener la roue à peu près au milieu du mésothorax.

tient respiratoire (R. Q.) ne changent pas après la mise de la ligature (resp. après la décapitation). L'effet de l'action de CO_2 est inverse à celui de la décapitation. Le corps entier des individus normaux (de couleur brun-clair) placés dans l'atmosphère de ce gaz pendant une $\frac{1}{2}$ heure ou $\frac{3}{4}$ heure environ, prend une couleur beaucoup plus foncée. Ce changement de couleur se manifeste 1—3 heures après la fin de la narcose. Si on étrangle le corps des *Dixippus* brun-clair avec une ligature (placée par exemple entre la 2^{ème} et la 3^{ème} paire de pattes) et si on les met ensuite dans CO_2 , la région restée en communication avec la tête, seule, devient plus foncée, tandis que la région située après la ligature prend après quelque temps un teint plus clair, ce qu'on observe aussi chez les individus non soumis à l'action de CO_2 . Il découle de ce qui précède que CO_2 ne peut pas paralyser les processus de décoloration provoqués par la décapitation. Ce gaz ne provoque le changement de coloration vers un teint plus foncé que si la tête est intacte. Les impulsions dues à l'action de CO_2 et déterminant le changement en question n'atteignent pas la tête par la chaîne nerveuse mais se propagent à l'aide de l'appareil trachéal. De même, les impulsions déterminant l'expansion du pigment foncé dans le corps, se propagent de la tête, même après l'interruption de la chaîne nerveuse.*) La propagation de ces impulsions se fait probablement par voie humorale. Les individus brun-clair prennent aussi une couleur très foncée quand on les place dans une atmosphère saturée par des vapeurs d'eau (humidité relative 100%). L'humectation du corps donne le même résultat. Au cours de nos expériences l'effet de l'humidité atmosphérique (à une température de + 20 à 22° C) ne commençait à se révéler d'une façon plus intensive qu'à l'humidité relative de 90% tandis qu'à 86% il était faible et ne se révélait qu'irrégulièrement. L'expansion maximale du pigment n'a lieu qu'à l'humidité relative de 95% et plus.

*) Nous ne pouvons pas recommander de couper la chaîne nerveuse dans la région cervicale. La cavité du corps est dans cette région très étroite et s'obstrue facilement par l'haemolymphe précipitée de sorte que la communication interne de la cavité de la tête avec celle du corps s'interrompt ainsi que s'interrompt l'échange de l'haemolymphe entre les deux cavités en question.

Plusieurs considérations théoriques ainsi que plusieurs expériences, laissent supposer que les impulsions dûes à l'action de l'humidité se propagent vers la tête par l'appareil trachéal. Elles atteignent la tête même si la chaîne ventrale est interrompue. La circulation de l'haemolymph se montre en tout cas comme une condition indispensable pour que l'effet de l'humidité puisse se manifester (à comparer avec les données de Giersberg et de Atzler).

L'extirpation du cerveau entier ou seulement du tritocerebellum provoque presque le même effet en ce qui concerne le changement de coloration que la décapitation. Au contraire l'extirpation du ganglion suboesophageal ni celle des parties principales du système sympathique de la tête n'exercent aucune influence appréciable sur le changement de la coloration chez *Dixippus*. La survie des individus bruns et noirs de *Dixippus* auxquels on a extirpé les »corpora allata« était de la même durée que celle des individus normaux et durait quelquefois plus de 3 mois. Les individus en question ne présentaient aucune différence avec les individus normaux en ce qui concern leur genre de vie, les mouvements et les changements de coloration. Les injections d'eau physiologique n'ont eu aucune influence sur les changements de couleur chez *Dixippus*. Quant aux injections de curare, de strychnine, d'atropine, de quinine et de coféine elles ont provoqué chez les individus brun-clair (5—4 heures après l'injection) l'apparition d'un teint foncé suivi plus tard d'une décoloration très prononcée. Les injections de curare, de strychnine et d'atropine pratiquées dans les régions du corps situées derrière la ligature et déjà fortement décolorées, provoquent la réapparition de la couleur primitive. On voit donc que les alcaloïdes en question peuvent contrebalancer l'influence décolorante de la décapitation et suppléer aux impulsions partant de la tête qui déterminent l'expansion du pigment. Après l'injection d'haemolymph prélevée chez des individus foncés à des individus claires on constate parfois des changements locaux dans la coloration (autour du lieu de l'injection) on ne peut pourtant pas considérer ce résultat comme entièrement convaincant, car les mêmes changements peuvent s'observer autour de plaies ordinaires. — L'auteur est porté à croire que les impulsions

déterminant les migrations du pigment dans les cellules épidermiques de *Dixippus morosus* cheminent vers les cellules pigmentaires par voie humorale. Les organes hypothétiques situés dans la tête seraient à leur tour semblables aux organes à sécrétion interne chez les vertébrés.

Explication des figures du texte:

Fig. 1a) Imago brun de *Dixippus morosus* dont le corps a été étranglé par une ligature mise entre la 1^{ère} et la 2^{ème} paire de pattes.

1b) Larve de *Dixippus morosus* dont le corps a été étranglé par une ligature mise entre le thorax et l'abdomen. Derrière les ligatures le corps est devenu beaucoup plus clair.

Figures 2a et 2b. Imago brun foncé de *Dixippus* avant la mise de la ligature derrière la tête et 10 heures après la mise de celle-ci. La partie du corps située derrière la ligature est devenue beaucoup plus claire.

Figure 3. Parties du corps situées des deux côtés de la ligature à un plus fort grossissement. Le contraste dans la coloration des deux parties est très marquant.

Explication de la planche.

Figure 3a. Coupe sagittale d'une portion d'épiderme de la partie décolorée du corps derrière la ligature. Pigment brun foncé concentré dans la partie basale des cellules forme des agglomérations assez compactes (même distribution que pendant le jour).

Figure 3b. Migration du pigment brun foncé à la surface des cellules épidermiques dans la partie du corps située derrière la ligature peu de temps après que celle-ci a été enlevée.

Figure 3c. Coupe sagittale d'une portion d'épiderme de la partie du corps séparée par la ligature plusieurs heures après l'enlèvement de celle-ci. Pigment brun-foncé s'est déplacé jusqu'à la surface des cellules de sorte que l'épiderme a repris le même teint foncé qu'elle avait avant la mise de la ligature.

Figure 3d. Retour du pigment brun-foncé vers la partie basale des cellules épidermiques après la remise de la ligature.

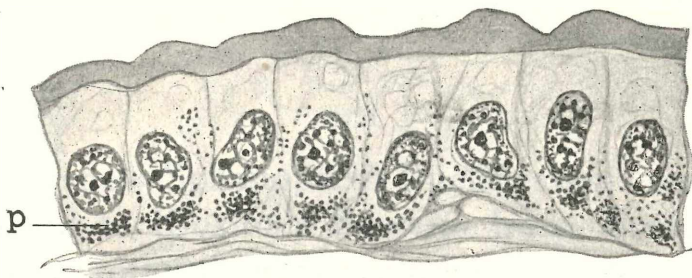
L i t e r a t u r a.

1. A t z l e r o v á M., Untersuchungen über den morphologischen und physiologischen Farbwechsel von *Dixippus* (*Carausius morosus*). Z. f. vergl. Physiol. 13. 1931.
2. B r a u e r H., Farbenwechsel bei *Chrysopa vulgaris*. Verh. d. Zool. bot. Ges. Wien 2. 1853.
3. v. B u d d e n b r o c k, Grundriß der vergl. Physiologie 1928.

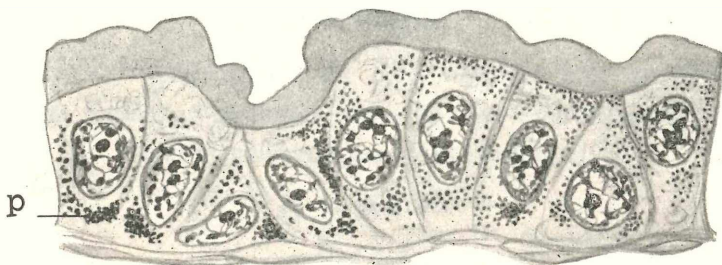
4. Buddenbrock u. Rohr, Die Atmung von *Dixippus morosus*. Ztschr. f. allg. Physiol. 20. 1923.
5. Cape de Baillon, La tératologie des Insectes. Encyclopédie entomologique VIII. 1927. Paris.
6. Daiber M., Beiträge zur Kenntnis der Ovarien von *Bacillus Rossii*. Inaug. Disert. Jenaische Ztschr. 39. 1904.
7. Dobkiewicz, Einfluß der äußeren Umgebung auf die Färbung der indischen Stabheuschrecke *Dixippus morosus*. Biol. Ztrbt. 32. 1912.
8. Dušková V., Poznámky k novým pracem o barvoměně a biologii vůbec pakobylyky *Carausius morosus*. Biol. listy, roč. 12., č. 3—4. 1926.
9. Giersberg H., Über den morphologischen und physiologischen Farbwechsel der Stabheuschrecke *Dixippus (Carausius morosus)*. Ztschr. f. vergl. Physiol. 7. 1928.
10. Heymons R., Über bläschenförmige Organe bei den Gespenstheuschrecken. Sitzb. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1899.
11. Hlobil J., Vliv očí a osvětlení na změnu barvy u *Dixippus morosus*. Biol. listy 10. 1924.
12. Janda V., a) O samci *Dixippusa (D. morosus)* a některých pozorováních a pokusech na tomto druhu. Acta soc. entomolog. Českoslov. 6. 1926.
b) O parthenogenezi a jiných zajímavých zjevech u Phasmid. »Příroda« 19. 1926.
13. Koller G., a) Farbwechsel bei *Crangon vulgaris*. Verh. der dtsh. Zool. Ges. 1925.
b) Über Chromatophorensystem, Farbensinn- und Farbwechsel bei *Crangon vulgaris*. Z. f. vergl. Physiol. 5. 1927.
c) Versuche über die inkretorischen Vorgänge beim Garnelenfarbwechsel. Tamtéž. 8. 1928.
14. Leuzinger, Wiesmann u. Lehmann. Zur Kenntnis der Anatomie und Entwicklungsgeschichte der Stabheuschrecke *Carausius morosus*. Jena 1926.
15. Meissner O., Biologische Beobachtungen an der indischen Stabheuschrecke *Dixippus morosus*. Z. f. wiss. Insektenbiol. 5. 1909.
16. Menke H., Periodische Bewegungen und ihr Zusammenhang mit Licht- und Stoffwechsel. Arch. f. die ges. Physiol. 140. 1911.
17. Parker H., Humoral agents in nervous activity. Cambridge 1932.
18. Perkins E., Colour changes in crustaceans especially in *Palaeomonetes*. Journ. of exp. Zool. 50. 1928.
19. Perkins E. a Snook T., Controll of pigment migration in the chromatophores of Crustaceans. P. Nat. Ac. Sci. Washington 17. 1931. (Ref. Zool. Ber. 30. 1932. Hft. 4./6.)
20. Poulton E., The colors of animals, London. 1890. (ref.).

21. Przi Bram H., Aufzucht, Farbwechsel- und Regeneration unserer europäischen Gottesanbeterin (*Mantis religiosa*). Roux-Arch. 23. 1907.
 22. Przi Bram H. u. Brecher L., Die Farbmodifikation der Stabheuschrecke *Dixippus morosus*. Roux. Arch. 45. 1919 a 50. 1922.
 23. Przi Bram H. u. Suster P., Fühler- und Beinregeneration bei Phasmiden VII. Anz. d. Akad. d. Wiss. Wien. Nr. 26. 68. 1931.
 24. Redfield, The physiology of the melanophores of the horned toad (*Phrynosoma*). Journ. of exper. Zool. 26. 1918.
 25. Scharrer E., Über neurokrine Organe der Wirbeltiere. Zool. Anz. 6, Supl. band., Verh. d. deutsch. Zool. Ges. 33. 1933.
 26. Schleich W., a) Der Farbenwechsel von *Dixippus morosus*. Zool. Jahrb. Abt. f. allg. Zool. u. Physiol. 30. 1910.
b) Über den Einfluß des Lichtes auf die Färbung von *Dixippus* und die Frage der Erbllichkeit des erworbenen Farbkleides. Zool. Anz. 52. 1921.
c) Über die Frage nach der Beteiligung des Nervensystems beim Farbenwechsel von *Dixippus*. Zool. Jahrb. Abt. f. allg. Zool. u. Physiol. 35. 1915. (p. 225—231).
 27. Schmitt-Auracherová A., Die drei Arten von Farbenänderungen bei *Carausius morosus*, ihre Resultate und Ursachen. Zool. Anz. 53. 1921.
 28. Stahn J., Über die Atmungsregulation besonders die Kohlensäureregulation bei *Dixippus morosus* und *Aeschna grandis*. Zool. Jahr. Abt. f. allg. Zool. u. physiol. 46. Heft 11. 1928.
 29. de Sinéty P., Recherches sur la biologie et l'anatomie des Phasmes. La cellule. 19. 1901.
 30. Steche O., Die Färbung von *Dixippus morosus*. Zool. Anz. 37. 1911.
 31. Sternschein E., Strychninwirkung an Crustaceen. Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmakol. 97. 1923.
 32. Stockard Chr., Habits, reaktions and mating instincts of the »walking stick«, *Aplopus mayeri*. Carneg. Inst. Washington. Publ. Nr. 103. (ref.).
 33. Wenzmer G., Triebstoffe des Lebens. Kosmosbändchen 1933.
 34. Zacharias O., Zu dem Umfärbungsphänomen der Stabheuschrecke *Dixippus morosus*. Br., Biol. Zentrbl. 33. 1913.
 35. Zbořil J., Entmologické zajímavosti Slovenska. Věda přírodní. 14. 1933.
-

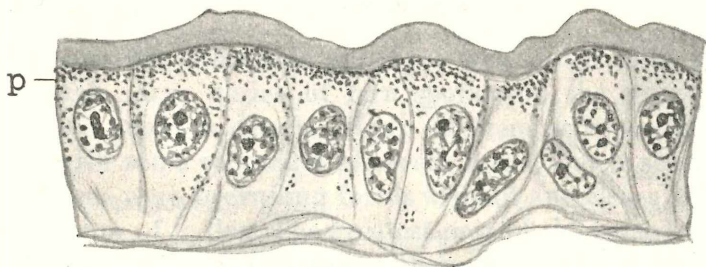
Viktor Janda: *Příspěvky k poznání periodické barvoměny pakobylky indické.*



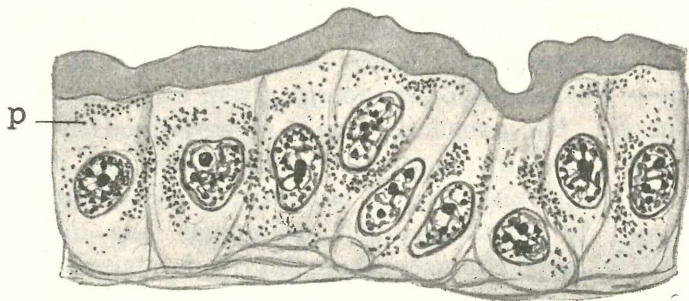
a



b



c



d

XIII.

On two new *Sphenopteris* fructifications closely allied to Kidston's *Boweria* (resp. Scott's *Pteridotheca*) with remarks to some of the already known Palaeozoic fern sporangia.

(*Sur deux fructifications de Sphenopteris très proches de Boweria Kidst. et quelques notes sur les sporanges des fougères paléozoïques déjà connues.*)

By F. NĚMEJC.

(Presented April 11, 1934.)

Introduction.

From the palaeozoic era there was stated until present an enough large series of fern sporangia, the structure of which we know in details. Many of them show certain analogies with some sporangia of recent ferns. But it seems, that at that time were prevailing forms without any closer affinities to the forms of to day. The greatest part of the palaeozoic fern fructifications is of a distinct synangial character and many forms bear sporangia without any annuli. But also in such cases, where sporangia are provided with annuli, we see that their structure is generally of a quite different kind, than the structure of the annuli in the recent fern sporangia. I intent to discuss here two newly discovered *Sphenopteris* sporangia from the Carboniferous of Central Bohemia and in connection with them also some other Palaeozoic true fern sporangia (i. e. excluding the *Botryo-* and *Zygopteroid* ferns), provided with annuli and reminding thus sporangia of the recent Leptosporangiate or Protoleptosporangiate ferns.

Description of the two new forms.

1. *Štúria amoena* Stur sp. (*gen. nov.*). — This form has been described and figured in sterile condition by D. Štúr (l. c. 1885, pp. 52). Štúr classified it among his *Hapalopterids*, in which genus he united many ferns with sporangia of the shape like in the genus of *Renaultia*. But in many cases Štúr did not know the structure of the respective sporangia, in other cases he united with the genus *Hapalopteris* also some totally sterile leaves only on account of their external features. Thus it happened, that fronds of Štúr's genus *Hapalopteris* bear often fructifications of various types; the whole genus was later split into more genera f. inst. *Renaultia*, *Boweria* etc. At the thorough study of some specimens of *Sph. amoena* in the collections of the Nat. Museum, Praha, I stated, that its sporangia as well as the morphology of their sterile fronds bear some very peculiar features, on account of which I am defining here a new palaeozoic fern genus under the name of *Štúria*.

It is not necessary to describe here the characteristic features of sterile fronds of *Sph. amoena*; this has been already done in an excellent manner by the known Slovakian author Štúr (1885, pp. 52). The finely divided fronds have been here certainly of large dimensions, as according to the fragments we may presume leaves pinnate into 5 degrees, the main rhachis being till 1 cm broad (Pl. fig. 1, 3). The very characteristic feature of the sterile leaves are the aphlebiae (Pl. fig. 2), joined at the insertions of the primary and secondary pinnae. These are 2.5 till 3 cm long, symmetrically forklike divided into narrow linear laciniae. Fertile specimens have their leaflets generally deeper incised than the sterile ones. Whether the shape of the fertile leaflets is still otherwise modified, I am unable to tell, as they are always covered very densely by the relatively great sporangia. The sporangia form no regular sori, they compose only irregular groups containing a varying number of sporangia. The sporangia (Pl. fig. 4, 5, 6) are relatively free and consequently they are not deformed by any mutual pressure in the groups. They are 0.4—0.45 mm long, of an oval shape and as almost all palaeo-

zoic fern sporangia, they are sessile. Their walls are built of narrow and longitudinally elongated cells. The annulus is very distinct; it is placed similarly as in the *Boweria* nearly across the top of the sporangia in a vertical direction. It is biseriate and uncomplete, does not attain on any side of the sporangium its base; it includes only about $\frac{2}{3}$ of the whole meridional circumference of the sporangia. The cells composing the annuli are nearly 2 times as broad as the other sporangial cells. When seen from their ventral side, the sporangia show generally only 1 series of the annular cells, they are then somewhat similar to the sporangia of the *Oligocarpia*.

The closest allied form to our *Štúria* is without any doubt Kidston's *Boweria*. But the annuli in this last are shorter and less distinct; Kidston himself says, that it is possible to mistake the *Boweria* for the *Renaultia*, in which the sporangia have no annuli at all. In our case, such a mistake is utterly excluded. Also with regard to the morphology of sterile fronds, our *Štúria* is well enough characterised by the presence of the already mentioned aphanophylls, which have not yet been stated in Kidston's *Boweria*. — It is very difficult to tell to what measure it is possible to compare our *Štúria* with Scott's *Pteridotheca*; first the kind of the fossilisation of both types is quite different, second we have nearly no informations about the morphology of sterile leaves of *Pteridotheca*. *Pteridotheca* is a far older type than our *Štúria*; it was discovered in the Lower Westphalian (Lower coal measures) of England, whereas *Štúria amoena* is known from the Middle Westphalian [Štúr cites it from the coalseries of Žacléř (Schatzlar) of the Lower Silesian coal basin; in Central Bohemia it may be stated in the Radnice coal measure zone, which is the transition from Middle to Upper Westphalian]. For that reason, I suppose that *Pteridotheca* belongs to a specifically different ferngenus than our *Štúria*.

2. *Dendraena pinnatilobata* Njč. (nov. gen., nov. spec.). — Diagnosis: Sporangia cca. 0.3 usque 0.4 mm longa, ovalia, sessilia, libera, gruppas irregulares in pagina inferiore lacinarum ultimi ordinis efformantia. Annulus valde distinctus, incompletus, e duabus (in

parte media e 3 seriis) cellularum constitutus, circiter amplius $\frac{1}{2}$ totius sporangiorum ambitus occupans. Cetera pars sporangiorum e cellulis elongatis ac angustis constituta.

Partes foliorum haecum notae tripinnatae vel incomplete quadripinnatae. Rhaches flexuosae. Rhachis principalis usque 2 mm lata. Rhaches ultimi ordinis subalatae. Pinnae penultimi ordinis oblongo lanceolatae, pinnae ultimi ordinis cca. 2—3 cm longae ac 5—12 mm latae. Foliola pinnatilobata usque pinnatisecta, ambitu ovato lanceolato, lacinulis late linearibus, integerrimis vel furcatis, obtuse truncatis vel ad apices subrotundatis, nervo centrali flexuoso, nervis lateralibus simplicibus vel furcatis, per unum in unicum lobum vel lacinulam foliolum petentibus. Aphlebiae ignotae.

The features of the sterile leaves are sufficiently characterised by the joined figure (textfig. 1. and 2.) and the latin diagnosis. They remind in a certain measure Kidston's *Sphenopteris deltiformis* (l. c. 1923, part 1. pp. 106—107). Some similarities may be seen also in Štúr's *Sphenopteris flexuosissima*, from which they differ by the absence of diplomematically resp. palmately lobed pinnae or leaflets at the base of the last resp. pennultimate pinnae. Sterile specimens of this *Sphenopteris* I know from the Radnice coal measure zone at Nýřany, Blatnice and Bílá Hora near Plzeň, from Břasy (near Radnice), and from the small coal basin of the place called »Na Štilci« at Žebrák near Hořovice.

Fertile specimens (Pl. fig. 7, 8) are conserved in the collections of the National Museum, Praha; they have been collected by O. and K. Feistmantel in the gorlitic (»Brousky« or »Schleifsteine«) rocks of Strádonice near Beroun (Radnice coal measure zone). Their belonging to the same plant species as the foregoing sterile leaves, is attested by one partially sterile specimen (Coll.: Nat. Museum, Praha), in which the sterile pinnae and leaflets have precisely the same shape as in the sterile specimens cited from the coal districts of Plzeň, Radnice and Žebrák. The sporangia form irregular groups on the laciniae of the leaflets. They seem to be more densely crowded together than in the foregoing *Štúria*, as they show partial deformations by the mutual pressure. The kind of preservation of those Feistmantel's fertile specimens,

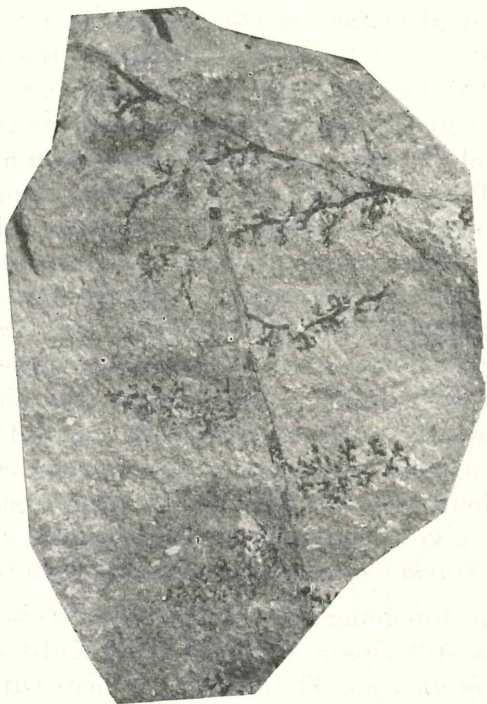


Fig. 1. *Dendraena pinnatilobata* Njc. A sterile specimen $\frac{1}{1}$. (Coll.- Nat. Museum, Praha) Loc.: „Na Štilci“ at Žebrák (near Hořovice).

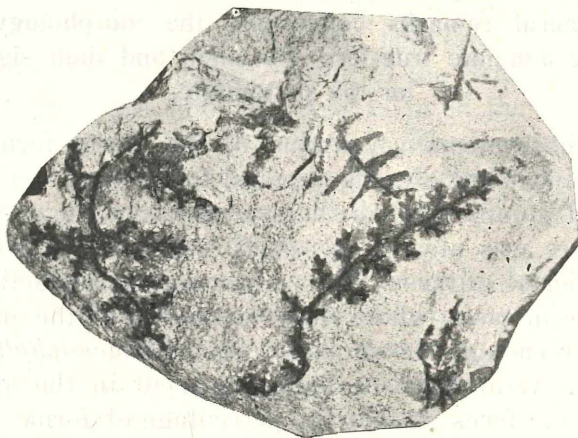


Fig. 2. *Denoraena pinnatilobata* Njc. a sterile specimen, $\frac{1}{1}$ (Coll.: Nat. Museum, Praha) Loc.: „Na Štilci“ at Žebrák (near Hořovice).

dated 1868 and identified as *Oligocarpia*, is a very bad one and only very few of them show distinctly the structure of the sporangial walls. The sporangia are sessile, free and 0.3 to 0.4 mm long, ovate till rounded. Their annulus is very distinct, uncomplete and includes only a little more than a half of the whole circumference of the respective sporangium (Pl. fig. 9, 10, 11, 12). On the basis of the known specimens I am unable to characterise their precise position in the sporangial walls. They seem to be somewhat slightly oblique, but at the same time the sporangia seem to be slightly assymetrical. The construction of the annulus seem to be nevertheless quite symmetrical, just as in *Štúria* or in *Boweria*. Its middle part is composed evidently of three, both ends only of 2 series of cells. Other parts of the sporangial walls are composed of narrow and elongated cells (Pl. fig. 11). Seen from their ventral side, they give a similar impression as the sporangia of the foregoing *Štúria* i. e. a certain similarity with *Oligocarpiæ*.

From the foregoing we see that our *Dendraena pinnatilobata* shows still closer affinities with Kidston's *Boweria* than the *Štúria amoena*. The annulus is here but longer and more distinctly marked than in *Boweria*. Also the third series of cells seems to be better developed than in Kidston's *Boweria* (judging from Kidston's figures).

Some general remarks concerning the morphology of the palaeozoic annulate true-fern sporangia and their significance for the systematic.

In the systematical studies of the recent ferns always a great importance is being ascribed to the construction of the sporangial annuli. Also in the systematic of the fossil forms this feature was always respected, but it seems not always with sufficient criticism. Very often serious deductions have been made in cases, where the construction of the annuli was not clearly enough known (see f. inst. *Hymenophyllites*, *Oligocarpia*). Another inconvenient moment in the systematic of palaeozoic ferns is, that the percentage of forms, of which the character of the annulate sporangia we know more in detail, is relatively small, compared with the great amount of

sterile leaves or with such forms, where the sporangia have no annuli or show synangial features.

Beside the 2 here already described types, I shall discuss also the relations of *Oligocarpia*, *Chansitheca*, *Hymenophyllites* and then some types which generally are ascribed to the family of *Osmundaceae*, the *Senftenbergia* classified as a member of the family of the *Schizaeaceae* and finally some sporangia discovered in slides of cherts or coal balls.

From all the mentioned types the closest to recent ferns stands without any doubt Corda's *Senftenbergia* (l. c. 1845), though some authors, especially Štúr and Solms-Laubach had serious doubts as to it. Štúr (l. c. 1883 pp. 665—675) thought that the sporangia of *Senftenbergia* have no annuli and that the presumed presence of an annulus is based only upon an optical delusion. Nevertheless Zeiller's very detailed study (l. c. 1883) has shown that *Senftenbergia* has a well developed annulus composed of 3 till 5 circumpolar series of cells; this number of series may be exceptionally reduced only to 2 series. On one side of the sporangia is placed meridionally the stomium, composed of thin elongated and narrow cells, by which the annulus is interrupted. Studying the construction of the sporangia of the recent *Schizaeaceae*, Zeiller stated, that in some cases (*Lygodium japonicum* Sw., *hastatum* Mart, *circinatum* Sw. and *lanceolatum* Desv.) the annuli are composed exceptionally of 2 series of cells. This fact attests certainly very clearly some mutual relations between the palaeozoic *Senftenbergia* and the recent family of the *Schizaeaceae*. But we must at the same time also bear in mind the morphology of the sterile fronds of *Senftenbergia*. The pecopteroid character of the leaves and the presence of *Schizopteris* *aphlebiae* point to a certain measure to the palaeozoic *Pecopteris-Psaronius* group i. e. *Marattiales*.

With recent *Gleicheniaceae* are generally in all modern textbooks united the Carboniferous *Oligocarpiaceae*. The reason lays evidently in the arrangement of the sori of *Oligocarpia* *Gutbieri*, where the sporangia are grouped round a central receptaculum in the number of 4—5. If we are looking to such starlike sori, we see easily on the free contour of the single sporangia a series of thick walled cells, evidently the annuli.

Practically it is totally impossible to look to those sporangia of *O. Gutbieri* from another side, and thus we are fully exposed to the possibility of an optical delusion. Thus Štúr (l. c. 1883 pp. 686—692, and 1885, pp. 120—140) and after him also Solms-Laubach (1887) and Schenk (1888) were of the opinion that in the *Oligocarpiae* no annuli are developed. Zeiller's (1883), Depape and Carpantier's (1915 pp. 332—335) as well as Kidston's (1923—1925, part 4., pp. 284—291) researches have shown, that the sporangia are annulate, but that the respective annuli are not uniseriate but pluriseriate. In *Oligocarpia Brongniarti*, where the sori are richer in sporangia and where some sporangia are placed also in the centre of the sori and thus show their annuli also from another side, Depape and Carpantier have stated and attested also by photographs, that the annuli are bi or even triseriate. At a thorough study of the sporangia of our *Oligocarpiae*, which have been described by Andrée from Stradonice as *O. Gutbieri* (but which by no means are identical with that form), I was able to convince myself, that even here the annuli are not uniseriate but rather at least biseriate, as in many cases it is possible to see parts of cells of the generally unvisible back side of the sporangia, which are of the same features as the other cells of the visible part of the annulus. The cells neighbouring with the annulus are evidently larger than other cells of the sporangium walls, which than pass to the middle of the ventral side slightly into the stomial band orientated meridionally and composed of narrow and elongated cells. — Some doubts were arisen also as to the character of the sori. Kidston for instance (1923) supposes them to be of synangial construction. The very closely crowded sporangia, which are evidently deformed by the mutual pressure, seem to support Kidston's view. But I think we have till present no means to prove, which of both standpoints is really just. — From all above it is clear, that except the orientation of the annulus as well as the construction of the sori, there is no other character attesting closer relationship of the Carboniferous *Oligocarpiae* to the recent family of the *Gleicheniaceae*.

Very close to the Carboniferous *Oligocarpiae* stands

perhaps the Eastern Asiatic Permian *Chansitheca*. According to the statements of Halle (l. c. 1927) the sori are here composed of some 20 sporangia, which are free and are provided with a similarly situated annulus as in the *Oligocarpiae*. Until present we are but not yet informed about the structure of the annulus.

We are coming to a series of types, which generally are supposed to be members of the family of the *Osmundaceae*. After a thorough consideration of all such discoveries, I think that only one of all those types bears the strictly osmundaceous character. These are sporangia described by Zeiller under no special name in 1890 (l. c., pp. 15—16) from the slides of cherts collected at Autun in France. They are just as in the recent *Osmundaceae* provided by a short and broad pedicell as well as by a well visible lateral group of annular cells. The only one handicap is here the size of the spores: they are much smaller than in the recent *Osmundaceae*, but agree more with the size of the spores of the recent *Marattiaceae* (see in Zeiller l. c.).

In his great textbook (l. c. 1927 pp. 615) Hirmer cites as Palaeozoic *Osmundaceae* two forms known in slides: *Sturiella* and *Todeopsis*. The first one is known from the cherts of Saint Etienne, the second one from the Culmien of Esnost. *Todeopsis* is in fact very insufficiently known; in the figured slide sections, the annular cells are very well marked, but it is impossible to gain any clearer idea as to the shape of the respective annuli. — On the other hand we know very clearly the conditions of the second genus, the *Sturiella*. But no feature points there to the *Osmundaceae*. Fronds were here most probably of the *Pecopteris* shape. The sporangia are grouped by 5 in round starlike sori, which are disposed on the lower side of the lamina along the central vein of the leaflets in two parallel rows, as in the pecopteroid genus *Astrotheca*. The sori have an evidently synagial character as the single sporangia are united at their base together and form thus a short and broad common pedicellate receptaculum. At the top of the single sporangia lays somewhat excentrically the annular group of thick walled cells, which runs in the meridional direction along the external side of the sporangia

nearly until to their base. Beside that these annuli are provided by some multicellular hairs. This construction of the sporangia and sori of the genus *Sturiella* reminds more the eusporangiate types (i. e. the Marattiaceae) than any type of the family of the *Osmundaceae* (see for inst. the annular group in *Angiopteris*, which is also more or less apical and excentrical).

In a more remote relationship of the *Osmundaceae* are generally placed two Paleozoic types, the *Discopteris* and the *Kidstonia*. As to the morphology of the sterile fronds, both types have much in common and this problem has been still discussed by many authors (see f. inst. G o t h a n). Their sporangia point however to a very remote mutual relationship. — In the *Discopterids*, as shown in the very detailed study by Zeiller (1906 and 1899), the sporangia are organised extremely primitively. In the mentioned works Zeiller described and discussed the sporangial texture of the following species: *D. Ralli* Zeil., *cristata* Bgt. Zeil. (i. e. *Burghensis* Sterzel), *Karvinensis* Stur., *Schumanni* Stur. In all these cases he stated in the whole the same facts: Sporangia very small, densely grouped in more or less hemispherical groups. A typical annulus is not present. Sporangia are assymetrical and sessile; on one side is placed meridionally a band of thinn-walled, narrow and elongated cells, the stomium. The width of this stomium is different in various species, 3 or more cells. But this stomial group is not sharply differentiated, it passes slightly on both sides into larger and shorter cells of the sporangial walls. In *D. Karvinensis*, *Shumanni* and *cristata* this transition is relatively sudden, in *D. Ralli* only slow. In the other part of the sporangial walls the cells become in the backward and the topward directions by and by larger and their walls at the same time thicker. Thus if we are speaking here about an annulus, we must speak about a very incomplete and primitive annulus, still less developed than for inst. in the recent genus of *Angiopteris*.

In the genus of *Kidstonia* the sporangia are solitary (see Zeiller 1899) and far larger than in *Discopteris*, broadly pearlike. The annulus is here very well differentiated as a large lateral group including nearly $\frac{3}{4}$ of the upper sporan-

gial hemisphere. The rest of the upper hemisphere is represented by the narrow and elongated stomial cells, which then are spreading in the meridional direction downwards on the lower sporangial hemisphere. Such sporangia remind without any doubt more the sporangia of the *Osmundaceae*, than it was the case in the *Discopterids*. But already Zeiller has pointed out, that such texture may be also derived from the type of *Senftenbergia*, if we suppose an enlargement of the stomial band. Naturally there is no reason why not to derive it from the *Discopteroid* sporangia, from which in fact all sporangium types provided by a more or less lateral or apical annular groups may be theoretically derived.

The recent family of the *Hymenophyllaceae* is generally presumed to be allied with the Carboniferous *Hymenophyllites*. The orientation of the annuli on the sporangia would be perhaps in agreement with this opinion. But untill present we do not know the number of cell series, of which the sporangial annuli are composed. It is not excluded, that in future we shall be surprised in this respect just as in the case of the *Oligocarpiæ*. — Another sporangium type, which may be perhaps mentioned in connection with the family of the *Hymenophyllaceae*, is Renault's *Sarcopteris* described from the Carboniferous cherts of Autun in France (*S. Bertrandii*). Renault describes the structure of its annulus as follows: lying across in the half way between the top and the base, incomplete and pluriseriate (l. c. 1838 pp. 129). The fronds are of the *Pecopteris* form.

There remain finally some sporangia types, in which the elongated annular structures are traversing or at least approaching very near to the top. In no case belonging to this category there have been stated uniseriate annuli. The annuli are here generally very distinctly differentiated against the other sporangial structures and therefore always well visible, but they never are complete. I have just in the foregoing described two types of this category from our Bohemian coal fields (*Štúria* and *Dendraena*) and at the same time I mentioned their close relations and similarities to the *Boweria* and *Pteridotheca*. *Boweria* Kidst., stated in two species from the English Carboniferous (*B. schatzlarensis* Stur. and *B. minor*

Kidst.), has sporangia of a pearlike shape, sessil, forming irregular groups or being solitary; their annulus is incomplete, traversing the top of the sporangium, composed of two series of cells and according to some of Kidston's figures it seems that in its middle part it was composed some times of three series of cells. Scott's *Pteridotheca*, described in slides of coal balls of the English Lower coal measures, has sporangia extremely similar to the just foregoing type. The annuli are here also longitudinal or perhaps a little oblique, composed of two series of cells. Scott (l. c. 1909 and 1920) described two forms: *P. biseriata* and *Williamsoni*. Both, *Boweria* as well as *Pteridotheca* have fronds of the *Sphenopteris* form.

A very characteristical feature almost of all Palaeozoic true fern sporangia is the want of any pedicells; they are all sessile. The only one known exception are Zeiller's untermmed sporangia from 1890. Another extremely important feature is the pluriseriate character of the annuli. Untill present we do not know any case from the Palaeozoic, where the annuli would be constructed only of one series of cells.

As far as we know to day the sporangial structures of the Palaeozoic true ferns, we may classify the various considered types into the following groups:

1. Sporangia free, sessile, annulus lateral and passing into the surrounding tissue of the sporangial wall: *Discopteris* (— an extremely archaic type with sori similar to those of the family of *Cyatheaceae*).
2. Sporangia free, shortly stalked, annulus evidently lateral: *untermmed Zeiller's sporangia of 1890 from Autun* (— the shape of these sporangia agrees with the sporangia of the family of the *Osmundaceae*, the spores with those of the *Marattiaceae*).
3. Synangia, annuli lateral: *Sturiella*. (The only possible relations seem to exist with the *Marattiaceae*.)
4. Sporangia free, annuli apical:
 - a) Stomium narrow: *Senftenbergia*. (— Many features attest a relatively close relationship with the family of the *Schizaeaceae*, though some less important features point also to the *Marattiaceae*.)

- b) Stomium very large, including perhaps more than $\frac{1}{3}$ of the whole upper hemisphere of the sporangia. Annulus therefore seemingly lateral: *Kidstonia*. (This type seems to be without any closer relations with the recent families. Theoretically it may be supposed related with the family of the *Osmundaceae* just as well as with the fam. of the *Schizaeaceae*.)
5. Sporangia sessile, free, composing more or less oval sori. Annuli horizontal, of until present unknown texture: *Chansitheca* (— the relationship cannot be discussed at present on account of the unknown annular structure).
6. Sporangia sessile, very closely crowded together, perhaps imperfect synangia. Annulus horizontal and pluriserial: *Oligocarpia*. (The relations of this type with the recent families are very complicated as some *Gleichenia* features are united here with characters of the *Marattiaceae* as well as with some extremely primitive features — f. inst. *aphlebiae*).
7. Sporangia free, sessile; annuli having the same orientation as in the family of the *Hymenophyllaceae*:
Hymenophyllites (— the structure of the annulus unknown till present).
Sarcopteris (— annulus pluriserial).
 (Some features point certainly to the relations with the family of the *Hymenophyllaceae*, but they are combined with the very archaic pluriserial character of the annuli at least in the *Sarcopteris*.)
8. Sporangia free, sessile, composing no regular sori, annuli more or less longitudinal, incomplete and pluriserial:
Pteridotheca Scott, *Boweria* Kidst., *Štúria* Njč., *Dendraena* Njč. (— These types seem to stand the nearest to the recent leptosporangiate ferns, excl. the *Gleicheniaceae* and the *Schizaeaceae* as well as the *Hymenophyllaceae*.)
-

Conclusions.

In all true Palaeozoic true fern sporangia (i. e. excl. the *Coenopteridae*) known until present we always may state features pointing in the first range to the family of the *Osmundaceae* or more often of the *Marattiaceae*. In some rare cases to the just named features some characters known in the recent leptosporangiate ferns are combined. The most of all are marked characters of the family of the *Schizaeaceae*, less those of the *Gleicheniaceae* and of the *Hymenophyllaceae*. The characters of the groups of the *Cyatheaceae* and of the *Polypodiaceae* are in the Palaeozoic forms utterly undistinct. Though the number of the known Palaeozoic forms is too small to establish any classification of such forms, which could be united with the classification of the recent forms, nevertheless we are able already at the meantime to point out a certain concord between the opinions of the systematical botanists as to the relative age of the recent fern families and between the facts derived from the fossil Palaeozoic fern material. The groups of the eusporangiate *Marattiaceae* and of the protosporangiate *Osmundaceae* were always supposed to be two very archaic fern families; in agreement with this opinion is the fact, that their characters were found the most frequently and the most distinctly developed among the Palaeozoic ferns. It may be stated that the most probable character nearly of all Palaeozoic annulate fernsporangia is eusporangiate or at least protosporangiate. The leptosporangiate character in the palaeozoic annulate sporangia is, I think, very problematic; it might be perhaps presumed in the group at 8 (— *Pteridotheca*, *Boweria*, *Štúria*, *Dendraena*).

Among the leptosporangiate ferns, generally the family of the *Schizaeaceae* is supposed to be the most archaic. Just in agreement with this opinion are the relatively very distinctly marked *Schizaeaceae* characters of the sporangia of the Carboniferous genus *Senftenbergia*. The families of *Gleicheniaceae*, *Hymenophyllaceae* and of some small recent fern groups, which then are coming in the systematical discussions of the botanists, have only a very slight reflection in the Palaeozoic era i. e. in the Carboniferous *Chansithea*,

Oligocarpia, Hymenophyllites and Sarcopteris. If we wish therefore to see among the palaeozoic ferns some closer relations to the recent fern families, we may seek them besides in the Marattiaceae and the Osmundaceae only in the family of the Schizaeaceae. All other relations (i. e. Gleicheniaceae, Hymenophyllaceae etc.) are already as undistinct as unable to be used at the systematical classification of the respective types. Besides, as shown in the foregoing, it is often impossible to range many of the Palaeozoic eusporangiate or protopleptosporangiate forms into the families of the Marattiaceae or that of the Osmundaceae, as defined according to the recent material, because very often in the fossil types characters of the Marattiaceae are combined just with those of the Osmundaceae (for inst. lateral annuli and the synangial character of the sori etc.).

Summary.

On two new Sphenopteris fructifications closely allied to Kidston's Boweria (resp. Scott's Pteridotheca) with some remarks to the already known Palaeozoic fern sporangia.

By F. Němejc.

(Presented April 11, 1934.)

Revising the specimens of the group of the *Sphenopteris* in the collections of the National Museum, Praha, I stated two new types of Palaeozoic fern sporangia bearing very distinctly developed annuli:

1. The first one comes from a fertile specimen of Štúr's *Sphenopteris* (*Hapalopteris*) *amoena*, collected at Břasy (near Radnice). The sporangia are sessile, oval, 0.4—0.45 mm long, and composing irregular groups on the last pinnules. Their walls are built up of narrow and longitudinally elongated cells; their annulus is very distinct, situated across the top of the sporangium, incomplete, including only about $\frac{2}{3}$ of the sporangium circumference, biseriate. — Taking also in mind some special characters of the sterile parts of the fronds, I

propose for this special fern type a new generic name, that of *Štúria*.

2. The other newly stated sporangium type, has been found on some *Sphenopteris* fragments, collected by O. Feistmantel in the gornitic rocks at Strádonice near Beroun. In some of them, I have demonstrated that they belong to sterile leaves, which have not yet been described, but which generally have been identified erroneously in all our collections partly as *Sphenopteris flexuosissima*, partly as *Sph. elegans*. — The sporangia are composing irregular groups on the last laciniae of the slender pinnatifid leaves, they are sessile, oval, about 0.3—0.4 mm large, their annulus is incomplete including cca $\frac{1}{2}$ of the whole sporangium circumference, biseriate and in its middle part triseriate, running very closely to the top of the sporangium. — Sterile leaves as far as known, are tri, or incompletely quadripinnate, their rhachises are slightly flexuose, the primary rhachises cca 2 mm broad, the rhachises of the last degree narrowly winged. Pennultimate pinnae are oblongo lanceolate, the ultimate ones 2—3 cm long and 8—12 cm broad and bear pinnatifid leaflets, which are divided into shortly linear uninerved laciniae. *Aphlebiae* not yet stated. — I propose for this type the name of *Dendraena pinnatilonata* (derived from its similarity to dendrits).

Discussing the various known annulate true fern (i. e. excluding the *Zygo-* and *Botryopterideae*) sporangia, I went to the opinion, that both our new types belong in the closest relationship with Kidston's *Boweria*, having thus no closer relations to any of the recent fern family.

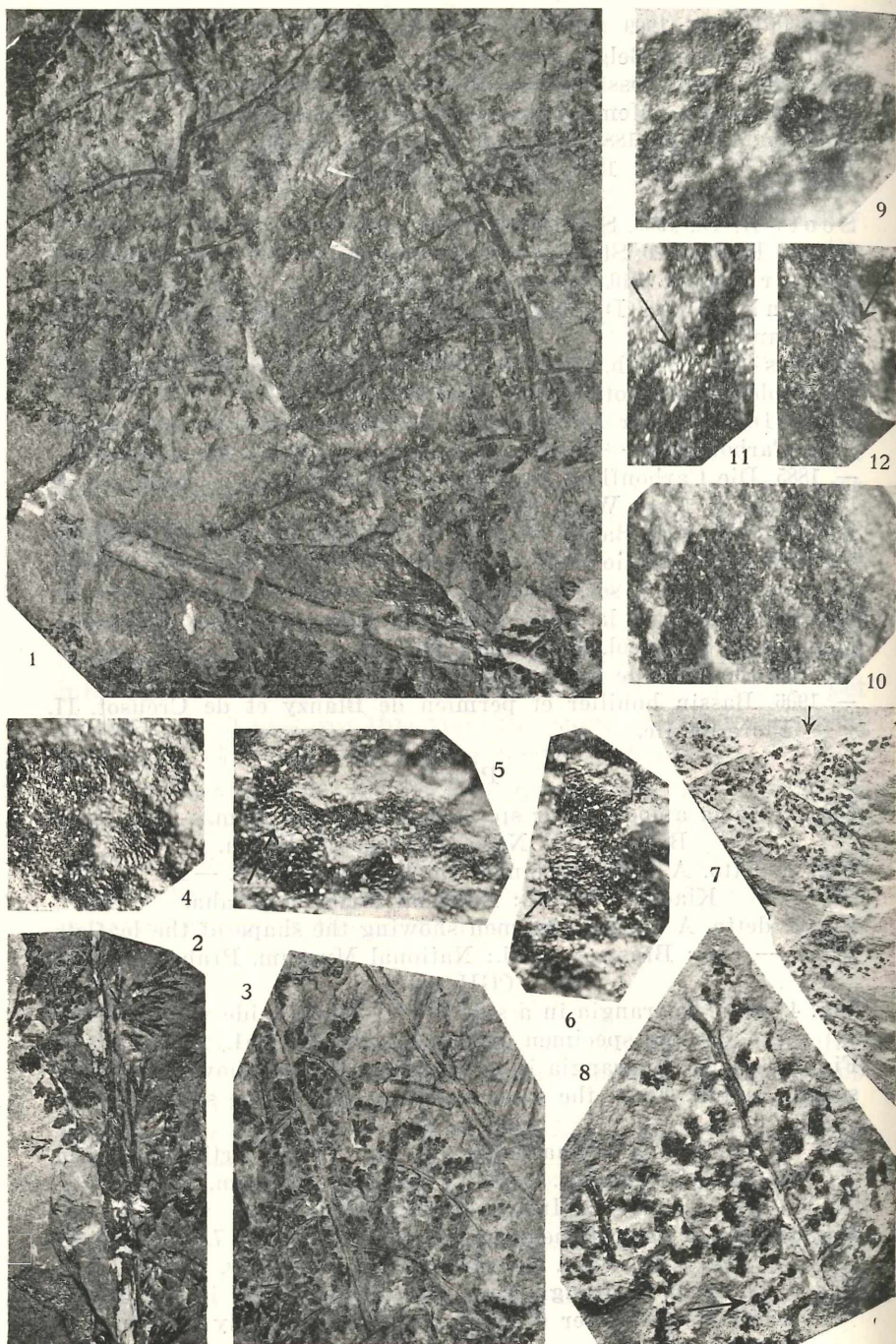
Bibliography:

- Andrée, R. 1864. Die Versteinerungen der Steinkohlenformation von Stradonitz in Böhmen. Neues Jahrbuch f. Min. etc. pp. 173. T. IV. fig. 5, 5a.
- Carpentier A., Depape G., 1915. Révue générale de botanique. Vol. XXVII. pp. 332, 335. Pl IX. Fig. 8, 9.
- Corda A., 1845. Beiträge zur fossilen Flora der Vorwelt.
- Göthan W., 1921. Potonié's Lehrbuch der Paleobotanik.
- Halle T. G., 1927. Palaeozoic plants from Central Chan-si. *Palaeontologia Sinica*.
- Hirmer M., 1927. Handbuch der Paleobotanik.

- Kidston R., 1909 (1911). Les végétaux houillers recueillis dans le Hainaut Belge. (Bruxelles.)
- 1923-1925. Fossil plants of the Carboniferous rocks of Great Britain. — Mem. of the geol. surv. of Great Brit.
- Renault H. B., 1883. Cours de botanique fossile.
- Renault H. B., 1896. Bassin houiller et permien d'Autun et d'Épinac.
- Scott H. D., 1909. Studies in fossil plants.
- Scott H. D., 1920. Studies in fossil plants. II. Vol. — 2nd Edition.
- Seward A. C., 1910. Fossil plants. Vol. II.
- Schenk A., 1888. Die fossilen Pflanzenreste. (Handbuch der Botanik.)
- Solms-Laubach, Graf zu., 1887. Einleitung in die Palaeophytologie vom botanischen Standpunkte aus.
- Štúr D., 1883. Zur Morphologie und Systematik der Culm und Carbonfarne. — Sitzber. d. k. Akad. der Wiss. Wien. Bd. XI.
- , 1885. Die Carbonflora der Schatzlärer Schichten. — Abh. d. k. k. geol. R. Anst. Wien. Bd. XI.
- Zeiller R., 1890. Bassin houiller et permien d'Autun et d'Épinac.
- , 1883. Fructifications des fougères du terrain houiller. — Ann. des sc. nat. 6. sér. Vol. 16.
- , 1899. Étude sur la flore fossile du bassin houiller d'Héraclée. Mém. de la Soc. géol. France. No. 21.
- , 1900. Éléments de palébotanique.
- , 1906. Bassin houiller et permien de Blanzky et de Creusot. II. Flore fossile.

Plate.

- Fig. 1. *Štúria amoena* Stur sp. — A fertile specimen, — 1/1. — Loc.: Břasy. Coll.: National Museum, Praha.
- Fig. 2. ditto. A sterile specimen showing aplebiae. — 1/1. — Loc.: Kladno. — Coll.: National Museum, Praha.
- Fig. 3. ditto. A sterile specimen showing the shape of the leaflets. — 1/1. — Loc.: Břasy. — Coll.: National Museum, Praha (Inv. No. ČGH. 1867.)
- Fig. 4. ditto. Sporangia in a side view (-ventral side visible); from the specimen of Fig. 1, enlarged 30/1.
- Fig. 5, 6. ditto. Sporangia in a view from above, showing their biseriate annuli. From the same specimen and in the same enlargement as Fig. 4.
- Fig. 7. *Dendraena pinnatilobata* n. sp. — A fertile specimen, 1/1. Loc.: Strádonice. — Coll.: National Museum, Praha. (Inv. no. ČGH. 911.)
- Fig. 8. ditto. A part of the specimen figured in Fig. 7. enlarged 3/1.
- Fig. 9, 10. ditto. Sporangia in a side view. 30/1.
- Fig. 8, 12. ditto. Sporangia in a view from above; in fig. 11. the triseriate character of the annulus is distinctly visible.



Ueber besondere Klassen von schlicht abbildenden Potenzreihen.

Erste Mitteilung.

Von M. KÖSSLER in Prag.

(Vorgelegt am 11. April 1934).

Es sei $f(z) = z + \sum_2^{\infty} a_n z^n$ eine den Kreis $|z| < 1$ schlicht abbildende Potenzreihe. Da das Koeffizientenproblem dieser Klasse bisher ungelöst ist, so ist es nicht ohne Interesse besondere Unterklassen zu bilden und zu untersuchen. Näher sind heutzutage nur die Sternfunktionen, die konvexen Funktionen und die Spiralfunktionen bekannt. In dieser Mitteilung wird eine neue Unterklasse definiert, deren Bildungsgesetz sehr einfach ist (siehe Sätze I. und II). Ich benutze diese Gelegenheit um einen allgemeinen Minimumsatz III., welcher die Bogenlänge bei der Abbildung betrifft, zu beweisen. Dieser Satz bezieht sich auf eine Klasse von Funktionen, welche die Klasse der schlichten Funktionen als Unterklasse enthält.

1. Es sei $\varrho(z)$ eine im $|z| < 1$ reguläre Funktion der Klasse $[\varrho(z)] \leq 1$ und φ eine reelle Zahl $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Satz I. Die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t) dt \\ \varphi_1(z) &= \frac{1}{z} + \int_{e^{i\varphi}}^z \varrho(t) dt - \frac{1}{e^{i\varphi}} \\ \varphi_2(z) &= \frac{1}{z} \left\{ 1 + z \int_0^1 \varrho(z t^2) dt \right\}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

sind im $|z| < 1$ schlicht und nehmen da nirgends den Wert Null an.

Beweis. Es ist für $0 < |z_1| < 1$, $0 < |z_2| \leq 1$, $z_2 \neq z_1$

$$\varphi(z_1) - \varphi(z_2) = \varphi_1(z_1) - \varphi_1(z_2) = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} + \int_{z_2}^{z_1} \varrho(t) dt, \quad (2)$$

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) - \varphi(e^{i\varphi}),$$

$$\left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 z_1|},$$

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} \varrho(t) dt \right| \leq |z_2 - z_1|. \quad \text{Max } |\varrho(z)| \leq |z_2 - z_1|$$

Also nach (2)

$$\frac{|z_2 - z_1|}{|z_1 z_2|} + |z_2 - z_1| \geq |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \geq \frac{|z_2 - z_1|}{|z_1 z_2|} - |z_2 - z_1| \quad (3)$$

$$\frac{1 + |z_1 z_2|}{|z_1 z_2|} \geq \left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \frac{1 - |z_1 z_2|}{|z_1 z_2|} > 0 \quad (4)$$

Dadurch ist die Schlichtheit von $\varphi(z)$ und $\varphi_1(z)$ bewiesen und durch den Grenzübergang $z_2 \rightarrow z_1$ bekommen wir aus (4) den Verzerrungssatz in der Form

$$\frac{1 + |z|^2}{|z|^2} \geq |\varphi'(z)| = |\varphi_1'(z)| \geq \frac{1 - |z|^2}{|z|^2}, \quad |z| \neq 0, \quad (5)$$

Aus (2) und (3) folgt für $z_2 = e^{i\varphi}$, $z_1 = z$

$$|\varphi_1(z)| \geq \frac{|e^{i\varphi} - z|}{|z|} - |e^{i\varphi} - z| \geq \frac{(1 - |z|)^2}{|z|}$$

$$|\varphi_1(z)| \leq \frac{|e^{i\varphi} - z|}{|z|} + |e^{i\varphi} - z| \leq \frac{(1 + |z|)^2}{|z|} \quad (6)$$

$\varphi_1(z)$ nimmt also nirgends im $|z| < 1$ den Wert Null an. Weiter ist nach (1)

$$\frac{1}{|z|} - |z| \leq |\varphi(z)| = \left| \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t) dt \right| \leq \frac{1}{|z|} + |z| \quad (7)$$

und es ist also auch $\varphi(z)$ im $|z| < 1$ von Null verschieden.

Aus der ungeraden, schlichten und von Null verschiedenen Funktion

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{z} + \int_0^z \varrho(t^2) dt = \frac{1}{z} + z \int_0^1 \varrho(t^2 z^2) dt$$

bekommen wir wie bekannt durch die Transformation

$$\varphi_2(z) = \left\{ \varphi^*(\sqrt{z}) \right\}^2 = \frac{1}{z} \left\{ 1 + z \int_0^1 \varrho(z t^2) dt \right\}^2 \quad (8)$$

wieder eine schlichte und von Null verschiedene Funktion. Dadurch ist der Satz I. in allen Teilen bewiesen. Die Ungleichungen (3), (4), (5), (6) und (7) sind genau, denn die besonderen Funktionen $\varphi(z) = \frac{1}{z} - z$, $\varphi_1(z) = \frac{1}{z} - 2 + z$ nehmen die Schrankenwerte an.

2. Es sei

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{z}{1 + z \int_0^z \varrho(t) dt} = z + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n \\ f_1(z) &= \frac{1}{\varphi_1(z)} = \frac{z}{1 - z e^{-i\varphi} + z \int_{e^{i\varphi}}^z \varrho(t) dt} = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \\ f_2(z) &= \frac{1}{\varphi_2(z)} = \frac{z}{\left(1 + z \int_0^1 \varrho(z t^2) dt\right)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \end{aligned} \quad (9)$$

Satz II. Die Funktionen $f(z), f_1(z), f_2(z)$ sind im $|z| < 1$ regulär und schlicht und die Koeffizienten von $f(z)$ und $f_2(z)$ erfüllen die Ungleichungen $|a_n| \leq 1, |c_n| \leq n$, welche genau sind.

Beweis. Der erste Teil von II. ist eine triviale Folge von I. Es erübrigt also nur die Ungleichungen zu beweisen. Es ist

$$\frac{f(z)}{z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 - z \int_0^z \varrho(t) dt}{1 + z \int_0^z \varrho(t) dt} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \right\}$$

Da $|z \int_0^z \varrho(t) dt| \leq |z|$, so muss nach einem Satze von Carathéodory $|A_n| \leq 2$, was mit $|a_n| \leq 1$ gleichbedeutend ist. Die besondere Funktion $f(z) = \frac{z}{1 - z^2}$ zeigt, dass die Ungleichungen genau sind. Aehnlich beweist man

$$\sqrt{\frac{f_2(z^2)}{z^2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 - z^2 \int_0^1 \varrho(z^2 t^2) dt}{1 + z^2 \int_0^1 \varrho(z^2 t^2) dt} = \frac{1}{2} \{1 + B_2 z^2 + B_4 z^4 + \dots\},$$

$$|B_n| \leq 2.$$

Daraus

$$\frac{f_2(z)}{z} = (1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_n z^n + \dots)^2, \text{ wo } |d_n| \leq 1 \text{ ist}$$

Es ist also

$$|c_n| = |d_{n-1} + d_1 d_{n-2} + \dots + d_{n-1} 1| \leq n$$

Die besondere Funktion $f_2(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ zeigt wieder, dass die Ungleichungen genau sind.

Das Koeffizientenproblem der Funktionenklassen (1) und (9) kann als gelöst betrachtet werden, denn die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten der beschränkten Funktion $|\varrho(z)| \leq 1$ sind bekannt. Es ist deshalb bemerkenswert, dass der Beweis der Bieberbachschen Vermutung $|b_n| \leq n$ für die Funktionen des Typus $f_1(z)$ mir nicht gelungen ist.

3. Wir wollen noch näher die Abbildung des Kreises $|z| = r \leq 1$ durch $w = \varphi(z)$ untersuchen. Zu diesen Zwecke beweisen wir zuerst einen allgemeinen

Minimumsatz III. Es sei $F(z) = \sum_{k=-2n-1}^{\infty} a_k z^k$ im $0 < |z| < r_1$

regulär, $a_{-2n-1} \neq 0$, $n \geq 0$ und $F'(z) \neq 0$. Der Kreis $|z| = r < r_1$ wird durch $F(z)$ auf eine geschlossene Kurve abgebildet. Die Bogenlänge dieser Kurve sei $L(r)$. Dann ist $L(r) \geq \frac{\pi(4n+2)|a_{-2n-1}|}{r^{2n+1}}$

und die Gleichheit tritt nur bei der Funktion $F(z) = \frac{a_{-2n-1}}{z^{2n+1}} + a_0$ ein.

Der Beweis ist fast selbstverständlich. Es ist

$$L(r) = \int_0^{2\pi} r |F'(r e^{i\varphi})| d\varphi$$

Da $F'(z) = -\frac{(2n+1)a_{-2n-1}}{z^{2n+2}} + \dots$ nicht Null wird, so ist

$$\begin{aligned}\sqrt{F'(z)} &= \frac{1}{z^{n+1}} \sqrt{-(2n+1)a_{-2n-1} + \gamma_1 z + \dots} = \frac{g(z)}{z^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{z^{n+1}} \left\{ \sqrt{-(2n+1)a_{-2n-1} + \beta_1 z + \dots} \right\}\end{aligned}$$

wo $g(z)$ im Kreise $|z| < r_1$ regulär bleibt.

$$\begin{aligned}L(r) &= \int_0^{2\pi} r \frac{g(re^{i\varphi}) \cdot \overline{g(re^{i\varphi})}}{r^{2n+2}} \cdot d\varphi = \frac{2\pi}{r^{2n+1}} \left\{ (2n+1)|a_{-2n-1}| + \right. \\ &\quad \left. + |\beta_1|^2 r^2 + |\beta_2|^2 r^4 + \dots \right\}\end{aligned}$$

$L(r)$ erreicht sein Minimum nur in dem Falle $0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots$, das heist im Falle $F(z) = \frac{a_{-2n-1}}{z^{2n+1}} + a_0$.

Für die allgemeine den Einheitskreis schlicht abbildende Funktion $\Phi(z) = \frac{1}{z} + \sum_0^{\infty} d_n z^n$ ist also $L(r) \geq \frac{2\pi}{r}$. Die Fläche $D(r)$ des von $L(r)$ begrenzten Bereiches ist wie bekannt

$$D(r) = \pi \left\{ \frac{1}{r^2} - |d_1|^2 r^2 - 2|d_2|^2 r^4 - \dots \right\} \leq \frac{\pi}{r^2}$$

Bei der besonderen Funktion $\Phi_1(z) = \frac{1}{z}$ erreicht also das Bild des Kreises $|z| = r$ gleichzeitig den kleinsten Umfang und die grösste Fläche unter allen Funktionen des Typus $\Phi(z)$. Aus der Reihe für $L(r)$ entfließt, dass bei diesen Funktionen ein endlicher oder unendlicher Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 1} L(r)$ existiert.

Für die besonderen Funktionen der Klasse (1) sind wir sogar im Stande auch die obere Schranke für $L(r)$ anzugeben. Es ist nach (1)

$$L(r) = \int_0^{2\pi} r |\varphi'(re^{i\varphi})| d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{|1 - r^2 e^{2i\varphi} \varrho(re^{i\varphi})|}{r} d\varphi \leq \frac{2\pi(1+r^2)}{r}$$

Also $\lim_{r \rightarrow 1} L(r) \leq \mathfrak{B}$

wo \mathfrak{B} eine absolute Konstante bezeichnet, deren wahren Wert

zu bestimmen mir nicht gelungen ist. Wir können nur behaupten, dass

$$8 \leq \mathfrak{B} \leq 4\pi$$

denn der Wert 8 wird von der Funktion $\varphi(z) = \frac{1}{z} + z$ erreicht.

Résumé.

Sur les familles particulières de fonctions univalentes.

Par M. Kössler.

(Présenté le 11. avril 1934.)

1. Soit $\varrho(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, tel que $|\varrho(z)| \leq 1$. Les fonctions

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} + \int_0^z \varrho(t) dt, \quad \varphi_1(z) = \frac{1}{z} - e^{i\psi} + \int_{e^{i\psi}}^z \varrho(t) dt,$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{z} \left\{ 1 + z \int_0^1 \varrho(zt^2) dt \right\}^2$$

sont univalentes et différentes de zéro dans $|z| < 1$. Donc:

les fonctions $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$, $f_1(z) = \frac{1}{\varphi_1(z)}$, $f_2(z) = \frac{1}{\varphi_2(z)}$ sont univalentes et holomorphes dans $|z| < 1$. Posons $f(z) = z + \sum_3^{\infty} a_n z^n$,

$f_2(z) = z + \sum_2^{\infty} c_n z^n$. On a toujours $|a_n| \leq 1$, $|c_n| \leq n$.

2. Soit n un nombre entier ≥ 0 et

$$w = F(z) = \sum_{k=-2n-1}^{\infty} a_k z^k$$

une fonction holomorphe dans l'anneau $0 < |z| < r_1$, tel que $F'(z) \neq 0$, $a_{-2n-1} \neq 0$. Si z décrit un cercle $|z| = r < r_1$ du plan (z), w décrit une courbe C ferme du plan (w). Soit

$$L(r) = \int_0^{\pi} r |F'(r e^{i\varphi})| d\varphi$$

la longueur de la courbe C . On a

$$L(r) \geq \frac{2\pi (2n+1) |a_{-2n-1}|}{r^{2n+1}}$$

L'égalité n'a lieu que si $F(z) = e^{i\psi} \cdot \left\{ \frac{a_{-2n-1}}{z^{2n+1}} + a_0 \right\}$ Si en par-

ticulier $\Phi(z) = \frac{1}{z} + \sum_0^{\infty} d_n z^n$ est un fonction univalente dans

$$0 < |z| < 1, L(r) \geq \frac{2\pi}{r}.$$

L'égalité n'a lieu que si $\Phi(z) = \frac{1}{z} + d_0$.

Borstgraswiesen in den Westkarpathen.

(*Les nardaiies des Carpathes d' Est*).

Von **JAROMÍR KLIKA**.

Mit 1 Karte, 1 Diagramm und 2 Photos.

(Vorgelegt am 9. Mai 1934).

Die Abhandlung betrifft den nordöstlichen Teil der *Groß-Fatra* (das *Lubochňa*-Tal umrahmend) und einen Teil der *Klein-Fatra* (die *Fatra-Kriváň*-Gruppe). Die wichtigsten klimatischen Verhältnisse dieser Gegenden habe ich bereits früher publiziert (1932). Die geologischen Verhältnisse des östlichen Teiles der *Groß-Fatra* erfaßt die geologische Karte des *Revúca*-Tales von Doz. Dr. A. Matějka, vom übrigen hat mich Univ.-Prof. Dr. O. Kodým informiert.

Den Hauptteil des Gebirges bildet der krystalinische Granitkern, von Kalksteinen, Dolomiten und Schiefeln des *Mezozoicum* umgeben. Steile Wände und Felsen sind aus Kalksteinen und Dolomiten der *Trias*-Zeit und ragen über die gewaltigen, länglichen, flachen Kämme und Hügel aus schieferartigem Kalkmergel und Mergel des *Neokoms*, auf welchen oben ausgedehnte *Nardus*-Weiden zu finden sind, hinaus. Der Boden hat hier durch Auslaugen seinen Kalkinhalt verloren und ist jetzt schwarzbraune bis braune Erde ohne Skelett.

In dieser Studie nehme ich nur auf Weiden-Gesellschaften der montanen und subalpinen Zone, soweit diese nicht in meine frühere Arbeit über den *Seslerion*-Verband (1932) fallen, Bedacht. Wie bereits erwähnt, sind es *Nardus*-Bestände oder Gesellschaften, wo dieses Gras überwiegt. In der montanen Zone ist es die *Assoziation* das *Anthoxantheto-Agrostidetum tenuis fatrense*, welche stellenweise im größeren oder geringeren Maße dem *Nardus* Platz macht, aber doch den Charakter der blumenreichen bun-

ten Wiesen erhält. Es muß vor Allem betont werden, daß Wiesen und Weiden fast im ganzen Gebirge kulturelle Formationen sind, welche durch Menscheneingriffe auf Kosten des Waldes entstanden. Sie sind eigentlich ein Degradationsstadium des Waldes, wie ich dies bereits (1932) bemerkt habe, allerdings vom Menschen beeinflußt und bewirtschaftet. Ohne diese Eingriffe würden sie durch Progression-Prozesse wieder in Wald übergehen.

Die Gesellschaft das *Anthoxantho-Agrostidetum fatrense* aus dem Verbands-*Arrhenatherion elatioris* nimmt große Flächen vom Tale bis in die montane Zone ein. Diese Wiesen werden nur einmal im Jahre gemäht, oft auch beweidet, wodurch der Übergang zu Nar deten unterstützt wird. Sie kommen auf Silikat- und Kalkuntergrund, soweit dieser vom tiefen, ausgelaugten, skelettlosen Boden bedeckt ist, vor. Sie weisen eine ähnliche Zusammensetzung auf, wie die Gesellschaft *Anthoxantho-Agrostidetum tenuis* aus der Nieder-Tatra (von Sillinger beschrieben 1933). Die trockenere Fazies der genannten Assoziation ist für die Landwirtschaft in der Groß-Fatra charakteristisch. Da die Wiesen hier nicht so stark beweidet und zertreten sind, wie die Weiden auf den Alpen, erhalten sich hier, wenn auch *Nardus* in die Bestände hineindringt, zahlreiche ursprüngliche Arten. Verschiedenen äußeren Bedingungen nach können einzelne Arten hervorrage n und so entstehen einige blütenreiche Fazies, »Wiesentypen«. Sehr oft überwiegt *Festuca rubra* auf großen Flächen. Interessant ist, daß auf einigen Orten auch Charakterarten des *Sempervireto-Carduetum glaucae caricetosum humilis* (*Achillea stricta*, *Centaurea mollis*, *Gentiana verna*, *Scabiosa lucida*, *Phyteuma orbiculare*) zur Geltung kommen. Es ist schwer zu beurteilen, ob dies Relikte der ehemaligen Gesellschaften oder nur zufällig erschienene Arten sind. Die Arten *Viola decorata* und *Crocus Heuffelianus*, welche Szafer (1927) für Charakterarten der behandelten Gesellschaft hält, kommen auch bei uns vor. Der Name der Assoziation hebt zwei Arten mit hoher Frequenz und Konstanz hervor.

Ich führe nur zwei Aufnahmen, als Beispiel der Zusammensetzung der Assoziation, die noch später behandelt sein wird, an:

1. Nordhaug des Tlustý Díel bei Lubochňa, 30—35°, 800 m; Neckom-Mergel; unter der stark entwickelten Rhizosphäre feine, bräunliche, tiefe Erde ohne Skelett; PM — 5·2; 16 m² — 100%;

2. Brdo bei Ružomberok; 1000 m, steiler Osthang; feiner, tiefer, lichtbrauner Boden; Neokom; 25 m² — 100%:

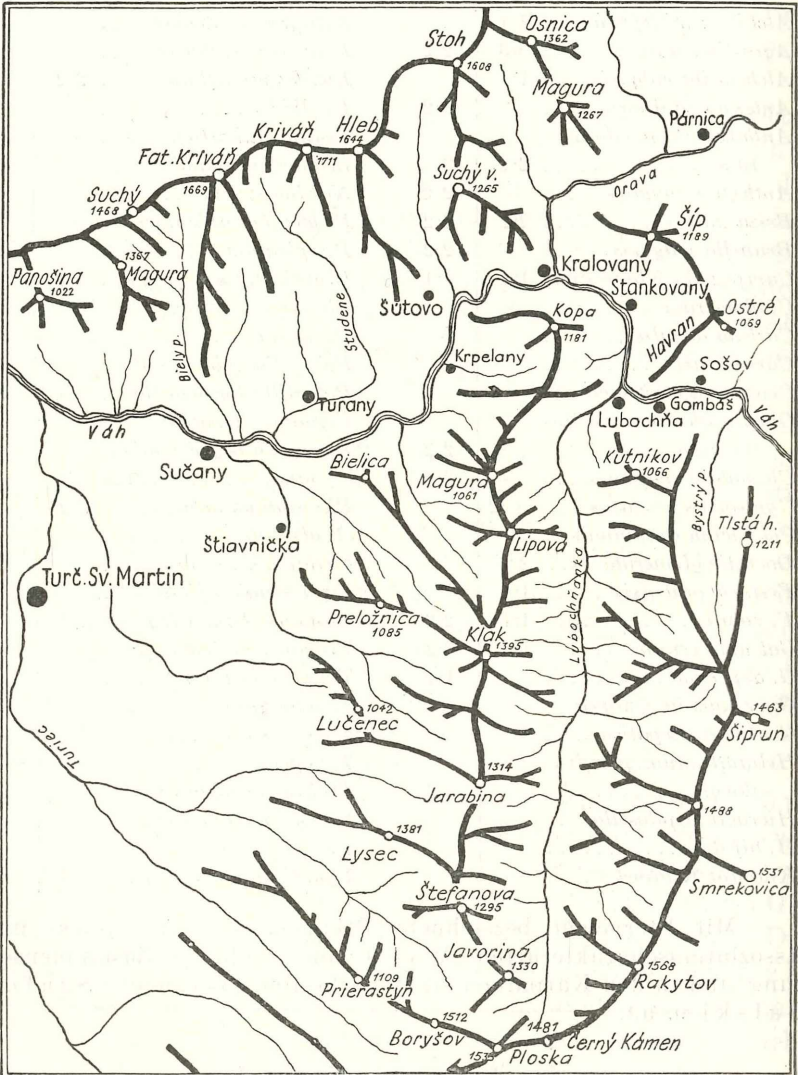
<i>Alchillea millefolium</i>	1·1		<i>Lathyrus pratensis</i>	+	
<i>Agrostis tenuis</i>	3·3	2·2	<i>Lotus corniculatus</i>	+	
<i>Alchemilla vulgaris</i>	1·1		<i>Luzula multiflora</i>	2·2	
<i>Antennaria dioica</i>		+·2	<i>L. albida</i>	+	
<i>Anthoxanthum odora-</i> <i>tum</i>	2·2	3·2	<i>Linum catharticum</i>	+	
* <i>Anthyllis vulgaris</i>	+	2·2	<i>Leontodon hispidus</i>		2·2
<i>Briza media</i>	2·2	2·2	<i>Nardus stricta</i>	+	+·2
<i>Brunella vulgaris</i>	+	2·2	<i>Phyteuma orbiculare</i> . . .		+
<i>Campanula Kladniana</i> .	1·1	+·1	<i>P. spicatum</i>		+
<i>C. glomerata</i>	+		<i>Pimpinella saxifraga</i>	1·1	
* <i>Carlina acaulis</i>	+	+	<i>Plantago lanceolata</i>	+	2·1
<i>Carum carvi</i>	+		<i>P. media</i>	+	2·1
<i>Centaurea austriaca</i>	+		<i>Polygalla subamarella</i>		+
<i>Chrysanthemum leucan-</i> <i>themum</i>	+	2·2	<i>Potentilla tormentilla</i>	+	2·1
<i>Ch. subcorymbosum</i>	+	2·2	<i>Primula carpatica</i> . . .		2·1
* <i>Cynosurus cristatus</i>	+·2	+	* <i>Ranunculus polyanthe-</i> <i>mus</i> . .	+	
<i>Colchicum autumnale</i>	+		<i>Rhinanthus minor</i> .	2·2	
* <i>Dactylis glomerata</i>	2·1		<i>R. alpinus</i>		+
* <i>Festuca pratensis</i>	1·1		<i>Stellaria graminea</i>	+	
<i>F. rubra</i>	1·1	2·2	* <i>Taraxacum officinale</i>		2·1
<i>Galium verum</i>	1·1	3·2	<i>Thymus chamaedrys</i> .	1·1	+
<i>G. asperum</i>		1·1	* <i>Tragopogon orientalis</i>		+
<i>Gymnadenia conopea</i>		+	<i>Trifolium alpestre</i>		+
* <i>Gentiana carpatica</i>	+	+	<i>T. montanum</i>		+
<i>Helianthemum grandiflorum</i>		2·2	* <i>T. pratense</i>		+
<i>Hieracium pilosella</i>	+		<i>T. repens</i>		+
<i>H. bifidum</i> . .	+		<i>Trollius europaeus</i>		+
<i>Knautia Kitaibelii</i>	+		<i>Veronica chamaedrys</i>		+
			<i>Viola canina</i>		+
			<i>Thuidium abietinum</i> .	3·3	4·3

Mit Sternchen bezeichnete Pflanzen sind Verbands- und Assoziationscharakterarten. Wiesen von ähnlicher Zusammensetzung sind in den Karpathen stark verbreitet. (Vergleiche Szafer, Ralski u. a.).

Der Nardion — Verband.

Zu den (mehr oder weniger treuen) Verbandscharakterarten zählt man: *Campanula Kladniana*, *Carex pilulifera*, *Lu-*

Luzula sudetica, *Nardus stricta*, *Potentilla aurea*, *Viola sudetica*. Als lokale Assoziations-Charakterarten in der Groß- und Klein-Fatra sind folgende zu nennen: *Achillea sudetica*, *Carex pallescens*, *C. leporina*, *Cerastium fontanum*, *Luzula mul-*



Die Karte des behandelten Teiles der Klein-Fatra (der Fatra - Kriváň - Gruppe) und des nordöstlichen Teiles der Groß-Fatra (die das Lubochňa-Tal umrahmenden Kämme).

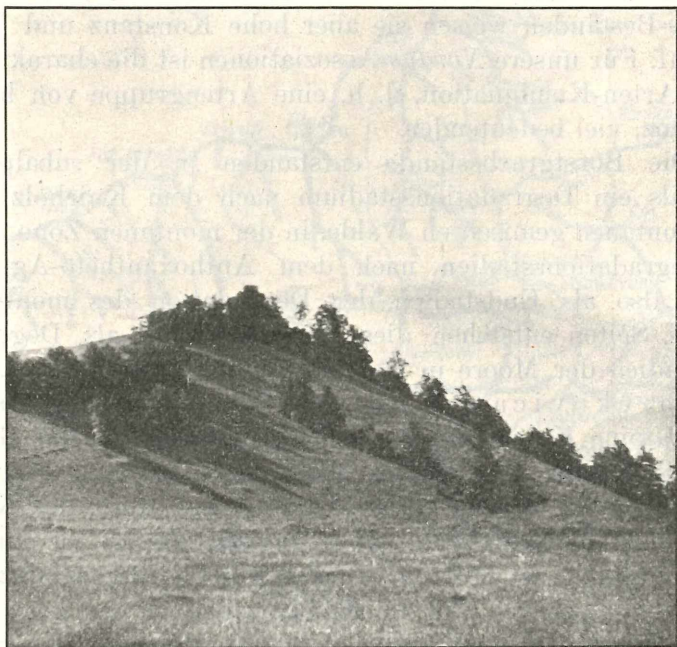
tiflora, *Meum mutellina*, *Phleum alpinum*, *Veronica officinalis*, *Viola canina*.

Die angeführten Arten sind nicht ausschließlich an das Nardetum gebunden, sie kommen auch in den verwandten oder durch Sukzession verbundene Assoziationen vor. In den *Nardus*-Beständen weisen sie aber hohe Konstanz und Vitalität auf. Für unsere *Nardus*-Assoziationen ist die charakteristische Arten-Kombination, d. h. eine Artengruppe von hoher Konstanz, viel bedeutender.

Die Borstgrasbestände entstanden in der subalpinen Zone als ein Degradationsstadium nach dem Knieholz und dem montanen gemischten Walde, in der montanen Zone dann als Degradationsstadien nach dem Anthoxantheto-Agrostidetum, also als Endstadien der Degradation des montanen Waldes. Selten entstehen diese Gesellschaften als Degradationsstadien der Moore in Gebirgs-Fichtenwäldern (z. B. auf der *S m r e k o v i c a* und *P o l a n a*). In der Klein-Fatra ist die subalpine Knieholz-Zone normal entwickelt, in der Groß-Fatra sind außer der oberen Stufe des subalpinen Fichten- und gemischten Waldes (1250—1350 m) nur Reste des Knieholzgürtels (hauptsächlich seines unteren Teiles) zu finden. Die Waldgrenze ist in der Groß-Fatra viel niedriger (als z. B. in der Nieder-Tatra) und die Knieholzzone ist fast ganz vernichtet. Diese Umstände wurden in der Mehrheit der Fälle künstlich verursacht; die ausgedehnten Alpen sind durch Menscheneingriffe entstanden.

Infolge der genannten Höhenunterschiede ist die A s s o z i a t i o n von *Nardus stricta* — *Phleum alpinum* (*Nardetum subalpinum fatrense*) in der höheren und die Subassoziation mit häufiger *Agrostis* — das *Nardetum (montanum) agrostidetosum* in der montanen Zone zu unterscheiden. In dieser letzteren Gesellschaft findet man viele Arten des Anthoxantheto-Agrostidetum fatrense differenzial, die subalpinen Arten fehlen ihr. Zwischen der subalpinen Assoziation und der Subassoziation der montanen Zone gibt es eine Reihe von Übergängen, welche mich dazu geführt haben, die Borstgrasbestände der niedrigen Lagen nur als Subassoziation anzusehen. In genetischer Hinsicht sind diese Gesellschaften als Degra-

dationstadien der behandelten Wiesen zu betrachten. Und da sie in ihrer Zusammensetzung genügend eigenen Charakter, eigene typische (obwohl im Vergleich mit der subalpinen Assoziation ärmere) Artenkombination auf ausgedehnten, ver-



1. Abb.

Nižní Lipová in der Groß-Fatra. Blumenwiesen mit überwiegendem Borstgras (die Subassoziation mit *Agrostis tenuis* der *Nardus stricta* - *Pheum alpinum* - Assoziation; sekundäre Entstehung dieser Gesellschaft ersichtlich).

hältnismäßig homogenen Flächen zeigen, kann man ihnen in der soziologisch-systematischen Klassifikation zu mindest den Wert der Subassoziation anweisen. Das Minimiareal wird auf Flächen von 4—6 m² erreicht, auf großen homogenen Flächen habe ich die Aufnahmen von 16—28 m² genommen, da dabei der allgemeine Charakter und zahlreiche begleitende Arten erfaßt werden können. Das Feststellen der charakteristischen Artenkombination in den Nardeta ist deshalb schwierig, da man durch menschliche Eingriffe berührte Gesellschaften vor

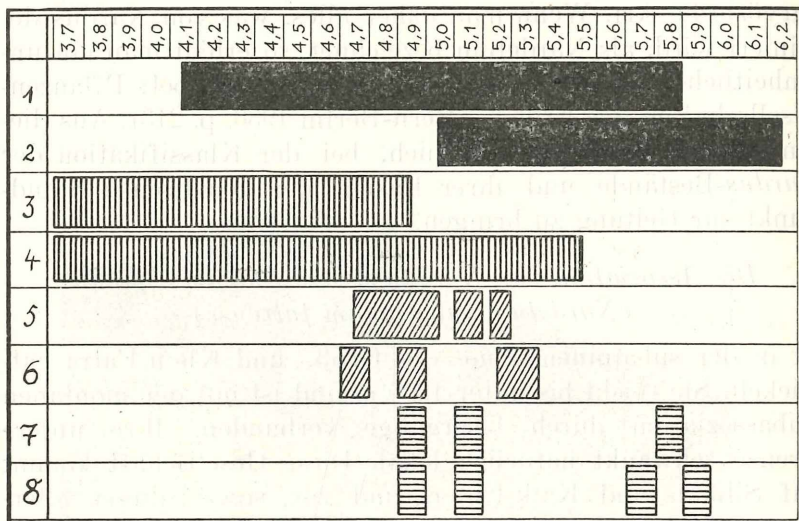
sich hat, wo die Vitalität einzelner Arten, die das Betreten und Beweiden erlaubt, die wichtigste Rolle spielt. Es darf auch nicht übersehen werden, daß *Nardus stricta* bei der Degradation verschiedener Assoziationen ihre konstante Komponente wird — oft auch mit einigen Charakter- und Begleitarten — und diese Gesellschaften in »Borstgrasbestände« umwandelt. Richtig führt R ü b e l an: »*Nardus stricta* ist eine euryözische Art. Wenn man daher alles, was von *Nardus* dominiert wird, als Nardetum bezeichnet, so erhält man ein uneinheitliches Gemisch von Gesellschaften« (Rübel: Pflanzengesellschaften der Erde. — Bern-Berlin 1930, p. 213). Aus diesem Grunde bemühte ich mich, bei der Klassifikation der *Nardus*-Bestände und ihrer Fazien den genetischen Standpunkt zur Geltung zu bringen.

Die Assoziation von Nardus stricta-Phleum alpinum
(*Nardetum subalpinum fatrense*)

ist in der subalpinen Zone der Groß- und Klein-Fatra entwickelt. Sie reicht bis unter 1200 m und ist mit der montanen Subassoziation durch Übergänge verbunden. Ihre untere Grenze schwankt natürlich lokal. Diese Gesellschaft kommt auf Silikat- und Kalk-Untergrund vor, soweit dieser allerdings mit einer starken Schicht kalkloser Erde (\pm degradierte Braunerde der ehemaligen Waldböden) bedeckt ist. Man findet sie auf Granit und Perm-Quarzit, sehr häufig auf Böden, die durch Zerfall von Neokom-Schiefer und Kalkstein entstanden sind, selten und nur in Fragmenten auf Trias-Dolomiten. Die Böden sind insgesamt tief, fein, meist ohne (selten mit) Skelett, of charakteristisch rotbraun (namentlich auf Neokom-Gesteinen). Selten trifft man Anläufe zum Podsol. So war in der Nähe der Schutzhütte auf K r á l o v a s t u d n ě (1300 m) folgendes Bodenprofil: schwarzbraune Erde 10—15 cm, Rhizosphäre; hellbraune Erde, hie und da Steine von 30 cm; aschgraue Erde mit rostigen Flecken von 30 cm; Untergrund—Gestein. Solche Profile kommen als Ausnahme vor, aber immer sind die oberen Schichten kalklos und die Bodenreaktion bezeichnend sauer; Böden aus zerfallenen Neokomgesteinen weisen schwächere Sauerkeit auf, als Granitböden. Aus der beigefügten Tabelle und den in den Aufnah-

men angeführten Zahlen ist die Amplitude der Bodenreaktion unserer Gesellschaft gut zu beurteilen. 120 Bodenproben aus den Nardeten wurden bearbeitet.

Verbands- und lokale Assoziationscharakterarten sind: *Nardus stricta*, *Potentilla aurea*, *Phleum alpinum*, *Luzula multiflora*, *Campanula Kladniana* (subsp. *polymorpha* Wit-



Die Boden-Azidität (PH) 1. der *Nardus stricta* - *Phleum alpinum* - Assoz. in der Groß- und Klein-Fatra (Klika 1933); 2. ihrer Subassoz. mit *Agrostis tenuis* in der Groß-Fatra (Klika 1933); 3. des Nardetums auf Pilsko (Ralski), 4.) des Nardetums auf Babia Gora (Ralski); 5. der Rizosphäre von *Nardus stricta* im Riesengebirge (Zlatník 1925); 6. des Nardetums subalpinum im Riesengeb. (Zlatník 1925); 7. des Nardetums in den schweizerischen Alpen-auf Bernina (Chodat); 8. des Nardetums im Schweizer-Jura (Chodat).

taš.), *Carex leporina*, *Viola canina*, *Cerastium fontanum*, *Carex pilulifera*, *Veronica officinalis*, *Meum mutellina*, *Carex pallescens*, *Viola sudetica*, *Achillea sudetica*, *Luzula sudetica*. Die Arten wurden nach der sinkenden Frequenz in 15 Aufnahmen zusammengereiht.

Charakteristische Artenkombination (in 20 Aufnahmen): *Anthoxanthum odoratum*, *Alchemilla vulgaris*, *Agrostis tenuis*, *Festuca rubra*, *Hieracium pilosella*, *Homogyne alpina*, *Hypericum maculatum*, *Nardus stricta*, *Luzula multiflora*, *Potentilla*

aurea, *Poa alpina*, *Soldanella carpatica*, *Thymus chamaedrys*, *Vaccinium myrtillus*.

Einige, in den Tatra- (P a w l o w s k i 1927) und unseren Assoziationen vorkommende Arten gehören als Charakterarten der Ordnung *Caricetalia curvulae* an; es sind: *Hieracium alpinum*, *Pulsatilla alpina*, *Festuca supina*. Auf Kämmen der Groß-Fatra findet man auch *Anemone narcissiflora* häufig in der behandelten Gesellschaft, so daß sie als eine lokale Charakterart angeführt werden kann.

Der subalpine Charakter der Bestände ist in der Groß-Fatra nicht so merkbar, in der Klein-Fatra erscheint er ein wenig ausdrucksvoller; der Unterschied ist aber nicht so groß und man darf die Assoziationsindividuen beider Gebirge in dieselbe Assoziation einreihen.

Ich habe diese Assoziation (*Nardus stricta* — *Phleum alpinum*) mit den Namen der dominierenden konstanten Charakterarten benannt. Dadurch habe ich sie von parallelen verwandten Assoziation in der Hohen (*Nardetum strictae* P a w l o w s k i 1928; S z a f e r - P a w l o w s k i - K u l c z y n s k i 1925, p. 67; *Xeronardetum* derselben Autoren 1923, p. 55—56) und Niederen Tatra unterschieden. Aus diesem letzteren Gebirge beschreibt Sillinger (1933) das *Nardetum subalpinum*, welches einen nur wenig abweichenden Charakter (Zusammensetzung) aufweist und natürlich der stärkeren und mächtigeren Entwicklung der subalpinen Zone in den genannten Gebirgen entspricht. Die polnischen Autoren unterscheiden nicht die *Nardus*-bestände der subalpinen und montanen Zone, wie es Sillinger und K r a j i n a tun; sie sehen diese als eine, von dem Alpen- und französischen *Nardetum* abweichende Assoziation an. Die Verarmung der Bestände (*Nardetum strictae*) in niedrigeren Lagen ist auf den Aufnahmen dieser Autoren gut zu beobachten. Sie unterscheiden die Variante auf Granit- und Kalkboden. Außerdem führen sie das *Hygronardetum*, ungewöhnlich arm auf nassen Böden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1280 (SW)	1300 (O)	1300	1410 (SO)	1540 (SO)	1250	1200 (NW)	1500 (S)	1550 (W)	1500 (S)	1500 (S)	1200 (NO)	1200 (N)	1510	1450 (O)
<i>Nardus stricta</i> - <i>Phleum alpinum</i> - Assoziation															
<i>Verbands- u. lokale Assoziations- charakterarten:</i>															
<i>Nardus stricta</i> L.	3.3	4.4	3.3	4.4	3.2	3.2	3.4	4.3	4.3	4.3	4.4	4.4	4.3	3.3	3.3
<i>Potentilla aurea</i> L.	1.2	2.3	2.2	1.1	2.2	3.2	2.1	2.1	2.1	2.1	3.3	2.2	2.2	2.1	2.1
<i>Luzula multiflora</i> Lej.	2.1	2.1	2.1		+	+	2.1	1.1	2.2	1.1	1.1	2.1	2.1	2.1	2.1
<i>Phleum alpinum</i> L.	+		1.1			2.2	+			1.1	+	2.1	1.1	2.2	1.1
<i>Campanula Kladniana</i> Schur.				+		1.1	+	2.1	+	2.1	+	+		+	
<i>Carex leporina</i> L.	1.1	1.1	+			1.1	+	1.1	+	+				2.1	+
<i>Viola canina</i> L.	+	1.1	1.1				+			+	+	+	2.1	2.1	
<i>Carex pilulifera</i> L.	1.1	+					+		+		+	+	2.1		
<i>Cerastium fontanum</i> Baumg.	+		2.2	1.1			1.1	+2	+		1.1	+	2.1	1.1	
<i>Veronica officinalis</i> L.		+				+2									
<i>Meum mutellina</i> Gärtn.					+	+	+	+	+						
<i>Carex pallescens</i> L.							+	2.1	2.1						
<i>Viola sudetica</i> Willd.			1.1								+	2.1			
<i>Achillea sudetica</i> Opiz.											2.1				
<i>Luzula sudetica</i> Presl.										1.1					
BEGLEITER:															
<i>Alchemilla vulgaris</i> L.	2.2	+	1.1			2.1	3.2		+		3.2	2.2	1.1	3.2	3.2
<i>Anthoxanthum odoratum</i> L.	1.1			1.1	2.2	2.2			2.1	2.1	2.1	3.2		1.1	2.1
<i>Hieracium pilosella</i> L.	+	+	+		+		2.1	2.1	+			+2	+2	2.2	
<i>Thymus sudeticus</i> Opiz.		2.3	+		1.2	+2		+2	3.2		1.2	+2	2.2		1.2
<i>Agrostis tenuis</i> Sibth.		1.1	1.1				1.1	3.2	2.1	3.2	1.1	1.1	2.2	2.1	2.1
<i>Festuca rubra</i> L.	1.1		1.1	+	+	1.1			1.1		2.2	2.1	+		
<i>Poa alpina</i> L.	+			1.1		2.2	1.1		2.1	2.1	+	2.2	2.2	1.1	

Aufnahmen der Nardus stricta-Phleum alpinum-Assoziation:

1. Králova Studně in der Groß-Fatra; sanfter Hang, Neokom-Schiefer und Mergel; PH 5·2; feine, helbraune Erde; 25 m²—100%;

2. Osthang unter Javorina bei Horní Teich; Neokom; PH 5·1; feine, tiefe, rote Erde ohne Skelett; 16 m²—100%;

3. Javorina, Hochebene, tiefe, rotbraune Erde mit wenig Skelett; PH 5·1; 16 m²—100%; Moose (*Hylocomium Schreberi*) 60%

4. Sattel unter Chlieb (Klein-Fatra), 5—10°; unter zusammenhängenden Rasen mit schwarzer Rhizosphäre feine, braune tiefe Erde ohne Skelett; PH 5·3; 16 m²—100%;

6. Velký (Groß-) Kriváň, 5°, rotbraune, tiefe Feinerde nach dem Knieholze, PH 4·1; 25 m²—100%;

6. Ebene unter Dlouhý Vrch (Kleine Fatra); Ph 4·9; unter schwarzer Rhizosphäre tiefe, rotbraune Erde; 16 m²—100%; Moose 40%: *Hylocomium squarrosum*, *Barbula spec.*, *Eurhynchium spec.*;

7. Rakytov oberhalb des Lubochňa-Tales; feine, tiefe, rötliche Erde ohne Skelett; Ph 5·6; Dolomit des oberen und mittleren Trias; 16 m²—100%;

8. oberhalb der Hütte unter Chlieb (K.-F.), Schiefer des unteren Trias; hellbraune, feine, tiefe Erde; PH 5·0; 16 m²—80%;

9. unter dem Fatra-Kriváň, 5—10°, lichtbraune, feine, tiefe Erde, 16 m²—100%;

10. Hromové (-Berg) — Kl.-F.); Lias-Tonmergel; braune, tiefe Feinerde; PH 4·9, 16 m²—100%;

11. Klak in der Groß-Fatra; Neokom-Sandstein und Tonmergel; Rhizosphäre mit schwärzlicher, 2—3 cm tiefer Erde; darunter feine, lichtbraune, tiefe Erde; 16 m²—100%;

12. Perušín — 9·1 — F. Untergrund Granit; lichtbraune, feine und tiefe Erde; 25 m²—100%;

Moose 100% *Dicranum scoparium*, *Thuidium abietinum*, *Hylocomium squarrosum*;

13. Perušín; Granit und permische Quarzite, rotbraune Erde, 25 m²—100%;

14. Boryšov; Neokom. Rizosphäre-Erde schwärzlich grau, unter der 5 cm starken Schicht lichtere, tiefe Erde; 16 m²—95%, PH 5·7.

15. Ebenda; Neokom, PH 5·3, lichtbraune Erde, 16 m²—90%; Weiters treten Arten mit niedriger Frequenz zu:

Carex ornithopoda (11), *C. sempervirens* (1, 9), *Gentiana asclepiadea* (11), *Geranium silvaticum* (11, 12), * *Gnaphalium norvegicum* (8), *G. silvaticum* (5), *Orobus vernus* (11), *Luzula maxima* (11), *Phyteuma orbiculare* (11), *P. spicatum* (11, 13), *Thesium alpinum* (11).

Es war nicht möglich, von der Groß-Fatra Aufnahmen aus höheren Lagen als 1500 m anzuführen, aus dem einfachen Grunde, weil die höchsten Kämme nur 1500—1591 m erreichen und soweit als Untergrund nicht Dolomit ist, die Nardeta der höchsten Lagen keine Abweichungen von den zwischen 1280 und 1500 m vorkommenden Assoziations-Individuen aufweisen. In der Klein-Fatra sind höhere Kämme entweder aus Dolomit oder mit anderen Gesellschaften als mit Nardeta bedeckt. Aus den Tatra-Gebirgen führen die Autoren Aufnahmen auch von Höhen über 1600 m an.

Aus der Aufnahme Nr. 13 ist ersichtlich, daß auf Silikatböden Nardeta von gleicher Zusammensetzung wie die auf Kalkuntergrund vorkommen können. Im Allgemeinen kann gesagt werden (und das gilt hauptsächlich für die montane Zone), daß Nardeta auf Granit- und Quarzit-Untergrund (besonders wenn der Boden skelletartig ist) in floristisch ärmerer Form auftreten.

Zu den wichtigen Fazies gehören: 1. die Fazies mit *Alchemilla vulgaris* (11, s. auch S. 24-25), 2. d. F. mit *Festuca rubra* (13), 3. d. F. mit *Deschampsia caespitosa* (4), hygrophil; 4. d. F. mit *Deschampsia flexuosa* und *Agrostis tenuis* (10), xerophiler und auf dem Winde ausgesetzten Standorten ärmer; 5. d. F. mit *Vaccinium myrtillus*. Diese letzte Art erscheint als ein treuer Begleiter unserer Assoziation und kann Relikt der ehemaligen Wald- oder Knieholzassoziation sein. Infolge dessen kann *Vaccinium* geringere Vitalität besitzen; in einigen Fällen, namentlich an Orten, welche nicht zu exponiert sind und wo der Schnee lange liegt, verdrängt dies auch das Borstgras, da die Anhäufung vom rohen Humus ihm zugute kommt. Die genannte Fazies kann dann in sehr einförmige *Vaccinium*-Bestände übergehen; eine weitere Stufe der Degradation der ursprünglichen Waldgesellschaft (s. auch S. 23-24).

Aus der *Podkarpatská Rus* (Karpathorußland) beschreibt M. Maloch (1931, 1932) ausführlich die Borstgrasbestände vom agrobotanischen Standpunkte aus. Er unterscheidet hier einige Assoziationstypen, welche er in kleine »Assoziationen« (die ungefähr den Soziationen Du Rietz entsprechen) teilt. Manchmal sind es unsere Fazies, manchmal

Komplexe oder Mosaiken einiger Assoziationen. Nach den von ihm angeführten Artenverzeichnissen und Aufnahmen wäre es möglich, auf den Alpen Karpatho-Rußlands eine ähnliche Assoziation wie bei uns festzustellen.

Die Subassoziation mit *Agrostis tenuis* (Nardetum agrostidetosum; Nardetum montanum fatrense) ist in niedrigen Lagen, namentlich in der montanen Zone verbreitet. Dies ist eigentlich ein Degradationsstadium der bereits erwähnten Wiesen des Anthoxantheto-Agrostidetum. Die Wiesen werden nicht gedüngt, nur einmal im Jahr gemäht, wenig beweidet, so daß *Nardus* mit seinen Begleitern ursprüngliche Wiesenarten verdrängt. Da aber das Beweiden und Betreten nicht zu intensiv ist, erhalten sich hier zahlreiche Wiesen-Pflanzen und geben unserer Assoziation ein buntes Aussehen. Bei sehr intensivem Beweiden verschwinden aber diese Pflanzen und die Bestände, wo früher *Nardus* überwog, werden im Vergleiche mit der ursprünglichen so bunten Subassoziation sehr arm.

Die charakteristische Artenkombination bilden: **Anemone nemorosa*, *Antennaria dioica*, **Anthyllis alpestris*, *Anthoxanthum*, *Agrostis spec. div.*, *Ajuga genevensis*, *Botrychium*, *Briza media*, *Carex pilulifera*, *Carlina acaulis*, *Campanula Kladniana*, *Festuca rubra*, *Gymnadenia conopea*, *Hieracium pilosella*, *Hypericum maculatum*, **Chrysanthemum subcorymbosum*, *Nardus*, *Luzula multiflora*, *L. albida*, **Lotus corniculatus*, *Pimpinella saxifraga*, *Potentilla aurea*, **Ranunculus polyanthemus*, *Trifolium montanum*, **T. pratense*, *Thymus chamaedrys* (regelmäßig die *Subsp. sudeticus*).

Die Differenzialarten (in der Kombination mit * bezeichnet) sind Arten des Anthoxantheto-Agrostidetum; ein anderes Merkmal ist, daß die unserer subalpinen Assoziation angehörenden Arten (z. B. *Phleum alpinum* u. a.) fehlen.

In den Aufnahmen kommen im ganzen 65 Arten vor, 26 von ihnen weisen eine höhere Konstanz als 50% auf.

A u f n a h m e n :

1. Brdo bei Ružomberok, Wiesen auf sanft geneigter Ebene, Untergrund Neokom; tiefe, feine, rotbraune Tomerde; PH 5-8, 16 m² — 100%;

2. Brdo, Neokom-Schichten, tiefe Feinerde, in der Nähe Reste von Buchenwäldern mit *Corylus*; PH 5'3, 16 m²—100%, Moose: *Dicranum scoparium*, *Rhacomitrium canescens* 100%; *Cladonia rangiferina*, *Cl. fragilis* 10%.

3. Unter Fatra bei Lubochňa; Neokom, unter schwarzen, 2—5 cm tiefer Rhizosphäre hellgraue Feinerde; 16 m² — 100%;

4. Tlstý Díel bei Lubochňa; Neokom — Mergel; 15°; unter mächtiger Schicht von abgestorbenen Moosen bräunliche, feine, tiefe Erde; 25 m²—100%;

5. Über Rudné bei Lubochňa, unter dem Kamme, 3—5 cm tiefe, schwarz gefärbte Rhizosphäre, darunter tiefer hellbraune, wenig skelettartige Erde; PH 52; 16 m²—100%;

6. Ebene oberhalb des Tales Nižní Lípová (G.—F.); Neokom; rotbraune, tiefe Erde, gegen die Tiefe zunehmendes Skelett; PH 5'4, 16 m²—100%; Fazies mit *Viscaria vulgaris*;

7. Ploská Alpa; 5°; Neokom; lichtbraune Erde ohne Skelett; PH 5'2; 16 m²—100%; Fazies mit *Vaccinium myrtillus*; *Cetraria islandica* 10%, *Dicranum scoparium*, *Hylocomium squarrosus* 60%;

8. Kutnikov bei Lub.; 10—15°; Neokom, tiefe, hellbraune Erde mit Kalkstein-Einlagen; PH 6'0; ähnlich wie in der 3. Aufnahme kommen hier Arten der *Carex tatarum*-*Carduus glaucus*-Assoziation vor; 25 m²—100%; Moose: *Thuidium abietinum*, *Polytrichum juniperinum*; *Cladonia spec.*;

9. Kutnikov, Hochebene, Neokom; unter der Rhizosphäre dunkelbraune, tiefer ein wenig hellere, tiefe Feinerde, PH 6'4, 16 m²—100%; *Rhacomitrium canescens* 100%;

10. Kutnikov, 5—10°. Neokom; lichtbraune, skelettlose Feinerde, PH 5'8, 25 m²—100%; Moose: *Thuidium abietinum*, *Polytrichum juniperinum* 100%;

11. Magura bei Lub.: 10—15°, Neokom; dunkelbraune, mit kleinen Gestein-Brüchen durchmischte Erde; PH 5'0; 16 m²—100%; Fazies mit *Deschampsia flexuosa* (3'3);

Zu den in der Tabelle angeführten Arten gesellen sich bei: *Achillea sudetica* (11), *Aquilegia longisepala* (10, 11), *Arabis arenosa* (3), *Avenastrum planiculme* (2), *Bupthalmum salifolium* (8), *Erigeron acer* (8), *Calamintha alpina* (3, 8), *Campanula persicifolia* (10), *Carex montana* (3'8), *Carduus glaucus* (3, 8, 10), *Cirsium erisithales* (9), *Coeloglossum viride* (4), *Colchicum* (3, 9), *Danthonia decumbens* (8, 9), *Euphorbia cyparissias* (3), *Festuca pratensis* (3, 11), *Heracleum* (10), *Hypochoeris maculata* (8), *Galium asperum* (7), *Gentiana verna* (9), *Geranium silvaticum* (5), *Knautia Kitaibelii* (1, 3), *Leontodon medius* (9, 10), *Meum mutellina* (1), *Orchis sambucina* (9), *Phyteuma spicatum* (4, 6, 11), *Pimpinella saxifraga* (1, 2), *Polygalla vulgaris* (8), *Poterium sanguisorba* (3, 9), *Rumex acetosella* (4, 6), *Veratrum album* (5, 6), *Vicia cracca* (8).

Subassoziation mit <i>Agrostis tenuis</i>		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		1150	1100 (NO)	900 (SO)	650 (N)	1100 (W)	1150	1280 (S)	900 (W)	1050	1000 (O)	1000 (N)
<i>Verbands- u. lokale Assoziationscharakterarten:</i>												
	<i>Nardus stricta</i> L.	3.4	3.4	2.2	3.3	3.4	4.5	4.5	3.3	2.2	3.3	2.2
	<i>Campanula Kladrniana</i> Schur.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	1.1
	<i>Carex pilulifera</i> L.	+	+	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.2	2.1	+	+
	<i>Luzula multiflora</i> Lej.	+	2.2	1.1	1.2	1.2	1.2	2.2	+	+	1.1	1.1
	<i>Potentilla aurea</i> L.	+			1.2				+	2.1	1.1	+
	<i>Viola canina</i> L.				+				+	+		
	<i>Carex pallescens</i> L.											
BEGLEITER:												
	<i>Galium vernum</i> Scop.	1.1	2.1	2.1	2.2	2.2	1.2	1.1	2.1	+	1.1	1.1
	<i>Lotus corniculatus</i> L.	1.2		+	+	+	+	+	1.1	2.2	2.2	+
	<i>Alchemilla vulgaris</i> L.	+		2.2	1.2	1.2	2.2	2.2	2.2	1.1	3.2	+
	<i>Anthoxanthum odoratum</i> L.	1.1	2.2	3.2	1.1	1.1	+	1.1	2.2		2.1	+
	<i>Anthyllis alpestris</i> Rechb.	1.1	2.2	+	+	1.2		2.2	2.2		2.2	+
	<i>Chrysanthemum subcorymbosum</i> Schur.	+	2.2	+	+	+	+	2.2	2.2	+	1.1	2.2
	<i>Thymus sudeticus</i> Opiz.	+		+	+	1.2	+	1.2	+	+	+	+
	<i>Ajuga genevensis</i> L.	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+
	<i>Carlina aculis</i> L.	+		2.2	1.2	1.2	2.1	2.1	2.1	1.1	3.2	+
	<i>Trifolium montanum</i> L.	+	1.2	+	2.2				+	1.2	2.2	+
	<i>Anemone nemorosa</i> L.	2.3	2.2	+		+			+	1.1	2.1	+
	<i>Antennaria dioica</i> Gärtn.	+	2.2	+	+	+			+	1.1	2.2	+
	<i>Botrychium hunaria</i> L.	1.1		+	+		+		+	+	+	+
	<i>Briza media</i> L.			2.1	1.1	1.1	+	+	2.1		2.1	+
	<i>Festuca rubra</i> L.		2.2	1.1	3.2	1.1	2.2	1.1				+
	<i>Hieracium pilosella</i> L.			1.1	+	1.2	+	2.2		2.2	2.2	+
	<i>Phyteuma orbiculare</i> L.			2.2	+	+	+		+	+	+	+

Sillinger (1933) beschreibt aus der Nieder Tatra das *Nardetum montanum*, welches sich teilweise mit unserer Subassoziation, teilweise mit der *Nardus stricta Phleum Alpinum* Assoziation deckt. Unsere Subassoziation weicht in floristischer Zusammensetzung, in der Konstanz einzelner Arten ab; beim Vergleiche der Aufnahmen ist ersichtlich, daß unsere Gesellschaft reicher und bunter ist, als die der Nieder Tatra. In der Groß-Fatra tritt sie auf großen Flächen auf, nicht so häufig und charakteristisch im Bezirke der Klein-Fatra, soweit dies in dieser Abhandlung in Betracht genommen worden ist. Die behandelte Subassoziation ist auch nicht mit *Xeronardetum* und *Nardetum strictae* der polnischen Autoren aus der Hohen Tatra (1923, 1925, 1928) zu identifizieren. Aus dem Pilsko in den Beskiden beschreibt Ralski (1930, 1931) das *Nardetum strictae*, welches sich unserer silicikolen Variante nähert, auf der *Babia Gora* führt er nur eine Gesellschaft des *Nardetum strictae* an, daß dieses in drei Varianten auf Talwiesen der montanen und alpinen Zone vorkommt. Die erste Variante wird durch zahlreiche Schmetterlingblüter, die zweite durch *Homogyne alpina*, *Soldanella carpatica*, *Potentilla aurea*, *Poa Chauxii* charakterisiert; in der dritten tritt noch *Hieracium alpinum* hinzu. Die Talwiesen beschreibt Ralski unter dem Namen des *Festucetum pratensis*. Im Tale und in der montanen Zone erscheint sein *Nardetum strictae* als Degradationsstadium der Wiesen, *Carex*-Bestände und Wälder. Unsere Subassoziation und Assoziation stimmt mit den *Nardus*-Beständen in den Beskiden nur teilweise überein.

Aus dem Schemnitzer Mittelgebirge beschreibt Mikyška (1932) eine Reihe von Degradationsstadien mit überwiegendem Borstgras, welche aus mesophilen Wiesen entstanden sind. Diese Gesellschaften sind keine Assoziationen, sondern nur Entwicklungs- (Degradations-) Stadien bestimmter Gesellschaften und es ist nicht möglich, sie in Gesellschaften unseres Verbandes einzureihen. Unsere Subassoziation, welche auch das Degradations-Wiesenstadium ist, unterscheidet sich von den höher genannten Stadien durch charakteristische, reichere Zusammensetzung und größere (wenn auch nur teilweise) Selbständigkeit.



2. Abb.

Borstgraswiesen, welche durch das intensive Beweiden auf Waldschlägen entstanden sind; hie und da Gruppen von *Rumex alpinus*. Chlieb in der Klein-Fatra — 1000 m. (Foto R. Mikyška.)

Auf Silikatuntergrund in der montanen Zone begegnet man auf Schlägen und Lichtungen ungewöhnlich armen Phragmenten unserer Subassoziaton.

Als Beispiel kann folgende Aufnahme stehen: Nordost-Hang des Čertjaz in der Klein-Fatra, sanft geneigt, 840 m; Granituntergrund; mächtig entwickelte Rhizosphäre mit schwarzer Erde, darunter braune Erde mit feinem Skelett; PH 4·5, 25 m² — 100%:

<i>Antennaria dioica</i>	+·2	<i>Hypericum maculatum</i>	+
<i>Alchemilla vulgaris</i>	+	<i>Nardus stricta</i>	4·4
<i>Anthoxanthum odor.</i>	1·1	<i>Luzula multiflora</i>	2·1
<i>Agrostis alba</i>	1·1	<i>Potentilla tormentilla</i>	2·1
<i>Briza media</i>	+	<i>Rumex acetosella</i>	1·1
<i>Brunella vulgaris</i>	+	<i>Thymus chamaedrys</i>	+·2
<i>Carex pilulifera</i>	1·1	<i>Viola canina</i>	+
<i>C. leporina</i>	1·1	<i>Veronica officinalis</i>	2·1
<i>Danthonia decumbens</i>	+	<i>Vaccinium myrtillus</i>	+·2
<i>Festuca rubra</i>	2·1	<i>Stellaria graminea</i>	+
<i>Hieracium pilosella</i>	1·2		

Ähnlich arm pflegen auch Fragmente der *Nardus stricta*-*Phleum alpinum*-Assoziation zu sein: Úplaz in der Klein-Fatra, Nordwest-Hang, 1260 m, 15°, in der Knieholzzone, Rasen mit schwarzer Rhizosphäre, darunter tiefer, feiner, roter Ton; PH 4.4 (unter *Polytrichum juniperium*), PH 4.9 (unter *Nardus stricta*); das Vieh tritt Stege, die *Nardus* bewächst; Hänge der kleinen Terrassen bedeckt *Vaccinium myrtillus*. 16 m²—100%; *Polytrichum juniperinum* 20%, *Cetraria islandica* 10%.

<i>Anthoxanthum odoratum</i>	1.1	<i>Luzula pilosa</i>	+
<i>Deschampsia flexuosa</i>	+ 0.2	<i>Poa alpina</i>	+
<i>Homogyne alpina</i>	+	<i>Potentilla aurea</i>	3.2
<i>Nardus stricta</i>	4.4	<i>Rumex acetosella</i>	2.2
<i>Luzula multiflora</i>	1.1	<i>Vaccinium myrtillus</i>	3.2

Es muß bemerkt werden, daß *Nardus*-Bestände auch auf Mooren in Nadelwäldern als Entwicklungsstadium, welches mit dem Austrocknen dieser nicht tiefen Moore auf Polana, zwischen Smrekovica und Močidla in der Groß-Fatra, in der Höhe von 1390—1486 m, zusammenhängen, entstehen; PH 4.3, Torferde; einige Stadien des Bewachsens sind auch hier zu unterscheiden; ich nenne dieses Stadium das *Sphagneto-Nardetum*.

α)

<i>Sphagnum acutifolium</i>	... 60%	<i>Luzula multiflora</i>	1.1
<i>Agrostis tenuis</i>	2.1	<i>Potentilla aurea</i>	1.1
<i>Carex pilulifera</i>	1.1	<i>Vaccinium myrtillus</i>	3.2
<i>Homogyne alpina</i>	2.1	<i>Gentiana asclepiadea</i>	1.1
<i>Nardus stricta</i>	4.4	<i>Trientalis europaea</i>	3.2
(<i>Carex ericetorum</i>)		(<i>Juncus acutiformis</i>);	

Auf diesem feuchten Moore ist Fazies mit *Trientalis europaea* charakteristisch; Boden fein, rotbraun, torfig, beträchtlich feucht! PH 4.3.

β)

<i>Agrostis alba</i>	2.2	<i>L. pilosa</i>	+
<i>Brunella vulgaris</i>	1.1	<i>Potentilla aurea</i>	3.2
<i>Carex leporina</i>	1.1	<i>Phleum alpinum</i>	+
<i>Deschampsia caespitosa</i>	+	<i>Vaccinium myrtillus</i>	1.1
<i>Homogyne</i>	3.2	<i>Polytrichum commune</i>	40%
<i>Nardus stricta</i>	4.3	<i>Sphagnum Girgensohnii</i>	10=20%
<i>Luzula multiflora</i>	1.1		

Boden graubraun, nicht so feucht; PH 5.0 (Granit!); Fazies mit *Homogyne alpina*.

Auf Weiden ist weiters das *Deschampsia caespitosa* zu finden. Mit diesem Namen werden Bestände mit überwiegender *Deschampsia caespitosa* bezeichnet; diese sind an feuchteren Boden gebunden, kommen auf feuchteren Hängen (gegen N und NW) vor und haben die Mehrheit der Arten mit dem Nardetum gemeinsam, aber, wie ersichtlich, enthalten sie einige hygrophile Arten. Zahlreiche, dem Nardetum angehörende Arten und Übergänge zur typischen *Nardus stricta* *Phleum alpinum* - Assoziation zeugen davon, daß es sich um ein Stadium (höchstens eine Fazies) unserer Assoziation handelt. Durch die Art *Deschampsia caespitosa* können andere Arten verdrängt werden und das bedingt die besondere Physiognomie dieses Stadiums. Die Bestände geben sehr gute Weide, werden vom Vieh aufgesucht und das begründet die hohe Dominanz der nitrophilen Arten in den Aufnahmen. Bei uns nehmen Stadien mit *Deschampsia caespitosa* keine große Flächen ein und sind auch nicht so typisch entwickelt, wie sie Sillinger (1933, p. 164) aus der Niederen Tatra anführt.

Weide auf dem Nordost-Hange der Ploska 1240 m, Untergrund Neokom-Kalksteine (enzelne Kalksteinblöcke ragen aus dem Boden heraus)! ein Degradationsstadium nach dem Walde mit überwiegender *Deschampsia caespitosa*; tiefe, schwarze Erde; PH 5·7; 16 m²—9% (mit * bezeichnete sind Charakterarten der *Nardus stricta* *Phleum alpinum* - Assoziation):

<i>Deschampsia caespitosa</i>	3·2	<i>Veronica chamaedrys</i>]	1·1
<i>Alchemilla vulgaris</i>	3·3	<i>Plantago media</i>	1·1
<i>Lotus corniculatus</i>	2·1	<i>Bellis perennis</i>	1·1
<i>Primula carpatica</i> . .	2—3·2	<i>Galium vernum</i>	1·1
<i>Thymus sudeticus</i>	2·1	<i>G. asperum</i>	1·1
<i>Euphorbia amygdaloides</i>	2·1	<i>Chrysanthemum leucanthemum</i>	1·1
<i>Soldanella montana</i>	2·1	<i>Arabis arenosa</i>	+
<i>Ranunculus Hornschuchii</i>	2·1	* <i>Cerastium fontanum</i>	+
<i>Poa alpina</i>	2·2	<i>Veronica officinalis</i>	+
* <i>Potentilla aurea</i>	2·1	<i>Hypericum maculatum</i>	+
<i>Anthoxanthum odoratum</i>	2·2	* <i>Campanula Kladniana</i>	+
<i>Achillea millefolium</i>	1·1	<i>Cirsium eriophorum</i>	+
<i>Trifolium pratense</i>	1·1	<i>Carex sempervirens</i>	+·2
* <i>Carex pilulifera</i>	1·1		

In der Nähe sind Stadien mit vollständig vorherrschen-

der *Deschampsia caespitosa* auf dem Westhange mit tiefer, feiner, dunkelbrauner Erde ohne Skelett, PH 6.4; 25 m² — 100%:

<i>Deschampsia caespitosa</i>	4.2	<i>Senecio subalpinus</i>	+
<i>Alchemilla vulgaris alpestris</i>	2.1	<i>Achillea spec.</i>	+
<i>Primula carpatica</i> . . .	2.1	<i>Galium vernum</i>	+
<i>Taraxacum officinale</i>	+	<i>Euphorbia amygdaloides</i>	+
<i>Viola bicolor</i>	2.1	<i>Acer pseudoplatanus</i>	+

Der Mangel von Arten der *Nardus*-Bestände hängt hier nicht nur mit beträchtlicher Feuchtigkeit, sondern auch mit geringer Sauerheit des Bodens zusammen.

Die Fazies mit *Deschampsia flexuosa* (mit dem Namen »*Deschampsietum flexuosae*« Aut. bezeichnet) sind Stadien der *Nardus*-Bestände von stark saurerer Bodenreaktion, namentlich unter den Kämmen an exponierten Oiten. *Vaccinium myrtillus* bildet Einlagen im Rasen, das Ganze eine Mosaik. Diese Gesellschaften sind auf Kalk-Untergrung artenreicher, auf Silikat-Schiefer sehr arm. Interessant ist, daß in der Groß-Fatra einige Arten, welche als ausschließlich calciphil angesehen wurden, erschienen oder verblieben sind, namentlich *Sesleria calcarea*. Es ist schwer zu sagen, ob dies Reste des ehemaligen *Carex Tatorum-Carduus glaucus*-Gesellschaft, welche vom *Nardus* verdrängt wurde, sind.

1. Das Stadium mit *Deschampsia flexuosa-Vaccinium myrtillus*: Ploska in der G.-Fatra 1350 m. Neokom-Mergel und Kalkstein, tiefe, braune, feine, skelettlose Erde, PH (in der Rhizosphäre von *Deschampsia flexuosa* und *Vaccinium myrtillus*) 5.0; 16 m² — 100%;

<i>Deschampsia flexuosa</i>	4.4	* <i>Alchillea sudetica</i>	1.1
<i>Vaccinium myrtillus</i>	3.2	<i>Alchemilla vulgaris</i>	1.1
<i>V vitis idaea</i> .	2.1	* <i>Potentilla aurea</i> .	1.1
<i>Homogyne alpina</i>	2.1	* <i>Phleum alpinum</i>	1.1
* <i>Viola sudetica</i>	2.1	<i>Ranunculus montanus</i>	+
<i>Antennaria dioica</i>	2.1	<i>Galium vernum</i>	+ 1.1
* <i>Meum mutellina</i>	2.1	<i>Botrychium lunaria</i>	+
* <i>Thymus sudeticus</i>	2.1	<i>Polygonum viviparum</i>	+
<i>Anthoxanthum odoratum</i>	2.1	<i>Primula carpatica</i> .	+
<i>Luzula albida</i>	1.1	<i>Sesleria calcarea</i> (-v) + (PH.5.2!)	
<i>Chrysanthemum leucanthemum</i>	1.1	<i>Hylocomium splendens</i> }	70%
<i>Cetraria islandica</i>	.30—40%	<i>Hylocomium Schreberi</i> }	

2. Das Stadium mit *Deschampsia flexuosa*-*Allium victoriale* nimmt auf höchsten Kämmen der Groß-Fatra große Flächen ein: Westhang der Križná 1570 m; unter starker Schicht der abgestorbenen Moose rotbraune Rhizosphäre, darunter feine, tiefe, schokoladenbraune Erde; PH 5·1; 16 m²—100%: *Cetraria islandica* 10%.

<i>Deschampsia flexuosa</i>	3·2—2	<i>Allium victoriale</i>	2·1
<i>Vaccinium vitis idaea</i>	2·2	<i>Anthoxanthum odoratum</i>	2·2
<i>Sesleria calcarea</i>	2·2	<i>Potentilla aurea</i>	2·1
<i>Anemone narcissiflora</i>	1·1	<i>Luzula albida</i>	1·1
<i>Campanula Kladniana</i>	1·1	<i>Poa alpina</i>	+
<i>Homogyne alpina</i>	1·1	<i>Viola sudetica</i>	+

Auffallend ist das Stadium mit *Vaccinium myrtillus* auf dem Kamme zwischen Ostredok und Križna 1560 m: unter mächtig entwickelter Rhizosphäre mit brauner bis torfiger Erde ist braune, feine, tiefe Erde mit vom Wasser gehöhlten Furchen; wahrscheinlich liegt hier der Schnee lange; große Flächen; 25 m² — 70%; Moose 100%:

<i>Sesleria calcarea</i>	3·2	<i>Homogyne alpina</i>	2·1
<i>Vaccinium myrtillus</i>	3·2	<i>Anthoxanthum odoratum</i>	2·2
<i>Antennaria dioica</i>	2·2	<i>Luzula albida</i>	2·2
<i>Potentilla aurea</i> .	2·1	<i>Vaccinium vitis idaea</i>	1·1
<i>Poa alpina</i> . .	1·1	<i>Achillea spec.</i>	+
<i>Thymus sudeticus</i>	+	<i>Campanula Kladniana</i>	+
<i>Viola sudetica</i>	+	<i>Anemone narcissiflora</i>	+
<i>Linum extraaxillare</i>	+		

Es wäre möglich, eine Reihe von Übergängen zusammenzustellen, wo mit zunehmender Bodenazidität azidiphile Arten in steigendem Maße zur Geltung kommen. Diese Bestände werden beim Beweiden vom Vieh zertreten, was Entblößen des Bodens und schnelles Auslaugen verursacht; solche Orte besiedeln gerne azidiphile Arten, namentlich *Nardus*.

Zu den regressiven Stadien des *Pinetum mughi silicicolum* auf saueren Böden in der Klein-Fatra gehören:

1. Fragmente des *Empetretum-Vaccinietum*: nördlicher Teil des Križná - Kammes in der Klein-Fatra 1570 m; wenig geneigter Boden; Granit, seichte, schwärzliche Erde; PH 3·9(!); 16 m² — 100%: *Cetraria islandica*, *Cladonia rangiformis*, *Polytrichum strictum* 30%, *Hylocomium Schreberi* 10%:

<i>Vaccinium myrtillus</i>	2:3	<i>Empetrum nigrum</i>	+·2
<i>V. vitis idaea</i>	2:1	<i>Lycopodium selago</i>	+
<i>Deschampsia flexuosa</i>	1:1	<i>Homogyne alpina</i>	+

Interessant ist, daß auf Granitschotter der nahen Hochebenen das Initialstadium mit *Deschampsia flexuosa* und *Cetraria islandica* vorkommt.

2. Das Stadium von *Vaccinium myrtillus*-*Cetraria islandica* mit *Festuca supina*: Kamm zwischen Groß- und Fatra-Kriváň, sanft geneigter Südwest-Hang 1580 m; PH 5·2; stark entwickelte rostig-braune Rhizosphäre, darunter tiefe, braune Feinerde ohne Skelett; *Vaccinium myrtillus* und *Cetraria islandica* bilden typische kleine Hügel, wobei *Cetraria* auf der dem Winde ausgesetzten Seite wächst; 20 m² — 90%: *Cetraria islandica* 60%, *Polytrichum juniperinum* 10%; *Cladonia rangiferina* 5%:

<i>Deschampsia flexuosa</i>	3:3	<i>Homogyne alpina</i>	+
<i>Festuca supina</i>	2:2	<i>Polygonum viviparum</i>	+
<i>Vaccinium myrtillus</i>	4:2	<i>Soldanella carpatica</i>	+
<i>V. vitis idaea</i>	2:2	<i>Thymus sudeticus</i>	+
<i>Luzula albida</i>	2:1	<i>Lycopodium selago</i>	+
<i>Potentilla aurea</i>	1:1		

Beide Aufnahmen nähern sich dem aus den Tatra-Gebirgen beschriebenen *Empetretum-Vaccinietum*, obwohl in der letzteren *Festuca supina* vorkommt.

Nitrophile Stadien und Gesellschaften: Zur Vollendung des Charakters der Weidengesellschaften sind noch einige Bemerkungen über Assoziation oder Fazien, welche durch reichliche Düngung, also auch durch Nitrifikation bedingt werden, an Orten, wo das Vieh ausruht und den Boden intensiv düngt, zu machen.

Die Fazies mit *Alchemilla vulgaris* unserer Gesellschaft von *Nardus stricta* *Phleum alpinum*, eventuell ihrer Subassoziation kommt oft an feuchteren und muldenförmigen Orten vor (s. auch S. 10-13);

a) Westhang unter Rakytov 1450 m (G.-F); Neokom, feine, graubraune Erde; PH 5·7; 16 m² — 100%:

<i>Alchemilla vulgaris</i>	4·5	<i>Ranunculus Hornschuchii</i>	1·1
<i>Deschampsia caespitosa</i>	1·2	<i>Taraxacum officinale</i>	1·1
<i>Festuca rubra</i>	1·1	<i>Botrychium lunaria</i>	+
<i>Poa alpina</i>	1·1	<i>Geranium silvaticum</i>	+
<i>Phleum alpinum</i>	1·1	<i>Lotus corniculatus</i>	+
<i>Cerastium fontanum</i>	1·1	<i>Primula carpatica</i>	+
<i>Galium asperum</i>	1·1	<i>Sesleria calcarea</i> (-v)	+
<i>Meum mutellina</i>	1·1	<i>Thymus sudeticus</i>	+
<i>Potentilla aurea</i> .	1·1		

b) Südosthang des Chlieb 1300 m, schwärzliche Rhizosphäre, darunter 8—10 cm tief rote Feinerde ohne Skelett, die in skelletartigen Boden übergeht; zertreten und vom Vieh gedüngt; PH 5·2; 16 m² — 80%:

<i>Alchemilla vulgaris</i>	4·4	<i>Achillea spec.</i>	+
<i>Nardus stricta</i>	2·2	<i>Campanula Kladrniana</i> . .	+
<i>Potentilla aurea</i> .	2·2	<i>Cerastium fontanum</i>	+
<i>Lotus corniculatus</i> .	1·1	<i>Homogyne alpina</i>	+
<i>Luzula multiflora</i>	1·1	<i>Leontodon hispidus</i> . . .	+
<i>Poa alpina</i> . .	1·1	<i>Meum mutellina</i>	+
<i>Hieracium pilosella</i>	1·1	<i>Phleum alpinum</i>	+
<i>Veronica serpyllifolia</i>	1·1	<i>Plantago maior</i>	+
<i>V. officinalis</i>	1·1	<i>Ranunculus montanus</i>	+
<i>Bellis perennis</i>	+	<i>Taraxacum officinale</i>	+
<i>Brunella vulgaris</i>	+	<i>Trifolium repens</i>	+

Aus den angeführten Aufnahmen ist ersichtlich, daß dieses »*Alchemilletum*« keine selbständige Assoziation ist und mit dem *Alchemilletum pastoralis* aus der Hohen Tatra (Szafer-Pawłowski 1925, p. 76) nicht identifiziert werden kann, obwohl diese Gesellschaften einige Arten gemeinsam haben.

Das *Rumicetum alpinum* ist eine interessante Assoziation in der Nähe der Sennhütten, kann ausgedehnte Flächen bedecken und bezeichnet lange Zeit, wo früher Sennen standen. Sein charakteristisches Merkmal ist die Dominanz der Art *Rumex alpinus*, welche mit einigen stattlichen Pflanzen obere Schicht bildet; in der unteren überwiegen Gräser. In die charakteristische Artenkombination gehören: *Rumex alpinus*, *Urtica dioica*, *Geranium phaeum*, *Arctium tomentosum*, *Poa annua*, *Alchemilla vulgaris*;

1. Südosthang des Úplaz (K.-F.), 1000 m; 12 m² — 100%;

2. Matějovská dolina (Tal) unter der Smrekovica (G.-F.), 1050 m; sandtonige schwärzliche Erde mit Blöcken, 25 m² — 90%;

3. beim Wege von der Schutzhütte auf der Magura zum Suchý-Berge (K.-F.), 1370 m; unter der 2—5 cm starken Schicht von schwarzbrauner Erde lichtere Erde; am Orte, wo ehemals die Sennhütte stand; 25 m² — 90%:

<i>Rumex alpinus</i>	4·5	4·3	4·4	<i>Cardamine flexuosa</i>	1·1		
<i>Geranium phaeum</i>	2·1	+	+	<i>Epilobium montanum</i>			
<i>Urtica dioica</i>	+	2·2	+	<i>Fragaria moschata</i>	+		+
<i>Carduus personata</i>		1·1	+	<i>Galeopsis latifolia</i> . .		1·1	
<i>Senecio Fuchsii</i>		3·2	2·2	<i>Galium asperum</i>	+		
<i>Rumex arifolius</i>		2·1	2·1	<i>Geranium Robertianum</i>			
<i>Rubus idaeus</i>	2·1	2·1		<i>Geum urbanum</i>	+		+
<i>Alchemilla vulgaris</i>	+	+		<i>Myosotis silvatica</i>	+		
<i>Hypericum maculatum</i>	+	+		<i>Milium effusum</i>			2·1
<i>Galeobdolon luteum</i>	+	+		<i>Oxallis acetosella</i>		+·2	
<i>Aspidium spinulosum</i>		2·1		<i>Poa annua</i>		2·1	
<i>Athyrium filix femina</i>		2·1		<i>P. pratensis</i>		2·1	
<i>Salix silesiaca</i>		+		<i>P. trivialis</i>		2·1	
<i>Cirsium eriophorum</i>	+			<i>Ranunculus repens</i>		2·1	
<i>Achillea spec.</i>	+			<i>Urtica urens</i>			+
<i>Agrostis tenuis</i>	+			<i>Veronica chamaedrys</i>			
					2·1		

Anstatt des typischen Rumicetum alpini ist oft seine Fazies mit überwiegender *Urtica dioica* entwickelt; ein Zeichen, daß die Weide verlassen und die Nitrate allmählich aus dem Boden ausgelaugt wurden. Man trifft sie oft bei unbewohnten Sennhütten.

Als Beispiel können ausgedehnte Nessel-Bestände bei ehemaliger Sennhütte auf Ploská Alpa 1280 m stehen:

<i>Urtica dioica</i>	4·3	<i>Alchemilla vulgaris</i>	2·2
<i>Trifolium repens</i>	2·2	<i>Capsella bursa pastoralis</i>	2·2
<i>Stellaria media</i>	3·2		

Bei weiterem Auslaugen der Nitrate verliert *Urtica dioica* ihre Vitalität und verschwindet leicht, wenn diese Bestände bei Wegen zu Quellen vorkommen, treten höhere Stauden durch das Zertreten des Bodens vom Vieh zurück. Nach

einer Reihe von Degradations-Übergangsstadien entsteht die charakteristische Gesellschaft von *Poa annua*-*Capsella bursa pastoralis*, welche große Flächen einnehmen kann.

P l o s k á A l p a 1280 m; Neokom; tiefe Braunerde ohne Skelett, 4 m² — 80%;

R a k y t o v 1200 m, tiefe, rötliche Erde, 4 m² — 70%:

* <i>Poa annua</i>	4·4	4·4	<i>Geum urbanum</i>	+	
* <i>Capsella bursa pastora-</i> <i>lis</i>	2·2	3·2	<i>Taraxacum officinale.</i>	+	
* <i>Bellis perennis</i>	3·2	2·2	* <i>Alchemilla vulgaris</i>		+
<i>Trifolium repens</i>	3·2	2·2	<i>Plantago maior</i>		2·1
<i>Stellaria media</i>	2·1	+	<i>Ranunculus repens</i>		2·1
<i>Veronica serpyllifolia</i>	+		<i>Trifolium pratense</i>		1·1

Diese Assoziation weicht in ihrer Zusammensetzung von der *Poa annua* ssp. *varia*-*Alchemilla hybrida*-Assoziation, die Aichinger (1933) beschrieben hat, ab. Das *Rumicetum alpini*, ähnlich wie das *Nardetum*, ist eine, allgemein in den Karpathen, Alpen und an anderen Stellen verbreitete Assoziation; ihre Zusammensetzung ähnelt einander an den einzelnen Standorten (bis auf einige Abweichungen).

Obwohl diese Gesellschaft bestimmte Beziehungen zum *Petasition officinalis*-Verbande aufweisen könnte, reihe ich sie doch zum Verbande *Adenostylion alliariae* zu; sie scheint mir diesem näher zu stehen und hat mehr gemeinsame Arten mit ihm als mit dem *Petasition*-Verbande.

Zum Vergleiche unserer Gesellschaft mit den *Nardus*-beständen anderer Gegenden der ČSR und der übrigen europäischen Länder weise ich auf das beigegefügte Literaturverzeichnis hin.

Résumé.

L'auteur étudiait l'association du *Nardus stricta* des montagnes de Velká Fatra et de Fatříčka. Il s'est servi de la méthode sociologique du Braun-Blanquet. La genèse de la Nardaie nous semble déterminée par l'abus du pacage et par les conditions géologiques du substratum. Nous la trouvons à la place des broussailles du *Pinus montana*, elle remplace des forêts du *Picea excelsa* à l'étage subalpine et surtout les hêtrais à l'étage montagnard. Les nardaies de l'étage montagnard constituent le stade de dégénération des forêts et des prairies Anthoxantheto-Agrostidetum fatrense. Celles nardaies-ci sont régulièrement fauchées tandis que celles de l'étage subalpine sont seulement pâturées. Les nardaies sont liées au substratum plus ou moins acide. Nous ne les trouvons dans notre région que sur du granit, mais aussi elles viennent sur des sols calcaires, marneux et schisteux, c'est-à-dire des marnes et calcaires du Néocomien de la nappe subalpine inférieure. Les couches supérieures de ces sols sont privées de Ca⁺⁺ par l'eau. Ce sont des sols profonds, sans squelette, de couleur brun-rougeâtre. Les schistes du Néocomien forment des crêtes longues et larges, couvertes des forêts, souvent remplacées par des pâturages du Nord. Sur les crêtes aux pentes escarpées, et aux sommets pointus formées en calcaires et en dolomies du Trias on ne trouve jamais de nardaies.

L'alliance du *Nardus stricta* (*Nardion strictae*) comprend dans notre district l'association du *Nardus stricta* *Phleum alpinum* (= *Nardetum subalpinum fatraense*) à l'étage subalpin. Celle-ci est distinguée du *Nardetum subalpinum* de Nížké Tatry (Sillinger 1933) et du *Nardetum strictae* de Vysoké Tatry (Szafer-Pawłowski-Kulczyński 1925, 1928). Ses caractéristiques sont *Nardus stricta*, *Potentilla aurea*, *Phleum alpinum*, *Luzula multiflora*, *Campanula Kladniana*, *Carex leporina*, *Viola canina*, *Cerastium fontanum*, *Carex pilulifera*, *Veronica officinalis*, *Meum mutellina*, *Carex pallescens*, *Viola sudetica*, *Achillea sudetica*, *Luzula sudetica*. Nous trouvons dans notre associations même des espèces de l'alliance du *Carietalia curvulae* (*Hieracium alpinum*, *Pulsatilla alpina*, *Festuca supina*, *Anemone narcissiflora*) qui cependant n'est pas déve-

loppée dans notre région. À l'ensemble spécifique de l'association du *Nardus stricta* - *Phleum alpinum* appartiennent *Anthoxanthum odoratum*, *Alchemilla vulgaris*, *Agrostis tenuis*, *Festuca rubra*, *Hieracium pilosella*, *Homogyne alpina*, *Hypericum maculatum*, *Nardus stricta*, *Luzula multiflora*, *Potentilla aurea*, *Poa alpina*, *Soldanella carpatica*, *Thymus chamaedrys* (ssp. *sudeticus*), *Vaccinium myrtillus*. — On peut distinguer à peu-près deux variations dues au substratum, l'une silicicole, l'autre calcicole (celle-ci un peu plus riche en espèces).

À l'étage montagnard nous trouvons le *Nardetum subalpinum fatraense* en sous-association avec *Agrostis tenuis* (= *Nardetum strictae agrostidetosum fatraense*). À cette sous-association manquent quelques espèces propres à l'association du *Nardus stricta* - *Phleum alpinum*, mais elle est plus riche en quelques espèces d'*Anthoxantho-Agrostidetum*. Voici son ensemble spécifique *Anemone nemorosa*, *Antennaria dioica*, *Anthyllis alpestris*, *Anthoxanthum*, *Agrostis tenuis*, *Ajuga genevensis*, *Botrychium lunaria*, *Briza media*, *Carex pilulifera*, *Carlina acaulis*, *Campanula Kladniana*, *Festuca rubra*, *Gymnadenia conopea*, *Hieracium pilosella*, *Hypericum maculatum*, *Chrysanthemum subcorymbosum*, *Nardus*, *Luzula multiflora*, *L. albida*, *Lotus corniculatus*, *Pimpinella saxifraga*, *Potentilla aurea*, *Ranunculus polyanthemus*, *Trifolium montanum*, *T. pratense*, *Thymus chamaedrys* (ssp. *sudeticus*). Elle s'approche du *Nardetum montanum* de Nizké Tatry (Sillinger 1933) et des nardais décrites par Ralski à Babia Gora. Il en faut exclure les stades de dégradation à *Nardus stricta* qui proviennent des associations des marnes.

Nous trouvons aussi quelques facies remarquables du *Nardetum*. Ce sont: 1. une facies à *Deschampsia caespitosa* causée par une plus grande humidité du sol et de l'air; 2. une facies à *Deschampsia flexuosa* et à *Vaccinium myrtillus* présentant un stade de dégénération du *Pinetum montanae* sur les crêtes exposées au vent au sol très acide; 3., une facies nitrophile à *Alchemilla vulgaris*.

Sur les pâturage nous trouvons aussi le *Rumicetum alpinum* (son ensemble spécifique renferme *Rumex alpinum*, *Urtica dioica*, *Geranium phaeum*, *Arcticum tomentosum*, *Poa*

annua, *Alchemilla vulgaris*) et sa facies à *Urtica dioica* (moins nitrophile!). Dans l'entourage du terrain piétiné par le bétail (en suite moins nitrophile) il y a l'association du *Poa annua* - *Capsella bursa pastoralis*.

Dans ma communication je traite encore l'écologie de ces groupements. Nous voyons que la genèse des Nardaies est due au pacage des animaux et à l'influence des hommes.

LITERATUR — VERZEICHNIS:

- Aichinger, 1930, Fichtenwald, Latschenbestand und Bürstlingrasen im Karawankengebiet und ihre almwirtschaftliche Bedeutung. — Carinthia II., Klagenfurt.
- , 1933, Vegetationskunde d. Karawanken-Jena.
- Beger, 1922, Assoziationsstudien in d. Waldstufe d. Schanfiggs-Chur.
- Bolletes, 1921, Vegetationsstudien aus dem Weißtannental. Jahrbuch d. St. Gallischen Naturwissenschaftl. Gesellschaft 57. St. Gallen.
- Braun-Blanquet J., 1915, Les Cévennes méridionales (massif de l'Aigonal). Études sur la végétation méditerranéenne. I. Arch. Sci. Phys. Not. 48.
- , 1926, Études phytosociologiques en Auvergne. — Clermont-Ferrand.
- , 1932, Plant sociology. The Study of plant communities. — New York, London 1932.
- Domin K., 1923, Problémy a metody rostlinné sociologie a jejich použití pro výzkum lučních a pastvinných porostů. — Praha 1923.
- , 1933, D. Vegetationsverhältnisse des Bucegi in d. rumänischen Südkarpathen. — Ergebn. d. Intern. Pflanzen-geogr. Exkursion d. Rumänien 1931. — Veröffentlichungen d. geol. Institutes Rübel in Zürich 10 H. — Bern.
- Issler, 1913, D. Pflanzenbestand d. Wiesen und Weiden d. hinteren Münster- u. Kaysersbergertals-Colmar.
- Klečka, 1928, Agrobotamické studie o rokytských rašelinách. Sborník Čsl. Akademie Zemědělské III. A.
- , 1930, Studie o smilkových porostech na pastvinách šumavských. Tamtéž V.
- Klika, 1932, D. Seslerion coeruleae-Verband in den Westkarpathen. Sonderabdruck aus »Beihefte z. Bot. Centralbl.« XLIX. Abt. II.

- Lüdi, 1921, D. Pflanzengesellschaften d. Lauterbrunnentales und ihre Sukzession. Zürich.
- Luquet, 1926, Essai sur la géographie botanique de l'Auvergne. Saint-Denis.
- Malcuit, 1929, Les associations végétales de la vallée de la Lanterne. Caen.
- Maloch M., 1931, Boržavské poloniny v Podkarpatské Rusi. Sborník výzkum. ústavů zemědělských RČS, sv. 67.
- , 1932, Agrobotanické studie o Nardetech Boržavských Polonin na Podkarpatské Rusi. Tamtéž, sv. 83.
- Nègre, 1931, Aménagement du Mont Lozère. — Revue des Eaux et Forêts.
- Podpěra, 1925, Květena Moravy II., Brno.
- Ralki, 1930, Hale i łąki Pilska w Beskidie zachodnim. Polska Akademia Umiejetności. — Prace rolniczo leśne Nr. 1.
- , 1931, łąki, polany i hale pasmo Babiej Góry. Tamže Nr. 4.
- Říčan, 1932, Pastviny okresu vsetínského v moravských Karpatech. (D. Weiden des Bezirkes Vsetín in d. mährischen Karpathen.) — Sborník přírodověd. společn. v Mor. Ostravě. VII.
- Schwickerrath, 1933, D. Vegetation d. Landkreises Aachen u. ihre Stellung im nördlichen Westdeutschland. Aachen.
- Sillinger, 1933, Monografická studie o vegetaci Nízkých Tater. Praha.
- Steffen, 1931, Vegetationskunde v. Ostpreußen. — Jena.
- Szafer-Pawłowski-Kulczyński, 1923, Zespoły roślin w Tatrach Cześć I. Zespoły roślin w dolinie Chochołowskiej. — Krakow.
- Szafer-Pawłowski, 1925, Zespoły roślin w Tatrach III., IV., V., — Kraków.
- Vierhapper, 1925, Trockenwiesen im Quellgebiete d. Mur. — Öster. Bot. Zeitschr.
- , 1928, Vergleichendes Studium ü. Pflanzenassoziationen d. Nordkarpathen und Ostalpen. — Ergebnisse d. Intern. Pflanzengeogr. Exkursion d. d. Tschechoslovakei und Polen 1928; Bern 1930.
- Zlatník, 1928, Les associations de la végétation des Krkonoše et le p. H. — Extrait des Mémoires de la Soc. des Sciences de Bohême. Classe des Sciences 1925; Prague 1925.
- Aperçu de la végétation des Krkonoše (Riesengebirge), Preslia VII., Praha.

XVI.

Jedliny ve Štiavnickém středohoří.

(Studie o degradaci lesa.)

(*Les forêts à Abies alba de montagne de Štiavnica.*)

S dvěma tabulkami.

Napsal RUDOLF MIKYŠKA.

(Předloženo 9. května 1934.)

Andesitové Štiavnické středohoří (vymezení viz: V. DĚDINA, 1922) náleží na Slovensku k územím, která jsou na výskyt jedle nejbohatší. Tato okolnost jest patrně v souvislosti s tím, že centrum vegetačního rozšíření jedle v Karpatech se nachází v blízkém sousedství tohoto Středohoří, totiž v horských skupinách jižně od Nízkých Tater (L. FEKETE-T. BLATNY, 1914). Vegetačně však Štiavnické středohoří náleží v klimaxovou oblast bučiny (**Fagion**), kterou pouze na jižně exponovaných svazích vystřídává místy doubrava (hlavně **Quercetum sessiliflorae - graminosum**) ze svazu **Quercion pubescentis - sessiliflorae**, podmíněná lokálně klimaticky a edaficky. S tohoto hlediska jest tudíž nutno posuzovat rozšíření a zvláště sociologický výskyt jedle na Štiavnicku.

Bučiny v tomto území jsou obyčejně promíseny různými dřevinami (*Acer campestre*, *platanoïdes*, *pseudoplatanus*, *Carpinus betulus*, *Fraxinus*, *Tilia cordata* a *platyphylla*, *Ulmus scabra*), mezi nimiž jest jedle (*Abies alba*) častou přírozonou příměsí. Ve stromové vrstvě vyskytuje se asi v $\frac{1}{5}$, ve vrstvě křovité více nežli v $\frac{1}{2}$ snímků analysovaných bučin (R. MIKYŠKA, 1930, 1932), buď ojedinele nebo v menších skupinách, zejména v severní až západní expozici. Dolní průměrná hranice tohoto rozšíření jest 330 m, mimimální 250 m (údolí Hronu, L. FEKETE-T. BLATTNY). Jako součást

křovitého patra v bučinách vystupuje jedle na Sitně, nejvyšším vrcholku Štiavnického středohoří (1011 m), až do nejvyšších poloh. V dubových lesích jest již mnohem vzácnější.

Kromě toho však jedle samostatně se sdružuje v rozsáhlé lesy, zejména v severo-západní (návětrné a patrně i srážkami bohatší) části Štiavnické pahorkatiny, od uvedené dolní hranice až po největší výšky (na př. Paradajs, 942 m).

Již FEKETE-BLATTNY v cit. sp. (str. 223) uvádějí, že čisté jedlové porosty v okolí Ban. Štiavnice (Hodrušské lesy) nahrazují dřívější doubravy, z nichž rudní oblast štiavnická, kdysi z nejrušnějších v Evropě, kryla spotřebu dříví k důlním stavbám. Rovněž vegetačně-statistické rozbory bylinného podrostu těchto více méně uniformních jedlových lesů mluví v převážné většině případů pro jejich druhotný ráz.

Kvalitativně nejsou totiž jedliny Štiavnického středohoří vůbec individualisovány. Z charakteristických druhů jedlových, které uvádí na př. S. DZIUBALTOWSKI (1928) z jedlin (*Abietetum albae*, *Abieteto-Fagetum*) Łysogór a z různých lokalit při severní hranici areálu jedle v Polsku (1930), vyskytují se v jedlinách na Štiavnicku pouze *Abies alba*, *Circaea lutetiana* a *Sambucus racemosa*. Velmi relativní cena těchto věrných druhů, i nepatrné %, jímž jsou zúčastněny ve floristickém složení jedlin na Štiavnicku nedovolují, aby tyto byly hodnoceny jako samostatná asociace, byť i umělá. Naopak výskyt dosti četných charakteristických druhů bukových a druhů, které jsou v bučinách vysokofrekventními, stírá značně hranici mezi tímto společenstvem umělým a klimaxovým. Jestliže spojuje J. BRAUN-BLANQUET (1932) z floristických důvodů všechny přirozené i hospodářsky silně ovlivněné bukovo-jedlové lesy severního Švýcarska a severoalpských předhoří v jednu asociaci (*Fagetum praealpino-jurassicum*), z těchže důvodů jest nutno přičleniti i mnohé jedliny Štiavnického středohoří k bučinám. Jsouce na úkor těchto — lokálně i doubrav — podporovány člověkem, představují prvý stupeň antropicky podmíněné degradace přirozených lesních porostů Štiavnického středohoří, jež se dále projevuje:

1. Nevyrovnaností přízemní vegetace, zejména všeobecným potlačením sociability druhů, rostoucích

v normálně zapojených bučinách (event. doubravách) pospolitě (*Asperula odorata*, *Mercurialis perennis*, *Lamium luteum*, *Senecio Fuchsii*, *Stellaria holostea* a pod., kromě *Impatiens noli tangere*). — Snížení sociability těchto druhů není původně zaviněno soutěží druhů bylinného patra. Místně, na př. v poněkud prosvětlených jedlinách, světelnou ekonomikou bližších bučinám a doubravám lze v podrostu znamenat vývoj s tendencí zřejmě regenerační.

2. Absencí nebo menší frekvencí, početností, pokryvností a stálostí charakteristických druhů bukových (asociačních a svazových), v bučinách Štiavnického středohoří se vyskytujících anebo kvantitativně více zastoupených. Týká se to zejména těchto druhů (chybějící označeny —): *Asperula odorata*, *Elymus europaeus* —, *Fraxinus* —, *Carex pilosa* —, *Cephalanthera longifolia* —, *Neottia nidus avis* —, *Actaea spicata*, *Daphne mezereum*, *Dentaria bulbifera*, *Euphorbia amygdaloides*, *Glechoma hirsuta*, *Hedera helix* —, *Isopyrum thalictroides* —, *Melica uniflora*, *Milium effusum*, *Sanicula europaea*, *Symphytum tuberosum* —, *Ulmus scabra*. V celku však jest »bukový« charakter podrostu — až na některé případy — více méně zachován. Prvky dubové nelze bráti v úvahu, neboť v jedlinách tvoří příměs kvalitativně jen zcela nepatrnou.

3. Přítomností druhů antropochorních (*Stellaria media*, *Lampsana communis*, *Chrysanthemum leucanthemum*^o) a apofytů (*Agrostis vulgaris*, *Epilobium angustifolium*, *Geum urbanum*, *Taraxacum officinale*,^o), ke kterým však náleží i sama jedle, neboť má prospěch ze zásahů kultury, šíříc se jimi (uměle) na úkor buku a dubu. S tohoto hlediska lze zařaditi k apofytům i druhy, které (na Štiavnicku) jsou jedlí protežovány, jako na př. *Cardamine impatiens*, *Circaea lutetiana*, *Geranium robertianum*, *Hieracium murorum*, *Impatiens*, *Lactuca muralis*, *Oxalis acetosella*, *Urtica dioica*, *Sambucus nigra* a *racemosa*, většinu mechů v jedlinách přítomných a pod.

4. Jistou jednostranností v bylinném patře jedlin, které se jeví (kromě kvantitativní variabilnosti) chyběním druhů resp. společenstev světlomilných (případně suchomilnějších) a naopak rozmachem druhů resp. společenstev stínu- (a vlhko-) milnějších.

Tyto poměry v podrostu jedlin vyvolává zřejmě stromová vrstva, když ne přímo, tedy alespoň tím, že podmiňuje jistý v ý b ě r z druhů autochtonního bylinného patra, jehož následkem jsou zejména kvantitativní, méně již vzpomenuuté kvalitativní rozdíly mezi podrostem v bučinách a jedlinách.

K v a n t i t a t i v n í floristické rozdíly mezi bučinami a jedlinami se stupňují pro značný rozvoj stínubilných druhů (mechy, *Oxalis*, *Circaea lutetiana*, *Impatiens noli tangere*) až do významu faciálních odchylek, neboť tyto a jiné druhy — kromě *Impatiens* — se v bučinách na Štiavnicku uplatňují velice nepatrně. Příčinou jest průměrně intenzivnější zastínění stromovým patrem (ačkoliv jedliny úplně zapojené jsou často bez jakékoliv přízemní vegetace) a průvodné zvýšení vlhkosti půdní. Přes tyto faciální odchylky (jež ovšem nemusí býti dokladem sekundárnosti všech jedlin) lze většinu jedlin na Štiavnicku přiřaditi k typickým silicikolním bučinám s označením **Fagetum carpaticum - abietosum degradatum (jedlová degradovaná facie bučin karpatských)**.

Kvalitativní odchylky vyvolané s u b s t r á t e m (byť i druhotně) jsou hlubší a též systematicky lze je více hodnotit (viz dále).

V z t a h y k d o u b r a v á m jsou méně jasny, neboť druhy, resp. společenstva pod dubovým podrostem, kladoucí zpravidla vyšší požadavky na světlo, utrpěly jeho změnou tak, že rozpoznávání původního stavu jest tím velice znesnadněno. Vodítkem může býti do jisté míry povaha stanoviště (jižně exponované úklony) a zbytky charakteristických nebo (častěji) jen vysokofrekventních průvodců tanních doubrav, zejména **Querceta sessiliflorae-graminosa**. Obtíže působí, že zapojenější jedlový podrost vyrovnává poněkud extrémnější »fytoklima« původní, což jest k prospěchu šíření se nejen mnohých apofytů a antropochorů, ale i četných průvodců bukových na úkor reliktnů bývalé asociace. Avšak její poměrně malá sociologická samostatnost v klimaxové oblasti bukové způsobuje další potíže při posuzování, bylo-li *Quercetum graminosum* (»travninná« doubrava, t. j. doubrava s *Carex pilosa* — a s *Poa nemoralis*-typem v podrostu) východiskem degradace. Nejlépe ještě k rekonstrukci bývalého rozšíření doubrav tohoto rázu, nahrazených dnes jedlinami, lze použití

těch jedlin, u nichž se zachoval *Carex pilosa-Luzula nemorosa* podtyp (viz dále) v podrostu. Po výhradě svrchu uvedené, lze vskutku většinu jedlin s tímto podtypem (v nichž se vyskytuje i dosti vysoké % charakteristických druhů svazu *Quercion pubescentis-sessiliflorae*) přiřaditi buď k přirozenému společenstvu původnímu s označením **Quercetum sessiliflorae (roburis) graminoso-abietosum degradatum (degradovaná travinná doubrava ve facii jedlové)**, anebo alespoň ke svazu *Quercion pubescentis-sessiliflorae*.

V přirozených lesních porostech Štiavnického středohoří (v bučinách a doubravách) vyskytuje se celkem pět lesních typů, obsahujících větší počet podtypů.*)

I. *Asperula odorata* — typ (*A-T, Fagetum herbosum*).

1. *Asperula odorata* — subtyp (*Ao-st, sociace Asperula odorata, var. karpatská*).

2. *Asperula odorata-Mercurialis perennis* — subtyp (*AMp-st, sociace Asperula odorata, var. Mercurialis perennis*).

3. *Asperula odorata-Senecio Fuchsii*-subtyp (*ASF-st, Fagetum altirherbosum: sociace Senecio Fuchsii?*)

4. *Asperula odorata* — *Impatiens noli tangere* — subtyp (*AI-st, Fagetum subhygrophilum: sociace Impatiens noli tangere*).

III. *Carex pilosa* — typ (*C-T, Fagetum caricinum: sociace Carex pilosa*).

5. *Carex pilosa* — subtyp (*Cp-st*).

6. *Carex pilosa* — *Luzula nemorosa*-subtyp (*CLn-st, sociace Carex pilosa, var. Carex pilosa-Luzula nemorosa*).

III. *Fagetum nudum* (*Fn, Fagetum nudum*).

IV. *Poa nemoralis* — typ (*P-T, přechodní typy bukovo-jedlové*).

8. *Poa nemoralis* — subtyp (*Pn-st*).

9. *Poa nemoralis-Melica uniflora* — subtyp (*PMn-st, Fageta graminosa: sociace Melica uniflora, var. západokarpatská silicikolní*).

V. *Fagetum degradatum* a *F. spurium* (*Fagetum degradatum a F. spurium*).

10. *Luzula nemorosa-Vaccinium myrtillus* — subtyp, *LVm-st*, více degradované stadium (facie) *CLn-st-u*.

11. *Vaccinium myrtillus-Calamagrostis arundinacea* — typ, *VCa-T*.

*) Ponechávám své původní dělení, abych zjednodušil vzájemné srovnávání homologických společenstev. V závorkách jsou uváděna označení podle zatímního DOMINOVA (1931) třídění bučin ČSR. Pokud se týče podrobnějších údajů, odkazují na své cit. typologické práce ze Štiavnicka (1930 a 1932).

Při typologických studiích podrostu v přirozených lesích na Štiavnicku nebylo dobře možno činiti rozdílu mezi bučínami a doubravami (ze svazu **Quercion pubescentis-sessiliflorae**). Doubravy pro tuto oblast jsou jen trvalými společenstvy, která lokálně podmiňují pro dub výhodnější vlastnosti stanoviště, jež vyplývají z nižší polohy a z jižní expozice. Pro expansi vlastního klimaxu nedošlo však u nich k typickému vývoji. Nejen že do nich přestupuje řada bukových druhů, ale vyskytují se v nich často též podrostová společenstva jako v bučinách. Avšak i opačný zjev, totiž porušení vyhraněnosti bučin doubravami vyskytuje se lokálně v této oblasti, nejen v případech, kdy tyto poměry vyvolává sukcese, směřující k závěrečné bučině, ale i za takových okolností, kdy jest zřejmo, že je podmiňují na př. jižní expozice nebo menší zápoj bukového lesa, jež se tedy uplatňují více nežli druhový charakter stromového podrostu. Proto blíží se pojetí vyjmenovaných lesních typů a podtypů finské školy, a výsledky analys jedlin, v dalším uvedené, zdá se, že jen potvrzují zásadu této školy o bezvýznamnosti nadrostu pro typ, neboť všechno nasvědčuje tomu, že paralelní (modifikovaná) podrostová společenstva, v jedlinách se vyskytující, jsou jenom regeneračními stadii těchže společenstev klimaxového svazu Štiavnického středohoří.

Z uvedených lesních typů a podtypů přirozených lesů na Štiavnicku vyskytují se analogicky v jedlinách: *AMp-st*, *AI-st*, *CLn-st* (též ve facii s *Vaccinium myrtillus*) a *Fn*. Snížení světelného požitku vylučuje *Cp-st*, *Pn-st*, *Mu-st*, absence *ASF-st-u* má z části stejnou příčinu, z části souvisí se změnami půdních vlastností, které patrně též nedovolují regeneraci *Ao-st-u*. Novým, v bučině Štiavnického středohoří nezjištěným společenstvem jest *typ s Petasites albus — Oxalis acetosella*, rovněž *Vaccinium myrtillus — typ*, v tom složení, v jakém se vyskytuje v jedlinách, je bučinám cizí, neboť nabývá charakteru samostatného (sekundárního) sdružení.

Rozhodující okolností pro příslušnost k určitému původnímu typu resp. podtypu jest zpravidla pouze charakteristická kombinace druhová a poměry abundance a dominance. Je přirozené, že význam diferenciálních druhů, vymezujících kvalitativně jednotlivé typy navzájem, se značně zmenšil. Presenci pro nedostatek vhod-

ných vegetačních individuí nebylo možno, bohužel, docenit. Z téže příčiny i srovnání příslušných individuí jest v některých případech znesnadněno.

I. *Asperula odorata* — typ.

1. *Asperula odorata* - *Mercurialis perennis* — subtyp. — Ačkoliv jest u tohoto společenstva v jedlinách »bukový« ráz značně zachován, vykazuje přes to již dosti velké ochuzení. Z druhů více méně na bučinu vázaných, anebo v bučinách tohoto podtypu na Štiavnicku častých mu chybí *Brachypodium silvaticum*, *Carex digitata*, *pilosa*, *Elymus europaeus*, *Milium*, *Poa nemoralis*, *Lilium*, *Paris*, *Polygonatum multiflorum* i *verticillatum*, *Anemone ranunculoides*, *Asarum*, *Campanula trachelium*, *Euphorbia amygdaloides*, *Galium Schultesii*, *Isopyrum*, *Myosotis silvatica*, *Stachys silvatica*, *Stellaria holostea*, *Symphytum tuberosum*, *Acer platanoides*, *Daphne mezereum*, *Fagus*, *Fraxinus*, *Ulmus scabra*, naproti tomu jest obohacen o *Oxalis acetosella* a *Circaea lutetiana*. Mechová vegetace jest stejně chudá jako v bučině.

AMn-st roste v jedlinách na humosních, hnědozemních půdách, ve vyšších partiích profilu kyprých a tmavěji zbarvených, hlouběji (od 4—5 cm) slehlejších a světlejších, mírně kyselé reakce (v oblasti rhizosféry podrostu pH 6.3—6.2).*) Vrstva steliva nepatrná. Zjištěný rozdíl mezi momentální a absolutní vodní kapacitou půdní činil 20.5% (sn. 1.).**)

Snímek 1. Paradajs (Hodrušské lesy). Více set m² rozsáhlé individuum pod poněkud probraným, až 100 r. starým nadrostem (densita stromů D^A—20 m, rovněž značný úklon pod-

*) Určeno kolorimetricky podle Wulffa, vždy na základě většího počtu průb z téhož vegetačního individua.

**) Pro posouzení této hodnoty jsou uvedeny stav a rozdělení srážek v měsících, kdy byly konány analýsy jedlin. Údaje se týkají stanice Piarg u Ban. Štiavnice. Viz též datum jednotlivých snímků!

Červen:	1.	2.	3.	15.	20.	21.	24.	25.		
mm:	9.3	0.5	16.0	5.5	4.7	6.5	1.7	0.5.		
Červenec:	9.	10.	11.	14.	15.	16.	17.	18.	23.	27.
mm:	10.7	10.4	9.7	0.7	0.7	9.0	14.5	2.1	3.5	24.5.
Srpen:	3.	4.	5.	7.	8.	16.	31.			
mm:	10.0	23.2	4.0	4.1	3.4	0.2	1.0.			

kladu zvyšuje prosvětlení; způsobuje též geotropické napřimování base kmenů jedlí). Podrostová vegetace téměř uzavřena (95%). — 19. VI. 1932.

Sn. 2. Malý Görlink. Patrně degradační stadium při hranici *Querceta sessiliflorae* s *P-T*-em v podrostu, zaujímajícím původně větší úklony. Asi 130 r. starý les (stromy objemu 130—175 cm v prsní výši), D_A — 20 m. Místy podrostová vegetace uzavřenější (90%), jako na zapsané ploše (150 m²), většinou jsou však druhy rozptýleny. — 11. VIII. 1932.

2. *Asperula odorata* - *Impatiens noli tangere* — subtyp vlivem většího zastínění a průměrně i vyšší vlhkosti původní jest na Štiavnicku v jedlinách mnohem častější a dokonce i úplnější, nežli v bučinách (kde jest vyvinut zpravidla jen fragmentárně), ačkoliv mu chybí na př. *Dentaria bulbifera*.

Jinak soustřeďuje v sobě většinu stínmilovných druhů této oblasti, klimaticky poněkud kontinentální. Ve srovnání pak s bučinami, v nichž jest (mimo území) lépe vyvinut, postrádá ještě více bukových prvků.

Zaujímá mírně kyselé (pH v oblasti rhizosféry 6.3—6.1) půdy zpravidla vlhké a zvláště kypré bez vrstvičky steliva, někdy velmi málo humosní. Rozdíl mezi absolutní a momentální vodní kapacitou půdní, zjištěný u sn. 6. a 7., činil 2.1 a 16.0%.

Sn. 3. zachycuje 300 m² z velice rozsáhlého individua na severních svazích k o t y 7 6 9 m v ú d o l í T e p l é. Nadrost je poněkud prosvětlený (D_A 30 m), starý 100 r. Objem stromů 120—160 cm. Bylinný podrost kryje z 90—95% půdu a je význačně trojvrstevný (*Impatiens*, *Lamium luteum*, *Mnium undulatum*). — 23. VIII. 1932.

Sn. 4. Jihozápadní svah k o t y 8 6 9 m u »Z u k m a n t e l u«. Malé (30 m²), ale typicky vyvinuté individuum pod rozestouplým nadrostem poblíže prameniště. Vlivem většího světelného požitku uplatňuje se více i *Senecio Fuchsii*, tvořící s kapradinami nejvyšší patro bylinné vrstvy, pod ním následují dvě patra nižší, která určují *Impatiens* a *Lamium luteum* s *Oxalis*. — 11. VIII. 1932.

Sn. 5. Východní svah Velkého Görlinku. Subtyp tvoří přerušovaně podrost staré (120 r.) jedlině mírně prosvětlené D_A — 20 m). Stromy mají v objemu 100—140 cm. Vrstva bylinná má opět tři patra se stejnými dominantami jako předešle. — 11. VIII. 1932.

Sn. 6. V okolí osady B a n k y. Prosvětlený les stáří kol 65 r., v němž se přerušovaně vyskytuje tento podtyp na velkých plo-

chách, ale jen za severní a severozápadní expozice. Bylinná vegetace rozvrstvena jako předešle. — 3. VII. 1932.

Sn. 7. se západních svahů *Paradajsu* zachycuje společenstvo, které lemuje širokým pruhem lesní cestu, zejména tam, kde z ní občasně stékající voda podmiňuje vyšší stupeň vláhý v půdě. Stáří stromů 75—80 r. densita 20 m, objem průměrně 140 cm. V bylinné vrstvě zřetelnější pouze dvě patra (*Impatiens*, *Oxalis*). 2. VII. 1932.

II. *Petasites albus* — *Oxalis acetosella* — typ.

Ekologicky příbuzný s předchozím společenstvem jest tento typ, který však nelze srovnávat s analogickým podrostem v přirozených poměrech, poněvadž v bučinách na Štiavnicku nebyl zjištěn. Ze soupisu druhů vyplývá, že se jedná o značně ochuzený fragment téměř bez charakteristických druhů bukových. Jest tudíž velmi nesnadno přiřaditi jej k některému ze společenstev s *Petasites* známých odjinud.

Sn. 8. zachycuje jeden z největších fragmentů v roklině severně od Horního Hodrušského rybníka. Individuum tvoří přerušovaný pruh velikosti 30×15 m podél periodického toku ve velmi prosvětlené jedlině, staré as 75 r. Půda je hlinitá, slehlejší, okrové barvy, blíže povrchu humusem temněji zbarvená, mírně kyselá (pH 6.2). Rozdíl mezi absolutní a momentální vodní kapacitou půdní činil 14%. — 15. VII. 1932.

III. Nejpozoruhodnějším případem příbuznosti a shod mezi přirozenými bučinami a umělými jedlinami na Štiavnicku jest oběma společný typ lesní, který se v literatuře označuje **bučina nahá (*Fagetum nudum*)**. Vzájemná afinita jest tím nápadnější, že se netýká pouze floristicko-fyziognomické stránky podrostu, nýbrž i dynamické: jako v některých bučinách nahých lze pozorovati intensivní zmlazování buku z náletu, obdobný zjev — přirozené zmlazování jedle — vyskytuje se i v jedlinách tohoto typu. Příčin jeho vzniku jest určitě několik (viz na př. DOMIN, 1931), podobně jako jest několik variant nahých bučin, podle DOMINA stadií některých (různých) sociací nebo variant.

U analysovaných individuí tohoto typu jedlin na Štiavnicku nelze soudit, že by byla na př. důsledkem holoseče, neboť stromové patro není stejného stáří, nebo že by přílišné zastínění nedovolovalo vývoj podrostu. Rovněž vrstva steliva jest velmi slabá (sotva 1 cm), půda jest mírně sušší, hrudko-

vitá hnědozem, takořka bez skeletu, asi do hloubky 15 cm humusem temněji zbarvená, pH v rhizosféře bylinného podrostu 6.2, mimo podrost reakce stejné, ve větší hloubce (kol 20 cm) 6.2—6.1. Příčinou chudosti podrostu analysovaných individuí mohla by býti jejich osamocenost v hlubokých jedlinách a jistá izolace od přirozených bučin, ačkoliv ustrnutí od dalšího vývoje podrostu není tím vysvětleno.

Ačkoliv floristicky jsou tyto jedliny chudé, vykazují přes to značnou promiskuitu druhovou. Pozoruhodná jest na př. přítomnost charakteristických druhů jedlových (kromě jedle *Circaea lutetiana* a *Sambucus racemosa*) vedle druhů antropochorních (*Geum urbanum*, *Stellaria media*, případně i *Urtica dioica*), které vesměs ve vlastních bučinách nahých chybí. Vztahy k nim jsou však nejtěsnější. Jedlinám s nimi analogickým chybí (kromě charakteristických druhů bukových, které se v jedlinách vůbec nevyskytují) většinou jen druhy, vykazující v bučině nahé nižší stupeň presence jako *Paris*, *Polygonatum multiflorum* a *verticillatum*, *Anemone ranunculoides*, *Asarum*, *Isopyrum* (presence vesměs I. třídy), vzácněji druhy presence vyšší — pokud z malého počtu analysovaných individuí těchto jedlin lze soudit — (*Lamium luteum* IV. tř., *Pulmonaria officinalis* II., *Scrophularia nodosa* III. tř.). Společným znakem porovnávaných společenstev jest též snížená vitalita mnohých druhů.

Lokální rozmach *Oxalis acetosella* a některých mechů, způsobený větším zastíněním, mění částečně celkovou fyziogonomii podrostu (a vybavuje poněkud představu CAJANĎEROVA **Asperula-Oxalis** subtypu), tato okolnost nemá však zásadního významu, neboť jest běžná v našich jehličnatých lesích vůbec.

Sn. 9. V jedlovém komplexu jižně od Teplic Sklenô. Nadrost starý 65—100 r., mírně prosvětlený (D_A 15 m). Objem stromů 75—140 cm. 5—10% půdy zaujato přízemní vegetací, z čehož nejvíce připadá na jedlový a bukový nálet. Rozsah individua asi 500 m², na této ploše ve stromové vrstvě asi 2—3 buky. Celek působí dojmem dosti přirozeným; je možno, že se jedná o zbytek jedlové enklávy v bučinách bývalých. — 23. VIII. 1932.

Sn. 10. Tamtéž co předešle, ale jiné podrostové individuum v čisté, značně prosvětlené jedlině (D_A 50 m) asi 100 r. staré, poněkud vlhčí, nežli byla přechozí, a proto kvantitativně bohatší;

zbývá jen 10% holé půdy kryté jehličím. Rozsah šetřeného individua 400 m². V sousedství, kde jest nadrost více zapojený, chybí mechy, *Oxalis* tvoří jen malé clany a jiné druhy (*Asperula odorata*, *Cardamine impatiens*, *Carex digitata*^o, *Campanula trachelium*^o, *Geranium robertianum*, *Lactuca muralis*, *Stellaria media*) rostou velice rozptýleně. — 23. VIII. 1932.

IV. *Carex pilosa* — typ.

6. *Carex pilosa* — *Luzula nemorosa* — subtyp. — Ve vlastních bučinách (ev. doubravách) jistý stupeň degradace vykazují ony s podrostem *CLn-st-u*, rostoucím na kyselejších a kyselých půdách (pH 5.5—5.2, Štiavnicko), zejména přichází-li tento podtyp ve **facii s *Vaccinium myrtillus***, v níž na místo druhů bukových přejímají vládu prvky hercynské. Tato degradace, pokud se týká bučin, mohla býti v některých případech přirozená, podmíněná na př. vrcholovým klimatem, jako je tomu na Štiavnicku v bučinách na severních svazích vrcholku Sitna (R. MIKYŠKA, 1932). V tomto případě jest tu prostě dán přirozený, ochuzený a sociologicky méně vyhraněný typ bučiny, která, poněvadž vegetuje pod vlivem přirozených podmínek, má vlastně charakter trvalého společenstva, podmíněného lokálně klimaticky a edaficky.

S ohledem na jeho floristické ochuzení (ve srovnání s bučinou vlastní) lze tu mluvit o přirozené »degradaci«, jako následku působení určitých přirozených činitelů, ač ovšem ve většině případů jest těžko rozlišovat mezi činiteli přirozenými a umělými, protože se obojí namnoze k všeobecné degradaci sbíhavě usměrňují.

V bučinách Štiavnického středohoří se stupňování degradace v podrostu jeví sledem: *CLn-st* → *facie CLn-st-u s Vaccinium myrtillus* → *Vaccinium myrtillus Calamagrostis arundinacea* — typ, v tamnějších jedlinách dalo se pod antropickými zásahy ještě její další sesílení, celková regrese podrostu zůstává však táž. Avšak z rázu stanovišť, zpravidla k severu obrácených a více méně exponovaných lze předpokládati, že antropická degradace byla v mnohých případech předurčena »degradací« přirozenou.

Obdoba vlastního *CLn-st-u*, vyskytujícího se v jedlinách, činí dojem společenstva stínmilovnějšího. Chybí mu na př. *Carex pilosa*, *Galium vernum*, značný rozvoj vykazuje opět

vegetace mechová a *Oxalis*. *Asperula odorata* a *Dentaria bulbifera* mají sníženou abundanci + dominanci, jakož i presenci, mnohé druhy bukové, nebo v bučinách (ve vlastním *CLn-st-u*) vysokofrekventní, vůbec chybí (*Polygonatum multiflorum*, *Lathyrus vernus*, *Pulmonaria officinalis*, *Sanicula*, *Symphytum tuberosum*), za to objevuje se řada významných indikátorů kyselých půd, což jest známkou vyššího stupně degradace. *Deschampsia flexuosa*, *Maianthemum*, *Hieracium murorum*, *Solidago virga aurea*, *Sorbus aucuparia* jsou přítomny téměř konstantně, *Vaccinium myrtillus* začíná se uplatňovati stále více a usměrňuje tak vývoj k facii **CLn-st-u s Vaccinium myrtillus** (viz sn. 14.), přecházející znenáhla k vlastnímu typu s **Vaccinium myrtillus**.

Konečně nechybí ani druhy, které poukazují na vztahy k doubravám, jež v některých případech mohly býti východiskem degradace (viz sn. 11., 12.).

Jedlová modifikace *CLn-st-u* roste na písčito-hlinitých půdách mírně kyselých až kyselých (pH v rhizosféře podrostu 6.2—5.2, pod rhizosférou 5.8—5.0), chovajících 40—50% skeletu většího 2 mm. Půda bývá ve svrchních partiích profilu humusem temně zbarvená, hlouběji (od 10—15 cm) jasně okrově. Vrstva steliva jest nepatrná. Zjišťovaný rozdíl mezi momentální absolutní vodní kapacitou půdní činil: 7.0% (sn. 11.), 9.3% (sn. 12.).

Okolnost, že jedlová modifikace *CLn-st-u* jest na Štiavnicku mnohem častější nežli vlastní *CLn-st* v porostech přirozených, jest dalším projevem degradace.

Sn. 11. **Paradajs (Hodrušské lesy)**. Zapsané individuum jest vlastně poněkud promíseným společenstvem. Představuje jednu z prvních fází stupňující se degradace, která vede později k většímu zvýraznění jedlové modifikace *CLn-st-u*. Průměrná densita nadrostu 17 m, stáří kol 75 r., objem stromů 130 cm. Rozsah podrostového individua 400 m², celkový kryt 95%. — 19. VI. 1932.

Sn. 12. **Studený vrch**. Typičtější případ jedlové modifikace *CLn-st-u*, zaujímající na této lokalitě přerušovaně velké plochy. Tam, kde jest nadrost zapojenější, vyskytují se jednotlivé druhy jen izolovaně, kde došlo k prosvětlení, rostou více pospolitě. U zapsaného společenstva (rozsahu 250 m²) jen 15% půdy není zajiženo vegetací. Stáří nadrostu 90—100 r., densita 20 m, objem stromů 80 cm. — 21. VII. 1932.

Sn. 13. **Horní Roveň**. Z individua zaujímajícího celý svah

v jedlině pod jmenovanou obcí, obrácený k severu, zapsáno 300 m². Nadrost má stáří 80—100 r. hustotu 12 m, objem stromů činí 90 až 100 cm. V bylinném patře dominuje *Luzula nemorosa*, místy přibývá *Vaccinium myrtillus*. Tento druh, jakož i *Deschampsia flexuosa* a mechy vyhýbají se sušším strmějším úklonům, což lze sledovat i ve velmi jemném reliéfu. — Na této lokalitě vyskytuje se i *varianta CLn-st-u s Vaccinium myrtillus*, kterou podává sn. 14—12. VIII. 1932.

V. *Vaccinium myrtillus* — typ.

Velmi intenzivní stupeň degradace původních listnatých lesů — nejvyšší v rámci lesních společenstev — patrný nikoliv negativně, t. j. chyběním jakéhokoliv bylinného podrostu v jedlinách, jest **typ s *Vaccinium myrtillus***, charakterisovaný jednak úplnou absencí prvků bučin (v krajním případě i doubrav), jednak dominancí *Vaccinium myrtillus*, jakož i souvislou (a rozmanitou) vrstvou mechovou. Významné jest též rozestupování se stromového patra a rozrůznění dřevin v obou vrstvách a přímo hercynská chudost (uzavřeně) vrstvy C. Toto společenstvo představuje — nehledě k hustě zapojeným kulturním lesům (nejmě smrkovým), které jsou přechodně bez regenerujícího podrostu — vrcholné degradační stadium podrostové vegetace lesní, v případě, že stromové patro (většinou nepřirozené) zůstalo zachováno.

Jinak osamostatňuje se toto (často přestupující) společenstvo v **Myrtilletum** (jakožto společenstvo sekundární) a za trvající destrukce, zejména za působení vlivů zoobiotických, usměřňuje se další regrese (přes **Nardeto-Myrtilletum**) ke svazu smilkových pastvin (**Nardion**), v němž jsem ji (na Štiavnicku) sledoval již dříve (1932).

Ekologicky charakterisují tento typ silně kyselé (pH 5.2—5.0) písčito-hlinité, slehlejší podzolované půdy s hojným skeletem (nad 30%), kryté 6—10 cm silnou vrstvou hrubého humusu propleteného četnými hyfami hub. Rozdíl mezi absolutní a momentální vodní kapacitou půdní činil 22.5 a 8.9%.

Ve srovnání s ***Vaccinium myrtillus* — *Calamagrostis arundinacea*-t-em**, který jest konvergentním společenstvem pod zachovalým bukovým nadrostem ve vzpomenuuté již vrcholové bučině na Sitně, opakují se v typu s ***Vaccinium***

myrtillus v jedlinách právě nejvýznamnější druhy (*Deschampsia flexuosa*, *Polypodium vulgare*, *Hieracium murorum*, *Sorbus aucuparia*, *Betula alba*, *Vaccinium*, též *Oxalis*, *Nephrodium filix mas*), chybí zejména *Calamagrostis arundinacea*, *Convallaria*, *Melampyrum nemorosum* a ovšem též druhy s jistou vázaností k bučině, ale jinak z nejudolnějších vůči degradaci, jako *Galium Schultesii*, *Lathyrus vernus*, *Phyteuma spicatum*, *Prenanthes*, *Rubus idaeus*, *Fagus*.

Sn. 15. Okolí Horního Hodrušského rybníka. Enkláva v silně prosvětleném (densita v A 20—30 m) lese stáří 80—90 roků. Objem stromů prům. 75 cm. Analysované *Myrtilletum* má *CLn-st-u*. 2. VII. 1932.

Sn. 16. Okolí Rozgrundského rybníka. Stromový nadrost rozrůzněný druhově i stářím, objem stromů 45—85 cm, hustota 10 m. Rozsah individua 400 m². (V jeho sousedství menší paseka s vysázenými stromky a s typickým Nardetem!) — 21. VII. rozsah 300 m². Mimo ně se *Vaccinium* šíří tu a tam s pařežů do *CLn-st-u*. 2. VII. 1932.

Závěrečná poznámka. Časté probírky v popsáných jedlinách dovozovaly posouditi ze zbylých pařežů příčné přírůstky v jednotlivých podtypech, ovšem jen z pozorování šířky letokruhů. Ukázalo se, že v *AMp-st-u*, *AI-st-u*, typu s *Petasites albus* a v bučině nahé byly tyto roční přírůstky nápadně větší, nežli v *CLn-st-u* a ve *Vaccinium myrtillus-t-u*. Jest tudíž patrné, že na vlivy sledované degradace reaguje souhlasným způsobem i nadrost, což může býti dokladem jejího hlubokého dosahu.

V druhovém seznamu jest uváděna abundance + dominance podle kombinované stupnice Braun-Blanquetovy (Pflanzensoziologie, Berlin, 1928) a sociabilita (druhé číslo), římské číslice značí kryt dřeviny ve vrstvě stromové (A). Jména druhů jsou uváděna podle Klíče k úplné květeně RČS (Polívka-Domin-Podpěra, Olomouc, 1928).

Kromě druhů zaznačených v tomto seznamu, byly v jednotlivých vegetačních individuích jedenkrát zjištěny ještě tyto druhy:

Glechoma hirsuta 1.1, *Melandryum silvaticum* +, *Pulmonaria officinalis* +, B *Acer campestre* +, (sn. 1.) — *Rubus saxatilis* +, A *Quercus sessiliflora* I' (sn. 2.) — *Festuca gigantea* +, *Milium effusum* +. 2, *Aegopodium podagraria* 1.1, *Asarum europaeum* +, (sn. 3.) — B *Ulmus scabra* +, (sn. 4.) — *Daphne mezereum* +, (sn. 5.) — *Carex remota* +, (sn. 6.) — *Carex silvatica* 1.1, *Caltha palustris* 2.2 (loc.), (sn. 8.) — *Carex muricata* +, B *Acer platanoides* +, B *Sorbus torminalis* +, B *Ulmus glabra* +, A *Fagus silvatica* +, (sn. 9.) — *Sanicula europaea* +, *Rosa pendulina* +, (sn. 10.) — *Arabis arenosa* +, (sn. 11.) — *Ajuga genevensis* +, *Fragaria moschata* 1.1, *Taraxacum*

officinale^o +, *Mnium punctatum* 1.1, (sn. 12.) — *Paris quadrifolia* +, (sn. 13.) — *Chrysanthemum leucanthemum*^o + (sn. 14.) — *B Quercus robur* 1.1, *Hieracium umbellatum* +, *Galium vernum* +, *A Betula alba* +, *Leucobryum glaucum* 1.2, (sn. 15.) — *A Pinus silvestris* I, *Frangula alnus* +, *Juniperus communis* +, *B Populus tremula* +, *Polytrichum strictum* 2.2, *Fissidens* sp. +, *Sphagnum* sp. 2.2, *Cladonia* sp. +, (sn. 16.)

V ý k l a d k t a b u l k á m.

T a b. I. Křivka A—B znázorňuje, jak počet druhů bylinného a křovitého patra je přímo závislý spíše na světelné ekonomii, nežli na vlhkosti půdní (srovnej s odhadnutým zápojem vrstvy A). Významnější odchylky (sn. 15. a 16.) lze vysvětliti činiteli, kteří se uplatňují při degradaci (srovnej na př. s hodnotami *pH*). Důležitou okolností jest i rozvoj vegetace mechové, která v posledních dvou individuích tvoří souvislý pokryv a uplatňuje se jako konkurenční faktor. Křivka A—B dovoluje posouditi též druhovou bohatost jednotlivých individuí. Z celkového počtu druhů *AMP-st-u* v bučinách se přes umělé zásahy jich přibližně udrželo v jedlové modifikaci 77·8%, *AI-st* jest v jedlinách bohatší o 8·7% nežli tentýž podtyp v bučinách, jedlová modifikace *Fn* jest však již asi o 50%, *CLn-st* dokonce o 75% bohatší nežli analogická společenstva v bučinách event. v doubravách. Tato druhová bohatost jest podmíněna variabilitostí, která jest obvyklým zjevem při každém vývoji regeneračním. Při větším počtu snímků mohla by býti měřítkem pro posouzení, jak jest vegetace vzdálena od původních poměrů. Zvýšení počtu druhů v jedlových modifikacích charakterisovaných podtypů jest podmíněno z největší části stínumilnými druhy, zejména mechy, méně antropochorními druhy a apofyty, konečně i druhy náhodnými, přestupujícími nebo udrževšími se z jiných společenstev.

Velká rozmanitost činitelů destrukčních i později regeneračních způsobuje, že křivky F, f a Q neprobíhají rovnoběžně s křivkou A—B.

V druhém oddílu této tabulky jsou zachyceny % poměry mezi druhy jednotlivých kategorií (*Fagion*, *Fagetum*, *Quercion*). Jest tu zřejmý poměr mezi F a f, pokud půda není více kyselá (viz sn. 13.). Z průběhu těchto křivek (včetně křivky Q) lze posouditi velikost odchylky těchto modifikovaných subtypů od přirozených poměrů. Tato odchylka jest tedy nejmenší u *AMP-st-u* (sn. 2. a 3.), *Fn* (sn. 9. a 10.), částečně u *AI-st-u* 3. a 5. z horských, celkem málo ovlivňovaných porostů). Též však podtypy s *Luzula nemorosa* (kromě individua č. 13, nejvíce modifikovaného a ochuzeného) upomínají silně na poměry v přirozených doubravách (viz str. 11.) Nápadný jest vzestup křivky Q v individuu 15., avšak »dubové« druhy v tomto porostu mají jen nízkou abundanci+dominanci. Individuum 16. (*Myrtilletum*), vystupuje sociologicky ještě samostatněji. Sou-

časná přítomnost druhů *Fageta* i druhů svazu *Quercion* v některých snímcích svědčí též o jisté promiskuitě podrostu v tomto svazu, běžné i v poměrech přirozených (viz str. 5. a n.).

Protisměrný průběh křivek V_k a S v dalším (třetím) oddílu tab. I. ukazuje obvyklou nepřímou závislost mezi absolutní vodní kapacitou a množstvím skeletu v půdě. Ve většině případů linie F a f vykazují obdobný průběh s linií V_k. Jiné poměry u č. 15. a jsou podmíněny absorbní schopností hrubého humusu, který tvoří u těchto individuí silnou vrstvu v profilu.

Půdní reakce v oddílu čtvrtém (ke grafickému znázornění jsou užity jen hodnoty pH z rhizosféry podrostu), vykazují od stu. 1. až ke 12. hodnoty pH, jaké jsou na Štiavnicku průměrem i v přirozených poměrech.

Reakce pH 5·2—5·0 v přirozených lesích na Štiavnicku nebyly zjištěny; blíží se jim pouze redakce půdy zaujaté vrcholovou bučinou na Sitně, méně již půdy některých individuí *CLn-st-u* v bučině nebo doubravě.

Tab. II. znázorňuje, vztah reakce půdní k druhovému složení podrostu. Horní silná čára znázorňuje hodnoty pH v rhizosféře, čárkovaná zachycuje hodnoty PH pod rhizosférou. Z průběhu obou křivek jest zřejmo, že jest přímý vztah mezi degradací asociace nebo typu a aciditou půdní, přes to, že většina druhů má vzhledem k pH dosti širokou amplitudu. Zástupce druhů půd mírně kyselých (pH 6·3—6·1) od druhů acidofilních (pH 5·2—5·0) lze rozlišiti i tehdy, stoupá-li acidita půdy nehluboko pod rhizosférou, Sn. č. 11 a 12, představují nám dosti výrazně, jak výskyt acidofilních druhů závislý jest na půdní reakci.

Dendrologický ústav vys. školy zemědělského a lesnického inženýrství při vys. učení technickém v Praze.

Literatura.

- J. Barták Z minulosti štátneho lesného hospodárstva v okolí B. Bystrice a Starých Hôr. B. Bystrica, 1929. — J. Braun-Blanquet Zur Kenntnis nordschweizerischer Waldgesellschaften. Beih. z. Bot. Centralbl. Bd. XLIX, 1932. — A. C. Cajander: Über Waldtypen. Acta forestalia fennica. Helsingfors, 1909. — V. Dědina Slovenské Krušnohoří a Středohoří. Sbor. čs. Spol. Zem. 1922. — K. Domin Československé bučiny. Studie geobotanická. Sbor. výzk. ústavů zeměd. v ČSR., Praha, 1931. — S. Dziubalowski Étude phytosociologique du massif de St. Croix. I. Les forêts de la partie centrale de la chaîne principale et des montagnes: »Stawiana« et »Miejška«. Acta Soc. Bot. Poloniae, Warszawa, 1928. — Týž: Le sapin sur la limite septentrionale de son aire en Pologne. Acta Soc. Bot. Poloniae, Warszawa, 1930. — J. Fekete-T. Blattny Die Verbreitung der forstlich wichtigen Bäume und Sträucher im ungarischen Staate. Selmezbánya, 1914. — A. Hiltzer: Lesní typy. XX. století, díl II. Praha, 1931. — J. Klika Příspěvek ku geobotanickému výzkumu Velké Fatry. Preslia V 1927. — Týž: Lesní typy v rámci našeho lesního geobotanického prozkumu a jejich vztah k lesnictví. Sbor. Čs. Akad. Zem. Praha, 1929. — J. Kopecký Půdoznalství. Část agrofyzikální. Publ. Min. Zem., Praha 1928. — B. Lindquist Den Skandinaviska boksogens biologi. (The ecology of the Scandinavian beech-woods, Svenska Skogs-vardsföreningens Tidskrift. Häfte 3, 1931. — K. Linkola: Studien über die Einfluß der Kultur auf die Flora in Gegenden nördlich vom Ladogasee. Helsingfors, 1916, 1921. — R. Mikyška: Lesní typy přirozených porostů ve Štiavnickém středohoří. Sbor. Čs. Akad. Zem., Praha, 1930. — Týž: Vrcholová bučina na Sitně ve Štiavnickém středohoří. Výr. zpr. st. čs. uč. úst. v B. Štiavnici, 1931/32. — Týž: O smilkových pastvinách ve Štiavnickém středohoří. Sbor. Čs. Akad. Zem., Praha, 1932.

Résumé.

Les forêts à Abies alba de montagne de Štiavnica.

Par. R. Mikyška.

(Présenté le 9 mai 1934.)

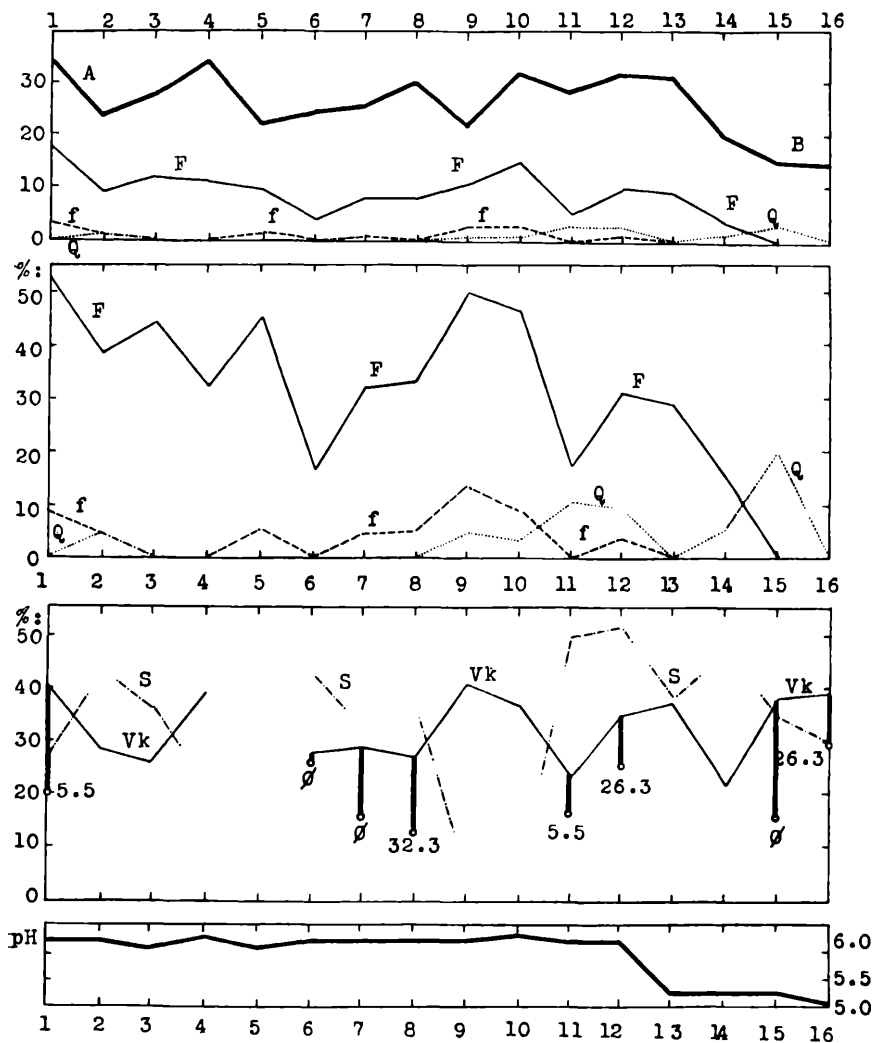
Les montagnes d'andesite de Štiavnica (Schemnitzer Mittelgebirge) sont couverte pour la plupart par des hêtraies qui y représentant *le climax de végétation*. À la pente du Sud (plus tempérée) nous trouvons des chênaies (qui appartiennent à l'alliance du *Quercion pubescentis-sessiliflorae*). Ces forêts

naturelles fournissaient du bois pour les mines, elles avaient été très ravagées par l'homme. Plus tard on y a planté beaucoup de *Abies alba* (arbre autochtone de la région) et de *Picea excelsa*. En conséquence on peut suivre aujourd'hui les stades de dégénération des forêts originaux jusqu'au *Nardetum*.

L'auteur suit les phases de dégradation dans l'*Abietetum*. Elles sont appauvries des espèces caractéristiques des hêtraies et des chênaies (*Elymus europaeus*, *Fraxinus excelsior*, *Carex pilosa*, *Hedera helix*, *Isopyrum thalictroides*, *Symphytum tuberosum* etc.). Les espèces qui restent, montrent les caractères quantitatives (l'abondance et la dominance) tout-à-fait différentes des forêts originaux. La dominance des espèces préférant l'ombre (*Oxalis acetosella*, *Impatiens noli tangere*, *Circaea lutetiana*, *Musci*) est plus grande. On trouve beaucoup des ubiquistes dans ces stades. Les forêts de l'*Abies alba* ne nous déprésentent pas d'association stable. Il y a la tendance d'approcher aux types forestiers originaux par des phases progressives. Il faut donc associer les types de l'*Abietetum* aux types des *Fagetum* et *Quercetum* de montagne de Štiavnica.

Nous trouvons dans les forêts de sapin: 1. le soustype d'*Asperula odorata* *Mercurialis perennis* (voir p. 7.), celui d'*Asperula odorata* *Impatiens noli tangere* (voir p. 8.) qui tous les deux appartiennent au type de l'*Asperula odorata*; 2. le soustype de *Carex pilosa* - *Luzula nemorosa* (voir p. 11.). Puis il y a une *facies* à *Vaccinium myrtillus* qui peut se transformer en *Vaccinietum myrtillosae* (voir p. 13.), qui représente le stade de la plus profonde dégradation de la forêt. On y peut trouver des fragments d'un type nouveau de *Petasites albus* *Oxalis acetosella* (p. 9.).

Le sapin prospère très bien dans les sous-types du type de l'*Asperula odorata*, mais il ne se porte pas bien dans le soustype *Carex pilosa* - *Luzula nemorosa* et dans les *Vaccinietum*.

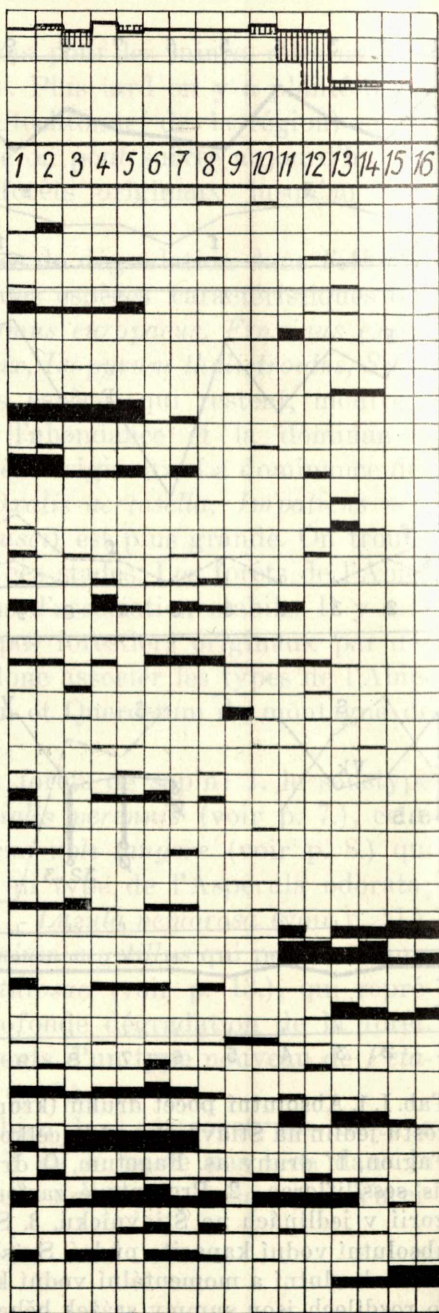


Tab. I. 1. Absolutní počet druhů (kromě Thallofyt a Bryophyt) v podrostu jedlin na Štiavnicku: AB, celkový počet druhů, F druhy svazu Fagion, ff druhy as. Fagetum, Q druhy svazu Quercion pubescens-tis sessiliflorae. 2. Procentové zastoupení těchto druhových kategorií v jedlinách na Štiavnicku. 3. S, skelet půdní nad 2 mm; Vk, absolutní vodní kapacita půdní. Svislé linie značí rozdíl mezi absolutní a momentální vodní kapacitou půdní; čísla při těchto rozdílech jsou summy srážek během 7 dní před určováním momentální kapacity. 4. pH. Čísla 1–16 jsou čísla snímků.

pH: 6.0
5.5
5.0

Snímek č.:

- C-*Brachypodium silvaticum*
Melica uniflora
Poa nemoralis
Actaea spicata
Asperula odorata
Campanula trachelium
Galeopsis grandiflora
Galium Schultesii
Lamium luteum
Lathyrus vernus
Mercurialis perennis
Phyteuma spicatum
Prenanthes purpurea
Primula elatior
Ranunculus lanuginosus
Senecio Fuchsii
Stachys silvatica
Viola silvatica, Riviniana
B-*Acer platanoides*
Fagus silvatica
Lonicera xylosteum
Ribes grossularia
Rubus idaeus
C-*Polystichum lobatum*
Dentaria bulbifera
Euphorbia amygdaloides
Circaea lutetiana
Deschampsia flexuosa
Luzula nemorosa
Nephrodium filix mas.
Maianthemum bifolium
Cardamine impatiens
Epilobium montanum
Geranium robertianum
Hieracium murorum
Impatiens noli tangere
Lactuca muralis
Oxalis acetosella
Stellaria media
Urtica dioica
Vaccinium myrtillus
B-*Sorbus aucuparia*



abundance +
dominance:

+ 1 2 3 4 5

Tab. II. — pH a charakteristické druhy bukové (svazové a asociáč-
 ní), vysokofrekventní a dominantní průvodci v podrostu jedlin
 na Štiavnicku.

JEDLINY VE ŠTIAVNICKÉM STŘEDOHŘÍ.

Snímek	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
Nadmořská výška v m	620	820	550	770	800	750	700	650	650	600	640	750	760	740	600	720
Expozice a úklon	ZSZ 40°	J 2-3°	S 2-5°	VJV 10°	V 5-10°	S 5-10°	Z 15°	ZSZ 15°	V 10°	V 2-5°	Z 20-25°	S 5°	S 5°	Z 20-25°	SZ 5°	S 2-5°
Celkový zápoj vrstvy A	3	3+	2	1	2	2-	3	1+	2-3	2	3-	2+	3-	3-	1	2+
pH v rhizosféře/pod rhizosférou vrstvy C	6.2/6.2	6.3-6.2/6.2	6.1/5.8	6.3/6.3	6.1/6.2	6.2/6.2	6.2/6.2	6.2/6.2	6.2/6.2	6.3/6.1	6.2/5.5	6.2/5.0	5.2/5.0	5.2/5.1	5.2/5.2	5.0/5.0
Absolutní vodní kapacita půdy v %	40.5	28.5	26.2	39.0	—	28.1	29.0	27.5	40.8	37.0	23.5	35.3	37.7	21.5	38.0	38.9
Skelet nad 2 mm	27.0	43.7	36.0	22.0	—	43.0	33.0	36.0	6.0	5.0	50.0	52.0	39.0	47.0	36.5	30.0
Charakteristické druhy sv. Fa- gion silvaticae:																
Brachypodium silvaticum								+1		+1						
Carex digitata									+1	+1						
Melica uniflora	+1	2.2														
Poa nemoralis				+1	+1			+1				+2				
Actaea spicata	+1												+1			
Asperula odorata	2.2	1.2	1.1	1.1	2.1							+1	+1			
Campanula trachelium									+1°	+1°	2.1	+1	+1			
Galeopsis grandiflora			+1							+1						
Galium Schultesii			+1						+1°			+2	1.1	1.1		
Lamium luteum	3.2	3.2	3.3	3.3	4.4	+1	1.1				+1					
Lathyrus vernus		+1														
Mercurialis perennis	4.3	4.3	1.1	1.2	2.2						1.2					
Phyteuma spicatum								+1						1.1		
Prenanthes purpurea	+1										+1		2.1	+1		
Primula elatior	1.1		+1				+1					1.1				
Ranunculus lanuginosus	+1			1.1		+1	+1	1.1								
Senecio Fuchsii	2.1	+1	+1	3.1	1.1		2.1	1.1			2.1°				+1	
Stachys silvatica				+1	+1		+2			+1°						
Viola Riviniana (silvatica)	1.1	(1.1)	(+1)	1.1		(2.1)	(2.1)	2.1	(+1)	(+1)	1+1	(1.1)	(+1)			
Acer pseudoplatanus	+1		1.1									+1				
Fagus silvatica			+1						2.1	+1		+1				
Lonicera xylosteum				+1	+1					+1	+1			+1		
Ribes grossularia	+1				+1											
Rubus idaeus	2.1			1.1	1.1	2.1		1.1								
Charakteristické druhy as. Fa- getum herbosum.								1.1			+1°		+1			
Polystichum lobatum	1.1								+1°	+1°						
Dentaria bulbifera	1.1	1.1														
Euphorbia amygdaloides																
Charakteristické druhy Quercion pub.-sessilifl.:																
Campanula persicifolia											+1	1+2		+1		
Digitalis ambigua											1.1°	+1°				
Carpinus betulus										+1	+1					
Průvodci:																
a) Charakteristické druhy Abie- teta albae:																
Circaea lutetiana	1.2	1.1	2.1	+1		1.2	1.1				+1					
Abies alba	1.1, II	2.1, II	1.1, II	+1, —	2.1, II	1.1, I	2+1, II	2.1, II	2.1, II	2.1, I	3.1, II	1.1, II	1.1, II	1.1, II	2.1, I	3.1, II
Sambucus racemosa	1.1				1.1											
b) Ostatní průvodci:																
Deschampsia flexuosa											2.2		2.2	2.2	3.1	3.1
Luzula nemorosa					+1						4.3	4.3	3.2	4.2	1.1	2.1
Athyrium filix femina			2.1	+1		1.1	1.1	1.1					+1	+1		+1
Nephradium filix mas.		+1		1.1	1.1	1.1	+1	1+1		+1	+1	+1	+1	1.2	+1	
Polypodium vulgare	+1°												+1		+1°	
Epipactis latifolia									+1°							1.2
Maianthemum bifolium			+1					1.1	+1°			+1	3.1	2.1	1.2	2.2
Ajuga reptans													+2			
Alliaria officinalis		1.1		+1	2.1											
Cardamine impatiens	+1			+1		+1	+1	+1	1.1	1.1	+1	+1				
Epilobium angustifolium (montanum)	+1	(1.1)	(+1)	(+1)	(+1)	(2.1)	(+1)	(+1)		(+1)	+1, (+1)	(1.1)	(+1)	(+1)		
Fragaria vesca			1.1	2.2		1.1		2.1		+1		2.2	+1			
Galeopsis pubescens				+1	+1				+1°							
Geranium robertianum	2.1	2.1	1.1	2.1	2.1	3.2	2.1	1.1		+1	1.1	+1	+1		1.1	
Geum urbanum		1.1		1.1		1.1	+1				1.1					
Glechoma hederacea																
Hieracium murorum		+1				+1		+1								+1
Hypericum hirsutum (perforatum)									+1°		(1.1°)	+1	3.1	3.1		
Chrysosplenium alternifolium			2.1			3.2	+1	+1				+1				
Impatiens noli tangere	2.2°	+1	4.3	4.3	4.3	4.4	4.4	+1								
Lactuca muralis	+1	2.1	+1	+1	1.1	+1	+1	+1	+1	1.1	+1	1.1	+1	+1		
Lampsana communis				+1				1.1								
Myosotis silvatica				+1				+1								
Oxalis acetosella	3.2		1.2	3.2	3.3	4.2	2.2	3.2	+2	3.3	3.2	3.2	3.2	+2	1.1	
Petasites albus	+1°							4.4			+2°					
Ranunculus repens				+1												
Scrophularia nodosa						+1							+1			
Solidago virga aurea					1.1	2.2	+2	2.2			+1	1.1	+1	+1		
Stellaria media		+4	+1	+1		2.1	2.1	1.1	+2	+2						
Urtica dioica	2.1	+1	2.2	2.1						+1						
Vaccinium myrtillus													2.2	2.2	4.3	4.3
Veronica chamaedrys (officinalis)				(+1°)					(+1)	(+1)	+1, (1.1)	(1.2)	+1, (1.2)	(2.2)	+1	+1
Betula alba																
Corylus avellana				1.1								+1				
Rubus sp.	2.1	1.1		1.1		1.1	2.1	+1	+1		1.1	2.2	1.1		+1	2.1
Sambucus nigra				+1		+1	+1	1.1		+1						
Sorbus aucuparia	+1									+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
Cladonia sp.																
Dieranum majus (scoparium)											2+2	(1.1)			(1.2)	1.2
Hylocomium splendens (Schreberi)	(1.1)							(1.1)		3.3, (1.1)	(2.2)		2.1, (3.1)	(1.2)	5.4	1.1, (3.3)
Mnium cuspidatum (rostratum) [undu- latum]			[3.2]			(3.1)		4.3			(+1)	(1.1), [+1]	1.1	(1.2)		1.1
Polytrichum commune											1.2		2.1			

XVII.

Nestálost květních abnormit u *Galanthus nivalis* L.

(*L'inconstabilité des irregularités de fleurs chez Galanthus nivalis L.*)

Napsal Dr. KAREL HRUBÝ.

Práce z ústavu pro fyziologii rostlin Karlovy university v Praze.

Se dvěma obrázky.

(Předloženo 9. května 1934.)

V březnu 1930 byl jsem upozorněn kolegou Ž o f á k e m na abnormální květy sněženek (*Galanthus nivalis* L.), vyskytující se tu a tam mezi obrovským množstvím normálních blíže t. zv. Štěpánského přívozu nedaleko Obříství u Mělníka. Abnormální tyto květy byly zcela pravidelné, stavěné však podle čísla 4 [obr. 1. a), obr. 2. 1)]. Sám pak nalezl jsem kromě těchto na zmíněné lokalitě též zcela pravidelné květy dokonale dvoučetné [obr. 1. c), obr. 2. 5)], které byly skoro častější nežli čtyřčetné, a při pečlivém prohledávání porostu nalezl jsem též různé formy přechodné. Květy čtyřčetné byly zpravidla o něco statnější nežli květy normální, rostlinky pak s květy dvoučetnými byly útlejší nežli ony s květy normálními. Ve všech případech však tomu tak nebylo.

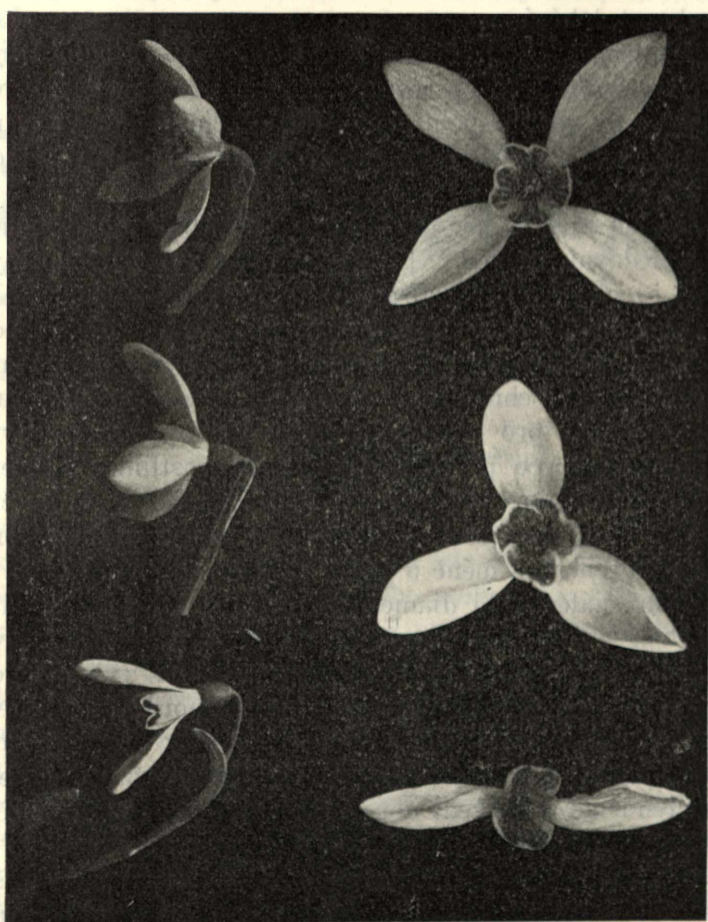
Výskyt těchto různých abnormit nebyl objevem nikterak novým a důležitým, neboť všechny tyto tvary i nesčetné přechody a jiné abnormity květní u *Galanthus nivalis* L. byly již dávno a mnohokrát popsány. Monograficky zabýval se těmito odchylkami S t e n z e l (5) na materiálu z Horního Slezska, jenž považuje květy stavěné podle čísla 2 za dolní hranici abnormit; níže jdoucí redukci částí květních nepozoroval již v žádném kruhu a v žádném případě vůbec. Hranici zmnožení jest již těžší přesněji stanoviti; zdá se však, že bude

jí číslo 4, ač Stenzel (5, p. 18., tab. II., fig. 56) nalezl též květ dokonale pětičetný, míní však, že to spíše jest již přechod ke srůstu dvou květů, čehož několik případů též popisuje. Filarszky (3) rovněž mimo abnormitu, u níž všechny plátky okvětní byly vyvinuty jako vnitřní kruh — tudíž menší, na konci vykrojené a se zelenou kresbou — (l. c. tab., fig. 1, 2). — nalezl na Jánoshegy u Budapešti květy čisté čtyřčetné s celou řadou přechodů. — Též Čelakovský (1) nalezl tyto květy u sněženek z okolí Mělníka, odkudž též popsal *var. hololeuca* Čelak., kde totiž všechny plátky okvětní byly vytvořeny jako kruh vnější, to jest zcela bílé a dlouhé. Popisuje též (1, p. 192—194, fig. v, W, a 2, p. 12—14, tab. I., fig. 1) přechodný tvar mezi květem čtyřčetným a normálním trojčetným u *Galanthus nivalis* L. a nikoliv u *Galanthus gracilis* Čelak., jak chybně cituje Penzig (4, p. 341). Podobných údajů o různých abnormitách květů sněženek jest ještě více (viz Penzig — 4).

Jest zřejmo, že výskyt těchto abnormit není omezen pouze na některou lokalitu, a že skutečně vyskytují se stále, neboť Čelakovský již r. 1891 se zmiňuje o tom, že po čtyřicet let jsou mu podobné případy známy. Jest tudíž nejzajímavějším problémem při tomto zjevu, zdali jsou tyto abnormity stálé, dědičné, čímž by měly ovšem značný evoluční význam. Pokud jsem zjistil, všem citovaným autorům zdál se býti tento problém žádoucím k rozřešení, nicméně pokusil se o to jedině Filarszky (3), jenž přesadil svrchu zmíněné abnormity (se všemi plátky okvětními vytvořenými jako vnitřní, s květy dvoučetnými a čtyřčetnými) do budapeštské botanické zahrady. Prvý případ sledoval čtyři roky a shledal jej stálým, případy druhé (květy dvoučetné a čtyřčetné) však pouze jeden rok a tvrdí, že vytvořily zcela stejné květy, jako rok před tím (1890) na lokalitě původní. Z toho soudí, že abnormální formy květů sněženek jsou konstantní.

Stenzel (5, p. 15) soudí o dvojčetných květech, že jejich stavba dosáhla určité stálosti, takže by nebylo nikterak překvapujícím, kdyby se dědila. — U případu, kdy celý vnější kruh tyčinek se proměnil v třetí kruh okvětních plátek poněkud menších než bývají vnitřní normální (5, p. 35, tab. IV.,

fig. 201), dokonce prohlašuje, že neměl by býti počítán více k rodu *Galanthus*, nýbrž považován za samostatný rod.



Obr. 1. a) květ dokonale čtyřčetný, b) normální květ *Galanthus nivalis* L., c) květ dokonale dvojčetný.

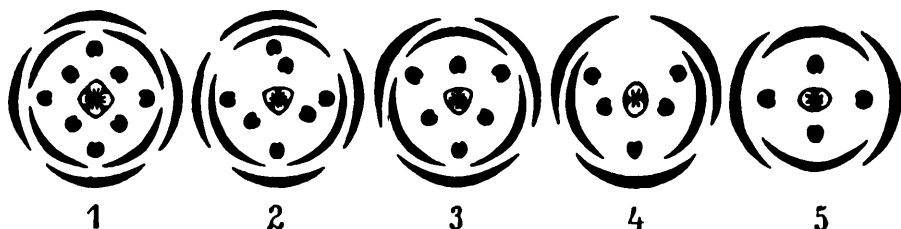
Čelakovský (1, p. 191) praví, že »... některé tyto variace jsou tak zvláštní a při tom pravidelné, že by, jsouce dědičně ustáleny daly vzniknouti netoliko zvláštním plemenům, nýbrž i, kdyby více různých odchylek bylo kombinováno a ustáleno, novým druhům, ano i podrodům. Ovšem, že jsou

u sněženky tyto odchylky ponejvíce neustáleny, vyskytující se tu i tam porůznu mezi množstvím neproměnných jednotníkův; avšak možnost dědičného ustálení jest jinde nade vší pochybnost dokázána.«

Skutečně stálou abnormitou u *Galanthus nivalis* L. jest *var. Scharlokii* Caspary, u níž toulec jest tvořen listeny volnými, jen na spodu spolu souvisejícími, čímž blíží se tvarem toulece jiným *Amaryllidacéim*, kde jsou tyto listeny zcela volné.

Abych zjistil, jak jest tomu se stálostí abnormálních květů, sledoval jsem od r. 1930 sněženky s květy dvoučetnými [obr. 1. c), obr. 2. 5)] a čistě čtyřčetnými [obr. 1. a), obr. 2. 1)], u nichž by se určitá ustálenost dala předpokládati. — Mimo to sledoval jsem též typy přechodné mezi květy trojčetnými a čtyřčetnými. Všechny rostliny byly přeneseny do pokusné zahrady ústavu pro fyziologii rostlin Karlovy university. — Prvním rokem po přesazení zpravidla rostlinky nekvetou, zato v příštím roce zcela pěkně. Výsledky, jež jsem za čtyři leta shledal, ukazují zcela zřetelně, že o nějaké stálosti abnormálních forem, tím méně o jejich dědičnosti nemůže býti ani řeči, čímž nález můj diametrálně se liší od údaje Filarského. — Ve většině případů totiž jak rostliny s květy původně čtyřčetnými, tak s květy dvoučetnými vytvořily druhým rokem po přesazení květy úplně normální trojčetné, které se zachovaly i nadále, pokud rostlinky nezašly. Možno jest připustiti pouze, že některá individua vyznačují se jakousi tendencí k tvoření abnormit, respektive snad dědičnou tendencí k nestálosti diagramu květního. Tak v jednom případě rostlina s květem původně čtyřčetným vytvořila příštím rokem květ dokonale dvoučetný, ale s vnitřním kruhem plátků okvětních vytvořeným skoro úplně jako kruh vnější. Další rok však nesla květ zcela normální celou svojí stavbou. V jednom případě mohl jsem sledovati postupný návrat k stavu normálnímu. Rostlinka, jež měla původně květ čistě dvoučetný [obr. 2., 5)] vytvořila příštím rokem tvar přechodní s vnějším kruhem okvětním trojčetným, vnitřním dvojetným, vnější kruh tyčinek byl trojčetný, vnitřní dvoučetný a semeník ještě dvoučetný [obr. 2., 4)]. Příštím rokem mělo toto individuum již úplně normální květ [obr. 2., 3)]. V jiném

případě zachytil jsem část postupu obráceného. Rostlina, jež původně měla květ přechodný mezi trojčetným a čtyřčetným — to jest s vnějším kruhem okvětním čtyřčetným, vnitřním kruhem trojčetným, vnějším kruhem tyčinek čtyřčetným, vnitřním trojčetným, ale semeníkem trojčetným [obr. 2., 2)] — vytvořila květ dokonale čtyřčetný; bohužel tato rostlina



Obr. 2. Diagramy různých květů *Galanthus nivalis* L. 1) květ dokonale čtyřčetný, 2) přechod mezi květem čtyřčetným a trojčetným, 3) květ normální trojčetný, 4) přechodný stav mezi květem trojčetným a dvoučetným, 5) květ úplně dvoučetný

zašla, takže nebylo mi možno zjistiti, zda by se byl u ní nějaký čas čtyřčetný květ udržel, či zda by se byla vracela ke květu normálnímu postupně, nebo zcela náhle bez přechodů, jak to bylo zjištěno ve většině případů. — Podobně jest tomu asi též u bledule — *Leucojum vernum* L., u níž sledoval jsem několik přechodných typů mezi květy trojčetnými a čtyřčetnými, jež však příštím rokem byly vytvořeny zcela normálně podle čísla 3.

Jest možno, že některé abnormální formy květů sněženek jsou stálé a snad i dědičné (viz údaje F i l a r s z k é h o), rozhodně však ve většině případů nejedná se o zjev ustálený, neboť v žádném z osmnácti mnou sledovaných případů se abnormální forma neudržela. Není tudíž možno těmito abnormitám u sněženek přikládati nějakou větší cenu systematicko-evoluční, neboť jedná se o zjev spadající do rámce flukтуаční variability.

Literatura:

1. Čelakovský L.: Popis nového druhu sněženky *Galanthus gracilis* n. sp. Věstník král. české společnosti nauk. Roč. 1891, pp. 184—198. 1 tab. (IX.).
2. —: Das Reduktionsgesetz der Blüthen, das Dédoublement und die Obdiplostemonie. — Sitzungsber. d. königl. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. — Jahrg. 1894, pp. 1—140. 5 tab.
3. Filarszky F.: Über Blütenformen bei dem Schneeglöckchen (*Galanthus nivalis* L.). — Természetráji Füzetek 13 : 173—176. 1890. 1 tab. (III.)
4. Penzig O.: Pflanzen-Teratologie, II. Aufl., III. pp. 341—343. Berlin, 1922.
5. Stenzel G.: Blütenbildungen beim Schneeglöckchen (*Galanthus nivalis*). Bibliotheca Botanica. Heft 21. pp. 1—45. 4 tab. Cassel, 1890.

Summary.

Instability of floral irregularities in Galanthus nivalis L.

By K. Hrubý.

(Presented May 9, 1934.)

A number of authors (Stenzel — 5, Filarszky — 4, Čelakovský — 1) have already described irregularities in the structure of the flowers of *Galanthus nivalis* L. for a long time. It is an important problem, whether these various abnormal forms are stable and hereditary. Only Filarszky (3) has studied the problem in a few cases. According to his statements, irregularities are even preserved in the second year. — The author has proved the stability of perfect dimeric [fig. 1. c), fig. 2. 5)] quite perfect tetrameric [fig. 1. a), fig. 2. 1)] and intermediate forms between tri — and tetrameric flowers [fig. 2. 2)]. The material came from Mělník (Czechoslovakia) and was put into the Experimental garden of the Plant-Physiological Institute of Charles University in 1930. No irregularity however, was preserved in any one of the 18 cases investigated by the author. In the majority of cases, a return to the normal condition [fig. 1. b), fig. 2. 3)] was observed. Sometimes this return took place gradually, i. e. from a dimeric flower through an intermediate form between the di- and trimeric flower, till to a normal trimeric type.

One can admit that certain individuals show a tendency to form different irregularities. In one such case, a plant having originally a tetrameric flower, had a perfectly dimeric flower next year. In the third year, a perfect normal trimeric form was observed. — From observations made, it is possible to conclude that the various abnormal flowers in this species — *Galanthus nivalis* L. — are standing in a range of fluctuating varieties, and therefore that they cannot be regarded as having any systematic-evolutionary importance.

Plant-Physiological Institute, Charles University, Prague.

XVIII.

Beweis der Widerspruchsfreiheit des Funktionenkalküls der mathematischen Logik.

(*Démonstration que le calcul fonctionnel est sans contradictions.*)

Von KAREL RÖSSLER.

(Vorgelegt am 6. Juni 1934.)

Der Funktionenkalkül ist im Buch Hilbert - Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928¹⁾ aus formalen Prinzipien aufgebaut. Wir zeigen zunächst, daß man einige von diesen Prinzipien aus den übrigen ableiten kann. Diese Reduktion der Prinzipien ermöglicht uns dann den Beweis der Widerspruchsfreiheit des Funktionenkalküls durchzuführen.

§ 1. Reduktion der Prinzipien des Funktionenkalküls.

A) Zeichen.

Die Zeichen des Funktionenkalküls sind:

1. Aussagenvariable X, Y, \dots
2. Funktionsvariable $F(), G(), \dots$
3. Gegenstandsvariable x, y, \dots ; diese Variable sind Argumente der Funktionsvariable.
4. Grundoperationszeichen $\neg, \vee, (\)$; lies resp. »nicht«, »oder«, »alle«.
5. Klammern $()$.

Wir betrachten diese Zeichen losgelöst von ihrer inhaltlichen Bedeutung.

¹⁾ Dieses Buch soll im folgenden mit H-A zitiert werden.

B) **Ausdrücke.**

Man bildet »Ausdrücke« nach folgenden Regeln:

1. *Aussagenvariable und Funktionsvariable sind Ausdrücke.*

2. *Ist A ein Ausdruck, so ist auch \bar{A} ein Ausdruck.*

3. *Sind A, B Ausdrücke, so ist auch $(A) \vee (B)$ ein Ausdruck.*

4. *Es sei $A(x, \dots, u)$ ein Ausdruck, in dem die Variable x vorkommt und das Zeichen (x) nicht vorkommt. Dann ist auch $(x) (A(x, \dots, u))$ ein Ausdruck.*

C) **Abkürzungen.**

Um die Symbolik zu vereinfachen, führt man folgende Hilfsoperationszeichen ein \longrightarrow , $\&$, \longleftrightarrow . (Ex) lies resp. »folgt«, »und«, »gleichwertig«, »es gibt«. Die Zeichen (x) , (Ex) nennt man **Klammerzeichen**; es sei (ζx) ihre gemeinsame Bezeichnung. Man führt folgende **Abkürzungen** ein:

$$\begin{array}{ll} z_1) AB & \text{eq } A \vee B \\ z_2) A \longrightarrow B & \text{eq } \overline{AB} \\ z_3) A \& B & \text{eq } \overline{\overline{AB}} \\ z_4) A \longleftrightarrow B & \text{eq } (A \longrightarrow B) \& (B \longrightarrow A) \\ z_5) \overline{A}(x) & \text{eq } \overline{A(x)} \\ z_6) (\zeta x) A(x) & \text{eq } \overline{(\zeta x) \overline{A(x)}} \\ z_7) (Ex) A(x) & \text{eq } \overline{(x) \overline{A(x)}}. \end{array}$$

Die Abkürzungen wendet man nach der folgenden Regel an: *Für eine Seite einer Abkürzung darf überall, wo sie vorkommt, die andere Seite der Abkürzung eingesetzt werden.* Die Abkürzungen führt man nur aus ökonomischen Gründen ein. Den Ausdruck $A(x, \dots, u)$ nennt man »**Wirkungsbereich**« des Zeichens (ζx) im Ausdrucke $(\zeta x) (A(x, \dots, u))$. Die Variable x heißt »**gebundene Variable**«, wenn sie in einem Wirkungsbereich des Zeichens (ζx) vorkommt; sonst heißt sie »**freie Variable**«. Wir bezeichnen: mit $A(x)$, $B(x), \dots$ Ausdrücke, welche die freie Variable x enthalten, mit \mathfrak{A} , \mathfrak{B}, \dots Ausdrücke, welche die freie Variable x nicht ent-

halten. Mit A, B, \dots bezeichnen wir beliebige Ausdrücke. Zur Ersparung von Klammern machen wir folgende Vereinbarung: Das Zeichen \neg bindet enger als (ζx) , das Zeichen (ζx) enger als \vee , das Zeichen \vee enger als \wedge , das Zeichen \wedge enger als $\longrightarrow, \longleftrightarrow$.

D) Prinzipien.

Die Prinzipien des Funktionenkalküls sind:²⁾

1. Axiome (oder Grundformeln):

- a) $A A \longrightarrow A$
- b) $A \longrightarrow A B$
- c) $A B \longrightarrow B A$
- d) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (C A \longrightarrow C B)$
- e) $(x) A(x) \longrightarrow A(y)$

2. Grundregeln zur Ableitung von Formeln:

- a) Sind $A, A \longrightarrow B$ Formeln, so ist auch B eine Formel.
- β) Ist $\mathfrak{A} \longrightarrow B(x)$ eine Formel, so ist auch $\mathfrak{A} \longrightarrow (x)B(x)$ eine Formel.

E) Einsetzungsregeln.

Zur Ableitung von Formeln wendet man aus ökonomischen Gründen außer den Prinzipien noch einige abgeleitete Regeln an.

Definition I. Einen Beweis einer Formel, der nur aus Prinzipien des Funktionenkalküls besteht, nennen wir »Minimalbeweis«.

Nun beweisen wir drei Einsetzungsregeln, welche in H-A als Prinzipien eingeführt werden.

Regel I. Wenn in eine Formel für eine Aussagenvariable überall, wo sie vorkommt, ein und derselbe Ausdruck eingesetzt wird, so entsteht wieder eine Formel. Für eine Aussagenvariable, die im Wirkungsbereich des Zeichens (ζx) vorkommt, darf ein Ausdruck $A(x)$ nicht eingesetzt werden.

Beweis: Es sei X die gegebene Aussagenvariable, A der gegebene Ausdruck, \mathfrak{A} die gegebene Formel und Δ ihr Mini-

²⁾ Die Prinzipien a), b), c), d), a) sind Prinzipien des Aussagenkalküls. Die Prinzipien e), β) erweitern den Aussagenkalkül auf den Funktionenkalkül.

malbeweis. Wir ändern die Bezeichnung der gebundenen Variablen von Φ und Δ so, daß keine von ihnen mit irgend einer freien Variablen des Ausdruckes A übereinstimmt. Wir bezeichnen die Formel Φ und den Minimalbeweis Δ nach dieser Umformung mit Φ^* resp. Δ^* . Wenn man jetzt in Δ^* für die Aussagenvariable überall, wo sie vorkommt, den Ausdruck A einsetzt, so gehen die Prinzipien $\alpha), \dots, \beta)$ wieder in solche Prinzipien über. Durch diese Einsetzung geht also der Minimalbeweis Δ^* wieder in einen Minimalbeweis über. Aus der Formel Φ^* entsteht also wieder eine Formel.

Analogisch beweist man die übrigen zwei Regeln:

Regel II. *Wenn in eine Formel für eine Funktionsvariable $F(x, \dots, u)$ überall, wo sie vorkommt, ein und derselbe Ausdruck $A(x, \dots, u)$ eingesetzt wird, so entsteht wieder eine Formel. Für eine von x unabhängige Funktionsvariable, die im Wirkungsbereich des Zeichens (ζx) vorkommt, darf ein Ausdruck $A(x)$ nicht eingesetzt werden.*

Regel III. *Wenn in eine Formel für eine freie Gegenstandsvariable überall, wo sie vorkommt, eine andere Gegenstandsvariable eingesetzt wird, so entsteht wieder eine Formel. Für eine freie Gegenstandsvariable, die im Wirkungsbereich des Zeichens (ζx) vorkommt, darf die Variable x nicht eingesetzt werden.*

F) Weitere abgeleitete Regeln. Formeln.

In diesem Absatze werden wir einige Regeln und Formeln angeben, die wir im folgenden brauchen werden. Die Formel 5 und die Regel X, welche am Ende dieses Absatzes abgeleitet sind, werden in H-A als Prinzipien eingeführt.

Regel IV.³⁾ *Ist $A \rightarrow B$ eine Formel, so sind auch $CA \rightarrow CB, AC \rightarrow BC$ Formeln.*

Regel V. *Sind $A \rightarrow B, B \rightarrow C$ Formeln, so ist auch $A \rightarrow C$ eine Formel.*

Regel VI. *Ist $A \rightarrow B$ eine Formel, so ist auch $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ eine Formel.*

³⁾ Die Beweise von Regeln und Formeln, welche wir von H-A übernehmen, führen wir nicht durch.

Beweis d. Widerspruchsfreiheit d. Funktionenkalküls..

Formel 1. $X \rightarrow \bar{\bar{X}}, \bar{\bar{X}} \rightarrow X$

Formel 2. $X \& Y \rightarrow Y \& X$

Formel 3. $X \& Y \rightarrow X, X \& Y \rightarrow Y$

Formel 4. $(X \& Y) \& Z \leftrightarrow X \& (Y \& Z)$

Regel VII. Sind $A \rightarrow B, C \rightarrow D$ Formeln, so ist auch $AC \rightarrow BD$ eine Formel.

Beweis: $AC \rightarrow BC$ [IV], $BC \rightarrow BD$ [IV]; [siehe V].

Regel VIII. Sind $A \rightarrow B, C \rightarrow D$ Formeln, so ist auch $A \& C \rightarrow B \& D$ eine Formel.

Beweis: $\bar{B} \rightarrow \bar{A}, \bar{D} \rightarrow \bar{C}$ [VI], $\bar{B}\bar{D} \rightarrow \bar{A}\bar{C}$ [VII], $\bar{\bar{A}\bar{C}} \rightarrow \bar{\bar{B}\bar{D}}$ [VI, z₃].

Regel IX. Sind $A \rightarrow B, A \rightarrow C$ Formeln, so ist auch $A \rightarrow B \& C$ eine Formel.

Beweis: $\bar{A}\bar{A} \rightarrow \bar{A}$ [a], $A \rightarrow \bar{\bar{A}}$ [1], $\bar{A} \rightarrow A \& A$ [VI, z₃], $A \& A \rightarrow B \& C$ [VIII], [siehe V].

Formel 5. $F(y) \rightarrow (Ex)F(x)$

Beweis: $(x)\bar{F}(x) \rightarrow \bar{F}(y)$ [e, z₅], $F(y) \rightarrow \bar{\bar{F}}(y)$ [1], $\bar{\bar{F}}(y) \rightarrow (x)\bar{F}(x)$ [VI, z₆], [siehe V, z₇].

Regel X. Ist $B(x) \rightarrow \mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $(Ex)B(x) \rightarrow \mathfrak{A}$ eine Formel.

Beweis: $\mathfrak{A} \rightarrow \bar{B}(x)$ [VI], $\mathfrak{A} \rightarrow (x)\bar{B}(x)$ [β], $(x)\bar{B}(x) \rightarrow \bar{\mathfrak{A}}$ [VI], $\bar{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{A}$ [1], [siehe V, z₇].

Die Regeln I, II, III, X und die Formel 5 werden in *H-A* als Prinzipien eingeführt. Durch das Herleiten dieser Regeln und Formel haben wir eine Reduktion der Prinzipien des Funktionenkalküls durchgeführt.

§ 2. Beweis der Widerspruchsfreiheit des Funktionenkalküls.

Definition II. Einen Ausdruck $(x)A(x, \dots, u)$ nennen wir »Ideal r -ter Ordnung«, wenn der Ausdruck $A(x, \dots, u)$ Ideale höchstens $(r-1)$ -ter Ordnung enthält¹⁾ und wenn er wenigstens 1 Ideal $(r-1)$ -ter Ordnung enthält. Einen Ausdruck $B(x, \dots, u)$ nennen wir »Ideal 0-ter Ordnung«, wenn er kein Klammerzeichen enthält.

¹⁾ Siehe die Regeln über Bildung von Ausdrücken (§ 1. B)

Die Widerspruchsfreiheit des Funktionenkalküls formulieren wir durch folgenden Satz:

Es sei eine Formel Φ_0 des Funktionenkalküls und ihr Minimalbeweis \mathcal{A}_0 vorgelegt. Dann gilt folgende Behauptung

Die Formel Φ_0 hat nicht die Form $C_0 \& \bar{C}_0$.

Beweis: Wir setzen voraus, daß die Formel Φ_0 die Form $C_0 \& \bar{C}_0$ hat. Wir werden zeigen, daß diese Voraussetzung zu einer unmöglichen Konsequenz führt. Es seien J_1, \dots, J_n alle Ideale der höchsten Ordnung r , welche in \mathcal{A}_0 vorkommen. Wir wollen das Ideal J_k in der Form $(x) B_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$) schreiben. Aus dem Beweise \mathcal{A}_0 nehmen wir alle Axiome e) herauß, auf deren linker Seite das Ideal J_k steht; es sei p_k die Anzahl dieser Axiome:

$$(x) B_k(x) \rightarrow B_k(y_1), \quad (x) B_k(x) \rightarrow B_k(y_{p_k}). \quad (a)$$

Nun geben wir ein Verfahren an, welches Hilbert in seiner Abhandlung »Beweis des Tertium non datur« (1931) angewendet hat: In \mathcal{A}_0 setzen wir für das Ideal J_k überall, wo es vorkommt, folgenden Ausdruck ein:

$$\{B_k(y_1) \& \dots \& B_k(y_{p_k})\} \quad (q)$$

Die Prinzipien a), b), c), d), a) gehen durch diese Einsetzung wieder in solche über (manche Ausdrücke dieser Prinzipien werden natürlich durch andere ersetzt). Die ausgewählten p_k Axiome e) gehen durch die Einsetzung (q) in folgende Formeln des Aussagenkalküls über (siehe die Formeln 2, 3, 4 in § 1):

$$B_k(y_1) \& \dots \& B_k(y_{p_k}) \rightarrow B_k(y_i), \quad (i = 1, \dots, p_k) \quad (s)$$

Jede Regel β), in der das Ideal J_k vorkommt, geht durch die Einsetzung (q) in die folgende Regel über (siehe die Regeln III, IX in § 1):

Ist $\mathfrak{A} \rightarrow B_k(x)$ eine Formel, so ist auch $\mathfrak{A} \rightarrow B_k(y_1) \& \dots \& \bar{B}_k(y_{p_k})$ eine Formel. (t)

Die Axiome e) und die Regeln β), in denen das Ideal J_k nicht vorkommt, bleiben durch die Einsetzung (q) un geändert. Aus dem Beweise \mathcal{A}_0 ist durch die Einsetzung (q) für $k = 1, \dots, n$ ein neuer Beweis entstanden, welcher nur noch Ideale höchstens $(r - 1)$ -ter Ordnung enthält. Wenn man die-

sen Beweis um die Minimalbeweise der Formeln (σ) und der Regeln (τ) erweitert, so entsteht ein Minimalbeweis A_1 , der nur noch Ideale höchstens $(r - 1)$ -ter Ordnung⁵⁾ enthält und dessen resultierende Formel die Form $C_1 \& \bar{C}_1$ hat. Das Verfahren, durch welches wir die Ideale r -ter Ordnung aus dem Minimalbeweise A_0 eliminiert haben, werden wir nun zur Elimination der Ideale $(r - 1)$ -ter Ordnung aus dem Minimalbeweise A_1 anwenden u. s. w. Endlich gelangen wir zu einem Minimalbeweise A_r , der nur noch Ideale 0-ter Ordnung enthält und dessen resultierende Formel die Form $C_r \& \bar{C}_r$ hat. Der Beweis A_r besteht nur aus den Prinzipien des Aussagenkalküls: a), b), c), d), a). Weil aber der Aussagenkalkül widerspruchsfrei ist (siehe II-A), so kann die resultierende Formel des Beweises A_r nicht die Form $C_r \& \bar{C}_r$ haben. Dadurch ist bewiesen, daß die gegebene Formel Φ_0 die Form $C_0 \& \bar{C}_0$ nicht hat.

Prag, am 3. Mai 1934.

Seminar der Philosophie der Mathematik
der Karls Universität.

⁵⁾ Es ist klar, daß durch das Zufügen der Minimalbeweise der Formeln (σ) und der Regeln (τ) keine neuen Ideale r -ter Ordnung entstanden sind.

Résumé.

Démonstration que le calcul fonctionnel est sans contradictions.

Par K. Rössler.

Présenté le 6 juin 1934.

Définition I. Nous appelons démonstration minimale une démonstration qui ne se compose que des principes du calcul fonctionnel (voir § 1, D dans le texte).

Définition II. L'expression $(x)A(x, \dots, u)$ est un idéal d'ordre r , si l'expression $A(x, \dots, u)$ contient des idéals au maximum d'ordre $r - 1$ et si elle contient au minimum 1 idéal d'ordre $r - 1$. L'expression $B(x, \dots, u)$ est un idéal d'ordre 0, si elle ne contient pas un signe (x) , (Ex) .

Théorème: Soit donné une formule Φ_0 du calcul fonctionnel et sa démonstration minimale Δ_0 . Alors la formule Φ_0 n'a pas la forme $C_0 \& \overline{C_0}$.

Démonstration: Supposons que la formule Φ_0 soit de la forme $C_0 \& \overline{C_0}$. Soient J_1, \dots, J_n tous les idéals au maximum d'ordre r qui se présentent dans Δ_0 . Écrivons l'idéal J_k dans la forme $(x)B_k(x)$, $k = 1, \dots, n$. Choisissons de la démonstration Δ_0 tous les axiomes e (voir § 1, D dans le texte) qui ont à gauche l'idéal J_k ; soit p_k le nombre de ces axiomes:

$$(x)B_k(x) \rightarrow B_k(y_1), \dots, (x)B_k(x) \rightarrow B_k(y_{p_k}).$$

Substituons dans Δ_0 à l'idéal J_k ($k = 1, \dots, n$), partout, où il se présente, l'expression $B_k(y_1) \& \dots \& B_k(y_{p_k})$.

Après une modification simple, nous obtenons de Δ_0 une démonstration minimale Δ_1 qui contient des idéals au maximum d'ordre $r - 1$ et dont la formule résultante est de la forme $C_1 \& \overline{C_1}$. En répétant ce procès, on obtient finalement une démonstration minimale Δ_r qui contient seulement des idéals d'ordre 0 et dont la formule résultante est de la forme $C_r \& \overline{C_r}$. Mais c'est impossible, parce-que le calcul de proposition (Aus-sagenkalkül) est sans contradictions.

XIX.

Chlorosa rostlin způsobená kobaltem.

(*Chlorose chez les plantes causée par les sels du cobalt.*)

Prof. dr. B. NĚMEC a dr. J. BABIČKA.

Ústav pro fyziologii rostlin Karlovy university.

Předloženo 6. června 1934.

Chemická část.

Prvky triady železa: železo, kobalt, nikl se vyznačují řadou podobných vlastností chemických; na př. jejich atomové číslo, atomová váha a bod tání jsou velmi blízké:

	Fe	Co	Ni
a. č.	26	27	28
a. v.	55.84	58.94	58.69
b. t.	1528	1490	1452

Všechny tři elementy tvoří dvojmocné sloučeniny, ač kromě této valence mají schopnost vyskytovat se i ve vyšších valencích. Sloučeniny dvojmocné bývají nestálé. Na př. sloučeniny dvojmocného kobaltu lehce přecházejí v trojmocné. Sloučeniny trojmocného železa jsou stářejší než dvojmocného. Komplexní sloučeniny odvozené od trojmocného kobaltu jsou stářejší. Železo tvoří poměrně lehce sloučeniny šestimocné (feráty), nikl a kobalt vystupují maximálně jako čtyřmocné. Tvoří dioxydy, které se snadno rozkládají za vývoje kyslíku.

Chrom a mangan, ač jsou příslušníky jiných grup Mendělejeva periodického systému (VI. a VII.), mají s prvky triady železa řadu společných vlastností a mimo to v přírodě je často doprovázejí.

Tak chrom má a. č. 24, a. v. 52; ve sloučeninách přichází jako dvoj-, troj- a šestimocný. Sloučeniny dvojmocné jsou na vzduchu nestálé a přecházejí velmi snadno v trojmocné.

Mangan má a. č. 25, a. v. 54·93; ve sloučeninách přichází jako dvoj-, troj-, čtyř-, šesti- a sedmimocný. Ve valencích nižších je povahy zásaditější, ve vyšších kyselá.

Přehled literárních údajů.

V literatuře nalézáme údaje, že elementy triady železa společně s manganem a chromem působí ve velmi malých koncentracích na růst rostlin stimulačně, při vyšších koncentracích pak jedovatě.

Jejich toxický účinek souhlasí s postavením kovů v řadě *N e u m a n n o v ě* se zřetelem jejich potenciálu k H-iontu:

Mg, Al, Mn, Zn, Cd, Tl, Fe, Co, Ni, Pb, H, Bi, As, Sb, Sn, Cu,
Hg, Ag, Pd, Pt, Au.

Z této řady nás zajímá mangan, železo, kobalt a nikl. Jedovatost od manganu stoupá k niklu a řídí se mocností. Na př. od dvojmocného manganu k sedmimocnému. Rovněž u chromu nejtoxičtější působí chromáty ($\text{CrO}_4^{''}$). Mangan a chrom stupňují oxydační schopnosti za přítomnosti železa. Totéž bylo pozorováno u kobaltu a niklu, jež mají značnou náklonnost tvořiti komplexní ionty.

Toxické účinky niklu jsou značnější než železa a kobaltu, slabší než mědi. Účinek solí niklu ve vodních kulturách jevnosubných rostlin je znám již z prací *H a s e l h o f f o v ý c h* (1893), mikroorganismů *M a n o i l l o v ý c h* (1907) (srov. *F. C z a p e k*, 1921).

Pro kobalt platí obdobné zkušenosti jako pro chrom, nikl a železo. [*H a s e l h o f f*, 1895, *N a k a m u r a*, 1904, *M o r t e n s e n*, 1909, *B o k o r n y*, 1912, *B e c h h o l d*, 1920, *P o r o d k o*, 1925, *H e a l d*, 1896, *K a h l e n b e r g a T r u e*, 1896, *L o e w*, 1902, *W o l f*, 1913, *J a m a h a*, 1927 a j. (srov. *F. C z a p e k*, 1921).]

Mangan pro některé rostliny je nutný; v malých kvantech působí stimulačně, ve větších toxicky (*B o r e s c h*, 1931, *C l a r k a F l y*, *J a c o b s o n a S c h w a n b a c h*, 1929, *P o p o f f*, 1922, 1922/23, 1924).

O antagonistickém poměru železa k manganu pojednal *T o t t i n g h a m a B e c k* (1931), *J o h n s o n* (1915), *R i p p e l* (1932). *C l a r k a F l y* u *L e m n a m a i o r* zjistili, že množ-

ství 1 mg manganu v litru působí jedovatě; v poměru 1 : 400—1000 mil. optimálně. Na *Lemna Mc H a r g u e a C a l f e e* pozorovali, že bez manganu dochází k zastavení vzrůstu a potom se dostavuje chlorosa. *H o p k i n s* nalezl, že u *Lemna* nelze mangan nahraditi železem. Železo však podle jeho pokusů účinek manganu zesiluje. U *Chlorella* pozoroval rovněž *H o p k i n s*, že mangan ještě v poměru 1 : 5,000.000 působí silně na vzrůst; mangan podle jeho výkladu stabilisuje trojmocné železo a tím znemožňuje redukcii trojmocného železa na dvojmocné.

Poměr železa k manganu, přesto že tomuto problému bylo věnováno tolik vědeckého zájmu, zůstává dosud nevyjasněn a v literatuře údaje se často různí. *P e t t i n g e r*, *H e n d e r s o n* a *W i n g a r d* pozorovali chlorosu i za přítomnosti železa. *C h a p m a n* se domnívá, že ve dřevě mangan stupňuje rozpustnost železa, kdežto v listech naopak zmenšuje.

B e r t r a n d a *R o s e n b l a t t* uvádějí, že etiolované listy jsou manganem chudé. Podle analys *M c H a r g u e a R o y e* chlorotické listy *Q u e r c u s p a l u s t r i s* obsahují v sušině méně manganu a zinku, ale více železa. Působnost železa na tvorbu chlorofylu byla poznána *G r i s e m* v roce 1892. Podle jeho výzkumů železo působí jako katalysator, jenž urychluje oxydační a redukční procesy. Světlo při těchto pochodech je jednou z posledních fází celé řady reakcí. *G r i s*, *W i l l e*, *R o u x*, *P r i a n i s c h k o w* se domnívají, že chlorosa se dostaví nejen při nedostatku železa, ale i jiných minerálních látek. V půdách vápenatých netrpí rostliny chlorosou, i když je kalcium v nadbytku (*M a s é*, *R u o t*, *L e m o i g n e*, *B ü s g e n*, *R o b e r t*, *M a s o n i*, *C a u d a*, *d e A n g e l i s*, *d'O s s a r t*, *C r e y d t*, *P f e i f e r* a j.

S c h i l z (1908) používal k léčení chlorosy FeSO_4 a $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$. Natírané listy často zčernaly, některé usychaly a odumíraly (srov. též *W e h s a r g* 1905). *S c h i l z* černání listů po natření solemi železa vysvětluje valencí železa. FeSO_4 způsobuje černání listů, kdežto $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ nikoliv. FeSO_4 způsobuje vlastně zastření chlorofylových zrn (srov. též *S t e n d e r* a *H a g e r s*). Sám chlorofyl se při tom neuplatňuje, nýbrž jde asi o reakci látek tríslovinné povahy. *S c h o l z* (1933) udává, že ve starších chlorotických rostlinkách *L u p i*

nus albus je železo přítomno ve větším množství, než v mladších. Pohyb železa ze starších listů, do mladších listů, však nezjistil. Kalcium podle jeho výsledků zabraňuje přístupu železa do kořenů. Škodlivý vliv kalcia je podmíněn poměrem kalcia k železu.

Colin a Grandsire (1928) uvádějí, že chlorotické rostliny se od zelených liší i množstvím škrobu a redukce schopných cukrů.

Při účinku těžkých kovů je dlužno bráti zřetel i na anionty. J a m a h a (1927) uvádí, že na fixaci plasmu má CoCl_2 větší vliv než CoSO_4 . K a h o (1930) pro jedovatost kobaltu uvádí tuto stupnici: $\text{CNS}' > \text{Br}'$, $\text{NO}_3' > \text{Cl}'$, $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2 > \text{SO}_4''$

Podle Stilese a Kidda mají anionty takto vliv na permeabilitu:



Účinnost v této řadě rovněž připouští Weise.

Podle Lavisona (1910, 1911), jenž se zabýval permeabilitou solí těžkých kovů, vnikají těžké kovy do buněk jen při vyšších koncentracích než 1/n. Podle Czapka (1913) mohou kovy téže grupy na rostliny působiti stejně. Proti tomuto mínění byly získány opačné výsledky. Velmi duchaplný výklad o působení těžkých kovů podává Lepeschkin (1923):

1. těžké kovy při vyšších koncentracích bílkoviny koagulují.

2. Při nižších koncentracích plasmu denaturují (srov. fixační vlastnosti těžkých kovů podle výkladu J a m a h y 1927).

Podle Úlehly a Morávka (1922) se chovají hydrolyzující soli, tedy obzvláště soli těžkých kovů, asi stejně jako směs: kyselina-sůl; při vyšších koncentracích buňku roztrhávají a rozpouštějí, při nižších koncentracích, plasmolysují.

Z pokusů Pringsheimových (1924) vyplývá, že roztoky solí těžkých kovů působí na plasmu plasmolyticky. Mezi teoriemi o účinku těžkých kovů na plasmu dlužno uvést i teorii adsorpění (srov. Pichler).

Popoff v řadě svých prací předpokládá, že chemikálie působící na plasmu stimulačně, mohou oxydační procesy živé buňky ovlivniti. Ve velkém množství působí však deoxydačně.

Deoxydují živé molekuly a to má za následek zpomalení životních dějů.

Provedení pokusů.

Semena rostlin určených k pokusům byla vždy 24 hod. máčena ve studniční vodě. Pak vysazována do hliněných, polévaných nádob, naplněných borovicovými pilinami. Když kořeny dorostly průměrně 0·5 cm, byly po dokonalém oprání ve vodě máčeny do 1% roztoků některého kovu: Co, Ni, Fe, Mn, Cr.

V 1% roztoku byly ponechány klíční rostlinky 30 minut. Máčení bylo opakováno vždy po 24 hodinách. Počet máčení závisel na odolnosti kořenů vůči užití chemikálii. Neboť jakmile účinek kovu se počal projevovat zřetelně, bylo od máčení upuštěno. Po každém máčení byly rostlinky dobře oprány vodou a pak teprve vysazovány znovu do pilin. Měření, vážení a chemické analýsy rostlin, s nimiž byla prováděna uvedená manipulace, dály se vždy ve srovnání s kontrolními, do roztoků solí těžkých kovů nemáčenými rostlinami.

Vliv uvedených elementů (Co, Fe, Ni, Mn, Cr) byl kromě máčení klíčnic rostlin do 1% roztoků solí těžkých kovů sledován ve vodních kulturách. Ke 200 cem Knopova živného roztoku byly přidávány 1% nebo m/1 roztoky solí uvedených kovů v poměru 2 : 200 a 4 : 200.

Kořeny byly proti světlu chráněny černým papírem, jímž byly k pokusu užitě válce obaleny. U přílišného vypařování bylo zabráněno použitím perčových obalů, které byly připevněny na organtin, jímž byly nádoby povlečeny. Takováto úprava se pro pěstování rostlin ve vodních kulturách výborně hodí, neboť zároveň chrání roztoky před možným znečištěním prachem ze vzduchu.

Vodní kultury měly tu výhodu, že se dala na jedné straně sledovat postupně resorbce toxicky působícího iontu ze živného roztoku, na druhé straně postupné jeho hromadění v rostlinných orgánech.

Rostliny použité k pokusům.

Pokusy jsme provedli s těmito rostlinami: *Vicia faba*, *Lupinus albus*, *Zea mays*, *Aesculus hippocastanum* a *Salix viminalis*.

Vyjma *Salix viminalis* pracovali jsme s klíčními rostlinkami. U *Salix viminalis* použili jsme větévek (řízků) 20 cm dlouhých. Buď byly ponechány v Knopově živném roztoku až se vytvořily asi 0·5 cm dlouhé kořeny a pak byly rostliny přenášeny do živného roztoku, který obsahoval kov toxicky působící, nebo při některých pokusech jsme ponořili řízky přímo do roztoku obsahujícího těžký kov.

Chemické rozbory.

Měření rostlinných orgánů, stanovení váhy čerstvých, suchých a popele se dalo obvyklými metodami. Chemické rozbory byly prováděny jednak kolorimetricky a gravimetricky, jednak elektrolyticky polarografickou metodou J. H e y r o v s k é h o.

Největší počet analys byl proveden při pokusech s kobaltem, neboť kobalt na rozdíl od ostatních prvků způsoboval, jak při máčení klíčních rostlinek do roztoků kobaltnatých, tak i do živných roztoků obsahujících kobalt, chlorosu.

Kobalt bylo možno v živných roztocích stanovit běžnými polarografickými metodami, kdežto ostatní elementy Ni, Fe, Cr, a Mn, jen za použití speciální metodiky, která byla zevrubně v posledních letech vypracována J. H e y r o v s k ý m a spolupracovníky.

J. H e y r o v s k é h o metoda je obzvláště výhodná pro sledování úbytku elementů ze živného roztoku. Na polarografických křivkách lze postupně sledovati úbytek elementů ze živného roztoku postupným klesáním výšek t. zv. »polarografických maxim« (výšek křivek na souřadnici Y). Nejvyšší vlna je analyza kontrolního roztoku (nebo výchozího); další křivky jsou pak o tolik nižší, oč bylo prvku resorbováno rostlinou.

Po spálení rostliny naopak při analysách popelu dostáváme postupně křivky vyšší a vyšší, podle toho, jak byl prvek rostlinou přijímán. Máme tudíž tímto způsobem zaručenou kontrolu pokusu.

Mimo to pro stanovení kobaltu byla vypracována vlastní kolorimetrická metoda a jednak byl stanoven kolorimetrickou metodou E. S. T o m u l y (1931).

Vlastní kolorimetrická metoda byla již popsána J. B a-

bičkou (1934), přesto však, poněvadž pomocí této metody bylo dosaženo nejvíce zde uvedených výsledků, všimněme si jejího principu:

K 5 ccm koncentrovaného roztoku ammoniumrhodanidu přidáváme 2 ccm zkoumaného roztoku, obsahujícího kobalt; po té 1 ccm absolutního etheru; po protřepání přidáme 2 ccm amylalkoholu. Po silném opětovném protřepání oddělí se vrstva amylalkoholová, do které přešel v roztoku přítomný kobalt. Zona se zbarví jasně modře; sytost jejího tonu je závislá na množství kobaltu, který je obsažen v roztoku.

Srovnávací roztoky se známým množstvím kobaltu jest dlužno připravit stejným způsobem. Chceme-li standardní roztoky přechovávat po delší dobu, zaparafinujeme je, abychom zabránili jejich vypařování.

Při kolorimetrickém stanovení kobaltu v popelu rostlin je dlužno postupovat tím způsobem, že popel rozpustíme nejprve v $n/10$ HCl a neutralisujeme decinormálním louhem. Z tohoto roztoku odpipetujeme 3 ccm, přidáme 5 ccm koncentrovaného roztoku ammoniumrhodanidu, 2 ccm absolutního etheru a protřepáme. Protřepání opakujeme rovněž po přidání 2 ccm amylalkoholu a 3 ccm octanu ammonného, abychom zabránili reakci železa.

Podle intenzity zbarvení amylalkoholové zony zjistíme po srovnání stejným způsobem připravených standardních roztoků množství kobaltu.

Měření kobaltu tímto způsobem je poměrně rychlé. Jednu analýsu lze vykonat asi za 5 minut. Přesnost metody se pohybuje od 1—5% a lze stanovit v roztoku ještě množství $4 \cdot 10^{-4}$ kobaltu.

Nikl byl stanoven jednak T. Moorovou zkouškou, jednak metodou Tschugaef-Brunekovou (jako dimethylglyoxin).

Stanovení železa se dalo buď sulfosalicylovou kyselinou (20% roztok kyseliny sulfosalicylové, 10% roztok ěpavku), nebo titrací manganistanem draselným.

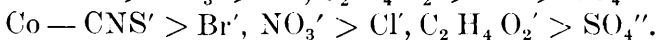
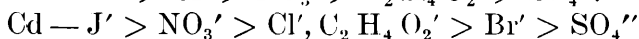
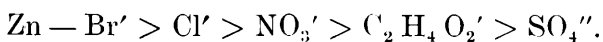
Mangan byl srážen jako ammoniumfosfat a vážen po vyžihání jako pyrofosfat.

Chrom srážen jako hydroxyd chromitý a vážen jako chromnatý.

Účinek jednotlivých prvků.

Vliv sloučenin kobaltu. Vliv kobaltu při máčení klíčnic rostlin do 1% roztoků solí kobaltnatých.

Na počátku našich pokusů jsme nejprve prostudovali výsledky H. Kahovy (1933). H. Kah o sledoval smrtící účinek solí zinečnatých, kademnatých a kobaltnatých na plasmu buněk červeného zelí. Užíval tak vysokých koncentrací, že již během několika hodin byla plasma usmrcována. Jedovatost kationtů byla přímo závislá na povaze aniontů:



Nás zajímala především řada kobaltová a z ní obzvláště anionty NO_3' , Cl' a SO_4'' , s nimiž jsme provedli největší počet pokusů. Anionty podle stupně toxicity $\text{NO}_3' > \text{Cl}' > \text{SO}_4''$ mají podle Weise i odchylný vliv na viskozitu. G. J am a h a (1927) charakterisuje účinek iontu SO_4'' a Cl' následovně: »Das Sulfat hat sich etwas minder giftig erwiesen, Mitosenabnormitäten kommen seltener vor. Diese Tatsachen lassen ohne weiteres darauf schließen, daß auch hier das Sulfat permeabilitätshemmend, während das Chlorid permeabilitätsfördernd wirkt, wie es auch anderswo häufig der Fall ist.«

Během našich pokusů jsme zjistili, že toxicita Co-iontu stoupá od sulfatu k chloridu a od chloridu k nitrátu.

Kořeny *Vicia faba*, *Lupinus albus*, *Zea mays*, *Salix viminalis* a *Aesculus hippocastanum* byly již po třikráte, vždy po 24 hod. opakovaném máčení v 1% roztoku $\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, tak poškozeny, že při dalším máčení se dostavilo černání kořenů, po té jejich rozpad, což mělo za následek odumření celých rostlin. Takovýto stav se neprojevil ani po čtyřikráte opakovaném máčení v jednoprocenních roztocích kobaltchloridu nebo kobaltsulfatu; neboť, i když došlo k poškození hlavního kořene, tu pod dělohou vytvořené nové kořeny převzaly funkci hlavního kořene.

Již podle barvy popelu dala se makroskopicky zjistiti lokalisace kobaltu v rostlinných orgánech. Při opatrném spalování v elektrické peci dalo se dosáhnouti, že struktura rost-

lin zůstávala neporušená. Intensita modrého zabarvení popelu byla závislá na množství přítomného kobaltu.

U klíčnic rostlinek největší kvanta kobaltu obsahují kořeny, dělohy a vrcholy os, nejméně osy. Chemické rozbory úplně potvrdily uvedené makroskopické zjištění.

Během růstu rostliny se však lokalizace kobaltu v orgánech mění. Vrcholy a dělohy se kobaltu zbavují a kobalt v pozdější době přechází do os a listů.

Jako následek přijímání kobaltu dostaví se u rostlin chlorosa. Pozorovali jsme, že chlorosa se neprojeví bezprostředně, když rostlina kobalt přijala, nýbrž až později, a to tehdy, když obsah železa v rostlině nestoupá (t. j. po zamezení přijímání železa kořeny účinkem kobaltu). Nejprve a nejnápadněji se chlorosa projeví na osních vrcholech. Osní vrcholy mladých rostlinek, které obsahují poměrně vysoké procento kobaltu, jsou nejchlorotičtější. Chlorosa během celé kultivační doby zůstává na vrcholech nejnápadnější. Chlorosu způsobenou kobaltem nelze pokládati za onemocnění pomíjivé, neboť během celé kultivační doby zůstávají rostliny chlorotické; již od počátku se u rostlin projevuje individuálně. Někteří jedinci téže serie pokusu jsou chlorotičtější než druzí. Analýsami jsme se přesvědčili, že zelenější rostliny obsahují vždy více železa, než rostliny bledší. Tento poznatek nás přiměl k pokusu odstranění chlorosu účinkem sloučenin železa. Osvědčilo se natírání listů silně zředěnými roztoky solí železitých (hlavně FeCl_3).

U *Aesculus hippocastanum* se nám podařilo natíráním chlorotických listů $n/550$ — $n/2000$ FeCl_3 chlorosu vyvolanou kobaltem odstraniti. U *Vicia faba* a *Lupinus albus* zmírniti. Již během 24 hodin chlorotické rostlinky *Aesculus hippocastanum* po natření FeCl_3 zelenaly. Chlorosa mizela nejprve kolem svazků cévních. Periferní partie listů zelenaly nejpozději. Listy natírané FeCl_3 místy černaly, což odpovídá pokusům Schilzovým (1908). Ve velmi zředěných roztocích solí železitých jest dlužno předpokládati totiž vedle ferri-iontu, ferro-iont. Je přirozeno, že nejmladší listy byly k natírání FeCl_3 nejchoulostivější. Často černaly a někdy odumíraly.

Mizení chlorosy jsme však nepozorovali po přenesení chlorotických rostlinek do živných roztoků obsahujících železo

v nadbytku (až 1% FeCl_3), ač kořeny přijímaly železo do té míry, že popel byl rezavě zabarven.

Když mezi silně chlorotickými jedinci se vyskytli jedinci nápadně zelení, lišily se rostlinky navzájem nejen rozměry, nýbrž i vahou. Obsah kobaltu v popelu se však odlišoval poměrně nepatrně. Uvedený příklad nám znázorňuje jeden z takových pokusů:

Boby (*Vicia faba*) byly 25. XI. 1933 sázeny do pilin. Když kořeny měřily průměrně 0.5 cm, byly máčeny čtyřikrát vždy po 24 hod. do 1% roztoků $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$. Za 48 hodin měřily osy nápadně chlorotických rostlin průměrně 20 cm, méně chlorotických 24 cm. Váha a množství kobaltu je vyjádřeno v připojené tabulce. Týká se jedné rostlinky (průměr je vzat z 32 jedinců):

Rostlina	Méně chlorotická	Nápadně chlorotická
čerstvá	2.0606 g	1.4600 g
suchá	0.1330 g	0.1000 g
popel	0.01066 g	0.0067 g
% Co v popelu	2.5	3.2

Obdobný výsledek nám poskytl další pokus. Boby (*Vicia faba*) byly 18. I. 1934 sázeny do pilin a pěstovány za stejných podmínek, jaké jsou uvedeny v předcházejícím případě. Osy rostlin chlorotických měří 27 cm, méně chlorotických 35 cm.

Rostlina	Méně chlorotická	Silně chlorotická
čerstvá	2.166 g	1.008 g
suchá	0.133 g	0.130 g
popel	0.011 g	0.010 g
% Co v popelu	2.3	3.1

Uvedená data se týkají jedné rostliny; průměr je vzat ze 20 rostlin.

Máčíme-li klíční rostlinky do 1% roztoku $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$, dosáhneme ve vzrůstu ještě nápadnější rozdíly. Na př. boby (*Vicia faba*) po dvakrát opakovaném máčení v 1% roztoku $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$ byly od 3. XII. 1933 do 2. I. 1934 pěstovány v pilinách. Mezi 32 rostlinami vyrostlo pět jedinců o rozměrech:

35, 26, 21, 10, 8 cm. Délka ostatních 27 rostlinek se značně lišila, neboť obnášela průměrně 3·5 cm. Rostlinky 3·5 cm dlouhé byly úplně chlorotické a již během 20 dnů vrcholy os černaly. Rostliny, jichž osy měřily 8 a 10 cm, byly méně chlorotické. Rostliny 21, 26 a 35 cm dlouhé byly pak zelené. Jejich zeleň nebyla však tak intenzivní, jako rostlin nemáčených. Vzájemné váhové rozdíly a procento kobaltu obsaženého v popelu, nám znázorňuje tabulka:

Rostlina	35 cm	21 cm	3·5 cm
Čerstvá	1·700 g	1·2 g	0·33 g
suchá	0·150 g	0·106 g	0·033 g
popel	0·010 g	0·0074 g	0·0033 g
% Co v popelu	1·20	2·27	3·66

Z uvedené tabulky je patrné, že se stoupajícím obsahem kobaltu v rostlině klesá její růst a tím i váha.

Další tabulka nás seznamuje s množstvím kobaltu v jednotlivých částech rostlinné osy. Klíčící rostlinky bobu (*Vicia faba*) byly čtyřikrát, vždy po 24 hodinách, máčeny na 30 minut v 1% roztoku CoCl_2 a pak pěstovány v pilinách od 14. X. 1933 do 23. XI. 1933.

Za tuto dobu dosáhly osy průměrné délky 22·3 cm. Takto dlouhé byly rozděleny na tři části: basální, střední, apikální a proveden jejich rozbor:

Část	Rostlina			Kobalt
	čerstvá	suchá	popel	
basální	0·43 g	0·0306 g	0·0043 g	2·79%
střední	0·35 g	0·0160 g	0·0028 g	1·00%
apikální	0·36 g	0·0310 g	0·0026 g	2·6%

Uvedená data se týkají rozboru 12 rostlin; průměr však byl počítán pro jednu rostlinu. Z uvedeného je patrné, že největší množství kobaltu obsahuje partie basální, méně apikální a nejméně část střední.

U rostlin, které mají silnější kořeny, jako na př. *Aesculus hippocastanum*, je možno dobře sledovati rozložení kobaltu v celé rostlině.

V našem případě byly klíčící rostlinky *Aesculus hippocastanum* třikrát máčeny po 30 minutách v jednoprocenním roztoku $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ a pak pěstovány v pilinách od 24. I. 1934 do 5. III. 1934. Listy za tuto dobu byly silně chlorotické. O rozložení kobaltu v rostlině nás poučuje tabulka:

Délka v cm		Váhy 1 rostlinky v gramech							
os	kořene	čerstvá	suchá	popel	% Co	čerstvá	suchá	popel	% Co
19	21	8.1	2.0	0.008	2.6	2.1	0.5	0.01	3.05
		Děložia				Kořen			

Váha 1 rostlinky v gramech			
čerstvá	suchá	popel	% Co
2.0	0.5	0.03	2.8
O		a	

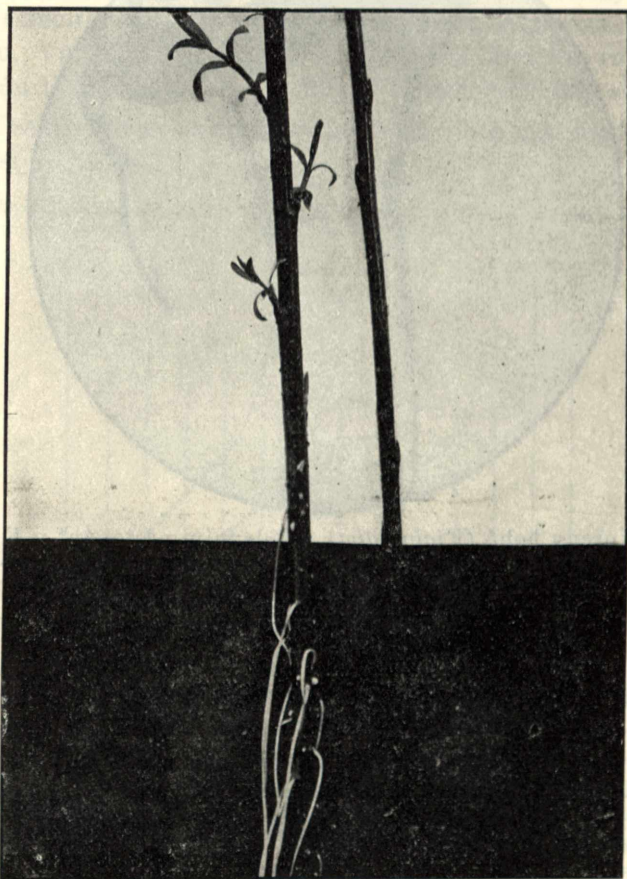
Největší množství kobaltu je procentuelně (počítáno na obsah popelu) nahromaděno v kořenu. V ose a v děložce jsou rozdíly celkem nepatrné (jen o 0.2%).

Vodní kultury.

Pokusy s vodními kulturami byly provedeny na *Vicia faba*, *Aesculus hippocastanum*, *Lupinus albus*, *Zea mays* a *Salix viminalis*. Vyjma *Salix viminalis* bylo použito k pokusům klíčících rostlinek, když délka jejich kořenů obnášela průměrně 2 centimetry. Větévky *Salix viminalis* byly v jedné řadě pokusů ponechány v Knopově živném roztoku, až se zakořenily a kořeny měřily 0.5—1 cm. Pak byly přenášeny do živného roztoku obsahujícího kobalt, nebo byly řízků ponořovány ještě nezakořenělé přímo do živného roztoku, který obsahoval kobalt.

Čisté roztoky sloučenin kobaltnatých až 0.002% působily na rostliny zhoubně. Již během 24 hodin kořeny silně černaly, obzvláště v zoně, kde kořen z živného roztoku přichází ve styk

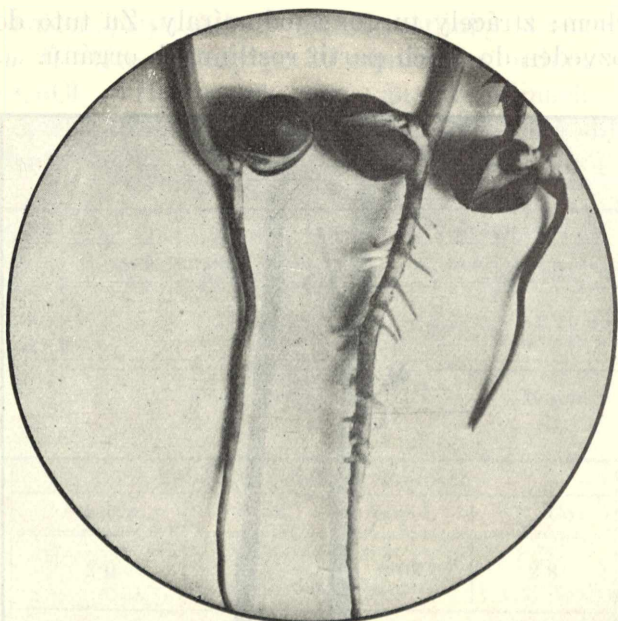
se vzduchem; ztrácely turgor a odumíraly. Zu tuto dobu byl kobalt rozveden do všech partií rostlinných orgánů.



Obr. 1. Větévky vrby (*Salix viminalis*) byly ponořeny do 0·01% roztoku $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$; nevytvorují kořenů ani letorostů. Větévka vlevo byla pěstována v Knopově živ. roztoku, větévka vpravo v Knopově živ. roztoku, k němuž byl přidán $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$.

Větévky *Salix viminalis* v prostředí čistých roztoků solí kobaltu (0·001—0·005%) nezakládaly kořeny vůbec.

V živném roztoku se projevují sloučeniny kobaltu odlišněji, než jsou-li samy o sobě, nebo když v nich namáčíme klíční rostlinky. Toxicita se projevuje později (až tehdy, když



Obr. 2. Kořeny bobů (*Vicia faba*) po 6denním pěstování v Knopově živném roztoku (rostlina prostřední) a v Knopově živném roztoku, ke kterému byl přidán m/l $\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ v poměru 2:200 (vlevo) a 4:200 (vpravo).

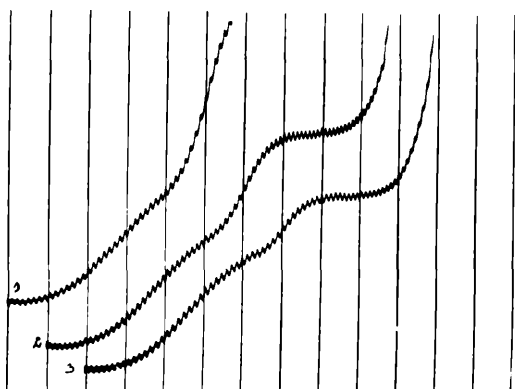
potřebné biogenní prvky jsou spotřebovány). Čím větší množství je však Co-iontu v roztoku přítomno, tím dříve se projevuje toxický jeho účinek. Všimněme si příkladu:

1 % CoCl_2 6 H_2O ccm	H_2O ccm	Knop ccm	Délka		Poznámka
			os cm	kořenů cm	
2	200	—	—	2	Rostliny odumírají již během 24 hodin.
4	200	—	—	2	„
2	—	200	200	7	Kořeny mají turgor; vrcholy os jsou chlorotické.
4	—	200	200	3.5	Kořeny odumírají; chlorotické vrcholy os černají.
—	—	200	200	9	Normální růst a sytě zelená barva.

V uvedeném případě byly boby (*Vicia faba*) máčeny 24 hod. ve vodě, pak vysazovány do pilin. Když kořeny dorostly průměrné délky 2 cm, byly rostliny po pěti vysazovány do nádobek (válců), které byly naplněny 200 ccm Knopova živného roztoku. Vedle kontrolních pokusů byl k živným roztokům přidáván 1% nebo m/1 $\text{CoCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ v poměru 2 : 200 a 4 : 200.

Uvedených rozdílů bylo dosaženo po sedmidenní kultivaci (od 6. XII.—12. XII. 1933).

Do jaké míry kořeny resorbovaly kobalt, o tom nás po-



Obr. 3. Polarografický rozbor živného roztoku, obsahujícího kobalt (2 : 200). První křivka je kontrolní (koncentrace kobaltu je tak značná, že výše křivky přesahuje papír), křivka 2 ukazuje snížení koncentrace kobaltu v živném roztoku po sedmidenní kultivaci. Křivka 3 po 10denní. Obsah kobaltu klesl v prvním případě asi o 50%, ve druhém asi o 75%. Polarisov. na vzduchu, citl. galvanometru 1/10, akumul., 4 volt.

učují polarografické rozbory (obr. 3.). Nejvyšší křivka nám ukazuje výchozí koncentraci, nižší množství kobaltu, který ještě zbyl v živném roztoku po sedmidenní kultivaci, nejnižší pak po desetidenní. Z křivek je patrné, že za sedm dní přijaly rostliny z roztoku asi 50% veškerého kobaltu a za deset dní asi 70%.

Obdobných výsledků bylo dosaženo při kultivaci vlčince (*Lupinus albus*). Rostlinky byly vysazovány do pokusných

nádob, když délka kořenů obnášela průměrně 3 cm. Průměrná váha činila 0.94 g, hypokotyl měřil 2 cm. Po 14 dnech byly zjištěny následující rozdíly:

Pokus	Knop ccm	1 % CoCl ₂ ccm	Délka v cm		Váha v gramech				
			os	kořenů	čerst.	suchých	popelu	% Co	% Fe
a	200	—	23	10	2.56	0.36	0.013	—	0.39
b	200	2	12	7	1.98	0.30	0.013	1.04	0.28
c	200	4	10	4	1.30	0.22	0.009	2.28	0.19

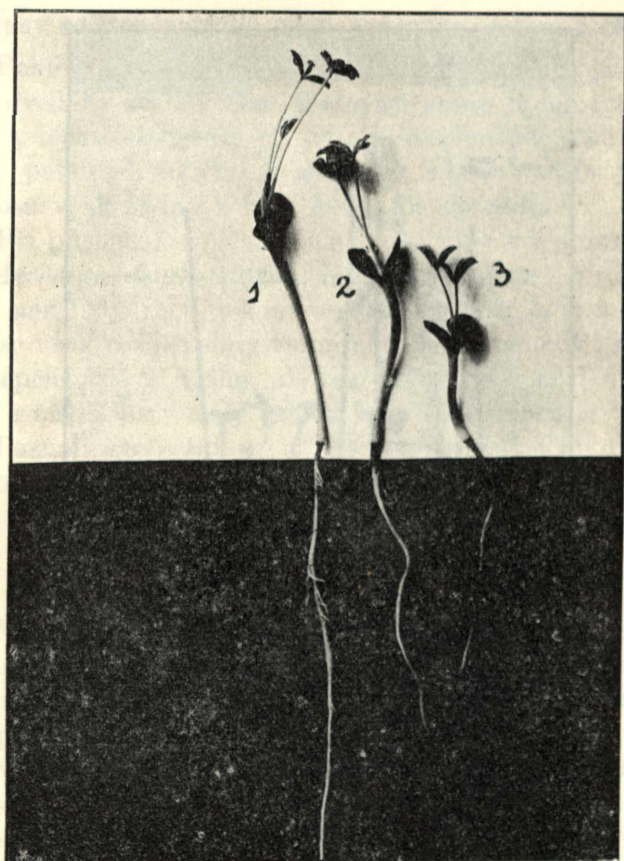
Transpirace počítáno na jednu rostlinu obnáší u rostlin v pokusu a) 10 ccm, b) 8 ccm, c) 6.4 ccm.

Rostliny, které resorbovaly Co-iont, jsou chlorotické. Rostliny v pokuse c) odumírají; rostliny v pokuse b) a a) jsou schopny ještě další kultivace. Z chemických analys vyplývá, že v rostlině se stoupajícím procentem kobaltu klesá procento železa.

O vlivu různé koncentrace roztoků kobaltnatých na růst vegetace nás poučuje další tabulka. K pokusu bylo použito klíčnicích rostlinek vlčince (*Lupinus albus*). Po 14denním pěstování (od 6. XII. do 20. XII. 1933) bylo dosaženo těchto výsledků:

Serie	Knop	m/lCoCl ₂	Délka		Váha 1 rostliny v gramech			
			kořenc	osy		čerstvé	suché	popele
a	200 ccm	—	9 cm	15 cm	osa	1.23	0.14	0.0130
					kořen	0.46	0.04	0.0032
					děloha	0.74	0.22	0.1900
					slupka	0.08	0.07	0.0050
					dohromady	2.51	0.47	0.2112
b	198 ccm	2 ccm	7 cm	7 cm	osa	0.58	0.04	0.0052
					kořen	0.18	0.02	0.0020
					děloha	0.70	0.30	0.1800
					slupka	0.08	0.60	0.0054
					dohromady	1.54	0.42	0.1926
c	196 ccm	4 ccm	6 cm	5.4 cm	osa	0.46	0.06	0.0036
					kořen	0.18	0.02	0.0180
					děloha	0.72	0.31	0.1240
					slupka	0.08	0.07	0.0048
					dohromady	1.44	0.46	0.1504

U rostlin serie c) se projevuje již zhoubný vliv Co-iontu. Kořeny a chlorotické vrcholy os silně černají. Kvalitativní analysou ionty PO_4^{3-} , K^+ a Fe^{3+} nelze v roztoku vůbec zjistiti. Shodné výsledky nám poskytl pokus provedený s koň-

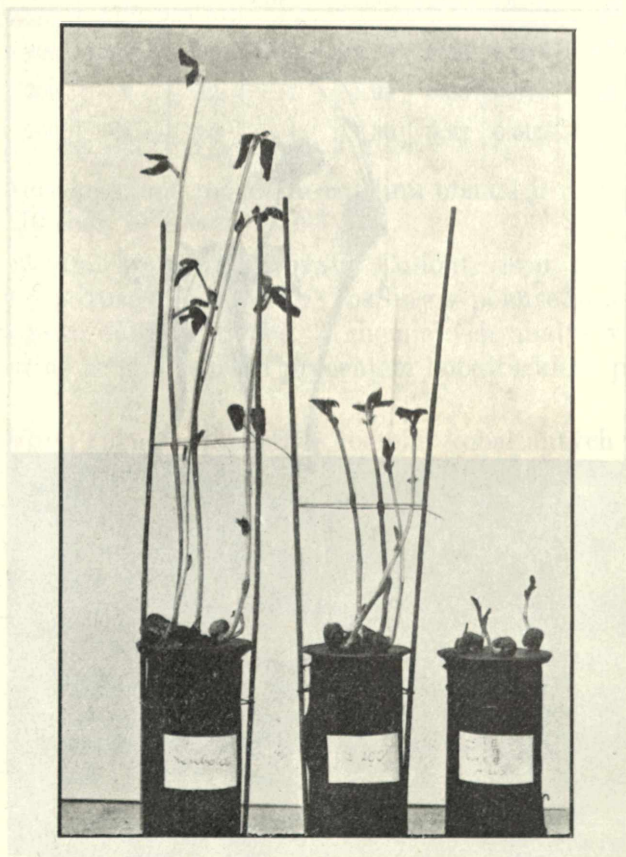


Obr. 4. Vlčinec (*Lupinus albus*) byl 7 dní pěstován v Knopově živném roztoku (1) a v Knopově živném roztoku, k němuž byl přidán 1% $CoCl_2 \cdot 6H_2O$ v poměru 2:200 (2) a 4:200 (3).

ským kaštanem (*Aesculus hippocastanum*). Tyto rostlinky byly po třech kusech vysazovány do živných roztoků, když délka kořenů obnášela průměrně 10 centimetrů. Vodní kultury byly opět rozděleny do tří serií: a) 200 ccm Knopova

živného roztoku, b) v Knopově živném roztoku kobaltechlorid v poměru 2 : 200, c) v Knopově živném roztoku kobaltechlorid v poměru 4 : 200.

Za 11 dní počaly kořeny rostlin serie c) černati, proto



Obr. 5. Boby (*Vicia faba*) byly 14 dnů pěstovány v Knopově živném roztoku (vlevo) a v Knopově živném roztoku, ke kterému byl přidán $m/l \text{ CoCl}_2 \cdot 6 \text{ H}_2\text{O}$ v poměru 2 : 200 (uprostřed) a 4 : 200 (vpravo).

byla tato serie z dalších pokusů vyloučena. U rostlin serie b) se projevíly podobné příznaky až za 24 dny. Pokus byl proto ukončen a zjistilo se následující:

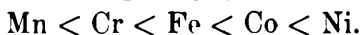
Knop ccm	CoCl ₂ ccm	Délka		Váha jedné rostliny v g			% Co v popelu
		kořenů	os	čerstvé	suché	popelu	
200	—	22 cm	14 cm	13.5	5.25	0.1890	—
200	2	11 cm	5 cm	6.3	4.3	0.1390	1.63

Pokusy se sloučeninami niklu, manganu, železa a chromu.

Pokusy se sloučeninami uvedených elementů jsou v této práci uvedeny zcela krátce. Podávají pouze přehled a doklad, že ionty těchto sloučenin při vysoké koncentraci, jaké jsme při našich pokusech užívali, působí na vývoj rostlin jedovatě. Chlorosu však žádný z nich nedovede vyvolati.

Při působení sloučenin manganu jsme sice pozorovali, že listy *Aesculus hippocastanum* bezprostředně po rozevření jsou bledší než listy rostlin kontrolních (u *Vicia faba* a *Lupinus albus* se však rozdíly daly velmi nesnadno stanovit), kde mangan nepřicházel v úvahu, ale tento stav po 5 až 7 dnech pomínil a bledší listy měly vzhled listů normálních.

Poznali jsme však, že u těže rostliny, při účinku stejného aniontu, toxicita kationtů postupuje v této řadě:



Vliv sloučenin niklu.

Aby bylo možno učiniti si srovnání o účinku solí kobaltu a niklu na rostliny, byly při pokusech provedených se sloučeninami nikelnatými dodrženy tytéž podmínky, jaké jsou uvedeny při pokusech s kobaltem.

Nikl, ve srovnání s kobaltem, ve svých sloučeninách projevil se jako prvek jedovatější. Účinek Ni-iontu byl závislý na povaze aniontu. Stoupal v řadě $\text{SO}_4'' > \text{Cl}' > \text{NO}_3'$.

Jedovatost Ni-iontu se na rostlinách projevila hlavně zdržením vývoje orgánů. Chlorosa se však v žádném případě neprojevila, ač nikl vyvolával tak značné poškození rostlin, že to mělo za následek brzké jejich odumírání.

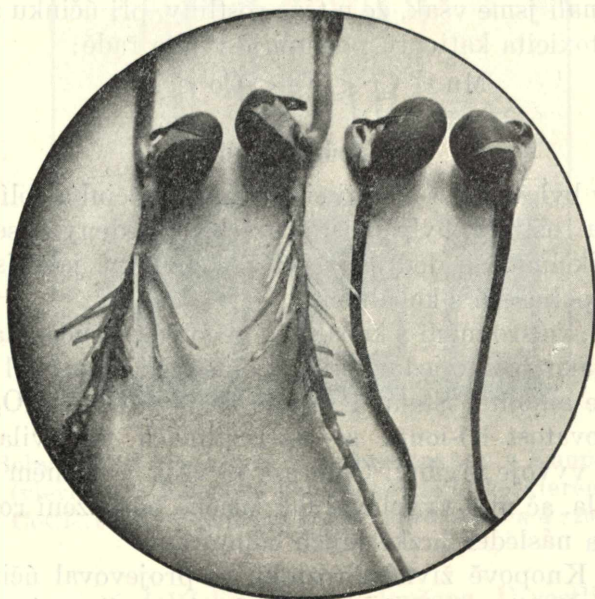
I v Knopově živném roztoku se projevovat účinek Ni-iontu zhoubněji než Co-iontu. Uvedená tabulka nám znázorňuje jeden z našich pokusů: Boby (*Vicia faba*) byly pěstovány v živných roztocích 18 dní (od 10. IV. do 28. IV. 1934). Po této době kořeny rostlin pěstovaných v roztocích obsahu-

jičích nikl počaly míti chorobný vzhled, proto byl proveden rozbor a zjistilo se následující:

Roztok	Knop	Délka		Váha 1 rostliny v gramech			
		kořene	osy	čerstvé	suché	popele	% kovu v popelu
n/1 NiCl ₂ 1 ccm	199 ccm	5 cm	1 cm	1.2	0.456	0.0172	2.31
n/1 CoCl ₂ 1 ccm	199 ccm	6 cm	1.5 cm	1.4	0.46	0.0222	1.97
—	200 ccm	16 cm	8 cm	2.6	0.38	0.0100	—

Další tabulka nám představuje účinek iontu Ni, máčíme-li klíční rostlinky do 1% roztoku NiCl₂ . 6 H₂O.

Boby (*Vicia faba*) byly dvakrát máčeny po 24 hodinách do 1% roztoku NiCl₂ . 6 H₂O. Již za 6 dní (od 6. III. do 12. III. 1934) nejen kořeny, nýbrž i vrcholy os silně černají:



Obr. 6. Boby (*Vicia faba*) byly 7 dní pěstovány v Knopově živném roztoku (kořeny vlevo) a v Knopově živném roztoku, k němuž byl přidán m/1 NiCl₂ . 6 H₂O v poměru 2 : 200 (kořeny vpravo).

Rostlina	Délka v cm		Váha 1 rostliny v gramech			% Ni v popelu
	kořenů	os	čerstvé	suché	popelu	
Normální	18	10	2.8	0.35	0.00157	—
Máčená	3	2.5	1.2	0.36	0.01724	2.23

Z uvedeného příkladu je viděti nápadný rozdíl nejen v rozměrech orgánu, nýbrž i v poměru popelu k váze čerstvé a suché. Popel rostlinek máčených do 1% roztoku NiCl_2 byl na rozdíl od popelu normálních rostlin barvy silně načernalé. Obzvláště popel z kořene, dělohy a vrcholu osy se černým zbarvením odlišovaly od epikotyly. Sraženina dimethylglyoxinem v těchto místech byla rovněž nejintenzivnější.

Paralelně a se stejně starými rostlinkami (*Vicia faba*) byl proveden pokus kultivace v Knopově živném roztoku, k němuž byl m/1 NiCl_2 přidán v poměru 2 : 200 a 4 : 200. Tato vysoká koncentrace měla za následek silné potlačení vzrůstu rostlinných orgánů a poměrně velký poměr popelu k čerstvé váze a sušině:

		Knop 200 cem	Knop a NiCl_2 2 : 200 cem	Knop a NiCl_2 4 : 200 cem
Délka	kořenů	10 cm	5 cm	4 cm
	os	4 cm	0.5 cm	—
Váha 1 rostliny v gr	čerstvé	1.48	1.000	0.8400
	suché	0.316	0.360	0.3200
	popelu	0.014	0.030	0.1460

Vliv sloučenin manganu.

Vliv manganu jsme sledovali působením roztoků $\text{MnCl}_2 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$ a $\text{MnSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$. Klíční rostlinky za stejných podmínek, jaké jsou uvedeny při pokusech s kobaltem a niklem, byly po 24 hodinách máčeny do 1% roztoků uvedených solí manganů. Ke Knopovu živnému roztoku byly (1% nebo m/1) sloučeniny manganu přidávány v poměru 2 : 200 a 4 : 200. Vysokou koncentrací manganu byl růst rostlin zpočátku zdržen, během 14—21 dní se však máčené rostliny ve vzrůstu vyrovnaly rostlinám nemáčeným, normálním. V živných roztocích nastávají poněkud odchylné poměry po spotřebě biogenních elementů, neboť pak zvýšená koncentrace

Mn-iontu se projevuje toxicky. Kořeny rostlin i po čtyřikráte opakovaném máčení do 1% roztoků solí manganatých byly jen nepatrně poškozeny. Normálně z nich vyrůstaly postranní kořeny.

Chlorosu, která podle literárních údajů účinkem sloučenin manganu se na rostlinách často projevuje, jsme při naší manipulaci nepozorovali. Pouze vrcholy mladých os *Vicia faba*, *Lupinus albus* a *Aesculus hippocastanum* byly nepatrně bledší než vrcholy rostlin kontrolních, a to jen velmi krátkou dobu. Již za pět, nebo sedm dní, nebylo možno mezi nimi a kontrolními pozorovati rozdílů. Tento případ nelze srovnati s nápadnou chlorosou způsobenou solemi kobaltu.

Rostliny (*Vicia faba*, *Zea mays*, *Aesculus hippocastanum*) máčené čtyřikráte do 1% $MnCl_2$ nebo $MnSO_4$ byly schopny života poměrně dlouhou dobu (i přes dva a půl měsíce). *Aesculus hippocastanum* ještě po tříměsíční kultivaci v pilinách zůstával svěží. Přiložená tabulka nám podává přehled růstu kořenů a os *Aesculus hippocastanum* čtyřikráte máčených v 1% roztoku manganchloridu.

Dne	Máčené		Nemáčené	
	kořeny	osy	kořeny	osy
6. IV.	5 cm	— cm	5 cm	— cm
17. IV.	8	8	9	10
20. IV.	15	21	20	23
25. IV.	20	22	20	24
25. V.	20	30	20	30

Dne 25. V. 1934 byla provedena chemická analýsa, která nás poučuje o lokalizaci manganu v rostlinách.

Váha 1 rostliny v gramech													
Délka		Děloha				Kořen				Osa			
os	kořenu	čerstvá	suchá	popel	% Mn	čerstvý	suchý	popel	% Mn	čerstvá	suchá	popel	% Mn

Největší množství manganu, počítáno na obsah popelu, je nahromaděno v ose, nejmenší v děloze. Přesto však, roz-

díly jsou celkem neveliké a svědčí o poměrně stejnoměrném rozvedení manganu v rostlině.

Vliv sloučenin železa.

Pokusy byly provedeny jednak s $\text{FeSO}_4 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$ a jednak s $\text{FeCl}_3 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$. Kultivace rostlin v živných roztocích a máčení klíčnicích rostlinek do 1% roztoků sloučenin železa se daly za stejných podmínek, jaké jsou uvedeny v předcházejících pokusech. Fe^{+++} -iont (ferriont) působil na kořeny rostlin jedovatěji než Fe^{++} -iont (ferro-iont). Roztoky sloučenin dvojmocného železa jsou poměrně nestálé a snadno přecházejí v trojmocné, takže je dlužno vedle účinku dvojmocného iontu předpokládati i účinek trojmocného iontu.

Kořeny rostlin (*Vicia faba*, *Zea mays*, *Lupinus albus*, *Aesculus hippocastanum*) po čtyřikráte opakovaném máčení v 1% roztoku FeCl_3 byly o málo méně poškozeny než rostliny máčené do 1% roztoku CoCl_2 . Nápadné bylo podélné pukání kořenů. Postranní kořeny, z takto poškozených hlavních kořenů vyrůstaly jen z partií těsně pod dělohou. Osy byly ve vývoji značně zdrženy; vrcholy a listy byly ve srovnání s kontrolními mnohem menší, avšak zelenější. Na příklad: Klíčnicí rostlinky *Aesculus hippocastanum* byly po čtyřikráte opakovaném máčení v 1% FeCl_3 pěstovány sedm dní v pilinách. Kořeny měřily 3 cm, osy se dosud nevytvořily; kořeny rostlin kontrolních měřily za tuto stejnou dobu 9 cm, osy 6 cm. Za 14 dní kořeny máčených rostlin měřily 15 cm, osy 9 cm; kořeny kontrolních rostlin 22 cm a osy 25 cm. Analýsa nám poskytl následující výsledek:

Rostlina	Délka v cm		Váha 1 rostliny v gramech			% Fe v popelu
	osa	kořen	čerstvé	suché	popel	
máčená	9	15	9.4	3.3	0.1291	2.46
kontrolní	25	22	15.7	5.4	0.1790	0.31

Ve vodních kulturách působil Fe -iont jedovatě, což se projevilo zdržením vzrůstu rostlinných orgánů. Účinek Fe -iontu byl však menší, než účinek Co -iontu a Ni -iontu. Větší než Cr -iontu a Mn -iontu. Popely rostlin pěstovaných v roztocích solí železa měly rezavou, velmi nápadnou, barvu.

Vliv sloučenin chromu.

Pokusy jsme prováděli s CrCl_2 , jenž je povahy velmi labilní. Již během máčení mění valenci. Bělavá barva přechází v modrou, takže vedle účinku dvojmocného iontu je nutno vzít v úvahu i účinek iontu trojmocného. Tím ovšem se mění i účinek chromu [podle Koeniga (1910) jedovatost chromu je vyjádřena stupnicí, z níž je patrné, že se stoupající valencí stoupá i jedovatost $\text{Cr}^{III} < \text{Cr}^{IV} < \text{CrO}_4^{VI}$].

Kořeny klíčnicích rostlinek *Vicia faba*, *Zea mays*, *Aesculus hippocastanum* po čtyřikrát opakovaném máčení v 1% roztoku CrCl_2 byly hojně příčně popukány a přitom nahnědlé. Přes toto poškození po celé délce vytvořovaly postranní kořeny. Chlorosu účinkem chromu jsme nepozorovali. Osy máčených klíčnicích rostlinek v 1% roztoku CrCl_2 během celé kultivační doby (až tři měsíce) zůstávaly ve vývoji ve srovnání s kontrolními rostlinkami značně opožděny. U *Aesculus hippocastanum* činil na př. rozdíl u rostlin čtyřikrát máčených do 1% CrCl_2 a kontrolních, nemáčených, po tříměsíční kultivaci 4 cm.

Pokud se lokalisace chromu týče, došli jsme k zajímavému poznatku. Po spálení rostlin v elektrické peci na neporušeném popelu rostlin jsme pozorovali, že chrom byl v živých pletivech fixován na zony meristematické. Špičky kořenů a vrcholky os proti ostatním partiím těchto orgánů byly nápadně zelenočerné (od CrO_2), což jsme pozorovali jak u rostlin pěstovaných v živných roztocích, ke kterým byl přidán chrom, tak u rostlin máčených v 1% roztoku CrCl_2 . O množství chromu obsaženém v popelu rostlin nás poučuje tabulka. Je zde uveden jeden z pokusů provedených na bobech (*Vicia faba*), čtyřikrát máčených v 1% roztoku CrCl_2 a po 14denní kultivaci v pilinách (od 2. III. do 16. III. 1934):

osy	Délka v cm kořenu	Váha i rostlinky v gramech			%Cr v popelu
		čerstvé	suché	popelu	
10.4	13.5	1.3	0.38	0.09	3.01

Resumé.

Elementy triady železa: kobalt, železo, nikl a jim v chemických a fyziologických vlastnostech příbuzné mangan a chrom ve větších koncentracích působí na rostliny jedovatě. Jedovatost je dána povahou kationtu $Ni^{++} > Co^{++} > Fe^{++} > Cr^{++} > Mn^{++}$ a jejich aniontů $NO_3^- > Cl^- > SO_4^{--}$

Sloučeniny téhož prvku, při nichž vystupuje element vyšší valence, jsou rovněž jedovatější.

Sloučeniny kobaltu nás nejvíce zajímaly, poněvadž jimi lze u rostlin vyvolati chlorosu. Dochází k ní nejpravděpodobněji tím, že kobalt vytvoří v rostlině sloučeniny, které zamezují pohyb železa od kořenu k listům. Lze tak usuzovati proto, poněvadž chlorosa nepostupuje současně s přijímáním kobaltu, nýbrž dostaví se později, když v rostlině jsou vyčerpány zásoby železa (obsažené u klíčících rostlin v dělohách). Chlorosu vyvolanou působením kobaltu lze odstraniti (u *Aesculus hippocastanum*) nebo značně zmírniti (u *Vicia faba*, *Lupinus albus*) natíráním chlorotických listů roztoky solí železitých. Chlorosa však nemizí, ponoříme-li chlorotické rostliny kořeny do roztoků obsahujících železo v nadbytku.

Z chemických analys pak vyplývá, že se stoupajícím obsahem kobaltu klesá v rostlině množství přijímaného železa.

Přítomnost těžkých kovů námi k pokusům užitých se projevuje i barvou popelu. Za přítomnosti kobaltu je popel šmolkově modrý, železa rezavý, chromu nazelenalý, niklu a manganu černý. Při opatrném spálení v elektrické peci lze na popelu makroskopicky sledovati lokalisaci kovu. V popelu rostlin máčených v 1% roztoku solí niklu, železa, kobaltu, manganu a chromu nebo pěstovaných v živných roztocích, k nimž byly roztoky uvedených kovů přidány, hromadí se kovy až do 3% (počítáno na obsah popelu).

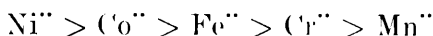
Summary.

Chlorosis of plants produced by cobalt.

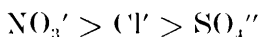
By Prof. B. Němec and J. Babička.

Presented June 6, 1934.

The elements of the triad iron: cobalt, iron, nickel and manganese together with chromium which are related to them in their physiological characteristics, act as poison on plants. Their virulence is furnished by the nature of the kations:



and their anions:



The solutions of salts of the same element, in which the element of higher valency occurs, are likewise more poisonous. Solutions of salts of cobalt interest us most, as chlorosis can be produced in plants, by means of them. This happens most probably, by the cobalt forming compounds, which hinder the movement of the iron from the roots to the leaves. This can be judged for this reason, because chlorosis does not set in simultaneously with the taking in of the cobalt, but happens later, while in plants, the supplies of iron contained in the cotyledons are exhausted.

Chlorosis produced by cobalt, can be removed (in *Aesculus hippocastanum*) or at least considerably reduced (in *Vicia faba*, *Lupinus albus*) by smearing the chlorotic leaves with a solution of iron salts.

But chlorosis does not disappear, if we dip the roots of chlorotic plants into a saturated solution of iron salts.

From the chemical analysis it is clear that the amount of iron, taken in the plant, decreases with increasing cobalt contents.

The presence of heavy metals used for our experiments is shown also in the colour of their ash. In the presence of cobalt, is the ash azure, for iron rustly coloured, for chromium greenish, and for manganese black. When the plants are carefully burned in electric furnace, the localisation of the metals can be traced macroscopically.

In the ash from plants soaked in one percent solutions of nickel, iron, cobalt, manganese and chromium salts, or grown in nutrient solutions, to which were added solutions of the above mentioned metals, the metals gather together up to 3%, calculated from the ash contents.

LITERATURA.

- Babička, J., Kolorimetrische Bestimmung von Kobalt in einer Nährlösung und in der Asche von Pflanzenorganen. *Věstník K. Č. Sp. N. II. tř.*, 11, 1934.
- Bertrand, G. et Mokřagratz M., Sur la répartition du nickel et du cobalt dans les plantes. *An. Sci. agronom. franc.* 47, 491, 1930.
- Bertrand, G. et Nakamura H., Sur l'importance physiologique du nickel et du cobalt. *C. R. Acad. Sc.* CLXXXV., 321, 1927.
- Boresch, K., Zur Frage der Ersetzbarkeit des Eisens bei Chlorose. *B. d. d. bot. Ges.* 42, 284, 1924.
- Bishop, W. B. S., The distribution of manganese in plants and its importance in plant metabolism. *Austr. Jour. of Exp. Biol. and Med. Sci.* 5, 125, 1928.
- Czapek, Fr., *Biochemie der Pflanzen*, 1921.
- Hargue, J. S., Calffe, R. K., Effect of manganese, copper and zinc on the growth of yeast. *Plant Physiol.* 6, 559, 1931.
- Heyrovský, J., Použití polarografické metody v praktické chemii. Praha 1933.
- Jacobson, H. G. M. a Swanback, T. R., Manganese toxicity in Tobacco. *Science*, 283, sept. 1929.
- Jamaha, G., Experimentelle zytologische Beiträge. *Jour. of the Fac. Sc. Imp. Univ. Kyoto* 2, 1—214, 1927.
- Johnson, H. V., The absorption of ions by living and dead roots. *Amer. Journ. Bot.* 2, 250, 1915.
- Kaho, H., Das Verhalten der Pflanzelle gegen Schwermetallsalze. *Planta*, 18, 664, 1933.
- McLean, F. T. a Gilbert, B. F., Manganese as cure for a chlorosis of Spinach. *Science*, juin, 1925.
- Iepeschkin, W. W., *Kolloidchemie des Protoplasmas*. Berlin 1924.
- Mokřagratz, M., Action du nickel et du cobalt sur le développement de l'*Aspergillus niger*. *Bull. Soc. Chim. biol. Paris* 13, 61, 1931.
- Popoff M., Zellstimulantien und ihre theoretische Begründung. *Zellstimulationforschungen*, 5, 2, 1924.

- Popoff M.**, Über die Stimulierung der Zellfunktionen. Biol. Zentralbl. **42**, 395, 1922.
- Pringsheim, E. G.**, Über Plasmolyse durch Schwermetallsalze. Beih. z. bot. Ctbl. **41**, 1, 1924.
- Radoeff, A.**, Stimulation de la croissance par divers agents chimiques chez le blé et le riz. C. R. Sc. Biol. Bordeaux, **112**, 580, 1933.
- Schiltz, H. J.**, Untersuchungen über die Wirkung des Ferrosulfats auf die Pflanze. Diss. Bonn, 1908.
- Tomula, E. S.**, Über die colorimetrische Bestimmung des Kobalts für sich und neben Nickel. Z. anal. Chem. **83**, 6, 1931.
- Úlehla, V. u. Morávek, V.**, Über die Wirkung von Säuren und Salzen auf *Basidiobolus ranarum*. Ber. d. d. bot. Ges. **40**, 8, 1922.
-

Die Cytologie und Entwicklung von *Ichthyophthirius multifiliis* (Fouquet).

[*La cytologie et l'évolution d'Ichthyophthirius multifiliis*
(Fouquet).]

Von Doc. Dr. V. BREINDL und Dr. O. JIROVEC.

Aus dem I. Zoologischen Institut der Karls Universität in Prag, ČSR.

Hierzu 3 Textabbildungen.

(Vorgelegt am 10. Oktober 1934).

Obwohl *Ichthyophthirius multifiliis* (Fouquet) seit langem als eine in der praktischen Fischerei sehr wichtige und häufig auftretende Form bekannt ist, hat man ihm seit den Arbeiten von Clevich, Neresheimer und Buschkiel sehr wenig Interesse gewidmet, so daß in seiner Cytologie ziemlich viele Lücken und Unklarheiten geblieben sind. Uns interessierte hauptsächlich die Frage über die Anwesenheit und Entwicklung des Micronucleus während des ganzen Cyklus, sowie auch die von Neresheimer und Buschkiel behauptete Autogamie der jungen Sprößlinge.

1. Material und Technik.

Als Material standen uns zur Verfügung hauptsächlich mit *Ichthyophthirius* infizierte Schleien (*Tinca tinca*) und Plötze (*Leuciscus rutilus*), die uns gefälligst vom Herrn Kollegen Prof. Dr. K. Schäferna überlassen wurden, wofür wir ihm an dieser Stelle unseren besten Dank aussprechen. Vor allem waren es die Schleien, an denen wir die fortschreitende Krankheit längere Zeit verfolgen konnten, und deren Hautinfektion uns vorzügliches Material zum Studium der großen Stadien und Cystenbildung lieferte. Bei den Plötzen war neben der Hautinfektion noch ein sehr starker Kiemenbefall. Außer dem lebenden Material wurden hauptsächlich Total- und Schnittpräparate untersucht. Der Hautschleim mit zahlreichen Infusorien wurde an Deck-

gläschen ausgestrichen und mit Sublimat-Alkohol, Sublimat-Eisessig, Zenker, Helly, Bouin und Chromsäure-Formol-Bichromat nach *Němec* fixiert. Gleiche Fixierung wurde auch für Kiemen, Hautstücke und Flossen der infizierten Fische gebraucht. Zur Färbung benutzten wir die üblichen cytologischen Methoden, wie Ehrlichs Hämatoxylin, Heidenhain, Dominici, Mallory, Giemsa, Giemsa-Van Gieson nach *Breindl*, doch überzeugten wir uns, daß alle diese Methoden den Micronucleus sehr schlecht färben, oder durch intensive Färbung des Macronucleus und der Plasmacinschlüsse denselben verdecken. Deswegen haben wir unseres Material vor allem mit *Feulgens* Nuclealfärbung behandelt, die uns die besten Ergebnisse lieferte. Die Ausstriche, sowie Schnitte bleiben nach dieser Methode vollkommen transparent, alle Plasmacinschlüsse sind ungefärbt und nur die Chromatinsubstanzen elektiv rot gefärbt. Zum Studium der weiteren Entwicklung schabten wir den Schleim mit ausgewachsenen Ichthyophthirien in mit Wasser gefüllte Petrischalen ab und fixierten die sich encystierende Individuen in bestimmten Zeitabständen mit Sublimat-Eisessig. Die weitere Behandlung, wie Auswaschen, Hydrolyse, Reaktion mit fuchsin-schwefliger Säure, und Überführung ins Balsam geschah mittels Centrifugieren in Centrifugierröhrchen. Die nach *Feulgen* behandelten Infusorien wurden entweder ins Kanadabalsam eingelegt, oder ins Parafin eingebettet und geschnitten.

2. Die Kernverhältnisse während des vegetativen Lebens.

Aus allen neuen Untersuchungen geht hervor, daß die Euciliaten einen typischen Kerndimorphismus aufweisen, nämlich einen oder mehrere vegetative Kerne (Macronucleus Ma) und wenigstens einen bis mehrere Geschlechtskerne (Micronuclei = Mi). Eine Ausnahme sollen nur einige dubiose Arten wie *Trachelocerca phoenicopterus*, *Leucophrys patula*, bei denen während des vegetativen Lebens nach den älteren, mit unvollkommener Technik ausgeführten Arbeiten (*Prowazek* u. a.) ein Mi fehlen soll.*) Zu diesen Formen wird gewissermaßen auch *Ichthyophthirius multifiliis* gerechnet, von dem man bis jetzt angenommen hat, wie auch aus moderner Handbüchern (Doflein-Reichenow.) ersichtlich ist, daß er nur in ganz jungen Stadien einen Mi besitzt, welcher aber bald in den Ma einwandert und mit dessen Chromatimasse verschmilzt. Wenn wir die bis jetzt unternommenen Studien und Ansichten über den Mi von *Ichthyophthirius* miteinander vergleichen, finden wir, daß

*) Bei *Trachelocerca* soll nach *Lebedeff* der Mi aus dem Ma entstehen, bei der kleineren Form von *Leucophrys patula* konnte *Prowazek* vielfach keinen Mi finden, und meint, daß dieser in das Innere des Ma eingedrungen ist.

zwar die älteren Autoren wie *Bütschli*, *Doflein* und *Hofer* seine kontinuierliche Anwesenheit ganz logisch analog wie bei anderen Ciliaten vorausgesetzt haben, ohne ihn jedoch tatsächlich bei den erwachsenen Ichthyophthirien nachzuweisen. *Bütschli* nahm an, daß der Micronucleus zwar stets vorhanden ist, doch nur in den eben der Cyste entschlüpften Stadien sichtbar sei, *Hofer* sprach von einem schwer zu beobachtenden Nebenkern, *Doflein* glaubte, daß der Micronucleus erst dann sichtbar werde, wenn innerhalb der Cyste die Nahrungskörper aufgebraucht werden.

Die zweite Reihe der Forscher, *Clevich*, *Neresheimer* und *Buschkiel*, die sich sehr gründlich mit Ichthyophthirius befaßt haben, sind dazu gekommen, daß zwar der Mi in ganz jungen Stadien nachzuweisen ist, jedoch, wie schon oben gesagt wurde, bald verschwindet und in weiteren Stadien nicht mehr vorhanden ist. *Bělař* macht auf die Möglichkeit aufmerksam, daß der Mi nicht mit der Masse des Großkernes verschmilzt, sondern daß er vielleicht in einer Mulde des Ma liegt, dessen Ausführungsgang uns obliteriert erscheint. Daraus folgt natürlich, daß die Beobachter die ersten Teilungen des Mi nach dem Encystieren übersehen hatten, was nach *Bělař* nicht so unmöglich wäre. Z. B. bei *Bütschliella opheliae* ist auch ein Mi nach *Awerintzew* nicht nachweisbar, taucht aber zu Beginn der Teilung auf, so daß man annehmen muß, er verstecke sich nach jeder Teilung. *Bělař* bezweifelt auch die Entstehung eines Mi aus dem Ma bei micronucleuslosen Rassen anderer Ciliaten.

Wenn wir nun zu unseren eigenen Beobachtungen übergehen, wollen wir ausdrücklich betonen, daß wir zwar eine ganze Reihe der von *Neresheimer* und *Buschkiel* gesehenen und abgebildeten Stadien bestätigen können, wir hatten jedoch einen großen Vorteil in der Nuclealreaktion, die uns einige ganz neue, mit anderen Methoden nicht erzielbare Befunde, und damit zusammenhängende neue Deutung derselben, ermöglicht hatte. Das cytologische Studium bot uns zwei verschiedene Fragen an: nämlich die kontinuierliche Anwesenheit des Mi, und zweitens die Frage über seine Entstehung.

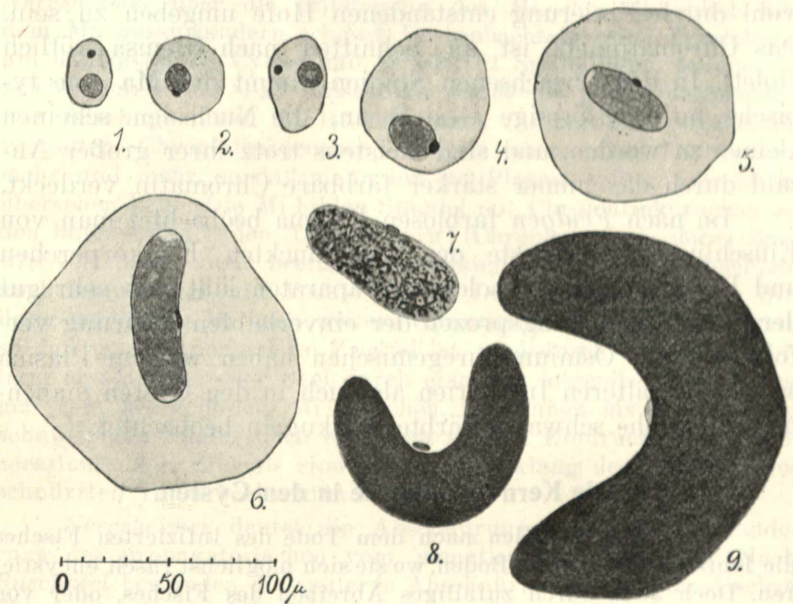
An den Kiemenausstrichen aus der Plötze fanden wir nach der Nuclealfärbung in allen jungen Stadien von Ichthyophthirius den Kleinkern in Form eines kleinen, rundlichen oder ovalen Gebildes, das sich nach Feulgen sehr intensiv dunkelrot färbt, und eine gleiche Reaktion und Struktur wie die Mi aller anderer Ciliaten aufweist. Die an den Fig. 1, 2, 3 abgebildeten Stadien massen 31, 37 und 44 μ . Wenn

wir nun den Mi weiter verfolgen, sehen wir, daß sich in älteren Stadien sein Abstand von dem Großkern bedeutend verkürzt, so daß wir ihn in den 66—100 μ großen Stadien (Fig. 4, 5) schon unmittelbar dem Ma anliegend finden. Nachdem wir den Mi bei den 100 μ großen Stadien gefunden haben, verfolgten wir seine Anwesenheit in allen weiteren Wachstumsstadien, wo natürlich der Nachweis schon schwieriger wurde. Wenn wir nämlich die Färbbarkeit des Mi und Ma im Laufe des vegetativen Wachstums vergleichen, sehen wir, daß dieselbe beim Mi mit dem Alter abnimmt, dagegen beim Ma zunimmt, weshalb der Mi bei den älteren Stadien bisher nicht gefunden wurde. Die zweite Ursache scheint in seiner verborgenen Lage in der unmittelbaren Nähe des Ma zu liegen. Wenn wir außerdem noch die starke Färbbarkeit der verschiedensten Plasmaeinschlüsse, Nahrungspartikeln, usw. bedenken, die bei den üblichen cytologischen Methoden das Bild sehr undeutlich machen, finden wir es nicht wunderlich, daß auch so ausgezeichnete Forscher wie *Neresheimer* und *Buschkiel* den Mi nicht finden konnten. Denn der Mi, der in den jüngsten vegetativen Stadien dicht granuliert und wegen seines reichen Chromatingehalt eine sehr kräftige Nuclealreaktion gibt, nimmt mit dem Wachstum eine mehr längliche Gestalt und feinkörnige bis faserige Struktur an, und wird offenbar chromatinarm, wie wir aus seiner schwächeren Nuclealreaktion schließen können. Wir konnten uns auf einer Unmenge von erwachsenen Individuen überzeugen, wie seine Lage variiert. Meistens liegt der Mi in der konkaven Seite des bei erwachsenen Infusorien mehr oder minder hufeisenförmigen Ma, wo er manchmal in einer gewissen Einbuchtung sich befindet (Fig. 5—9). Sehr oft trifft man ihn auch an der konvexen Seite des Ma, aber er kann auch an seinen Seiten liegen, womit dann das schwierigste Suchen verbunden ist. Jedoch auch in solchen Fällen konnten wir ihn nach der Nuclealfärbung beim Hoch- und Tiefenstellen der Micrometerschraube auffinden. Wie aus den Fig. 8—9 ersichtlich ist, haben wir den Mi auch in den ältesten vegetativen Stadien (300—500 μ messenden) gefunden. Nachdem wir die Lage und Form des Mi aus den Nuclealpräparaten kannten, fanden wir ihn, wenn auch mit großen Schwierigkeiten und

nicht in jedem Falle, auch nach den üblichen cytologischen Methoden.

Dank der Nuclealreaktion haben wir die Kontinuität des Mi während des ganzen vegetativen Lebens bei *Ichthyophthirius multifiliis* festgestellt, und die theoretischen Ansichten *Dofleins* und *Hofers* bestätigt.*)

Die Gestalt des Makronukleus ist bei den jüngsten Sta-



Textfig. 1.—9.

dien rundlich bis oval (Textfig. 1—4) und seine innere Struktur besteht aus einem dichten Chromatinnetz, in welchem sich mehrere kleine, meist peripher liegende Nucleolen befinden. In den größeren Stadien nimmt er eine länglich ovale Form an, und an seinen Polen beobachtet man gewöhnlich zwei große und einige kleinere Nucleolen. Die großen liegen dem Kerne kappenartig an, die kleineren sind dagegen manchmal

*) *Haase* ist in seiner Arbeit bei Anwendung anderer Technik zu ähnlichen Ergebnissen gekommen und es gelang ihm den Mi auch in vegetativen Stadien zu beweisen, seine größten micro-nucleushaltigen Infusorien maßen 170—196 μ , während wir den Mi in noch größeren, 300—500 μ messenden, nachweisen konnten.

in Reihen geordnet, und von länglicher Gestalt. Nach *Feulgen* bleiben natürlich die Nucleolen immer farblos, während sich das Chromatin dem Alter des Parasiten entsprechend immer mehr und mehr intensiver färbt, womit auch ein scheinbares Verschwinden des Mi, der durch die intensive Färbung des Ma verdeckt wird, zusammenhängt. Nach Giemsa färben sich die Nucleolen blau, und scheinen von einem helleren, wohl durch Fixierung entstandenen Hofe umgeben zu sein. Das Chromatinnetz ist an Schnitten nach Giemsa rötlich violett. In den erwachsenen Stadien nimmt der Ma eine typische hufeisenförmige Gestalt an, die Nucleolen scheinen kleiner zu werden, und sind meistens trotz ihrer großer Anzahl durch das immer stärker färbbare Chromatin verdeckt.

Im nach *Feulgen* farblosen Plasma beobachtet man von Einschlüssen Kernreste der verschluckten Blutkörperchen und Epithelzellen. An solchen Präparaten läßt sich sehr gut der ganze Verdauungsprozeß der einverleibten Nahrung verfolgen. Nach Osmiumsäuregemischen haben wir im Plasma sowohl der älteren Infusorien als auch in den Cysten manchmal zahlreiche schwarzgefärbte Fettkugeln beobachtet.

3. Die Kernverhältnisse in den Cysten.

Wie bekannt, fallen nach dem Tode des infizierten Fisches die Ichthyophthirien zu Boden, wo sie sich möglichst rasch encystieren. Doch auch durch zufälliges Abreiben des Fisches, oder von sich selbst gelangen die Infusorien ins freies Wasser. Der Inhalt der Cyste zerfällt successiv in 2, 4, 8, 16, 32 usw. bis über 250 Sprößlinge. Nach allen früheren Beobachtungen teilt sich der Ma amitotisch, während der Mi am Anfang der Cystenteilung vollkommen fehlen soll und sich erst im fortgeschrittenen Stadium durch Abschnürung aus dem Ma bildet. Nach *Clevich* (1904) erscheint am Ma im 8. und 16. Teilungsstadium eine chromatische Ansammlung, in Form von undeutlichen Streifen, die sich auch bei folgender Teilung des Ma teilt, und nachher bei Abrundung der Tochterkerne sich vom Ma löst und zu einem Mi umbildet. Der so entstandene Nebenkern teilt sich weiter mitotisch, typische Spindel bildend, und ist in allen weiteren Stadien der Cystenteilung vorhanden. *Neresheimer* beschreibt die Entstehung des Mi in etwas abweichender Weise: wenn in der Cyste 2—3 Dutzend etwa 100 μ großer Teilstücke entstanden sind, so wölbt sich vom Ma eine kompakte stark färbbare Masse, die dann aus dem Ma austritt und sich ein Stück weiter entfernt. Nachdem

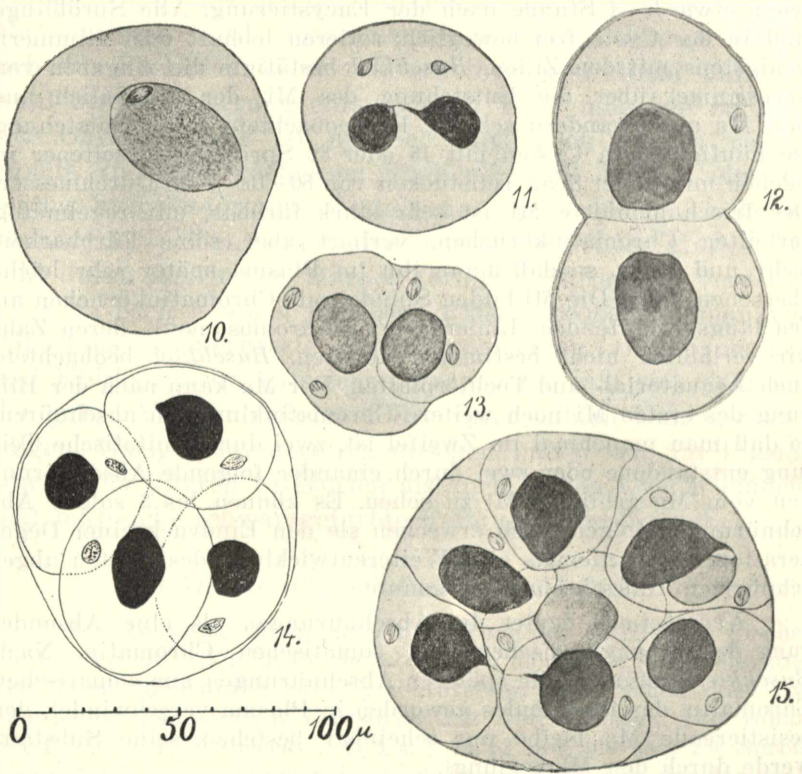
die Verbindung mit dem Hauptkerne verschwunden ist, nimmt sie den Charakter eines Mi an und teilt sich mitotisch bei nachfolgenden Teilungen. So entstehen in der Cyste junge Sprößlinge (etwa 40 μ) mit deutlich wahrnehmbarem Haupt- und Nebenkern.

Buschkiel (1911) fand die ersten Zweiteilungen in der Cyste schon etwa $\frac{1}{2}$ —1 Stunde nach der Encystierung. Alle Sprößlinge sind in der Cyste frei beweglich, rotieren lobhaft oder flimmern wenigstens mit den Zilien. *Buschkiel* bestätigte die Angaben von *Neresheimer* über die Entstehung des Mi, der allmählich aus dem Ma auszuwandern scheint. Er beobachtete seine Entstehung am häufigsten in Cysten mit 16 oder 32 Sprößlingen, seltener in solchen mit 4 oder 8, an Teilstücken von 80—100 μ im Durchmesser. Der frisch gebildete Mi ist sehr stark färbbar, mit regelmäßig verteilten Chromatinkörnchen, verliert aber seine Färbbarkeit mehr und mehr, so daß man ihn im Plasma später sehr leicht übersehen kann. Die Mi bilden Spindel mit Chromatinkörnchen an den längsverlaufenden Linienfasern (Chromosomen), deren Zahl wir verlässlich nicht bestimmen konnten. *Buschkiel* beobachtete auch Äquatorial- und Tochterplatten. Der Ma kann nach der Bildung des ersten Mi noch weitere Chromatinklumpfen abschnüren, so daß man manchmal im Zweifel ist, zwei durch mitotische Teilung entstandene oder zwei durch einander folgende Abschnürungen vom Ma gebildete Mi zu sehen. Es können bis 3 solche Abschnürungen folgen, doch erwecken sie den Eindruck einer Degeneration, da er niemals eine Weiterentwicklung des dritten abgeschnürten Teiles beobachten konnte.

Neresheimer deutet die Abschnürungen als eine Absonderung des propagatorischen vom somatischen Chromatin. Nach *Buschkiel* beständen die späteren Abschnürungen aus somatischem Chromatin, das funktionlos geworden in Plasma verschwindet, der resistierende Ma bleibe nur scheinbar bestehen, seine Substanz werde durch den Mi verjüngt.

Unsere eigene Beobachtungen haben ein ganz anderes Licht auf die Kernverhältnisse in Cysten von Ichthyophthirius geworfen. Vor allem war es die schon oben ausführlich beschriebene Kontinuität des Mi während des ganzen vegetativen Lebens, der also nicht erst durch eine Abschnürung vom Ma entstehen muß, sondern stets vorhanden ist. Wie aus der Textfig. 10. ersichtlich ist, besitzt schon das früheste encystierte Stadium außer dem Ma auch einen gut wahrnehmbaren Mi, der in unserem Falle oberhalb des Großkernes lag und gerade eine Spindelteilungsfigur aufwies. Nach der mitotischen Teilung des Mi teilt sich der Ma hantelförmig (amito-

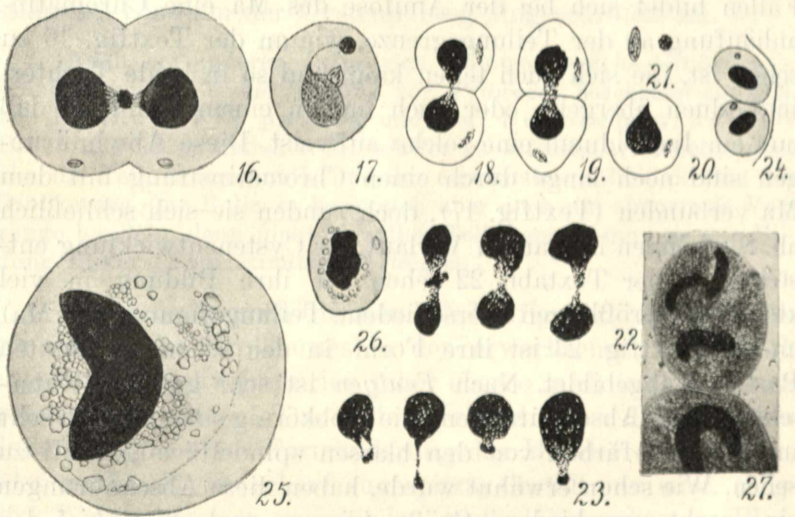
tisch) (Textfig. 11), wobei noch sehr lange der dünne, die Tochterkerne verbindende, mit Chromatingranulen erfüllte Strang zu sehen ist. An derselben Fig. sehen wir auch die erste Teilung des Mi, der wieder gleich eine Spindelform an-



Textfig. 10.—15.

nimmt. In der Textfig. 12 hat sich schon die Scheidewand zwischen beiden Tochterindividuen ausgebildet, und die Fig. 13 zeigt uns die weitere Zweiteilung der beiden Tochter-Mi. In der Mehrzahl der von uns beobachteten Fällen scheint die Teilung des Mi jener des Großkernes voranzugehen, was vielleicht zu den irrthümlichen Deutungen anderer Autoren über solche zwei Mi enthaltende Sprößlinge geführt hat. Textfig. 14—15 zeigen uns die Cyste mit 4, bzw. 8 Individuen, wobei jedes einen Groß- und einen wohlausgebildeten Kleinkern, meistens in der Mitose, besitzt. Die weiteren Teilungs-

stadien mit 16, 32, 64 usw. Sprößlingen bilden wir aus Er-
 sparungsrücksichten nicht ab, da, wie wir uns an zahllosen
 Cysten überzeugen konnten, die Kernverhältnisse überall die-
 selben sind. Aus unseren Beobachtungen ist klar ersichtlich,
 daß in allen Cystenstadien, von den jüngsten, nur 2 Spröß-
 linge enthaltenden, bis zu den ältesten Cysten mit etwa 250,
 dieselben Kernverhältnisse wie bei den vegetativen Stadien



Textfig. 16.—27.

am Fische vorkommen, und daß wir also auch den Mi überall
 in den Cysten nachweisen können. Wir müssen noch an dieser
 Stelle bemerken, daß die Cystenwand an Feulgenspräparaten
 immer ungefärbt bleibt, und erst nach starkem Abblenden
 sichtbar wird, deshalb ist sie von uns in einigen Abbildungen
 nicht eingezeichnet worden.

Wie kann man nun unsere ganz abweichende Beob-
 achtungen mit den früheren im Einklang bringen oder die
 Differenzen erklären? Auch wir haben in unseren Präparaten
 ähnliche Abschnürungen vom Macronucleus, wie sie *Clevich*,
Neresheimer und *Buschkiel* beschrieben haben, beobachtet,
 und zwar schon in den jüngsten Cysten, wir müssen aber her-
 vorheben, daß in allen solchen Stadien ein sehr
 gut sichtbarer, normal ausgebildeter, meist

spindelförmiger Micronucleus vorhanden war, daß also diese Abschnürungen mit einer Micronucleusbildung nichts gemeinsames haben.

Nach unseren Beobachtungen entstehen jedoch diese Abschnürungen gewöhnlich auch auf andere Weise, als es *Neresheimer*, *Clevich* und *Buschkiel* angenommen haben. In vielen Fällen bildet sich bei der Amitose des Ma eine Chromatinanhäufung an der Teilungsgrenze, wie an der Textfig. 16 zu sehen ist, die sich auch teilen kann und so in beide Tochterindividuen übergeht, oder auch nur in einem bleibt, so daß nur ein Individuum eine solche aufweist. Diese Abschnürungen sind noch lange durch einen Chromatinstrang mit dem Ma verbunden (Textfig. 17), doch runden sie sich schließlich ab. Sie können im ganzen Verlauf der Cystenentwicklung entstehen, in der Textabb. 22 sehen wir ihre Bildung in viel kleineren Sprößlingen (verschiedene Teilungsfiguren der Ma) an der Textfig. 23 ist ihre Form in den schon getrennten Partnern abgebildet. Nach *Feulgen* ist sehr gut der Unterschied dieser Abschnürungen, die grobkörnig sind und sich sehr intensiv rot färben von den blassen spindelförmigen Mi zu sehen. Wie schon erwähnt wurde, haben diese Abschnürungen eine recht verschiedene Größe, können nach *Buschkiel* den zwei- bis dreifachen Umfang des Nebenkernes haben, sind aber manchmal kaum halb so groß. Ferner kommen sie in allen Stadien der Cystenteilung vor, in der ersten Zerteilung wie in den kleinsten Sprößlingen. Da sie auch bei einander nachfolgenden Teilungen entstehen können, ist leicht erklärlich, daß man Sprößlinge mit 1, 2 bis 3 solchen Chromatinclumpen im Plasma antrifft, die daneben natürlich einen gewöhnlich spindelförmigen, schwach färbbaren Nebenkern besitzen. Ihre innere grobkörnige Struktur ist vollkommen derjenigen des Großkernes gleich. Ihr weiteres Schicksal besteht in einer mehr oder weniger raschen Degeneration, die mit Auflösung ihrer Masse im Plasma endet. Nach *Feulgen* beobachtet man eine blaßrote Vakuole, die später im Plasma gänzlich verschwindet. Ähnliche, ganz klare Unterschiede haben wir auch nach verschiedenen anderen cytologischen Methoden (Heidenhain, Ehrlich, Dominici, Giemsa) beobachtet. Niemals

sahen wir irgendwelche Übergangsstadien, die für eine Umbildung der Abschnürungen in einen Mi gedeutet werden konnten. Immer war eine Verwechslung mit den eigentlichen Mi gänzlich ausgeschlossen.

Es wäre auch schwer zu erklären, warum im Falle, es handle sich um wirkliche Reduktion der Macronucleussubstanz, dieselbe nicht auf einmal geschehe, und nicht auf ein bestimmtes Stadium der Cystenteilung eingeschränkt sei.

Auch bei anderen Infusorien kommen solche Großkernabschnürungen bei seiner Teilung vor, *Prowazek* beschreibt sie z. B. bei *Leucophrys patula* und bei *Loxoecephalus*. Ihre Bedeutung ist natürlich recht schwer zu erfassen, vielleicht spielt hier die Teilungsmechanik, und der eigenartige kolloidale Bau des Großkernes eine Rolle, es kann sich aber auch um abnormale Vorgänge handeln, denn nicht bei allen Teilungen kommt es zur Bildung dieser Chromatinabschnürungen.

Wir müssen noch die ziemlich häufig vorkommende Degeneration des Großkernes in den erwachsenen, vom Fisch abgelösten Ichthyophthirien (aber ebenso auch in den Cysten gesehene) erwähnen. Das erste Merkmal dieser Degeneration äußert sich in einer Formänderung des Ma, der eine lappige, oder an den Enden scharf zugespitzte Gestalt annimmt. (Fig. 25.) Weiter kommen verschieden große Körperchen im Plasma vor, die entweder eine kugelige oder eckige Gestalt aufweisen, in der Nähe des Ma liegen und sich nach *Feulgen* an ihrer Peripherie rot färben, während ihr Inneres immer farblos bleibt. In Folge ihrer positiven Nuclealreaktion schließen wir an ihre Herkunft vom Großkern. Da diese Degenerationserscheinungen auch in jungen wie in älteren Cysten vorkommen (Textfig. 26), muß man bei der Deutung der Bilder sehr vorsichtig sein und solche Degenerationsstadien aus der Beschreibung des normalen Cyklus ausschließen. Einmal fanden wir ein encystiertes Infusor mit 3 Macronuclei (Mikrophotographie 27).

4. Über die Frage der Autogamie.

Mit Ausnahme von *Clevich* und *Roth* haben alle anderen Beobachter geschlechtliche Prozesse in der Cyste angenommen. Nach *Neresheimer* teilt sich in etwa 40 μ großen Sprößlingen der Mi in

4 neuen, von denen 3 degenerieren und der vierte durch eine neue Spindel 2 Geschlechtskerne bildet, es ist also eine typische Reifeteilung, wie bei allen anderen Ciliaten. Nach dem Reifungsprozeß verlassen die Sprößlinge die Cyste, doch konnte *Neresheimer* niemals weitere Befruchtungsvorgänge beobachten, auch in der Cyste suchte er nach einer Kopulation vergebens. Ganz junge, sich am neuen Fische niedergelassene Individuen zeigten 1 Ma und 2 Mi, die nach *Neresheimer* verschmelzen sollen, ohne in Spindelform zu übergehen; *Neresheimer* schließt deshalb auf eine autogame Bebruchtung. *Buschkiel* bestätigte zwar die Autogamie, doch schildert die Reifungsvorgänge bedeutend komplizierter. Er findet Sprößlinge mit 2 Mi in Spindel, seltener solche mit 4 ausgebildeten Mi (die auffallender Weise immer nahe einander liegen) und betrachtet sie für Geschlechtskerne, die miteinander verschmelzen, denn er findet auch Sprößlinge mit nur einem Kern, der den Eindruck macht aus 2 verschmolzenen entstanden zu sein. *Neresheimer* soll sich durch die nachfolgenden Abschnürungen des Ma geirrt zu haben. Die Tatsache, daß keine degenerierende Richtungskörper zu finden sind, erklärt *Buschkiel* durch ihre rasche Degeneration, so daß sie bereits verschwunden sind, wenn die Geschlechtskerne zur Verschmelzung übergehen. Die frischgebildeten Synkaryen lassen sich an ihrer Form und bedeutender Größe leicht erkennen. Zusammengefaßt: in einem Sprößlinge entstehen 2, dann 4 Mi, von diesen 4 degenerieren 2 als Richtungskörper, während die beiden anderen verschmelzen. *Buschkiel* fand solche Kernverschmelzungen in Sprößlingen von $30-40 \times 20-30 \mu$. Die Cysten können in verschiedenen Stadien platzen, die entschlüpften Sprößlinge zeigen nur einen Mi, der nach kurzer Zeit in den Ma einwandert und mit dessen Masse verschmilzt. Er zeichnet verschiedene Stadien des Eindringens des Mi in den Ma, und zwar auch nach Schnitten, so daß eine optische Täuschung wohl ausgeschlossen wäre. Auch nach der Kernverschmelzung können noch metagame Teilungen einsetzen, auch wenn der Mi in den Ma eingewandert ist, so daß die kleinen Teilungsstücke ($25 \times 20 \mu$) keinen Mi mehr zeigen sollen.

Unsere Beobachtungen basieren vor allem auf dem Fortbestehen des Mi während des ganzen vegetativen Lebens und der Cystenentwicklung. Wir verfolgten an unseren Präparaten sehr sorgfältig die Frage der Autogamie, um die früheren Angaben mit unseren Befunden in Einklang zu bringen, jedoch trotz zahlreichen und mühevollen Untersuchungen gelang es uns in keinem Falle irgendeine Spur von Autogamie oder sexueller Entwicklung überhaupt, wie sie von *Neresheimer* und *Buschkiel* beschrieben werden, zu finden. Abge-

sehen von den in Cystenstadien vorkommenden Degenerationserscheinungen, haben wir immer nur Stadien mit 1 bzw. 2 normalen Mi gesehen, die jedoch ganz normale Teilungsstadien darstellen. Die ungenügende Färbungstechnik führte die älteren Autoren beim Beurteilen der mi-ähnlichen Gebilde auf irrtümliche Wege. *Buschkiel* gibt selbst zu, man könne sich leicht mit den Ma-Abschnürungen täuschen und sie für verschiedene Entwicklungsstadien der Mi halten, besonders da, wo sich in den Sprößlingen mehr als ein befindet (»Micro-nucleus«), z. B. 3 oder 4. Unserer Ansicht nach handelt es sich in allen diesen von *Buschkiel* und *Neresheimer* gesehenen Fällen um mehr oder minder degenerierende Ma-Abschnürungen, deren Entstehung wir im vorhergehenden Kapitel beschrieben haben. Es sei noch einmal ihre recht verschiedene Größe und ihre ganz andere, bedeutend intensivere Färbbarkeit nach *Feulgen* hervorgehoben. Deswegen kann niemand in diesen Gebilden weder Ausgangsmaterial für die Entstehung der Mi noch Reduktionskörper sehen. Auch wir hatten an unseren Präparaten verschiedene Stadien mit 1—2 wirklichen Mi und 1—2 nach *Feulgen* sehr intensiv gefärbten kugelförmigen Gebilden, die wir jedoch auch für degenerierende Chromatinabschnürungen halten. In der Textfig. 21 sieht man ganz deutlich den Unterschied zwischen den fast immer spindelförmigen, blaß rosa nach *Feulgen* gefärbten Mi (links) im Gegensatz zu den verschieden großen, grobkörnigen und sehr intensiv gefärbten Ma-Abschnürungen (rechts). Wir haben auch niemals eine Spur von Autogamie gefunden, immer waren in den ganz jungen Cysten (Textfig. 24) oder in den eben entschlüpften Sprößlingen ganz normale spindelförmige oder schon kugelige Mi vorhanden. Die Bilder und ihre Deutung als Konjugation (*Buschkiel*) erklären wir uns entweder durch Verwechseln mit aufliegenden Epithelzellkernen, oder durch degenerierende Ma-Abschnürungen. Außerdem scheint uns auch die Art der Kopulation der Mi verdächtig zu sein, die nach den Abbildungen von *Buschkiel* einmal seitlich parallel der Längsachse ein anderesmal parallel der kleineren Achse verschmelzen sollen.

5. Der Entwicklungszyklus von *Ichthyophthirius multifiliis*.

Neresheimer beschrieb bei *Ichthyophthirius* zwei Vermehrungsarten, eine geschlechtliche und eine ungeschlechtliche. Die letztere verläuft als eine multiple Teilung des sich vom Fische vorzeitig losgelösten Parasiten, der durch einfache Goniotomie in viele Sprößlinge, ohne Mi zerfällt. Die geschlechtliche Vermehrung besteht im Zerfall des encystierten Parasiten in 2, 4, 8, 16 usw. bis etwa 250 Sprößlinge, deren Kernverhältnisse, hauptsächlich die von *Neresheimer* beobachtete Entstehung des Mi aus dem Großkern und Autogamie, in früheren Kapiteln schon ausführlich beschrieben wurden. Die Angaben *Buschkiels* decken sich größtenteils mit denen von *Neresheimer*, nur konnte *Buschkiel* ebensowenig wie *Roth* den ungeschlechtlichen Entwicklungszyklus bestätigen, und deutet ihn als Degenerationserscheinung.

Wir konnten die von *Neresheimer* und anderen beobachteten Zweiteilungen des vegetativen Stadiums von *Ichthyophthirius* auf der Fichthaut bestätigen. Was die multiple Teilung anbetrifft, halten wir dieselbe im Einklang mit *Roth* und *Buschkiel* für Degeneration, wofür schon die abnormale Form und Färbbarkeit der Ma zeugt. Nach unseren Untersuchungen scheint die Entwicklung einfacher zu sein. Das vom Fische losgelöste Infusorium encystiert sich am Boden und zerfällt durch successive Teilungen, an welchen schon vom Anfang an der stets vorhandene Mi sich beteiligt, zum Schluß in ungefähr 250 Sprößlinge. Wir fanden keine Anhaltspunkte für eine Geschlechtsvermehrung (Kopulation) weder für eine Autogamie in der ganzen Cystenentwicklung, noch in den ausgeschlüpften Sprößlingen. Wenn wir dieselbe auch theoretisch erwägen, hätte eine eventuelle Autogamie nur dann einen Sinn, wenn sie vor der Encystierung vorkäme um die vielleicht abgeschwächte Teilungsfähigkeit wieder zu beleben. Doch nach allen früheren Autoren soll die Autogamie erst am Ende der Cystenentwicklung stattfinden. Wir haben auch bei erwachsenen Individuen vergebens nach einer geschlechtlichen Vermehrung gesucht, und wir suchen das Fehlen einer Geschlechtsvermehrung oder Autogamie bei *Ichthyophthirius* durch das extrem parasitische Leben desselben, bei vorwiegend günstigen Infektionsbedingungen vom Fisch zu Fisch, zu erklären, die eine nur ungeschlechtliche Vermehrung möglich machen. Man findet zwar ziemlich häufig Doppel-

cysten, die uns beim Anfang unserer Untersuchung sehr verdächtig schienen, doch wir überzeugten uns im Laufe unserer Arbeit, daß dieselbe durch zufällige Encystierung zweier Individuen in unmittelbarer Nähe und Verkleben ihrer Cystenwände entstehen. Auch der Umstand, daß der Teilungsgrad in solchen Doppelcysten ganz verschieden sein kann, spricht für die nur zufällige Entstehung derselben.

Nachtrag.

Nachdem wir unsere Untersuchungen beendet und die ganze Abhandlung zum Drucke bereitet haben, nahmen wir Kenntnis, daß Anfang dieses Jahres eine Arbeit von George Haas: Beiträge zur Kenntnis der Cytologie von *Ichthyophthirius multifiliis* im Archiv für Protistenkunde Bd. 81. 1934 erschienen ist. Wir konnten daher seine Ergebnisse leider nicht mehr berücksichtigen.

Résumé.

La cytologie et l'évolution d'Ichthyophthirius multifiliis (Fouquet).

Par. Doc. Dr. V. Breindl et Dr. O. Jírovec.

(Présenté le 14 octobre 1934.)

1. On trouve un micronucleus chez *Ichthyophthirius* pendant toute sa vie végétative.

2. Même dès le premier stade d'enkystement jusqu'aux moindres descendants il existe toujours un micronucleus.

3. La séparation du micronucleus du corps de macronucleus, décrite par divers auteurs, aussi que sa pénétration dans le macronucleus aux stades très jeunes, sont des thèses dues à une interprétation erronée des tableaux microscopiques.

4. Pendant le développement dans le kyste nous n'avons pu observer aucune trace d'autogamie ou de conjugaison.

5. Nos recherches prouvent que l'existence de véritables Ciliés dont le micronucleus se développe du macronucleus est peu probable et nous sommes sûrs que l'étude des rapports dans les noyaux de *Trachelocerca*, *Leucophrys* etc.,

d'après les méthodes modernes, doit aboutir aux mêmes conclusions que nos recherches sur l'Ichthyophthirius.

LITERATURVERZEICHNIS.

1. *Bělař*: Die Formwechsel der Protistenkerne. 1926.
2. *Buschkiel*: Beiträge zur Kenntnis des Ichthyophthirius multifiliis *Fouquet*. Arch. f. Protistenk. 1911. Bd. 21.
3. *Clevich*: Über die Bildung des Micronucleus bei Ichthyophthirius multifiliis (*Fouquet*) Dissertation Bern 1904.
4. *Doflein-Reichenow*: Lehrbuch der Protozoenkunde. 1929.
5. *Hofer*: Handbuch der Fischkrankheiten. 1904.
6. *Lebedew*: Über Trachelocerca phoenicopterus Cohn. Arch. f. Protistenk. XIII. 1908.
7. *Neresheimer*: Zur Fortpflanzung eines parasitischen Infusors (Ichthyophthirius) Sitz. Ber. d. Ges. f. Morph. u. Phys. in München XXIII. 2. 1907.
8. *Neresheimer*: Der Zeugungskreis des Ichthyophthirius. Ber. d. k. k. biol. Versuchsstation in München 1908. Bd. I.
9. *Prowazek*: Formdimorphismus bei ciliaten Infusorien. Mem. Inst. Oswaldo Cruz. 1909. Bd. I. Heft 2.
10. *Prowazek*: Zur Konjugation von Loxocephalus. Arch. f. Protistenk. 37. 1916.
11. *Roth*: Die Krankheiten der Aquarienfische. 1917.

ERKLÄRUNG ZU TEXTFIGUREN 1—27.

Textfigur 1.—9. Vegetative Stadien von Ichthyophthirius multifiliis.

- 1., 3. Jüngste Formen von den Kiemen der Plötze. Micronucleus noch weit entfernt.
2. Micronucleus scheinbar nahe dem Macronucleus.
- 4.—5.—6. Micronucleus liegt dem Macronucleus unmittelbar an.
7. Micronucleus liegt in einer Einbuchtung des Großkernes.
- 8.—9. Größte Stadien mit hufeisenförmigen Kernen, Micronucleus ist sehr gut sichtbar.

Alle Abbildungen bei 40×, ok. IV. Zeiss Zeichenapparat, nach Feulgenpräparaten. (Fig. 1.—5. von der Plötze, alle weiteren 6.—27. von dem Schleien.)

Textfig. 10.—15. Die Vermehrung des *Ichthyophthirius* in den Cysten.

10. Erste Spindel des stets vorhandenen **Micronucleus** in der Cyste.
11. **Micronucleus** ist schon geteilt, die beiden Tochter**macronuclei** hängen noch mit einem dünnen Strang zusammen.
12. Erstes Teilungsstadium in der Cyste.
13. Die **Micronuclei** teilen sich weiter.
14. Vierzelliges Stadium der Cystenteilung.
15. Achtzelliges Stadium.

Alle Abbildungen bei $90\times$ Imm., Oc. II. Feulgen.

Textfig. 16.—27. Verschiedene Studien in der Cystenteilung.

16. Entstehung der Chromatinabschnürungen bei Zweiteilung des **Macronucleus**. **Micronucleen** bereits geteilt.
17. Die Abschnürung hängt noch durch einen dünnen Faden mit dem **Macronucleus** zusammen, **Micronucleus** in Teilung.
- 18.—20. Verschiedene Teilungsphasen der jüngsten Sprößlinge.
21. Links **Micronucleus** in Spindel, rechts grobkörnige Abschnürung vom **Macronucleus**, bedeutend stärker nach *Feulgen* gefärbt.
22. Die Entstehung der Chromatinabschnürungen bei den Teilungen des **Macronucleus**.
23. Die **Macronucleen** haben sich schon geteilt, wir sehen die verschiedenen Formen des Zusammenfließens des Verbindungsfadens.
24. Die jüngsten Sprößlinge mit **Macro-** und **Micronucleus**.
25. Degeneration eines encystierten Individuums, im Plasma zahlreiche nach *Feulgen* am Rande rot gefärbte Einschlüsse.
26. Degenerationserscheinungen in kleineren Sprößlingen.
27. *Ichthyophthirius* mit 3 **Macronucleen**. Mikrophoto.

Fig. 16, 25, Obj. $40\times$, Ok IV, Fig. 17.—23, Obj. $90\times$, Ok IV, Fig. 24, Obj. $90\times$, Ok. II. Feulgen.
