Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe.

Sitzung vom 9. Juni 1849.

Herr Bergrath Doppler hielt nachfolgenden Vortrag: „Ueber eine Reihe markscheiderischer Declinationsbeobachtungen aus der Zeit 1735 — 1736."

Vor wenigen Wochen hatte ich die Ehre, die Aufmerksamkeit der verehrlichen Classe auf eine, wie es mich dünkt, ergiebige bisher aber noch völlig unbenützte Quelle magnetischer Beobachtungsdaten insbesonders der früheren Zeit zu lenken, und ich konnte nicht umhin die zuversichtliche Hoffnung auszusprechen, dass eine fleissige Nachschau und Durchforschung sämmtlicher markscheiderischer Archive und berggerichtlicher Repositorien unserer Monarchie sowohl wie des Auslandes zu einer reichen Ausbeute an derartigem Materiale führen werden. Mittlerweile war ich so glünklich, selbst einen derartigen Fund zu machen, welcher mir aus mehr als einer Rücksicht einer kurzen Erwähnung nicht ganz unwerth zu sein scheint. Es bezieht sich dieser auf eine im Jahre 1748 in Schneeberg, unter dem Titel: „*Otia metallica* oder bergmännische Mussestunden" herausgekommene Sammlung historischer, berggerichtlicher und bergwissenschaftlicher Urkunden und Beobachtungen, so wie auch selbstständiger Abhandlungen, die von einem Bergmanne geschrieben, vorzugsweise wieder für Bergleute bestimmt zu sein schien. Der Verfasser, welcher sich erst im zweiten Bande nennt, ist ein gewisser Beyer, — jedenfalls ist derselbe nicht zu verwechseln mit dem gleichen Namen führenden Verfasser der Markscheidekunst, von dem in meiner früheren Mittheilung die Rede war. In diesem Buche befindet sich nun eine Abhandlung: „Von der Abwechselung der Mag„netnadel in ihrer Abweichung auch Auf- und Abstreichen sammt „der daraus flüssenden Ungewiessheit in der Markscheidekunst etc. „nebst einen *Calendario Magnetis declinantis et inclinantis de „anno* 1735 seq." Obgleich nun die daselbst zusammengestellten Beobachtungen jene von Graham im Jahre 1722 gemachten weit übertreffen, ja, dem Zeitumfange nach selbst noch umfassender sind, als jene späteren von Andreas Celsius in Upsala vom Jahre 1740 die sich bekanntlich auf kein volles Jahr erstreckten; so geschieht gleichwohl nirgends, wo die Namen Graham und Celsius genannt werden, dieser Beobachtungen auch nur im Geringsten eine Erwähnung, so also: dass man wohl annehmen muss, sie wären, so wie wahrscheinlich alle aus ähnlicher Quelle entsprungenen, den Physikern und Astronomen völlig unbekannt geblieben. Ich erlaube mir nun das, was mir in gedachter Abhandlung wissenschaftlich bemerkenswerth dünkte, in nachfolgende Puncte zusammen fassend hier mitzutheilen. —

1. Das Wichtigste ist jedenfalls ein Verzeichniss von magnetischen Beobachtungen, welche zu Freyberg in Sachsen von 1735 angefangen durch nahe 13 Monate ununterbrochen und zwar an vielen Tagen sogar 3, ja 4mal mit aller Sorgfalt angestellt und aufgezeichnet wurden. Aus einer Anmerkung geht hervor, dass während des Monats August 1736 sogar stündlich beobachtet worden war. Die Resultate dieser stündlichen Beobachtungen liegen nun zwar in genannter Abhandlung nicht vor, dürften sich jedoch in Freyberg noch vorfinden. — Die hier in Rede stehenden Beobachtungen hatten nach Versicherung des Autors den löblichen Zweck, die schon damals von denkenden Markscheidern geahnete tägliche und stündliche Veränderung der mittleren magnetischen Declination genauer kennen zu lernen, um durch Rücksichtsnahme auf dieselbe bei den markscheiderischen Aufnahmen einen höhern Grad von Genauigkeit zu erzielen. Zu diesem Zwecke stellte derselbe seine Beobachtungen nicht bloss mit einem gewöhnlichen Zuleg-Compass, sondern noch überdiess mit einer eigens hiefür angefertigten 6 Zoll langen Magnetnadel an. Auf dem Markscheide-Compass konnten die beobachteten Winkel direct bis auf $^1/_{64}$ Stunde d. i. bis auf etwa 14′ genau abgelesen werden; die Magnetnadel

gestattete jedoch eine unmittelbare Ablesung bis auf 1/8 Grad. Zugleich wird erwähnt, dass man sich von der vollkommen richtigen Lage der Mittagslinie, auf die man unmittelbar die Declination bezog, zu wiederholten Malen überzeugt habe. In dieser Zusammenstellung findet man ferners noch eine Rubrik für die beobachtete Inclination, für den Barometerstand und für die Witterung. —

2. In genannter Abhandlung wird ferners gesagt, dass beide Magnetnadeln, wiewohl sie gewöhnlich genau dieselbe Declination zeigten, doch an einzelnen Tagen merklich von einander abwichen. So z. B. am 25. December 1735 zeigte der Zuleg-Compass 13° 21′ westlich, während die Magnetnadel nur auf 12° 45′ wies u. s. w. — Diese merkwürdige Erscheinung bloss auf Rechnung des ungleichen Richtvermögens, wodurch die Reibung zu überwinden ist, setzen zu wollen, ist wohl desshalb kaum erlaubt, weil die Markscheider damals schon durch eine mehrmalige Winkelabnahme diesem Umstande Rechnung zu tragen, und selben in gehörige Berücksichtigung zu ziehen wussten.

3. Ferners will man die bestimmte Wahrnehmung gemacht haben, dass bei kalter Nadel die genäherte warme Hand gleichfalls eine kleine Abweichung und zwar in der Weise erzeuge, als ob die Hand die Nadel anzöge. (Ob bei der Nadel in freier Luft oder in der Compassbüchse? ist nicht gesagt.) —

4. Weiters führt der Verfasser es als einen Beweis an, wie vorsichtig der Markscheider bei seinem Geschäfte zu Werke gehen müsse, und wie anomal und sprungweise sich öfters die Declination von einem Orte zum andern selbst bei kurzen Distanzen ändert, — dass nämlich Anno 1736 die Declination in Dresden 3° 3′ westlich war, während sie in dem nur 4 Meilen davon entfernten Freyberg bis 15° zu derselben Zeit befunden wurde.

5. Ferners werden einzelne Tage bezeichnet an denen die sonst genau horizontal einspielende Magnetnadel sehr bedeutend tief oder hoch ging, d. i. ihre Inclination sich beträchtlich und plötzlich änderte, und endlich wird gesagt:

6. dass man einen bestimmten Einfluss der Witterung zwar nicht auf die Declination und Inclination, wohl aber auf die sogenannte Agilität oder Empfindlichkeit der Nadel bemerkt haben will.

Indem ich nun das in Rede stehende Buch (Eigenthum der Bibliothek des k. k. polytechnischen Instituts) der verehrlichen naturwissenschaftlichen Classe zur gefälligen Einsichtsnahme hiermit vorlege, erachte ich die gegenwärtigen Mittheilungen durch den Umstand motivirt, — dass es gerathen scheint, zahlreiche magnetische Beobachtungsdaten der Vergessenheit zu entreissen, die wohl aller Wahrscheinlichkeit nach den Physikern und Astronomen vergangener und gegenwärtiger Zeit völlig entgangen sein dürften. —

Herr Custos Kollar übergab für die Denkschriften seine Beobachtung eines forstschädlichen Insectes „*Lasioptera Cerris* (Zerr-Eichen-Saummücke)" nebst einer Abbildung dieses Thieres in seinen verschiedenen Entwicklungs-Ständen und theilte das Wesentlichste über die Naturgeschichte desselben mit. Die Mücke ist nur ¾ Linie lang und erscheint in zahlreichen Schwärmen zu Anfang Mai um die Zerreich-Stämme im Grase, zwischen welchen sie in der Erde ihre letzte Verwandlung bestanden. Die Weibchen legen die Eier in die Blattsubstanz der jungen Eichenblätter, auf welchen sich in Folge der Verletzung und Reizung der jungen Larven weisse haarige Auswüchse, auf deren Unterseite bilden, zuweilen in solcher Menge, dass das ganze Blatt damit bedeckt und davon verunstaltet wird. Der Baum, an welchem oft kein Blatt verschont bleibt, bekommt dadurch ein fremdartiges Aussehen; seine Krone erscheint ob der zusammengerollten Blätter viel lichter als bei den andern Eichen-Arten; die Aeste sind überhaupt spärlicher belaubt, einzelne Zweige verdorrt, kurz man sieht, dass der Baum kränkelt. Die Auswüchse oder Gallen, in denen die Maden oder Larven des Insects leben, erreichen nach und nach die Grösse einer Linse, werden inwendig hart und holzig und sind endlich auch auf der Oberseite des Blattes als kleine konische Erhöhungen sichtbar, die im Herbste von der Larve durchgefressen werden. Diese fällt auf die Erde, gräbt sich einige Linien tief in den Boden und verpuppt sich daselbst. Den Winter bringt das Insect im Puppenzustande zu. Aus diesen Gallen hat der Verfasser noch fünf Arten sehr kleiner Schlupfwespen „*Pteromalinen*" gezogen, welche er für die natürlichen Feinde dieser schädlichen Saummücke hält.

Herr Prof. Rokitansky theilt die Ergebnisse seiner Untersuchungen über die „Cyste" als Neubildung mit erläuternden Abbildungen mit. Diese Untersuchungen hatten vor Allem die Erforschung des der Cyste zum Grunde liegenden Elementargebildes und die Erforschung der Bedeutung der auf der Innenfläche der Cysten wachsenden einfachen kolbigen oder dendritischen Excrescenzen zum Zwecke. Es wurden zum Behufe dieser Erledigungen die Cysten in der Corticalsubstanz der Nieren, die kleinen Cysten auf den *Ligamentis latis*, die Schilddrüsen-Cysten, die Cysten in Schleimhäuten, die Cysten des Sarcoms und Carcinoms (das Cystosarcom und das Cystocarcinom), — in Betreff der Excrescenzen der Zottenkrebs auf Schleimhäuten, die dendritischen Wucherungen auf Synovialhäuten, die Excrescenzen auf der Krebscyste, der Alveolar-Krebs, die Excrescenzen in den Cysten des Cystosarcoms untersucht und dabei die (nach der am 19. April l. J. der Akademie gemachten Mittheilung) in den Schilddrüsencysten vorkommenden Excrescenzen und die Zotten auf den Adergeflechten der seitlichen Hirnventrikel berücksichtigt. Endlich wurde auch der Inhalt und zwar der an formellen Gebilden sehr ergiebige Inhalt kleiner (junger) Cysten, zumal der in der Corticalsubstanz der Nieren und der an den *Ligamentis latis* vorkommenden untersucht. Die am Ende der Darlegung der Thatsachen zusammengestellten Resultate sind auszüglich:

1. Die Cyste entwickelt sich durch Intussusceptions-Wachsthum aus dem Kerne und, sofern dieser auf gleiche Weise aus dem Elementarkörnchen (*Nucleolus*) hervorgeht, aus diesem, d. i. dem Elementarkörnchen.

2. Zu der auf diese Weise entstandenen structurlosen Blase treten von aussen her bestimmte Gewebselemente, zumal Fasern, hinzu — die Blase bekömmt eine bestimmte Textur in ihrer Wand. Im Innern erscheint als endogenes Erzeugniss ein Epithelium. Das durch das Vorhandensein der jungen Cyste veranlasste Verhalten faseriger Gewebselemente begreift die vom Verfasser sogenannte alveolare Gewebs-Anordnung, den alveolaren Gewebstypus.

3. Die Cyste in ihrem primitiven Zustande als structurlose Blase und ihre Entwickelung kömmt mit der einfachen Drüsenblase, z. B. der Schilddrüse, und mit ihrer Entwickelung vollkommen überein.

4. Die Cysten entstehen vereinzelt oder in grösserer Anzahl neben einander, häufig entstehen neue Cysten in der faserigen Wand

einer respectiven Muttercyste (zusammengesetzte Cysten). Ausserdem gibt es auch eine endogene Vermehrung der Cysten, indem sich in dem flüssigen oder in dem parenchymatösen Inhalte einer Cyste neue Cysten entwickeln.

5. Die Cysten sind gewöhnlich perennirende, oft zu monströsem Umfange heranwachsende Gebilde, es gibt aber auch solche, welche nicht oder doch nur höchst selten über ein gewisses Volumen, z. B. Hirsekorn-, Erbsen-Grösse heranwachsen, indem sie platzen — dehiscirende Cysten.

6. Die auf der Innenfläche der Cysten vorkommenden obgenannten Excrescenzen stellen ein aus einer hyalinen structurlosen, von runden und oblongen Kernen durchsetzten Membran bestehendes einfaches kolbiges, schlauchartiges oder ein vielfach ausgebuchtetes, verästigtes, zu secundären, tertiären Schläuchen u. s. w. auswachsendes Hohlgebilde dar.

7. Sie kommen auch auf serösen, besonders auf Synovial-Häuten und auf Schleimhäuten vor; sie entstehen ferner auch in parenchymatösen Aftermassen und wachsen in ansehnliche durch Auseinanderweichen des Gewebes gegebene Räume herein, z. B. *Cystosarcoma phyllodes*.

8. Sie erscheinen überall als Keimstätte und Träger bestimmter Textur-Elemente. In der Cyste haben sie namentlich die Tendenz, den Cystenraum auszufüllen, indem sie die endogene Production physiologischer und pathologischer Parenchyme, insbesondere aber die endogene Vermehrung der Cyste vermitteln. An den Adergeflechten kommen sie als physiologische Gebilde vor.

9. Die Cyste wird in ihrem primitiven Stadium als structurlose Blase von mehrfachen Anomalien betroffen, welche eine Hemmung ihrer Fortbildung, eine Involution der Cyste begründen.

Hieher gehören nebst der Auflösung und Resorption der structurlosen Blase ohne oder nach vorangehender Dehiscenz besonders:

a) Die aus endogener Entwickelung secundärer, tertiärer Blasen u. s. w. aus centralen oder excentrischen Kernen hervorgehende Ausartung zu einem gemeinhin der Incrustation unterliegenden geschichteten Cysten-Gebilde.

b) Die durch Umwandlung des Inhalts der structurlosen Blase gegebene Degeneration derselben zu einer hüllenlosen Colloidmasse (Colloidkugel), womit häufig eine drusige Sonderung oder eine der

Richtung von Radien folgende Furchung der Colloidmasse gegeben und ein Zerfallen derselben zu rundlichen Klümpchen oder keilförmigen Kugelausschnitten bedingt ist.

c) Die mit der colloiden Umwandlung in naher Beziehung stehende Incrustation, welche wie jene nicht nur sowohl einfache als auch geschichtete Cystengebilde, sondern auch deren Grundlagen, den Kern, den Nucleolus (Elementarkörnchen) selbst betrifft.

Sitzung vom 14. Juni 1849.

Herr Bergrath Haidinger überreicht die Instruction der geologischen Commission für die Reisenden Herren v. Hauer und Dr. Hörnes. Dieselbe lautet:

Meine Herren! Eben wie bei der Instruction, welche wir das Vergnügen hatten, für Ihre Reise im verflossenen Sommer 1848 Ihnen zu überreichen, stellen wir auch für die diessjährige Reise hier nur die leitenden Grundsätze auf und laden Sie ein, ihrer Anwendung die möglichst grösste Ausdehnung zu geben.

Es ist auch diesesmal der Zweck vorerst ein vorbereitender, nämlich der eine möglichst allgemeine Uebersicht durch eigene Anschauung über die Gebirgsverhältnisse zu gewinnen und ein gewisses Zusammenwirken in den Arbeiten der im ganzen Lande befindlichen Geologen zu vermitteln. Ihre Bestrebungen werden sich daher vorzüglich in folgenden Richtungen bewegen:

1. Aufsammlung oder Kenntnissnahme des in den verschiedenen Kronländern, in den National-Museen und andern Sammlungen, vorzüglich auch in den Berg-Bezirken, vorhandenen wissenschaftlichen Materials.

2. Anknüpfung von Verbindungen mit den Geologen und überhaupt mit wissenschaftlich gebildeten Männern im Lande, vorzüglich in der montanistischen Linie und Gewinnung derselben zur Ausführung einzelner geologischer Forschungen als Theile des Ganzen, das heisst zu gemeinsamer Arbeit. Es wird zu diesem Zwecke nicht unwichtig sein, wenn Sie an manchen Orten, vorzüglich wo sich eine grössere Anzahl von Bergbeamten befindet, zu einem lebendigeren Austausch von Erfahrungen durch einzelne Vorträge, die Sie halten, Veranlassung geben, deren Gegenstand sich auf den Zweck Ihrer Reise bezieht, den Nutzen, die Noth-

wendigkeit und das Zeitgemässe der geologischen Durchforschung des Landes, die geologischen Verhältnisse der Monarchie selbst, auf einzelne wichtige Beobachtungen, die Ihnen in dem Fortgange Ihrer Arbeiten nicht entgehen werden u. s. w.

3. Als eine der leitenden geologischen Fragen die Natur der Nummulitenschichten in den Karpathen und den Alpen, so wie die Verhältnisse derselben und des Karpathen- und Wienersandsteins und anderer Schichten in verlässlichen Durchschnitten.

4. Die geologischen Verhältnisse der Erzgänge und Erzlager als Vorbereitung zu den Beschreibungen der sämmtlichen Vorkommen dieser Art in unserem Lande. Es ist diess an sich eine sehr weit aussehende aber sehr wichtige Arbeit, zu welcher die Belege für weiteres Studium, über das Zusammenvorkommen und die Aufeinanderfolge der Mineralien reichlich und wo es nöthig erscheint auch in grösserem Formate gesammelt werden sollten. Vorzüglich ist Alles Ihrer Aufmerksamkeit besonders zu empfehlen, was sich auf die Gebirgsmetamorphose bezieht.

5. Eine der wichtigsten Aufgaben für das Studium unserer Gebirgsschichten ist die reichliche Aufsammlung der in denselben aufzufindenden organischen Ueberreste. Versäumen Sie ja nicht, wo immer die Gelegenheit sich darbietet, Arbeiten zu diesem Zwecke einzuleiten. Da uns übrigens nicht unbegränzte Mittel zu Gebote stehen, so werden auch diese Arbeiten nach dem Maassstabe der Möglichkeit und Zweckmässigkeit geordnet werden müssen.

Eine sehr grosse Erleichterung wird sich durch die entsprechende Verwendung der Kräfte gewinnen lassen, welche Ihnen das k. k. Ministerium für Landescultur und Bergwesen bei den k. k. Aemtern der verschiedenen Kronländer eröffnet hat. Die möglichste Benützung dieses wichtigen Erlasses vom 16. Mai l. Jahres, Zahl $\frac{608}{\text{M. L. B.}}$ wird Ihnen nicht nur auf Ihrer Reise grossen Vorschub leisten, und der guten Sache überhaupt förderlich sein, sondern insbesondere wird das k. k. montanistische Museum für seine Sammlungen den grössten Nutzen daraus ziehen.

Wie im vorigen Jahre kann auch für Ihre gegenwärtige Uebersichtsreise die Linie nur in grossen Zügen im Allgemeinen angegeben werden, so wie es etwa in unserem Antrage an die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften geschehen ist. Die Meilenzahl, selbst nach den blossen Entfernungen auf der Poststrasse gerechnet, ist indessen so gross, dass im Durchschnitte mehr als drei Meilen auf jeden Tag kommen, der Ihnen zur Disposition gestellt ist. Die Benützung der Zeit zur Erforschung wichtiger Thatsachen, die sich Ihnen darbieten, wird daher vielleicht ein schnelleres Vorübereilen an andern Orten bedingen, für die sodann in späteren Jahren günstigere Zeitverhältnisse eine erneuerte Gelegenheit zur Untersuchung darbieten werden.

Von Ihren Bewegungen wollen Sie uns fortlaufend in Kenntniss erhalten, so wie nach Ihrer Zurückkunft zu gebende Reiseberichte vorbereiten.

Ueber Antrag des Herrn Bergrathes Haidinger im Namen der geologischen Commission, bewilligte die Classe 250 fl. für Herrn Cžjžek, zu einer Reise an den östlichen Abhang des Manhartsberges um die dortigen tertiären Becken zu untersuchen.

Ueber Antrag des Herrn Bergrathes Haidinger im Namen der geologischen Commission wurde dieselbe durch Herrn Dr. Boué verstärkt.

Sitzung vom 21. Juni 1849.

Prof. Stampfer erstattete den Bericht der Commission, welche über Aufforderung des k. k. Finanz-Ministeriums d. d. 5. Mai, Zahl $\frac{6806}{741}$ die Art und Weise zu beurtheilen hatte, in welcher die Resultate der trigonometrischen Vermessungen des k. k. Catasters veröffentlicht werden sollten.

Prof. Hyrtl las hierauf einen Aufsatz „über das angebliche Fehlen der Harnblase bei einigen Fischgattungen." — Die Gattungen *Sillago*, *Cobitis*, *Odontognathus* und *Clupea* haben ein entschiedenes, spindelförmiges Harnblasenrudiment an der Vereinigungsstelle beider Ureteren. Die Geschlechter *Boops* und *Platycephalus*, denen Cuvier die Harnblase absprach, besitzen eine ziemlich grosse, aber anomal an den Seiten der Bauchwand gelagerte Blase (bei *Boops* links vom linken Hoden, bei *Platycephalus* rechts vom Ausführungsgange beider Ovarien).

Da allen *Sciaenidae* eine Harnblase zukommt, so dürfte sie auch bei *Pogonias* und *Macquaria* vorkommen, um so mehr als der nächste Verwandte im System — der brasilische *Micropogon Nattereri* — eine auffallende, mit einem drüsigen Anhängsel versehene Blase besitzt. — Owen's Angabe: dass die Harnblase des *Gymnotus electricus* nur der erweiterte, gemeinschaftliche Ureter sei, wird dahin berichtigt, dass der weite einfache Ureter sich nicht in den Anfang, sondern in die untere Wand der Blase schief einsenkt, und die Einmündungsöffnung mit einer Klappe versehen ist, was einer einfachen Erweiterung des Ureters zur Blase nicht entspricht.

Bei *Acanthopsis taenia* und *Elops salmoneus*, bei *Engraulis* und *Alosa* werden Harnblasen-Rudimente nachgewiesen, bei *Chirocentrus Dorab* und *Erythrinus unitaeniatus* vollkommen entwickelte Blasen beschrieben. Bei den Scarusarten (wohin der von Cuvier als blasenlos citirte *Calliodon* gehört) finden sich regelmässig gebildete, aber nicht unter, sondern über der Schwimmblase liegende Harnblasen, welche ihrer versteckten Lage wegen bisher übersehen wurden.

Prof. Redtenbacher theilte nachstehenden Aufsatz des Herrn B. Quadrat mit: „Ueber die einfachen Platincyan-Verbindungen."

Im 63. Bande Seite 164—194 der Liebig'schen Annalen habe ich die Resultate meiner Untersuchung über Platincyan-Verbindungen veröffentlicht. Ich begann die Untersuchung der Platincyan-Verbindungen in der Absicht, die dem Gmelin'schen Kalisalze entsprechend zusammengesetzten Verbindungen darzustellen und ihre Eigenschaften näher zu studiren. Die unläugbar mühsame und im Grunde genommen, auch nicht sehr ausgiebige Darstellungsart mittelst Blutlaugensalz und Platinschwamm nöthigte mich von der von mir (in Liebig's Annalen Band 63, Seite 167) angegebenen Methode Gebrauch zu machen. Durch den dabei angewendeten Ueberschuss von Cyankalium erzielt man aber die Bildung des nach der Formel $Pt_5\ K_6\ Cy_{11}$ zusammengesetzten Kalisalzes. Dieses Salz krystallisirt wie oben bemerkt (B. 63, S. 167) ausnehmend leicht, und nach 2—3maligem Umkrystallisiren erhält man dasselbe rein und nach oben angeführter Formel zusammengesetzt. Dieses Kalisalz ($Pt_5\ K_6\ Cy_{11}$) ist nicht ein Gemenge von dem einfachen Kalisalze ($Pt\ K\ Cy_2$) und $K\ Cy$.

Stellt man aus demselben die übrigen Verbindungen dar, so erhält man Salze von der Zusammensetzung $Pt_5\ M_6\ Cy_{11}$ (wo M das entsprechende Metall vertritt).

Kocht man das $Pt_5\ K_6\ Cy_{11}$ lange Zeit hindurch mit Wasser, so erhält man nach öfterem Umkrystallisiren, Verbindungen, deren Platingehalt je nach der öfteren Umkrystallisation stets höher steigt, bis derselbe endlich das Maximum 51,98 Pct. erreicht.

Ich erhielt Kalisalze, deren Platingehalt wie folgt durch Umkrystallisiren immer zunahm.

Die erste Umkrystallisation gab 49,05 Pct. Pt.
eine spätere . . . . 50,35 —
die letzte . . . . 51,65 —

Die Formel $Pt\ K\ Cy_2$ erheischt 51,98 Pct. Platin.

Diese angeführten Daten berichtigen die irrthümliche Erklärung, dass das zusammengesetzte Kalisalz eine Verunreinigung von Schwefelcyan-Verbindungen enthielte; ich besitze eine Cyptwasserstoffsäure, die aus einem zusammengesetzten Kupfersalze dargestellt keine Spur von irgend einer Schwefelcyan-Verbindung enthält.

Ich bin der Ansicht, dass nicht zwei (wie ich durch analyt. Resultate bereits zum Theile früher bewiesen habe) ja dass noch mehrere Reihen von Platincyan-Verbindungen existiren.

Den Gegenstand vorliegender Abhandlung bilden einige Salze der einfachen Cyanplatinreihe und zwar das Kali-, Natron-, Kalk-, Baryt-, Magnesia- und Kupfersalz, die ich in Redtenbachers Laboratorium untersuchte.

Kalisalz.

Die Darstellung ist im Vorhergehenden bereits beschrieben, ich führe hier bloss die erhaltenen analytischen Resultate an. 1,419 gr. bei 280° getrockneten Salzes gaben nach vorhergegangenem Behandeln mit Schwefelsäure:

0,733 gr. Platin = 51,65 Pct. Platin, woraus sich das gefundene Atomgewicht mit 2386 berechnet. Das berechnete Atom ist 2372 und verlangt 51, 98 Pct. Platin. — Ferner gaben

0,569 gr. derselben Substanz

0,261 gr. schwefelsaures Kali, welches 20,60 Pct. Kalium entspricht.

Das Cyan berechnet sich aus dem Verluste mit 27,75 Pct.

Versuch.		Rechnung.		
Pt	51,65	*Pt*	1233,0 —	51,98
K	20,60	*K*	488,9 —	20,62
Cy_2	27,75	Cy_2	650,0 —	27,40
Berechnetes Atomgewicht . .			2371,9 —	100,00
Gefunden			2395	

Natronsalz.

Durch Kochen des Platincyankupfers im Ueberschusse mit kohlensaurem Natron, Filtriren und Abdampfen erhält man grosse Krystalle des Natronsalzes. Die farblosen durchsichtigen Krystalle dem hemiprismatischen Systeme angehörend, erinnern an die bekannten Augitformen, sie zeigen die Grundgestalt combinirt mit dem vertikalen Prisma und dem mikrodiagonalen Flächenpaar, wozu oft auch das mikrodiagonale horizontale Prisma tritt.

Durch starke Entwicklung des mikrodiagonalen Flächenpaars sind meistens die Prismen tafelartig. Hemitropische Zwillingskrystalle finden sich mitunter.

Die Spaltbarkeit parallel zur Grundfläche ist ausgezeichnet. Die Spaltungsflächen zeigen starken Glasglanz.

Die Krystalle sind im Wasser so wie auch in Alkohol löslich.

Mit einer Auflösung von salpetersaurem Quecksilberoxydul gibt das Cyanplatinnatrium sehr oft einen hochrothen Niederschlag.

Bei der Analyse gaben 0,850 gr. bei 280° getrockneter Substanz 0,480 gr. Platin = 56,53 Pct und 0,454 gr. schwefelsaures Natron = 13,10 Pct Natrium.

Das Cyan ergibt sich aus dem Verluste mit 30,37 Pct.

Versuch.		Rechnung.		
Pt	56,53	*Pt*	1233,0 —	56,75
Na	13,10	*Na*	287,2 —	13,23
Cy	30,37	Cy_2	650,0 —	30,02
Berechnetes Atomgewicht . . .			2170,2	
Gefundenes " . . .			2183	

Kalksalz.

Die Darstellung des Platincyancalciums beruht auf der Zersetzbarkeit des Kupfersalzes durch Aetzkalk bei der Kochhitze des Wassers. Die vom ausgeschiedenen Kupferoxyd abfiltrirte Flüssigkeit wird durch Einleiten von Kohlensäure und nachheriges Erhitzen von dem überschüssigen Aetzkalke befreit. Verdampft man die Flüssigkeit, so krystallisirt das Kalksalz beim Erkalten in dünnen hemiprismatischen Nadeln. Die Krystalle zeigen denselben Trichroismus wie das Barytsalz, citronengelb und zeisiggrün im durchfallenden, bläulich Diamant glänzend im auffallenden Lichte.

Die Krystalle sind im Wasser löslich; bei einer Temperatur von 100° C werden sie Anfangs rothbraun, dann blau, bei 180° werden sie gelb.

0,932 gr. lufttrocknen Kalksalzes verloren bei 180° 0,190 gr. Wasser. Dieses entspricht 20,38 Pct. Krystallwasser.

0,742 gr. bei 180° getrockneter Substanz gaben
0,427 gr. Platin = 57,55 Pct. und
0,215 gr. kohlensauren Kalk entsprechend
11,56 Pct. Calcium.

Versuch.		*Rechnung.*	
Pt	57,55	*Pt*	1233 — 57,80
Ca	11,56	*Ca*	250 — 11,72
Cy	30,89	Cy_2	650 — 30,48

Berechnetes Atomgewicht . . . 2133
Gefundenes „ . . . 2142

Versetzt man die Auflösung des Platincyancalciums mit einer Lösung von Chlorcalcium im Ueberschusse, so erhält man beim Abdampfen klare glänzende sechsseitige Prismen des prismatischen Systems, von blass grünlich gelber längs der Axe intensiv zeisiggrüner Durchsichtigkeitsfarbe, aus den Prismaflächen lichtblauen Diamantglanz. Es sind diese Krystalle eine Verbindung von Platincyancalcium mit Chlorcalcium.

Barytsalz.

Durch Kochen mit Aetzbaryt wird das Kupfersalz derart zerlegt, dass an die Stelle des Kupfers Barium tritt und wasserfreies Kupferoxyd sich abscheidet. Durch Filtriren und Einleiten von

Kohlensäure entfernt man das Kupferoxyd so wie auch den überschüssig zugesetzten Baryt. Beim Abdampfen der Flüssigkeit schiessen Krystalle des Barytsalzes an.

Sechsseitige Prismen mit Endfläche, hemiprismatisch

$$P + \infty \,.\, P - \infty \,.\, \overline{Pr} + \infty \,.$$

tiefcitrongelb durchsichtig, auf den Prismenflächen violettblaues Schillern. In der Axenrichtung zeigen die Kristalle lichtes Gelbgrün als Durchsichtigkeitsfarbe.

Die Krystalle sind in heissem Wasser löslicher als im kalten, bei 140° werden dieselben Orange mit einem Stich ins Braune, dann grünlich und zuletzt weiss.

Das Krystallwasser beträgt 15,3 Pct. 0,742 gr. bei 180° getrockneten Salzes gaben in Wasser gelöst und mit Schwefelsäure versetzt

0,394 gr. schwefelsauren Baryt,
= 31,25 Pct. Barium.

Das Platin wurde aus einer andern Quantität Salzes bestimmt; und zwar wurden auf 1,170 gr. Substanz 0,523 gr. Platin = 44,70 Pct. entsprechend erhalten.

Der procentische Verlust ergibt die Menge des in der Verbindung enthaltenen Cyans

= 24,05 Pct.

Versuch.		*Rechnung.*		
Pt	44,70	Pt	1233	44,98
Ba	31,35	Ba	858	31,30
Cy	24,05	Cy_2	650	23,70

Berechnetes Atomgewicht . . . 2741
Gefundenes „ . . . 2721

Magnesiasalz.

Das nach der Formel $Pt\ Mg\ Cy_2$ zusammengesetzte Salz wurde nach der von mir für das $Pt_5\ Mg_6\ Cy_{11}$ angegebenen Methode (Liebig's Annalen Bd. 63 pag. 175) dargestellt; jedoch nahm ich statt Aetheralkohol rectificirten Weingeist. Ich hatte sehr oft Gelegenheit die Bildung verschieden gefärbter Krystalle zu bemerken. War die Lösung in Alkohol concentrirt, so erschienen im Beginn des Krystallisirens angefärbte durchsichtige Nadeln, welche in demselben Maasse als der Alkohol verdunstete, schwefelgelb wurden und sich endlich in fleischrothe Krystalle verwandelten.

Bei der Krystallisation findet eine jedoch unbedeutende Abscheidung eines bräunlichen Körpers statt.

Lässt man eine heiss gesättigte wässrige Lösung des Salzes erkalten, so bilden sich blutrothe Krystalle.

Die Krystallform ist dieselbe, welche das $Pt_5 Mg_6 Cy_{11}$ besitzt. Erhitzt wird es schwefelgelb, später braun.

0,576 gr. bei 280° getrockneten Substanz gaben durch Glühen mit Schwefelsäure 0,346 gr. Platin = 60,07 Pct. und 0,2133 gr. schwefelsaurer Magnesia = 7,71 Pct. Magnesium.

Das Cyan beträgt 32,22 Pct.

Versuch.		*Rechnung.*		
Pt	60,07	*Pt*	1233,0 —	60,44
Mg	7,71	*Mg*	157,7 —	7,73
Cy	32,21	Cy_2	650,0 —	31,83

Berechnetes Atomgewicht . . . 2040,7
Gefundenes „ . . . 2053

Amoniaksalz.

Cyanplatinwasserstoff ist wie ich in der ersten Abhandlung über Platincyanverbindung bemerkte, das empfindlichste Reagens auf Amoniak, wodurch sich derselbe gelb färbt.

Leitet man über bei 100° getrockneten Platincyanwasserstoff trocknes Amoniakgas jedoch mit der Vorsicht, dass der Platincyanwasserstoff im Ueberschusse vorhanden ist, so färbt sich derselbe gelb, ein Ueberschuss von Amoniak zerstört die gelbe Farbe, an deren Stelle die weisse Farbe tritt. An der Luft färbt sich die weisse Verbindung gelb durch Amoniakverlust und reagirt zugleich sauer.

Versucht man aus Platincyankalium und schwefelsaurem Amoniak durch Zusammenbringen der entsprechend wässerigen Lösungen, Eindampfen zur Trockne und Ausziehen mit Alkohol das Amoniaksalz darzustellen, so bilden sich beim Abkühlen der alkoholischen Lösung prismatische Krystalle, welche, so lange sie sich in der Flüssigkeit befinden farblos, an der atmosphärischen Luft sich gelb färben, Amoniak verlieren und sauer reagiren: in eine Amoniakatmosphäre gebracht, werden dieselben farblos.

Kupfersalz.

Eine Lösung von Platincyankalium fällt aus Kupfervitriollösung hellgrünes Platincyankupfer, welches alle Eigenschaften mit dem $Pt_5\ Cu_6\ Cy_{11}$ mit Ausnahme seiner Zusammensetzung theilt.

Die analytischen Resultate sind wie folgt:

1,150 gr. bei 120° getrockneter Substanz gaben
0,629 gr. Platin = 54,67 Pct. und
0,249 gr. Kupferoxyd entsprechend 17,30 Pct. Kupfer.
Die Cyanmenge ist somit 28,03 Pct.

Versuch.		Rechnung.		
Pt	54,67	*Pt*	1233,0	54,10
Cu	17,30	*Cu*	396,6	17,36
Cy	28,03	Cy_2	650,0	28,54

Berechnetes Atomgewicht 2279,6
Gefundenes „ 2256,0

Das Kupfersalz löst sich in Amoniak auf, aus welcher Lösung durch freiwilliges Verdunsten blaue Krystalle entstehen.

Ist das angewandte Kupfersalz frisch dargestellt, so erhält man grosse dicke lasurblaue Krystalle, war das Kupfersalz trocken, resultiren feine Nadeln. Es existiren zwei Verbindungen des Platincyankupfers mit Amoniak, die amoniakreichere liefert grosse dicke lasurblaue, die amoniakärmere feine nadelförmige kornblumenblaue Krystalle.

Schlüsslich bemerke ich, dass ich durch Einleiten von Chlor in die Lösung des Platincyankaliums (*Pt K Cy*) ein neues Salz, wahrscheinlich das Platincyandid Kalium erhalten habe, mit dessen Untersuchung ich eben beschäftigt bin.

Herr Custos V. Kollar übergab für die Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften einen Beitrag zur Insecten-Fauna von Venezuela und Neu-Granada, bestehend in Beschreibungen und Abbildungen neuer *Lepidopteren* dieser Länderstriche von Amerika, die Fürst M. Sulkowsky von seiner Reise dahin mitgebracht und dem k. k. Hof-Naturaliencabinette vor längerer Zeit übergeben hatte.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe.

Sitzung vom 5. Juli 1849.

Das wirkliche Mitglied Doctor Reuss, in Bilin, übersendet eine Abhandlung über neue Foraminiferen aus den Tertiärschichten des österreichischen Beckens mit der Bitte, sie in die Acten der Akademie aufzunehmen. In derselben sind 66 neue Arten dieser kleinen Wesen beschrieben und abgebildet, welche aufzufinden ihm bei seinen Untersuchungen über die fossilen Entomostraceen desselben Tertiärbeckens gelang.

Der grösste Theil derselben gehört wohl schon bekannten Gattungen an, deren Artenreichthum sich auf wahrhaft überraschende Weise mehr und mehr entfaltet. Am zahlreichsten vertreten sind auch hier wieder die schon sehr artenreichen Gattungen *Dentalina*, *Rotalina*, *Globigerina*, *Triloculina* und *Quinqueloculina*, von denen besonders letztere einen Zuwachs von 13 neuen Arten erhält.

Die sonst in Tertiärschichten seltenen Gattungen *Frondicularia* und *Operculina* lieferten jede 3 neue Species.

Zwei Gattungen, die bisher nur aus der Kreideformation bekannt waren, *Gaudryina* und *Verneuilina*, haben nun auch in den Tertiärgebilden Oesterreichs ihre Repräsentanten gefunden; so wie auch zwei andere Gattungen, welche bis jetzt noch nie fossil gefunden worden waren, nämlich *Cassidulina* mit zwei ziemlich weit verbreiteten Arten und die sehr seltene *Robertina* (deren einzige Art — *R. arctica d'Orb.* — am Nordkap lebt) mit einer Art im Tegel von Grinzing bei Wien.

Nebst diesen entdeckte Dr. Reuss mehrere Species, welche sich keiner der bisher bekannten Gattungen unterordnen liessen, so dass er sich genöthigt sah, für sie neue Gattungen aufzustellen. Eine derselben: *Fissurina Rss.* — der *Oolina d'Orb.* sehr verwandt und sich von ihr durch die quere Spaltöffnung unterscheidend — gehört in die Ordnung der *Monostegia d'Orb.* Im Wiener Becken ist sie nur durch eine Art, *F. laevigata Rss.*, vertreten, während der Salzthon von Wieliczka sogar vier Arten aufzuweisen hat.

Eine zweite weit merkwürdigere Gattung ist *Ehrenbergina Rss.*, der Gruppe der *Entomostegien* angehörig und *Cassidulina* zunächst verwandt. Sie hat ganz denselben Bau, nur dass bei *Cassidulina* das Gehäuse von den Seiten zusammengedrückt und ganz involut, daher mehr oder weniger linsenförmig ist, während es bei *Ehrenbergina* von vorne nach hinten zusammengedrückt und nur im untern Theile spiral eingerollt ist. Die einzige Art: *E. serrata Rss.* stammt aus dem Tegel von Baden bei Wien.

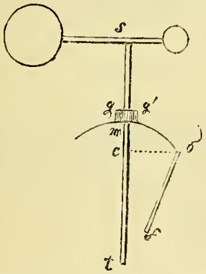
Noch merkwürdiger sind zwei einander sehr verwandte Gattungen: *Chilostomella* und *Allomorphina Rss.*, welche eine eigene Gruppe bilden, welche zwischen die *Polymorphinideen* und *Textularideen d'Orbigny's* zu stehen kömmt und die Dr. Reuss mit dem Namen *Enallostegia cryptostegia* belegt. Ihre Kammern alterniren, bei *Chilostomella* nach zwei, bei *Allomorphina* nach drei Axen, stehen aber nicht übereinander, sondern sind in einander vollkommen eingeschachtelt, so dass bei *Chilostomella* nur zwei, bei *Allomorphina* nur drei Kammern äusserlich sichtbar sind. Erstere vereinigt daher die Charactere der *Textularideen* mit denen der *Globulinen*, letztere die der *Verneuilinen* mit denen der *Globulinen*. Von Allen unterscheiden sie sich aber durch die eigenthümliche Beschaffenheit ihrer Mündung, welche sich in dieser Art bei keiner der bisher bekannt gewordenen Foraminiferen-Gattungen wieder findet. Sie bilden daher ein ganz neues vermittelndes Glied in der Kette dieser so artenreichen Thierclasse, deren Wichtigkeit in zoologischer und paläontologischer Hinsicht noch immer viel zu wenig gewürdigt ist.

Nachstehender Aufsatz wurde auf den über denselben erstatteten günstigen Bericht zum Abdrucke bestimmt:

Ein Beitrag zur Theorie der krummen Linien. Von Dr. C. Jelinek, Adjunct an der k. k. Universitäts-Sternwarte zu Prag.

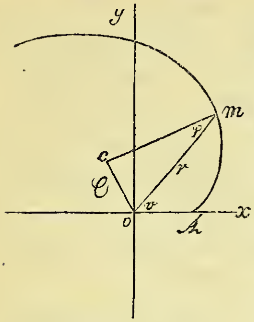
Eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y gehört, besondere Fälle ausgenommen, immer einer ebenen krummen Linie an. Von der unendlichen Zahl der krummen Linien, welche auf diese Weise den unendlich vielen möglichen Gleichungen zwischen x und y entsprechen, hat man einige Fälle besonders herausgehoben und einer analytischen Behandlung unterzogen, theils wegen der einfachern Beziehungen, welche ihnen zu Grunde liegen, theils weil von diesen Curven in der Wissenschaft oder im Leben öfters Gebrauch gemacht wird.

Die Zahl dieser Curven ist jedoch nicht abgeschlossen. Die Betrachtung des nach der Angabe des Herrn Directors Kreil construirten und bereits in Thätigkeit befindlichen Anemometers hat mich auf eine Curve geführt, welche durch ihre Brauchbarkeit im practischen Leben gleichwie durch die Einfachheit der Ausdrücke, auf welche man geführt wird, eine nähere Betrachtung verdient.



Die Stärke des Windes wird nämlich an dem erwähnten Anemometer dadurch angegeben, dass ein Paar Windflügel of, welche in ihrer Ruhelage vertical sind und durch die Drehung der Windfahne sich der horizontalen Componente des Windes senkrecht entgegenstellen, um eine horizontale Axe o drehbar sind. Durch diese Drehung wird der Arm omn gehoben und dadurch das Gewicht gg' längs der verticalen Stange st, in welcher die Axe der Windfahne sich befindet, nach aufwärts geschoben. Es handelt sich nun darum die Curve omn zu bestimmen, so dass der Druck, welchen das Gewicht gg' nach abwärts ausübt, immer senkrecht wirkt auf die Curve im Puncte m. Da die Drehungsaxe o der Windflügel mit dem ganzen Apparate in unveränderlicher Verbindung ist, so ist die Entfernung oc des Punctes o von der Drehungsaxe st der Windfahne constant; also $oc = C$.

mc stellt die Normale der Curve im Puncte m vor, folglich muss die gesuchte Curve die Eigenschaft haben, dass das Loth, welches aus dem Puncte o auf die Normale mc gefällt wird, einer Constanten C gleich ist.



Nimmt man die Drehungsaxe o zum Anfangspuncte der Coordinaten und nennt die rechtwinklichten Coordinaten der krummen Linie x und y, so hat man für die Gleichung der Normale mc, welche durch den Punct m geht, den Ausdruck $y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x)$, wenn man die Coordinaten derselben mit x', y' bezeichnet.

Sind x'', y'' die Coordinaten der Linie oc, so besteht die Gleichung $y'' = \frac{dy}{dx} \cdot x''$, weil die Linie oc senkrecht auf die Normale mc, folglich der Tangente im Puncte m parallel ist.

Da der Punct c, dessen Coordinaten X und Y sein mögen, beiden Linien mc und oc gemeinschaftlich ist, so müssen für diesen speciellen Fall die Gleichungen

$$X = x' = x''$$
$$Y = y' = y''$$

bestehen.

Zur Bestimmung des Punctes c hat man daher die beiden Gleichungen

$$Y = y - X\frac{dx}{dy} + x\frac{dx}{dy}$$
$$Y = X\frac{dy}{dx}$$

Durch Elimination erhält man

$$X = \frac{xdx + ydy}{dx^2 + dy^2} \cdot dx$$

$$Y = \frac{xdx + ydy}{dx^2 + dy^2} \cdot dy$$

Die Eigenschaft der behandelten krummen Linie fordert aber, dass $oc = \sqrt{X^2 + Y^2} = C$

sei; folglich $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = C.$

Die Gleichung $x\,dx + y\,dy = C\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist daher die Differenzialgleichung der gesuchten Curve und muss nun integrirt werden.

Ein oberflächlicher Anblick der genannten Gleichung zeigt, dass sie durch Polarcoordinaten sich bequemer stellen lässt. Nennt man daher den Radius vector $om = r$ und den Winkel, welchen derselbe mit der Axe der x macht, v, so hat man

$$x = r \cos v,\quad dx = dr \cos v - r \sin v\, dv$$
$$y = r \sin v,\quad dy = dr \sin v + r \cos v\, dv$$
$$x\,dx + y\,dy = r\,dr$$
$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 dv^2$$
$$r\,dr = C\sqrt{dr^2 + r^2 dv^2}$$
$$dv = \frac{dr}{Cr}\sqrt{r^2 - C^2}$$

Dieser Ausdruck hat die Form $x^m dx\,(a + bx^n)^p$ und bekanntlich ist

$$\int x^m dx\,(a + bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{np\,a}{m+1+np}\int x^m dx\,(a + bx^n)^{p-1}$$

Um den Ausdruck $x^m dx\,(a + bx^n)^p$ mit $\frac{dr}{r}\sqrt{r^2 - C^2}$ identisch zu machen, hat man bloss zu setzen

$$x = r,\ m = -1,\ a = -C^2,\ b = 1,\ n = 2,\ p = \tfrac{1}{2}$$

folglich $$m + 1 + np = 1$$

$$\int \frac{dr}{r}\sqrt{r^2 - C^2} = \sqrt{r^2 - C^2} - C^2 \int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - C^2}}$$

Nun hat man aber

$$d\,.\sec x = \frac{\sin x\, dx}{\cos x^2}$$

$$dx = \frac{\cos x^2}{\sin x}\,.\, d \sec x$$

oder wenn man

$$\sec x = z,\quad x = \operatorname{arc} \sec z \quad \text{setzt}$$

$$d\,.\operatorname{arc}.\sec z = \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - 1}}$$

Eine ähnliche Form hat der Ausdruck $-\frac{C^2 dr}{r\sqrt{r^2 - C^2}}$;

es ist also das Integral

$$-C^2\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-C^2}} = -C\int\frac{\frac{dr}{C}}{\frac{r}{C}\sqrt{\frac{r^2}{C^2}-1}} = -C\ arc\ sec\ .\ \frac{r}{C}$$

folglich die Gleichung der Curve

$$v = \sqrt{\frac{r^2}{C^2}-1} - arc\ .\ sec\ .\ \frac{r}{C} + Const.$$

Nennt man den Winkel omc, welchen die Normale mit dem Radius vector bildet φ,

so ist $\quad sin\ \varphi = \frac{C}{r},\ \sqrt{\frac{r^2}{C^2}-1} = \sqrt{\frac{1}{sin^2\varphi}-1} = Cotg\ \varphi$

$$sec\ (90^0-\varphi) = \frac{1}{sin\ \varphi} = \frac{r}{C}$$

folglich $\quad arc\ .\ sec\ .\ \frac{r}{C} = 90 - \varphi$

und obige Gleichung

$$v = \varphi + Cotg\ \varphi + Const.$$

Um die Constante der Integration zu bestimmen, kann man die Bedingung einführen, dass $v = o$ ist, wenn sich die untere Fläche des Gewichtes gg' (Fig. 1) in c befindet, d. h. wenn $r = C$. In diesem Falle ist $sin\ \varphi = 1$, $\varphi = 90^0$ und obige Gleichung gibt

$$o = 90^0 + Const,\quad Const = -90^0,$$

also $\quad v = \varphi + Cotg\ \varphi - 90^0.$

Für Werthe von φ, welche grösser als 90^0 sind, erhält man negative v, während sich die Werthe von r wiederholen, so dass die betrachtete Curve eigentlich zwei Aeste hat. Setzt man $\varphi = 90^0 \pm \alpha$, so erhält man $r = \frac{C}{sin\ \varphi} = \frac{C}{cos\ \alpha}$ dasselbe r, man mag α positiv oder negativ nehmen.

$$v = 90^0 \pm \alpha + Cotg\,(90^0 \pm \alpha) - 90^0$$

oder $\quad v = \pm\,\alpha \mp tang\ \alpha = \mp\,(tang\ \alpha - \alpha).$

Es gehören daher zu gleich grossen positiven und negativen Werthen von α, oder was dasselbe ist, zu zwei Werthen von φ, von welchen der eine um ebensoviel unter 90^0, als der andere über 90^0 beträgt, zwei numerisch gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe von v.

Beide Aeste erstrecken sich bis ins Unendliche, denn der Winkel φ ist aller Werthe zwischen 0^0 und 180^0 fähig. Für beide Endwerthe aber wird $sin\,\varphi = o$, $r = \infty$.

Werthe zwischen 180^0 und 360^0 widersprechen der Natur des Winkels φ, indem r sowohl als C positive Grössen sind, folglich der $sin\,\varphi$ auch nur eine positive Grösse sein kann.

Da für die Grenzwerthe $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ sowohl r als v unendlich werden, so gehört die betrachtete Curve zu der Gattung der Spiralen.

Um die Lage des Punctes c (Fig. 2) zu bestimmen, kehren wir zu den Ausdrücken für X und Y zurück

$$X = \frac{(x\,dx + y\,dy)}{dx^2 + dy^2}\,dx = \frac{r\,dr}{dr^2 + r^2\,dv^2}\,(dr\,cos\,v - r\,sin\,v\,dv)$$

$$Y = \frac{(x\,dx + y\,dy)}{dx^2 + dy^2}\,dy = \frac{r\,dr}{dr^2 + r^2\,dv^2}\,(dr\,sin\,v + r\,cos\,v\,dv)$$

$$\frac{r\,dr^2}{dr^2 + r^2\,dv^2} = \frac{r}{1 + r^2\frac{dv^2}{dr^2}} = \frac{r}{1 + Cotg^2\,\varphi} = r\,sin\,\varphi^2 = C\,sin\,\varphi$$

weil $$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{Cr}\sqrt{r^2 - C^2} = \frac{cos\,\varphi}{r\,sin\,\varphi}$$

ist; folglich hat man

$$X = C\,sin\,\varphi\,(cos\,v - \frac{sin\,v\,cos\,\varphi}{sin\,\varphi}) = C\,sin\,(\varphi - v)$$

$$Y = C\,sin\,\varphi\,(sin\,v + \frac{cos\,v\,cos\,\varphi}{sin\,\varphi}) = C\,cos\,(\varphi - v)$$

Der Winkel, welchen oc (Fig. 2) mit der Axe der x einschliesst, ist demzufolge $90^0 - \varphi + v$, nach der Gleichung $v = \varphi + Cotg\,\varphi - 90^0$ lässt er sich aber auch durch $Cotg\,\varphi$ ausdrücken; es ist also

$$X = C\,cos\,.\,Cotg\,\varphi$$
$$Y = C\,sin\,.\,Cotg\,\varphi.$$

Dass die Grösse $Cotg\,\varphi$ bei der wirklichen Rechnung durch die Division mit $sin\,1''$ erst auf Bogenmaass zurückgeführt werden muss, braucht wohl nicht hinzugefügt zu werden. Da C eine Constante ist, so drücken beide Gleichungen die Bedingung des Kreises aus, in welchem sämmtliche Pnncte c (Fusspuncte der Normalen könnte man sie nennen) liegen müssen.

Bei dem Anemometer bedeutet cm (Fig. 2) die Höhe, um welche das Gewicht gehoben wurde.

$$cm^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2$$
$$cm^2 = (r\cos v - C\cos Cotg\,\varphi)^2 + (r\sin v - C\sin Cotg\,\varphi)^2$$
$$cm^2 = r^2 + C^2 - 2rC\cos[v - Cotg\,\varphi]$$

nun ist aber $v - Cotg\,\varphi = \varphi - 90^0 = -(90^0 - \varphi)$

$$C = r\sin\varphi$$
$$cm^2 = r^2 + r^2\sin\varphi^2 - 2r^2\sin\varphi^2 = r^2\cos\varphi^2$$
$$cm = r\cos\varphi = C\,Cotg\,\varphi$$

Es wird daher das Gewicht um eine Grösse verschoben, welche jederzeit $Cotg\,\varphi$ proportional ist.

Bei dem Gebrauche, welchen man von dieser Curve am Anemometer macht, bleibt die Linie oc unveränderlich, während sich die Curve und mit ihr das ganze Coordinatensystem dreht. Für den Anfangspunct der Curve A, wo $r = C$ ist, fällt c mit A zusammen, die Drehung, welche geschehen ist, um den Punct m der Curve unter das Gewicht gg', oder in die Linie st zu bringen, wird daher durch den Winkel Aoc gemessen.

Es ist aber $Aoc = v + 90^0 - \varphi = Cotg\,\varphi$.

Es ist somit die Verschiebung des Gewichtes gg' genau proportional der geschehenen Drehung.

Der Druck, welchen das Gewicht gg' auf den Punct m ausübt, wirkt senkrecht auf die Oberfläche der Curve in diesem Puncte und zwar nach der Richtung mc. Dieser Druck wird die Curve um den Punct o zu drehen suchen. Zerlegt man den Druck in eine Componente senkrecht auf mo und eine andere parallel zu mo, so wird nur die erstere zur Drehung beitragen. Sie ist aber proportional der Grösse $r\sin\varphi = C$, d. h. in welchem Puncte der Curve sich auch das Gewicht gg' befinden mag, immer ist sein Effect bezüglich der Drehung der Curve derselbe.

Dieser gewiss merkwürdigen Eigenschaften wegen verdient die Curve, dass wir uns noch länger damit beschäftigen.

Das Element ds der Länge wird ausgedrückt durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 dv^2} = dr\sqrt{\left(1 + r^2\frac{dv^2}{dr^2}\right)};$$

oben war $$\frac{dv}{dr} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\varphi}$$

$$ds = \frac{dr}{\sin\varphi} = \frac{r\,dr}{C}$$

Es ist daher das unbestimmte Integral

$$s = \frac{r^2}{2C} + Const = \frac{C}{2\sin\varphi^2} + Const.$$

Integrirt man von $\varphi = 90^0$ bis $\varphi = \varphi$, so erhält man für die Länge der Curve von A angefangen bis m

$$s = \frac{C}{2\sin^2\varphi} - \frac{C}{2} = \frac{C}{2}\,Cotg^2\varphi,$$

die Länge der Curve nimmt daher im quadratischen Verhätnisse mit der Drehung zu.

Auch aus dieser Gleichung ergibt es sich, dass die betrachtete Curve eine Spirale ist. Lässt man nämlich φ abnehmen, bis es unendlich klein wird, so erhält man für s eine unendliche Grösse zweiter Ordnung, was nur möglich ist, wenn es unendlich viele Windungen gibt und diese sich in's Unendliche erweitern.

Das Differenzial der Fläche wird ausgedrückt durch

$$df = \frac{r^2\,dv}{2} = \frac{r\cos\varphi\,dr}{2\sin\varphi} = \frac{r\,dr\sqrt{r^2 - C^2}}{2C}$$

$$f = \frac{(r^2 - C^2)^{\frac{3}{2}}}{6C} = \frac{r^3\cos\varphi^3}{6\sin\varphi} = \frac{C^2}{6}\,.\,Cotg^3\varphi$$

es ist daher der Flächeninhalt der Curve der dritten Potenz der Drehung proportional.

Geht die Drehung über 360 Grade hinaus, so fasst der zweite grössere Sector den bei der ersten Drehung entstandenen kleineren Sector in sich; so kommt es, dass beim unendlichen Abnehmen von φ der Flächeninhalt f zu einer unendlichen Grösse dritter Ordnung heranwächst.

Solcher höchst einfacher und eleganter Beziehungen liessen sich noch viele aufstellen; von allen diesen soll nur noch der Krümmungshalbmesser behandelt werden.

Der Werth des Krümmungshalbmessers ist bekanntlich in Polarcoordinaten ausgedrückt

$$\rho = \frac{-ds^3}{r^2 dv^3 + 2\,dr^2 dv + r\,dr\,d^2v - r\,dv\,d^2r},$$

wenn man kein erstes Differenzial als constant annimmt. Es schien hier zweckmässiger, den Winkel φ als independente Variable zu behandeln und das Differenzial $d\varphi$ constant zu setzen. Es sind daher alle übrigen Differenziale durch φ auszudrücken.

Es war

$$ds = \frac{dr}{\sin\varphi}, \; dr = d\,.\frac{C}{\sin\varphi} = -\frac{C\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi^2} = -\frac{C\,Cotg\,\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi},$$

$$ds = -\frac{C\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi^3}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$v = \varphi + Cotg\,\varphi - 90^0$$

erhält man

$$dv = d\varphi\left(1 - \frac{1}{\sin\varphi^2}\right) = -d\varphi\, Cotg\,\varphi^2$$

$$d^2 r = \frac{C(\sin\varphi^2 + 2\cos\varphi^2)}{\sin\varphi^3}\, d\varphi^2 = \frac{C(1+\cos\varphi^2)}{\sin\varphi^3}\, d\varphi^2$$

$$d^2 v = \frac{2\,Cotg\,\varphi}{\sin\varphi^2}\, d\varphi^2$$

$$r^2 dv^3 = -\frac{C^2\,Cotg\,\varphi^6}{\sin\varphi^2}\, d\varphi^3$$

$$2\,dr^2 dv = -\frac{2\,C^2\,Cotg\,\varphi^4\, d\varphi^3}{\sin\varphi^2}$$

$$r\,dr\,d^2v = -\frac{2\,C^2\,Cotg\,\varphi^2\, d\varphi^3}{\sin\varphi^4}$$

$$-r\,dv\,d^2r = \frac{C^2\,Cotg\,\varphi^2\,(1+\cos\varphi^2)}{\sin\varphi^4}\, d\varphi^3.$$

Nach den erforderlichen Reductionen ergibt sich

$$\rho = C\; Cotg\,\varphi$$

Der Krümmungshalbmesser ist daher dem Stücke $mc = C\,Cotg\,\varphi$ der Normale gleich (welches wieder nichts anderes als die Verschiebung des Gewichtes aus einer Ruhelage und der Drehung um die Axe o proportional ist.)

Der Mittelpunct des Krümmungskreises liegt aber bekanntlich immer in der Normale, folglich ist c der Mittelpunct des Krümmungskreises. Da c eine constante Entfernung C vom Puncte o hat, so liegen die Mittelpuncte aller Krümmungskreise in der Peripherie eines Kreises oder mit andern Worten die Evolute der betrachteten Curve ist ein Kreis.

Diess lässt sich auch auf einem andern Wege beweisen. Es seien die Coordinaten des Mittelpunctes des Krümmungskreises

α und β, die Entfernung desselben vom Anfange der Coordinaten μ, der Winkel, welchen μ mit der Axe der x macht, λ, so ist die Gleichung des Krümmungskreises

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$$

oder für Polarcoordinaten

$$r^2 + \mu^2 - 2r\,\mu \cos(v-\lambda) = \rho^2.$$

Differenzirt man zweimal nach r und v und setzt dabei das Differenzial dr constant, so erhält man

$$2r\,dr - 2\mu \cos(v-\lambda)\,dr + 2r\mu \sin(v-\lambda)\,dv = o$$

$$2dr^2 + 4\mu \sin(v-\lambda)\,dr\,dv + 2r\,\mu \cos(v-\lambda)\,dv^2$$
$$+ 2r\mu \sin(v-\lambda)\,d^2v = o.$$

Drückt man nun sowohl r als dr, dv, d^2v durch φ aus, so erhält man

$$\text{I.}\quad C - \mu \cos(v-\lambda) \sin\varphi + \mu \sin(v-\lambda) \cos\varphi = o$$

$$\text{II.}\quad C + 2\mu \sin(v-\lambda) \cos\varphi + \mu \cos(v-\lambda) \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi}$$
$$+ \mu \sin(v-\lambda) \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi} = o.$$

Die erste Gleichung von der zweiten abgezogen, gibt

$$\mu \sin(v-\lambda) \cos\varphi + \mu \frac{\cos(v-\lambda)}{\sin\varphi} + \mu \sin(v-\lambda) \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi} = o,$$

oder $$\mu \sin \frac{(v-\lambda)}{\cos\varphi} + \mu \frac{\cos(v-\lambda)}{\sin\varphi} = o,$$

$$\mu \cos(v-\lambda-\varphi) = o;$$

die erste Gleichung aber gibt

$$\mu \sin(v-\lambda-\varphi) = -C.$$

Beiden Gleichungen wird genügt, wenn man

$$\mu = C$$

$$v-\lambda-\varphi = 270^0,\ \lambda = v-\varphi-270^0$$
$$\lambda = Cotg\,\varphi \quad \text{setzt.}$$

Der Radius vector μ der Evolute ist also eine Constante, d. h. die Evolute ist ein Kreis. Der Winkel $x\,o\,c = Cotg\,\varphi$ gibt die jedesmalige Lage des Punctes c im Kreise an.

Schliesslich folgen hier noch die Werthe für einige Coordinaten, nach welchen (unter der Annahme $C = 5$) die Curve auf Fig. 2 gezeichnet worden ist.

r	v	φ	$\frac{Cotg\,\varphi}{sin\,1''}$	x	y
5·00	0° 0′	90° 0	0° 0′	+ 5·00	0·00
6·25	6 6	53 8	42 58	6·22	0·66
7·50	15 51	41 49	64 2	7·21	2·05
8·75	27 8	34 51	82 17	7·78	3·99
10·00	39 14	30 0	99 14	7·74	6·32
11·25	51 56	26 23	115 33	6·93	8·85
12·50	64 50	23 35	131 15	5·32	11·32
13·75	78 9	21 19	146 50	2·82	13·46
15·00	91 34	19 28	162 6	— 0·41	15·00
16·25	105 8	17 55	177 13	— 4·24	15·69
17·50	118 48	16 36	192 12	— 8·43	15·34
18·75	132 32	15 28	207 4	—12·68	13·82
20·00	146 18	14 29	221 49	—16·64	11·10
21·25	160 17	13 37	236 40	—20·01	7·17

Bei $r = 38{\cdot}947$ hat v die erste Drehung um 360° erfahren.

Der Herr Vice-Präsident Baumgartner machte nachstehende Mittheilung:

„Weitere Versuche über den elektrischen Leitungswiderstand der Erde."

Die weitere Ausdehnung der Doppelleitung an unserer Telegraphen-Linie hat mir Gelegenheit gegeben, die Versuche über den elektrischen Leitungswiderstand des Erdkörpers im Verhältnisse zu dem eines 1 W. L. dicken Kupferdrahtes weiter auszudehnen und ich gebe mir hiemit die Ehre, der Classe vorzulegen, was ich hierin erfahren habe, und zu welchen Schlüssen ich mich für berechtigt halte.

Bei meinen ersten Versuchen dieser Art stand mir nur die vier Meilen lange Doppelleitung zwischen Wien und Gänserndorf zu Gebote; vor Kurzem ward aber diese Leitung über Gratz hinaus verlängert und mir dadurch, und durch die freundliche Bereitwilligkeit des Herrn Telegraphendirectors Dr. Gintl die Möglichkeit gegeben, den Leitungswiderstand der Erde auf der nahe 11 Meilen langen Linie zwischen Wien und Gloggnitz und auf der in der Verlängerung derselben liegenden 28 Meilen langen Strecke zwischen Wien und Gratz zu untersuchen.

Ueber die Art und Weise, wie ich diese Versuche anstellte, brauche ich nichts mehr zu erwähnen, da ich mich genau an die Versuchsmethode gehalten habe, welche ich auf der Wien-Gänserndorfer Strecke angewendet und worüber ich der Classe bereits Bericht erstattet habe; auch der Messapparat für den elektrischen Strom war derselbe, den ich bei den früheren Versuchen gebraucht habe. Der Elektromotor, dessen ich bedurfte, musste aber kräftiger seyn, als bei meiner früheren Arbeit, weil es sich um viel grössere Entfernungen handelte. Ich brauchte daher dieselbe Batterie, welche für kürzere Strecken zum Behufe des Telegraphirens in Anwendung steht.

Wie ich schon erwähnt habe, beziehen sich die Versuche, von denen ich hier Bericht erstatte, auf die Wien-Gloggnitzer und auf die Wien-Gratzerstrecke. Die Länge des Leitungsdrahtes auf der ersten Strecke ist 10.93 Meilen oder 43720 Klafter, auf der zweiten 27.93 Meilen oder 111720 K. Kl. Mit Einrechnung des Messapparates und der Indicatoren mit ihren 0.19 L. dicken Drähten, erhält man:

Für die Wien-Gloggnitzer Linie die Drahtlänge, in welcher der Strom hingeht 46536 Kl., jene, in welcher er hin- und wieder zurückgeht 96904 Kl.

Für die Wien-Gratzer Linie hingegen ist die Drahtlänge, in welcher der Strom hinfliesst 11786 Kl., jene, in welchem er hin- und wieder zurückgeht 242876 Kl.

Die gerade Linie zwischen Wien und Gloggnitz, mithin der Weg, welchen die Axe des elektrischen Stroms in der Erde durchfliessen muss, beträgt 35120 Kl., jene zwischen Wien und Gratz hingegen 74640 Kl.

Die Ablenkung der Magnetnadel, als der Strom im Kupferdrahte von Wien nach Gloggnitz ging und in demselben wieder zurückkehrte, war 20^0, als aber der Strom im Drahte hinfloss und in der Erde zurückkehrte, betrug sie 40^0. Dieselben Grössen waren bei dem Versuche auf der längeren Strecke zwischen Wien und Gratz 9^0 und $16\frac{1}{2}^0$.

Mittelst dieser Werthe erhält man nach der in meinem früheren Berichte (Maiheft) entwickelten Formel:

1) für die Wien-Gloggnitzer Strecke 6.98

2) für die Wien-Gratzer Strecke. . 4.70.

Diese Grössen übertreffen jene, welche ich für die Leitungsfähigkeit einer Strecke von der Länge = 1 und einem unbestimmten Querschnitte gegen die in einem gleich langen Kupferdrahte vom Durchmesser einer Wiener Linie auf der Wien-Gänserndorfer Strecke gefunden habe, um ein Bedeutendes, doch führen auch diese zu den Schlüssen, die ich aus den früheren Versuchen über den innern Verlauf der Fortpflanzung der Elektricität im Erdkörper ziehen zu können glaubte; ja die Verschiedenheit der numerischen Werthe in verschiedenen Stationen, die viel grösser ist als dass sie von Beobachtungsfehlern herrühren könnte, da der Ablenkungswinkel bei wiederholten Beobachtungen immer genau von derselben Grösse erschien, deute noch bestimmter darauf hin, dass sich ein elektrischer Strom nicht in der ganzen Erdmasse vertheile, sondern auf einen verhältnissmässig kleinen Theil derselben beschränkt bleibe.

Dr. Pierre hielt hierauf folgenden Vortrag: Als Nachtrag zu der, einer verehrten Classe von mir gemachten Mittheilung von Versuchen die Maximalspannung der Dämpfe in der Luft zu bestimmen, erlaube ich mir in den zwei beifolgenden Tafeln die Resultate von 90 Messungen vorzulegen, die an dem von mir beschriebenen Apparate vorgenommen wurden, und zu beweisen scheinen, dass Regnault's Zweifel an der Gültigkeit des Dalton'schen Gesetzes für ein Gemenge aus Luft und Wasserdampf, wenigstens für die mittleren Lufttemperaturen unbegründet ist, und dass die Differenzen, die sich zwischen den Spannkräften im leeren Raum und in der Luft etwa finden, jedenfalls kleiner sind als die, welche zwischen den von verschiedenen Physikern aufgestellten Zahlenwerthen des Spannkraftmaximums für eine bestimmte Temperatur gefunden werden.

Die erste der beiden Tafeln enthält unmittelbar die Resultate der 90 Beobachtungen, und zwar die ersten drei Columnen unter der gemeinsamen Ueberschrift: „Temperaturangaben der Thermometer," die von drei mit einander verglichenen, in verschiedener Höhe am Apparate angebrachten Thermometern angegebenen Temperaturen: Thermometer 1 und 2 hatten 100 gradige, 3, eine 80theilige Scale, deren Angaben in der Tafel auf 100theilige reducirt sind; und zwar gibt 1 die Temperatur im untersten, 2 im obersten und 3 im mittleren Raume des ganzen Apparates.

Man wird bei der Vergleichung der drei Temperaturen von einer Beobachtungsreihe zur andern sich leicht von dem unregelmässigen und ungleichförmigen Gange der Instrumente überzeugen, ein Umstand, der, wie ich bereits früher erwähnte, der Genauigkeit solcher Beobachtuugen nicht eben günstig ist; das Mittel aus den drei Temperatursangaben wurde als Temperatur des Gemenges von Luft und Dampf angenommen und ist in der 4. Colonne enthalten. Die 5. Colonne gibt die aus jeder einzelnen Beobachtung abgeleitete Spannkraft des Dampfes für die obige Temperatur.

Diese Werthe sind in den 8 folgenden Colonnen mit den gleichen Temperatursgraden entsprechenden Zahlen aus den Tafeln von Dalton, August, Kämtz und Muncke verglichen, und zwar sind in den 4 ersten Spalten diese Zahlen selbst (auf Millimeter reducirt), in den 4 letzten die Unterschiede zwischen ihnen und den aus den Beobachtungen abgeleiteten Spannkräften angegeben.

Man ersieht aus diesen Vergleichungen, dass jedes der einzelnen Beobachtungsresultate mit den auch unter sich ziemlich gut stimmenden Angaben der Dalton'- und August'schen Tafeln so nahe zusammentrifft, dass die sich ergebenden (bald positiven, bald negativen) Differenzen als kaum zu vermeidende Beobachtungsfehler betrachtet werden müssen. Die grössten unter ihnen, mit Ausnahme einer einzigen, sind sämmtlich und in der grossen Mehrzahl sogar viel kleiner als die Unterschiede zwischen den Angaben der August'schen und Munke'schen Tafeln.

Das Mittel aller Differenzen zwischen den Beobachtungsresultaten und den Dalton'schen Zahlen ist 0.303 Millim., um welchen Betrag die letzteren zu klein erscheinen, während die

Zahlen August's im Mittel um $0^{mm}.260$ zu gross erscheinen. Dagegen sind die aus der Kämtz'schen Tafel folgenden Spannkräfte um $0^{mm}.751$, die aus der Muncke'schen um $2^{mm}.058$ zu klein.

Die zweite der beiliegenden Tafeln ist im Grunde nur ein Résumé der Vorhergehenden, mit dem Unterschiede, dass aus den verschiedenen, einerlei Temperatur zugehörigen Beobachtungsresultaten der ersten Tafel die Mittelwerthe genommen, und diese nur mit den Zahlen der Dalton'schen und August'schen Tafeln verglichen sind.

In Folge dieser Vergleichungen glaube ich zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass die Maximalspannung der Dämpfe im leeren Raume, und die der mit Luft gemengten dieselbe ist, wenigstens für Temperaturen zwischen 10 und 20 Graden des Centesimalthermometers; man wird sich daher zu Zwecken der Hygrometrie immerhin der für den leeren Raum geltenden Tafeln der Spannkräfte bei den gewöhnlichen mittleren Lufttemperaturen bedienen können, und zwar dürften in dieser Beziehung jene Tafeln, die nach der Formel $\log e = a + \frac{b\,t}{c + t}$ (auf welche auch Holzmann [1]) auf theoretischem Wege gelangt ist), berechneten, den Vorzug vor allen übrigen verdienen.

Ob dieselbe Uebereinstimmung auch bei höheren Temperaturen Statt finde, müssen weitere Versuche lehren, Versuche, die jedoch mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden sind, und deren Resultate ich der verehrten Classe später vorlegen zu können hoffe.

---

[1]) In seiner Schrift: Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim 1845.

Tafel I.

Temperaturs-angaben der Thermometer			Mittel der drei Temperaturen. C.	Spannkraft der Dämpfe in der Luft.	Spannkraft der Dämpfe im leeren Raume nach den Tafeln von				Differenzen der beobachteten Spannkraft von den für den leeren Raum geltenden Angaben nach			
1 o C	2 o C	3 o C			Dalton	August	Kämtz	Munke	Dalton	August	Kämtz	Munke
0	0	0	0	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*
11.60	11.40	11.50	11.50	10.66	10.39	10.80	9.90	8.55	+ 0.27	— 0.14	+ 0.76	+ 2.11
do.	do.	do.	do.	10.03	—	—	—	—	— 0.36	— 0.77	0.13	1.48
do.	do.	do.	do.	10.28	—	—	—	—	— 0.11	0.52	0.38	1.73
11.80	11.40	11.50	11.57	8.97	10.43	10.85	9.95	8.60	— 1.46	1.88	— 0.98	0.37
11.75	11.60	11.56	11.63	12.09	10.47	10.87	9.99	8.64	+ 1.62	+ 1.22	+ 2.10	3.45
do.	do.	do.	do.	10.90	—	—	—	—	0.43	0.03	0.91	2.26
do.	do.	do.	do.	11.59	—	—	—	—	1.12	0.72	1.60	2.95
11.70	11.5	11.63	11.64	10.37	10.48	10.88	10.00	8.64	— 0.11	— 0.51	0.37	1.73
11.7	11.5	11.75	11.65	8.67	10.49	10.90	10.01	8.65	— 1.82	— 2.23	— 1.34	0.02
11.8	11.6	11.75	11.72	9.56	10.53	10.94	10.06	8.70	— 0.97	— 1.38	— 0.50	0.86
do.	do.	de.	do.	9.58	—	—	—	—	— 0.95	— 1.36	— 0.48	0.88
do.	do.	do.	do.	10.09	—	—	—	—	— 0.44	— 0.85	+ 0.03	1.39
11.85	11.80	11.63	11.76	10.81	10.56	10.97	10.08	8.72	+ 0.25	— 0.16	0.73	2.09
do.	do.	do.	do.	11.69	—	—	—	—	1.13	+ 0.72	1.61	2.97
do.	do.	do.	do.	11.47	—	—	—	—	0.91	0.50	1.39	2.75
11.90	11.70	11.75	11.78	11.22	10.57	10.99	10.09	8.74	0.65	0.23	1.13	2.48
11.95	12.00	11.88	11.93	11.46	10.66	11.10	10.19	8.83	0.80	0.36	1.27	2.63
12.30	12.00	11.88	12.06	11.60	10.75	11.19	10.29	8.91	0.85	0.41	1.31	2.69
12.40	12.00	12.00	12.13	10.73	10.79	11.23	10.33	8.96	— 0.06	— 0.50	0.40	1.77
do.	do.	do.	do.	11.01	—	—	—	—	+ 0.22	— 0.22	0.68	2.05
do.	do.	do.	do.	10.36	—	—	—	—	— 0.43	— 0.87	0.03	1.40
do.	do.	do.	do.	11.26	—	—	—	—	+ 0.47	+ 0.03	0.93	2.30
do.	do.	do.	do.	10.95	—	—	—	—	0.16	— 0.28	0.62	1.99
do.	do.	do.	do.	11.74	—	—	—	—	0.95	+ 0.51	1.41	2.78

Temperatursangaben der Thermometer			Mittel der Temperaturen C.	Spannkraft der Dämpfe in der Luft.	Spannkraft der Dämpfe im leeren Raume nach den Tafeln von				Differenzen der beobachteten Spannkraft von den für den leeren Raum geltenden Angaben nach			
1. C	2. C	3. C			Dalton	August	Kämtz	Munke	Dalton	August	Kämtz	Munke
0	0	0	0	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*
12.50	12.20	12.00	12.23	11.39	10.86	11.35	10.37	9.03	+ 0.53	+ 0.04	+ 1.02	2.36
13.20	12.80	12.75	12.92	11.33	11.32	11.80	10.80	9.49	0.01	— 0.47	0.53	1.84
do.	do.	do.	do.	11.54	—	—	—	—	0.22	— 0.26	0.74	2.05
do.	do.	do.	do.	11.52	—	—	—	—	0.20	— 0.28	0.72	2.03
do.	do.	do.	do.	11.87	—	—	—	—	0.55	+ 0.07	1.07	2.38
do.	do.	do.	do.	11.07	—	—	—	—	— 0.25	— 0.73	0.27	1.58
do.	do.	do.	do.	11.56	—	—	—	—	+ 0.24	— 0.24	0.76	2.07
do.	do.	do.	do.	12.23	—	—	—	—	0.91	+ 0.43	1.43	2.74
	13.0	13.0	13.0	11.69	11.38	11.87	10.92	9.55	0.31	— 0.18	0.77	2.14
	do.	do.	do.	10.79	—	—	—	—	— 0.59	— 1.08	— 0.13	1.24
	do.	do.	do.	12.82	—	—	—	—	+ 1.44	+ 0.95	+ 1.90	3.27
13.30	13.00	12.88	13.06	11.45	11.42	11.91	10.97	9.59	0.03	+ 0.46	0.48	1.86
do.	do.	do.	do.	11.45	—	—	—	—	0.03	— 0.46	0.48	1.86
do.	do.	do.	do.	11.60	—	—	—	—	0.18	— 0.31	0.63	2.01
do.	do.	do.	do.	11.58	—	—	—	—	0.16	— 0.33	0.61	1.99
13.90	13.70	13.50	13.70	13.27	11.87	12.38	11.37	10.04	1.40	+ 0.89	1.90	3.23
do.	do.	do.	do.	13.59	—	—	—	—	1.72	1.21	2.22	3.55
do.	do.	do.	do.	14.31	—	—	—	—	2.44	1.93	2.94	4.27
do.	do.	do.	do.	13.20	—	—	—	—	1.33	0.82	1.83	3.16
14.00	13.80	13.63	13.81	12.57	11.95	12.48	11.44	10.12	0.62	0.09	1.13	2.45
do.	do.	do.	do.	13.30	—	—	—	—	1.35	0.82	1.86	3.18
do.	do.	do.	do.	12.92	—	—	—	—	0.97	0.44	1.48	2.80

Temperatursangaben der Thermometer.			Mittel der Temperaturen C.	Spannkraft der Dämpfe in der Luft.	Spannkraft der Dämpfe im leeren Raume nach den Tafeln von				Differenzen der beobachteten Spannkraft von den für den leeren Raum geltenden Angaben nach			
1. C.	2. C.	3. C.			Dalton	August	Kämtz	Munke	Dalton	August	Kämtz	Munke
0	0	0	0	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
14.10	14.00	13.63	13.91	12.16	12.02	12.57	11.57	10.19	+ 0.14	— 0.41	+ 0.59	1.97
do.	do.	do.	do.	12.48	—	—	—	—	0.46	— 0.09	0.91	2.29
do.	do.	do.	do.	11.70	—	—	—	—	— 0.32	— 0.87	0.13	1.51
14.60	14.10	14.25	14.31	12.21	12.32	12.88	11.87	10.50	— 0.11	— 0.67	0.34	1.71
16.95	16.50	16.63	16.69	14.46	14.21	14.91	13.76	12.42	+ 0.25	— 0.45	0.70	2.04
do.	do.	do.	do.	14.31	—	—	—	—	0.10	— 0.60	0.55	1.89
17.00	16.60	16.63	16.74	14.77	14.25	14.95	13.80	12.46	0.52	— 0.18	0.97	2.31
do.	do.	do.	do.	14.96	—	—	—	—	0.71	+ 0.01	1.16	2.50
do.	do.	do.	do.	14.20	—	—	—	—	— 0.05	— 0.75	0.40	1.74
do.	do.	do.	do.	14.71	—	—	—	—	+ 0.46	— 0.24	0.91	2.25
17.10	16.70	16.63	16.81	15.40	14.31	15.00	13.87	12.52	1.09	+ 0.40	1.53	2.88
do.	do.	do.	do.	15.66	—	—	—	—	1.35	0.66	1.79	3.14
17.20	16.50	16.87	16.86	14.12	14.35	15.04	13.91	12.57	— 0.23	— 0.92	0.21	1.55
do.	do.	do.	do.	14.62	—	—	—	—	+ 0.27	— 0.42	0.71	2 05
do.	do.	do.	do.	14.55	—	—	—	—	0.20	— 0.49	0.64	1.98
do.	do.	do.	do.	14.08	—	—	—	—	— 0.27	— 0.96	0.17	1.51
17.25	16.60	16.87	16.91	14.36	14.39	15.11	13.96	12.61	— 0.03	— 0.75	0.40	1.75
do.	do.	do.	do.	14.24	—	—	—	—	— 0.15	— 0.87	0.28	1.63
do.	do.	do.	do.	14.71	—	—	—	—	+ 0.32	— 0.40	0.75	2.10
do.	do.	do.	do.	14.30	—	—	—	—	— 0.09	— 0.81	0.34	1.69

Temperaturs-angaben der Thermometer.			Mittel der Temperaturen C.	Spannkraft der Dämpfe in der Luft.	Spannkraft der Dämpfe im leeren Raume nach den Tafeln von				Differenzen der beobachteten Spannkraft von den für den leeren Raum geltenden Angaben nach			
1. C.	2. C.	3. C.			Dalton	August	Kämtz	Munke	Dalton	August	Kämtz	Munke
0	0	0	0	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
17.20	16.90	16.69	16.93	14.67	14.41	15.13	13.96	12.63	+ 0.26	— 0.46	+ 0.71	+ 2.04
do.	do.	do.	do.	14.70	—	—	—	—	0.29	— 0.43	0.74	2.07
do.	do.	do.	do.	15.62	—	—	—	—	1.21	+ 0.49	1.66	2.99
do.	do.	do.	do.	15.62	—	—	—	—	1.21	0.49	1.66	2.99
17.25	17.00	16.75	17.00	14.62	14.47	15.20	14.03	12.69	0-15	— 0.58	0.59	1.93
do.	do.	do.	do.	14.01	—	—	—	—	— 0.46	— 1.19	— 0.02	1.32
18.10	17.50	17.75	17.78	15.91	15.16	15.93	14.73	13.39	+ 0.75	— 0.02	+ 1.18	2.52
do.	do.	do.	do.	15.26	—	—	—	—	0.10	— 0.67	0.53	1.87
do.	do.	do.	do.	15.84	—	—	—	—	0.68	— 0.09	1.11	2.45
18.20	17.70	17.81	17.90	15.82	15.27	16.04	14.84	13.51	0.55	— 0.22	0.98	2.31
do.	do.	do.	do.	16.13	—	—	—	—	0.86	+ 0.09	1.29	2.62
do.	do.	do.	do.	15.14	—	—	—	—	— 0.13	— 0.90	0.30	1.63
18.85	18.30	18.44	18.53	16.19	15.85	16.67	15.40	14.10	+ 0.34	— 0.48	0.79	2.09
19.0	18.50	18.50	18.67	15.60	15.98	16.81	15.54	14.23	— 0.38	— 1.21	0.06	1.37
19.1	18.60	18.50	18.73	15.89	16.04	16.87	15.61	14.29	— 0.15	— 0.98	0.28	1.60
19.35	18.80	18.75	18.97	14.95	16.26	17.12	15.86	14.58	— 0.31	— 2.17	— 0.91	0.37
do.	do.	do.	do.	16.78	—	—	—	—	+ 0.52	— 0.34	+ 0.92	2.20
do.	do.	do.	do.	17.21	—	—	—	—	0.95	+ 0.09	1.35	2.63
do.	do.	do.	do.	16.74	—	—	—	—	0.48	— 0.38	0.88	2.16
19.40	18.80	18.75	18.98	15.25	16.27	17.12	15.86	14.59	— 1.02	— 1.87	— 0.61	0.66
19.45	18.90	18.75	19.03	17.19	16.32	17.17	15.90	14.66	+ 0.87	+ 0.02	+ 1.29	2.53
do.	do.	do.	do.	16.55	—	—	—	—	0.23	— 0.62	0.65	1.89
19.50	19.00	18.75	19.08	15.69	16.37	17.23	15.95	14.72	— 0.68	— 1.54	— 0.26	0.97
19.55	19.00	18.88	19.14	17.25	16.43	17:30	16.02	14.79	+ 0.82	— 0.05	+ 1.23	2.46
						Mittel . .			+0.303	—0.260	+0.751	+2.058

Tafel II

zur

Vergleichung der aus den Beobachtungen abgeleiteten Spannkräfte dei Dämpfe in der Luft mit jenen im leeren Raume.

Temperatur. Celsius.	Spannkraft in der Luft. Millim.	Spannkraft im Vacuo nach			Temperatur. Celsius.	Spannkraft in der Luft. Millim.	Spannkraft im Vacuo nach:		
		Dalton.	August.	Differenzen.			Dalton.	August.	Differenzen.
11°.50	10.323	10.39	10.80	—0.067 —0,477	14°.31	12.210	12.32	12.88	—0.110 —0.670
11.57	8.970 ?	10.43	10.85	—1.460 —1.880	16.69	14.385	14.21	14.91	+0.175 —0.525
11.64	10.738	10.48	10.88	+0.258 —0.142	16.74	14.660	14.25	14.95	+0.410 —0.290
11.72	9.743?	10.53	10.94	—0.787 —1.197	16.81	15.530?	14.31	15.00	+1.220 +0.530
11.76	11.323	10.56	10.97	+0.763 +0.353	16.86	14.342	14.35	15.04	—0.008 —0.698
11.78	11.220	10.57	10.99	+0.650 +0.230	16.92	14.777	14.40	15.12	+0.377 —0.343
11.93	11.460	10.66	11.10	+0.800 +0.360	17.00	14.315	14.47	15.20	—0.155 —0.885
12.06	11.060	10.75	11.19	+0.310 —0.130	17.78	15.670	15.16	15.93	+0.510 —0.260
12.13	11.008	10.79	11.23	+0.218 —0.222	17.90	15.697	15.27	16.04	+0.427 —0.343
12.23	11.390	10.86	11.35	+0.530 +0.040	18.53	16.190	15.85	16.67	+0.340 —0.480
12.92	11.590	11.32	11.80	+0.270 —0.210	18.67	15.600	15.98	16.81	—0.380 —1.210
13.00	11.767	11.38	11.87	+0.387 —0.103	18.73	15.890	16.04	16.87	—0.150 —0.980
13.06	11.520	11.42	11.91	+0.100 —0.390	18.98	16.186	16.26	17.12	—0.074 —0.934
13.70	13.592?	11.87	12.38	+1.722 +1.212	19.03	16.870	16.32	17.17	+0.550 —0.300
13.81	12.930	11.95	12.48	+0.980 +0.450	19.08	15.69	16.37	17.23	— 0.68 — 1.54
13.91	12.113	12,02	12.57	+0.093 —0.457	19.14	17.25	16.43	17.30	+ 0.82 — 0.05

Der General-Secretär theilte aus einem Erlasse des Minister-Curators ddo. 22. Juni, Zahl 4464, die mittelst Allerhöchster Entschliessung vom 19. Juni erfolgte Ernennung der Herren Ernst Brücke und Joseph Petzval zu wirklichen Mitgliedern der math. naturw. Classe mit, so wie die Allerhöchste Bestätigung der Wahlen nachbenannter Herren:

Joachim Barrande, in Prag,
Maximilian Weisse, in Krakau,
Rudolph Kner, in Lemberg,
Carl Wedl, in Wien,
Carl Fritsch, in Prag,

zu correspondirenden Mitgliedern im Inlande; dann des Herrn Paul Heinrich Fuss, in St. Petersburg, zum correspondirenden Mitgliede im Auslande; endlich des Sir John Herschel, in London, zum ausländischen Ehrenmitgliede.

Sitzung vom 12. Juli 1849.

Der Herr Vicepräsident machte — gelegenheitlich einer von Herrn Kreil eingesendeten Mittheilung — nachstehenden Vorschlag:

Herr Director Kreil hat die Uebersetzung einer französischen Abhandlung vorgelegt: „Ueber den Nutzen der Meteorologie," deren Druck und Verbreitung er für sehr geeignet hält, die noch hie und da bestehenden Vorurtheile gegen meteorologische Untersuchungen zu beseitigen, und deren Einfluss auf die Wissenschaft und das practische Leben darzuthun. Ein Umstand hat sich in dieser Abhandlung als sehr wichtig herausgestellt.

Bekanntlich leidet Südfrankreich häufig an bedeutenden Ueberschwemmungen. Man kam bald zu der Ueberzeugung, dass das Hochwasser eines Flusses von dem Anschwellen eines oder des anderen übrigens unbedeutenden Nebenflüsschens abhänge. Es bildeten sich nun Vereine, welche an den Ufern der Flüsse Beobachtungsstationen gründeten, deren Arbeiten in einem Centralorte verglichen, bearbeitet und herausgegeben wurden. Das Ergebniss dieser Arbeiten war, dass man gestützt auf die Kenntniss der Geschwindigkeit der Flüsse, der Daten über das Verhältniss, welches das Steigen eines Nebenflüsschens auf das

Steigen im Hauptflusse ausübt, im Stande ist, in Lyon die Stunde anzugeben, in welcher daselbst der Rhone zum Hochwasser anschwillt, und sogar die Höhe, welche dieses erreichen wird.

Die Wichtigkeit dieses Factums, welches die nöthigen Anstalten und Massregeln in den Ufergegenden zu reguliren vermag, ist so einleuchtend, dass ich mich veranlasst fühle, auch bei uns ein ähnliches Unternehmen zu beantragen.

Mein Vorschlag geht nämlich dahin, an der Donau und ihren Nebenflüssen Stationen zu errichten, und mit Instrumenten zu betheilen, welche nebst den gewöhnlichen meteorologischen Beobachtungen insbesondere die Regenmenge, den Niederschlag überhaupt und alle darauf bezüglichen aussergewöhnlichen Phänomene zu beobachten haben. Es werden Hauptstationen von Nebenstationen zu unterscheiden sein, in wieferne ersteren alle, diesen nur einige Beobachtungen obliegen. Diese Beobachtungen werden für uns um so wichtiger werden, als eine Telegraphenlinie in der Richtung von Ost nach West aufwärts bereits errichtet wird, und an der Erlaubniss nicht zu zweifeln ist, dass entscheidende Wahrnehmungen unserer Stationen dem Telegraphen zur Beförderung hieher übergeben werden können.

Als Stationen schlage ich vorläufig vor:

An der Donau: Wien, Stein, Linz.
Am Inn: Innsbruck, Kufstein, Schärding oder Braunau.
An der Salza: Salzburg.
„ „ Traun: Lambach oder Wels.
„ „ Steier: Steier.
„ „ Enns: Enns.
„ „ Traisen: St. Pölten.
Am Kamp: Hadersdorf.

Dieser Vorschlag wurde von der Classe einstimmig angenommen, und auf Antrag des Herrn Prof. Redtenbacher noch die Station Passau als der Vereinigungspunct vom Inn, Donau und Ilz — wenn auch ausser der Landesgrenze — angenommen.

Nachfolgender Aufsatz des Herrn Lorenz Zmurko wurde nach Anhörung des darüber erstatteten Commissionsberichtes zum Abdrucke bestimmt [1]):

Vorliegende Abhandlung wünschte ich vielmehr in didactischer Hinsicht, als in wissenschaftlicher Beziehung beurtheilt zu wissen — indem ich bei Abfassung derselben nicht im Vorhinein darauf ausging neue mathematische Wahrheiten zu entdecken, als vielmehr die schon vorhandenen Grundregeln des Integral-Calculs einem leicht fasslichen allgemeinen Verfahren zu subsumiren, da jene bis jetzt in allen vorhandenen Lehrbüchern lediglich darin bestehen, eine grosse Anzahl von Integralformeln für einzelne Fälle zu construiren und hiemit die Auflösung der einfachsten Probleme in diesem Gebiete durch blosse mechanische Zuziehung der hiefür bestehenden Formelsammlung möglich machen. — Natürlicherweise kann hier zunächst nur die Rede sein von der Integration algebraischer und trigonometrischer Differentialformeln, die sich in folgender Form darstellen lassen:

$$dy = A\,dx\;x^m\,(a + bx + cx^2)^r \;.\;.\;.\;. \quad \text{(I}$$

und $$dy = A\;sin^m\varphi\;cos^r\varphi\;d\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \text{(II}$$

sobald man m und r willkührliche Zahlen sein lässt — und in soferne ihr Integral in geschlossenem Ausdrucke angebbar ist.

Ich glaube nun in diesen Blättern ein Verfahren anbieten zu können, welches die Anfänger in kurzer Zeit befähiget, sich in derlei Aufgaben, ohne grosse Mühe und ohne Zuziehung der betreffenden Formelsammlungen selbstständig zu bewegen.

Schon als Anfänger in der technisch-mathematischen Abtheilung wünschte ich sehnlichst irgend ein einfacheres Integrations-Verfahren in irgend einem Werke zu finden, da ich nur zu deutlich gesehen habe, dass die Behandlung eben dieses Theils der Analyse nicht minder für den Vortragenden, wie für die Zuhörer selbst, ermüdend, ja sogar lästig und zeitraubend ist. — Ich fand auch im Handbuche: „Anfangsgründe der gesammten Mathematik von J. J. v. Littrow — Wien 1838 —" den ersten Versuch diese Vereinfachung be-

[1]) Der Bericht brachte bloss die Veröffentlichung eines Auszuges aus diesem Aufsatze in Antrag; die Classe zog es jedoch vor, den Aufsatz selbst, wie er von dem Verfasser eingereicht worden, in die Sitzungsberichte aufzunehmen.

züglich der trigonometrischen Differentialformeln zu bewerkstelligen, was mich aber eben so wenig zufrieden stellte, weil dabei die Reihen der Kreisfunctionen zu Grunde gelegt, oder vielmehr darum, weil das Resultat dieses Versuches nur eine neue Formelsammlung geliefert hat.

Ich schätze mich in so weit glücklich, durch meine Umstände darauf gewiesen zu sein, durch Privatunterricht in der Mathematik meine Existenz mir erschwingen zu müssen, um so fort hier in Wien in diesem, mir nun lieb gewordenen Fache die möglichsten Grundkenntnisse erwerben zu können — als ich hierbei oft Gelegenheit gefunden, über manche Aufgaben der Elementar-Mathematik reiflicher nachzudenken, und hiemit es mir möglich wurde, dieselben vollständiger zu untersuchen und nicht selten mich interessanter Lösungen zu erfreuen und so mich practisch vorzubereiten zu dem Berufe, den ich mit Liebe und Fleiss anzustreben bemühet bin. — Was die Bearbeitung des hier gewählten Gegenstandes betrifft, so ist der Entwicklungsgang im Ganzen so gegeben, dass man daraus zugleich die Kriterien entnehmen kann, welche leicht aussagen, wie und auf welche Weise die wegen gebrochener Werthe der Exponenten scheinbar unauflösbaren Integrale doch auflösbar sind.

Weit entfernt auf den Inhalt dieser Blätter irgend ein wissenschaftliches Gewicht legen zu wollen, stehe ich nicht an, der Aufforderung meiner Freunde und Mitschüler nachgebend, die Resultate meiner ersten Arbeit der nachsichtigen Beurtheilung der hohen Akademie zu überantworten.

§. 1.

Wie schon in der Vorrede bemerkt wurde, ist der Zweck dieser Abhandlung die Methode zu entwickeln, für alle möglichen und zugleich zulässigen Combinationen von m und r, bezüglich ihrer Werthe und Zeichen, folgende Differentialformeln zum unmittelbaren Integriren einzurichten:

$$dy = A\,dx\; x^m\,(a + bx + cx^2)^r \;\ldots\ldots \quad \text{(I}$$

und $$dy = A\,d\varphi\, \sin^m\varphi\, \cos^r\varphi \;\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II}$$

Hier möge vorerst eine kurze Betrachtung über die Verwandlung des vollständigen Trinoms $a + bx + cx^2$ in ein unvollständiges $(a' + b'x^2)$ vorangehen, dann gezeigt werden, in wieferne die gegebene Differentialformel I) die Form der Differentialformel II) annimmt — endlich soll die Methode entwickelt werden, mittelst deren man im Stande ist, Differentialformel II) selbstständig die zu integriren. — Diess wäre im Kurzen der Gang, der in diesen Blättern befolgt wird, und zugleich das Verfahren selbst, welches durch diese Abhandlung erzielt werden soll.

§. 2.

Bezüglich der Verwandlung des vollständigen Trinoms in ein unvollständiges wird es keiner Schwierigkeit unterliegen, folgende Zusammenstellungen zu übersehen:

$$a+bx+cx^2=a-\frac{b^2}{4c}+\frac{b^2}{4c}+bx+cx^2=\frac{4ac-b^2}{4c}+\frac{(b+2cx)^2}{4c}=$$

$$=\frac{4ac-b^2}{4c}\left[1+\frac{(b+2cx)^2}{4ac-b^2}\right]=\frac{b^2-4ac}{4c}\left[-1+\frac{(b+2cx)^2}{b^2-4ac}\right]=$$

$$=\frac{4ac-b^2}{4c}[1+z^2]=\frac{b^2-4ac}{4c}[-1+z^2] \text{ wo } z^2=+\frac{[b+2cx]^2}{4ac-b^2},$$

d. h. ist $4ac>b^2$, so ist

$$a+bx+cx^2=\frac{4ac-b^2}{4c}[1+z^2]$$

$$-a+bx-cx^2=-\frac{4ac-b^2}{4c}[1+z^2],$$

ist aber $4ac<b^2$, so ist

$$a+bx-cx^2=\frac{b^2-4ac}{4c}[-1+z^2]$$

$$-a+bx-cx^2=-\frac{b^2-4ac}{4c}[1-z^2],$$

endlich mag $4ac\lesseqgtr b^2$ sein

$$a+bx-cx^2=\frac{4ac+b^2}{4c}[1+z^2]$$

$$-a+bx+cx^2=+\frac{4ac+b^2}{4c}[-1+z^2].$$

Aus dieser Zusammenstellung ersicht man, dass mittelst einer sehr einfachen Operation ein jedes vollständige Trinom in ein unvollständiges verwandelt werden kann. — Ferner sieht man deutlich, wenn der Ausdruck $(a+bx+cx^2)^{\frac{2n+1}{2}}$ absolut imaginär, und falls er nicht ein solcher ist, wie er in ein Product zweier realen Factoren umgeformt werden kann.

Durch die angegebene Operation erhält die Differentialformel I. folgende Formen:

$$dy = A_1 (z+\beta)^m [1+\alpha^2 z^2]^r dz \; \ldots \; 1.$$
$$dy = A_2 (z+\beta)^m [1-\alpha^2 z^2]^r dz \; \ldots \; 2.$$
$$dy = A_3 (z+\beta)^m [\alpha^2 z^2 - 1]^r dz \; \ldots \; 3.$$

Setzt man in 1) $\alpha z = tang\,\varphi$, woraus

$$(1+\alpha^2 z^2)^r = sec^{2r}\varphi = \frac{1}{cos^{2r}\varphi}$$

$$(z+\beta)^m = \frac{[sin\,\varphi + \alpha\beta\,cos\,\varphi]^m}{\alpha^m\,cos^m\,\varphi}$$

und

$$dz = \frac{1}{\alpha}\;\frac{d\varphi}{cos^2\,\varphi}$$

folgt, so übergeht 1) in

$$dy = \frac{A_1}{\alpha^{m+1}}\;\frac{(sin\,\varphi + \alpha\beta\,cos\,\varphi)^m}{cos^{m+2r+2}\,\varphi}\,dy$$

Setzt man in 2) $\alpha z = sin\,\varphi$,

woraus

$$(1-\alpha^2 z^2)^r = cos\,\varphi^{2r}$$

$$(z+\beta)^m = \frac{(sin\,\varphi + \alpha\beta)}{\alpha^m}$$

und

$$dz = \frac{1}{\alpha}\;cos\,\varphi\,dy$$

folgt, so übergeht 2) in

$$dy = \frac{A_2}{\alpha^{m+1}}\,.\,sin\,\varphi + \beta\,\alpha)^m\,cos\,\varphi^{2r+1}d\varphi.$$

Setzt man endlich in 3) $\alpha z = sec\,\varphi$,

woraus

$$(\alpha^2 z^2 - 1)^r = tang^{2r}\,\varphi = \frac{sin^{\,2r}\varphi}{cos^{\,2r}\varphi}$$

$$(z+\beta)^m = \frac{(1+\alpha\beta\,cos\,\varphi)^m}{\alpha^m\,cos^{\,m}\varphi}$$

$$dz = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{sin\,\varphi}{cos^{\,2}\varphi}\,dy$$

folgt, so übergeht 3) in

$$dy = \frac{A_3}{\alpha^{m+1}} \cdot \frac{(1+\alpha\beta\cos\varphi)^m}{\cos^{m+2r+2}\varphi} \sin^{2r+1}\varphi\, d\varphi.$$

§. 3.

Ist m eine positive ganze Zahl, so braucht man nur die angezeigte Potenz nach m zu verrichten, die so erhaltenen Glieder sind dann sämmtlich unter folgender Form enthalten:

$$dy = \sin^n\varphi \cos^p\varphi\, dx \; \ldots \text{ wie in II}$$

Ist hingegen m negativ, so versuche man die Substitution $x = \frac{1}{u}$ zu machen, wodurch die in diesem Falle vorliegende Differentialformel

$$dy = \frac{(a+bx+cx^2)^{\pm r}}{x^m}\, dx$$

in folgende übergeht

$$dy = -(au^2+bu+c)^{\pm r}\, u^{m\mp 2r-2}\, du,$$

oder wenn man

$$m \mp 2r - 2 = m'$$

setzt in

$$dy = -(au^2+bu+c)^{+r}\, u^{\pm m'}\, du.$$

Die nun gemachte Substitution kann natürlicher Weise nur dann von Erfolg sein, wenn $m' = m \mp 2r - 2$ dadurch wirklich eine positive ganze Zahl geworden ist.

Aus der Gleichung $m' = m \mp 2r - 2$ sehen wir mit Rücksicht auf die Voraussetzung über m', dass, sobald m eine gebrochene Zahl ist, r auch eine entsprechend gebrochene Zahl sein muss; — ferner, dass, wenn m eine ganze Zahl ist, r die Form $\left(\frac{t}{2}\right)$ besitzen muss, wo (t) eine ganze gerade oder ungerade Zahl sein kann.

Der am häufigsten vorkommende Fall ist der, wo $r = \pm\frac{t}{2}$ ist; dieser Fall möge nun besonders der Betrachtung unterworfen werden.

Für diesen Fall hat man eigentlich folgende Formen zu behandeln:

$$\alpha) \qquad dy = \frac{A\,dx}{x^m\,(a+bx+cx)^{2\frac{t}{2}}}$$

$$\beta) \qquad dy = \frac{A\,dx.(a+bx+cx^2)^{\frac{t}{2}}}{x^m}$$

Für $\alpha)$ gibt die Substitution $x = \frac{1}{u}$

$$dy = -\frac{A\,u^{m+t-2}.\,du.}{(au^2+bu+c)^{\frac{t}{2}}} = -\frac{A\,u^{m'}\,du}{(au^2+bu+c)^{\frac{t}{2}}}$$

Hier ist $m+t-2=m'$ offenbar eine ganze positive Zahl, daher durch die gemachte Substitution die vorgelegte Differentialformel zur trigonometrischen Einrichtung fähig gemacht.

Für $\beta)$ wird, wenn man Zähler und Nenner mit $(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt

$$dy = \frac{A(a+bx+cx^2)^{\frac{t+1}{3}}.\,dx}{x^m\,(a+bx+cx^2)^{\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{A\,(a+bx+cx^2)^{m'}\,dx}{x^m\,(a+bx+cx)^{\frac{1}{2}}}, \text{ wo } m' = \frac{t+1}{2}$$

offenbar eine ganze positive Zahl ist, da vermöge der Annahme t eine ungerade und positive Zahl vorausgesetzt wird. Man entwickle nun die so angezeigte Potenz, und behandle die einzelnen Glieder, wie die unmittelbar hervorgehende Differentialformel in $a)$, um jedes Glied dann bequem trigonometrisch einrichten zu können.

Diesen vorausgeschickten Betrachtungen aufmerksam folgend, haben wir kennen gelernt, dass schon die trigonometrische Einrichtung der Differentialformel I) nur unter gewissen Einschränkungen hinsichtlich der Werthe und Zeichen von m und r möglich ist — und wenn wir uns erlauben, schon bei dieser Gelegenheit anzudeuten, dass auch die wirklich trigonometrische Differentialformel nur unter gewissen Einschränkungen, bezüglich der Werthe und Zeichen von m und r integrirt werden könne, so haben wir hiemit zugleich auf die Kriterien gewiesen, welche das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines geschlossenen Ausdruckes als Integral für einzelne gegebene Differentialformeln constatiren.

Es handelt sich nun darum, die trigonometrischen Differentialformeln zum Integriren einzurichten; — das Verfahren, dieses für jede Combination von m und r rücksichtlich ihrer Werthe und Zeichen zu bewerkstelligen, möge der Gegenstand der folgenden Paragraphe sein.

§. 4.

Unter der Voraussetzung, dass m eine ganze positive Zahl ist, finden wir die Differentialformel: $dy = w^n\ (1 - w^2)^m\, dw$ nach Entwicklung der angezeigten Potenz unmittelbar integrabel.

Setzt man nun einmal $w = sin\,\varphi$

und ein anderes Mal $w = cos\,\varphi$,

so verwandelt sich die gegebene Differentialformel im ersten Falle in

$$dy = sin^n\varphi\ cos^{2m+1}\varphi\ d\varphi,$$

hingegen im zweiten Falle in

$$dy = cos^n\varphi\ sin^{2m+1}\varphi\ d\varphi.$$

Die letzt erhaltenen Differentialformeln sind also, die eine durch die Substitution $sin\,\varphi = w$, die andere durch die Substitution $cos\,\varphi = w$ sehr leicht zum Integriren einzurichten.

Der daraus abgeleitete Grundsatz möge nun folgendermassen lauten:

Ist im Zähler eine der Functionen mit einem ungeraden Exponenten behaftet, so führt die Substitution: *Cofunction* $= w$ zum Ziele.

Beispiele.

1) Es sei $$dy = sin^9\varphi\ cos^{\frac{3}{7}}\varphi\ d\varphi.$$

Da hier die Function *Sinus* einen ungeraden Exponenten hat, so wird man die Cofunction des *Sinus* nämlich $cos\,\varphi = w$ setzen, wodurch man erhält

$$dy = -w^{\frac{3}{7}}\ (1 - w^2)^4\ dw.$$

2) Sei $$dy = sin^{\frac{5}{9}}\varphi\ cos^{13}\varphi\ d\varphi,$$

sie übergeht, wenn man $sin\,\varphi = w$ setzt, in

$$dy = (1 - w^2)^6\ w^{\frac{5}{9}}\ dw \quad \text{u. s. w.}$$

§. 5.

Es sei m eine ganze positive, n hingegen eine beliebige Zahl, so ist ohne Anstand folgende Differentialformel integrabel:

$$dy = w^n (1+w^2)^m dw.$$

Für $w = tang\,\varphi$, wird $dw = \frac{d\varphi}{cos^2\varphi}$ und daher

$$dy = \frac{sin^n\varphi\, d\varphi}{cos^{n+2m+2}\varphi} = \frac{sin^n\varphi\, d\varphi}{cos\,\varphi^{m'}}.$$

Was auch immer n sein mag ist der Unterschied zwischen m' und n eine ganze gerade Zahl. Ist n eine positive Grösse, so ist mit Rücksicht auf die Hypothese über m der Exponent des Nenners höher als der Exponent des Zählers.

Ist aber n negativ, so hat man, wenn $n > 2m+2$

$$dy = \frac{cos^{n-2m-2}\varphi\, d\varphi}{sin^n\varphi}.$$

Ist $n < 2m+2$, so wird

$$dy = \frac{d\varphi}{sin^n\varphi\, cos^{2m+2-n}\varphi}.$$

Bei genauer Betrachtung der in diesem Paragraphe abgeleiteten trigonometrischen Formeln sieht man, dass die beiden Functionen *Sinus* und *Cosinus* entweder vertheilt sind im Zähler und Nenner, oder es kommen beide im Nenner vor.

Für den ersten Fall, wenn die Functionen theils im Zähler, theils im Nenner vorkommen, ist der Exponent im Nenner höher als der im Zähler, beide Exponenten sind mit willkürlichen n zugleich gerad, zugleich ungerad oder zugleich gebrochene Zahlen, doch immer so, dass der Unterschied der Exponenten eine gerade Zahl wird.

Für den zweiten Fall, sind die Exponenten auch zugleich gerade oder ungerade, oder gebrochene Zahlen, doch immer so, dass ihre Summe eine gerade Zahl ist.

Der hieraus abgeleitete Grundsatz lautet im Kurzen folgendermassen:

Ist der Exponent im Nenner höher als der Exponent im Zähler und ihre Differenz eine gerade

Zahl; oder falls beide im Nenner vorkommen, ihre Summe eine gerade Zahl, so führt die Substitution $tang\,\varphi = w$ zum Resultate; z. B.

1. $$dy = d\varphi \cdot \frac{\sin^6\varphi}{\cos^{10}\varphi},$$

Man setze $tang\,\varphi = w$ so wird

$$d\varphi = \frac{dw}{1+w^2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{w^2}{1+w^2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{1+w^2},$$

folglich

$$dy = (1+w^2)\,w^6\,dw.$$

Eben so wird für dieselbe Substitution

2. $$dy = \frac{\cos^{11}\varphi\,d\varphi}{\sin^{15}\varphi} = \frac{(1+w^2)\,dw}{w^{15}}$$

3. $$dy = \frac{\sin^{\frac{7}{9}}\varphi\,d\varphi}{\cos^{\frac{25}{9}}\varphi} = w^{\frac{7}{9}}\,dw.$$

4. $$dy = \frac{d\varphi}{\sin^{\frac{3}{5}}\varphi\cos^{\frac{17}{5}}\varphi} = \frac{(1+w^2)\,dw}{w^{\frac{3}{5}}}.$$

§. 6.

Es seien m und p ganze positive Zahlen, so wird offenbar bei willkürlichen Werthen von n folgende Differentialformel ohne allen Anstand integrabel sein

$$dy = \frac{(1+w^2)^m\,(1-w^2)^p\,dw}{w^n}.$$

Es sei $w = tang\,u$, daher $dw = \frac{du}{\cos^3 u}$,

$$1+w^2 = \frac{1}{\cos^2 u}, \quad 1-w^2 = 1-tang^2 u = \frac{\cos 2u}{\cos^2 u}.$$

Also
$$dy = \frac{\cos^p 2u\,du}{\sin^n u \cdot \cos^{2p+2m+2-n} u}$$

oder wenn man $2p+2m+2-n=n$ setzt, woraus $p = n-(m+1)$ folgt, so hat man

$$dy = \frac{2^n \cdot \cos^{n-(m+1)} 2u\,du}{\sin^n 2u}$$

Setzt man noch erstens $2u = \varphi$, oder zweitens $2u = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, so hat man für's erste

$$dy = \frac{2^{n-1} \cos^{n-(m+1)}\varphi \, d\varphi}{\sin^n \varphi}$$

und für den zweiten Fall

$$dy = -\frac{2^{n-1} \sin^{n-(m+1)}\varphi \, d\varphi}{\cos \varphi^n}.$$

Wegen der Annahme ganzer Zahlen für m und p muss auch n, weil $p = [n - (m+1)]$, eine ganze Zahl sein; ferner ist $n > m+1$ und also auch $n - (m+1) < n$, d. h. die im 6. Paragraphe angeführten Betrachtungen kurz zusammengefasst liefern folgendes zum Resultate:

Ist der Exponent des Nenners höher als der Exponent des Zählers, ferner der Exponent im Nenner ungerad, bei geradem Exponenten des Zählers, so führt zum Ziele die Substitution $tg \frac{1}{2}\varphi = w$ oder $tang \frac{1}{2} [\frac{1}{2}\pi - \varphi]$, je nachdem *Sinus* oder *Cosinus* im Nenner vorkommt.

Anmerkung. Ein ungerader Exponent im Zähler ist in letzter Untersuchung nicht ausgeschlossen, allein dieser Fall findet nach §. 4 oder 5 eine viel einfachere Behandlung.

Eben dieselbe Untersuchung lasst auch zu, dass beide Exponenten gerad sind, doch dafür ist im §. 5 schon gesorgt.

Z. B. Ist $$tang \tfrac{1}{2}\varphi = w,$$

so wird $$\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{1+w^2} \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{w^2}{1+w^2},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi - \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \cos\varphi = \frac{1-w^2}{1+w^2},$$

und

$$2\cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin \tfrac{1}{3}\varphi = \sin \varphi = \frac{2w}{1+w^2},$$

daher übergeht

1. $$dy = \frac{\cos^8\varphi \, d\varphi}{\sin^9\varphi}$$

in $$dy = 2^{\frac{1}{8}} \frac{(1-w^2)^8 dw}{w^9}$$

2. $$dy = \frac{\cos^{16}\varphi \, d\varphi}{\sin^{21}\varphi} = \frac{1}{2^{20}} \cdot \frac{(1-w^2)^{16} (1+w^2)^4 \, dw}{w^{21}}$$ u. s. w.

Ist aber $tang\,\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\varphi)=w$,

folglich $sin^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\varphi)=\frac{w^2}{1+w^2}$, $cos^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\varphi)=\frac{1}{1+w^2}$

$$cos^2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)-sin^2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)=cos(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)=sin\,\varphi=\frac{1-w^2}{1+w^2}$$

$$2sin\,\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)\,cos\,\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)=sin(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)=cos\,\varphi=\frac{2w}{1+w^2},$$

so hat man

1. $$dy=\frac{sin^{14}\varphi\,d\varphi}{cos^{19}\varphi}=-\frac{1}{2^{18}}\cdot\frac{(1+w^2)^4\,(1-w^2)^{14}\,dw}{w^{19}}$$

2. $$dy=\frac{sin^{8}\varphi\,d\varphi}{cos^{9}\varphi}=-\frac{1}{2^{8}}\,\frac{(1-w^2)^8\,.\,dw}{w^{9}}$$

3. $$dy=\frac{sin^{16}\varphi\,d\varphi}{cos^{21}\varphi}=-\frac{1}{2^{20}}\cdot\frac{(1-w^2)^{16}\,(1+w^2)^4\,dw}{w^{21}}$$

§. 7.

Kommen beide Exponenten im Nenner vor und ist der Eine gerad, während der Andere ungerad ist, so mache man zum Zähler $(cos^2\varphi+sin^2\varphi)^r=1$, wo r gleich ist der halben um die Einheit verminderten Summe der Exponenten, alsdann erhält man nach Entwicklung der so angezeigten Potenz lauter Glieder zum Integriren, die nach vorigen Paragraphen zu behandeln sind, z. B.

1. $$dy=\frac{d\varphi}{sin^{2m}\varphi\,.\,cos^{2n+1}\varphi}=\frac{(sin^2\varphi+cos^2\varphi)^{\frac{2m+2n}{2}}\,d\varphi}{sin^{2m}\varphi\,cos^{2n+1}\varphi}$$

2. $$dy=\frac{d\varphi}{sin^{5}\varphi\,cos^{4}\varphi}=\frac{d\varphi\,[sin^2\varphi+cos^2\varphi]^{\frac{4+5-1}{2}}}{sin^{5}\varphi\,.\,cos^{4}\varphi}=$$

$$=d\varphi\left[\frac{sin^3\varphi}{cos^4\varphi}+\frac{4sin\,\varphi}{cos^2\varphi}\right]+d\varphi\left\{\frac{6}{sin\,\varphi}+\frac{4cos^2\varphi}{sin^3\varphi}+\frac{cos^4\varphi}{sin^5\varphi}\right\}$$

lauter Glieder, die nach vorigen Paragraphen behandelt sehr leicht integrirt werden können.

A n m e r k u n g. Ist der Exponent des Zählers höher als der Exponent im Nenner, so entwickle man die gerade Potenz des Zählers, nach der Function des Nenners mittelst des Satzes $cos^2\varphi+sin^2\varphi=1$, und die so erhaltenen Glieder haben theils die Form: $\left(\frac{d\varphi}{\sin^{m}\varphi}, \frac{d\varphi}{\cos^{m}\varphi}\right)$, oder auch: $(d\varphi \sin^{2m}\varphi$, $d\varphi \cos^{2m}\varphi)$, von welchen erstere nach §. 5 oder §. 6 behandelt werden, je nach dem m gerad oder ungerad ist; die Glieder letzterer Form hingegen sind nur specielle Fälle der nun zu behandelnden Differentialformel:

$$dy = \sin^{2m}\varphi \cos^{2n}\varphi \, d\varphi.$$

Bevor wir zur Auflösung dieser Differentialformel schreiten, wollen wir noch zur Beleuchtung der angeführten Anmerkung Beispiele geben.

Es sei 1. $dy = \frac{\sin^{6}\varphi \, d\varphi}{\cos^{3}\varphi}$,

so hat man da $\sin^{2}\varphi = 1 - \cos^{2}\varphi$

ist $dy = \frac{d\varphi}{\cos^{3}\varphi} - \frac{3d\varphi}{\cos\varphi} + (3\cos\varphi - \cos^{3}\varphi)\, d\varphi$,

2. $dy = \frac{\cos^{12}\varphi \, d\varphi}{\sin^{8}\varphi} d\varphi = \frac{(1-\sin^{2}\varphi)^{6}}{\sin^{8}\varphi}$ u. s. w.

§. 8.

Es ist mir nicht gelungen, für den Fall, wenn beide Exponenten gerad, und im Zähler vorkommen, eine directe Substitutionsart aufzufinden, wohl aber ein einfaches Verfahren anzugeben, durch welches man eben so leicht, wie in den übrigen Fällen, die gegebene Differentialformel zum Integriren einrichten kann.

Man ist nämlich im Stande den Ausdruck $\sin^{2m}\varphi \cos^{2n}\varphi$ mittelst des Satzes $\sin^{2}\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ und $\cos^{2}\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$ in eine Summe von Gliedern zu zerlegen, wo jedes Glied eine ungerade Potenz des *Cosinus* eines Vielfachen des Bogens ist und daher jedes nach §. 4 zum unmittelbaren Integriren eingerichtet werden kann.

Da die Entwicklung dieses Ausdruckes bei einer geschickten Verfahrungsweise sehr erleichtert wird, so mögen hier zwei Beispiele durchgeführt werden.

1. Es ist

$$\cos\varphi^{16} = \frac{1}{2^8}(1 + \cos\ 2\varphi)^8 = \frac{1}{2^8}\Big\{1 + 8\cos 2\varphi + 28\cos^2 2\varphi + $$
$$+ 56\cos^3 2\varphi + 70\cos^4 2\varphi + 56\cos^5 2\varphi + 28\cos^6 2\varphi +$$
$$+ 8\cos^7 2\varphi + \cos^8 2\varphi\Big\}.$$

Verfährt man eben so mit den neu erhaltenen geraden Potenzen, so hat man

$$28\cos^2 2\varphi = \frac{28}{2}(1 + \cos 4\varphi) = \frac{28}{2}\Big\{1 + \cos 4\varphi$$
$$70\cos^4 2\varphi = \frac{70}{4}(1 + \cos 4\varphi)^2 = \frac{70}{4}\Big\{1 + 2\cos\ 4\varphi + \cos^2 4\varphi$$
$$28\cos^6 2\varphi = \frac{28}{8}(1 + \cos 4\varphi)^3 = \frac{28}{2}\Big\{1 + 3\cos\ 4\varphi + 3\cos^2 4\varphi +$$
$$+ \cos^3 4\varphi$$
$$\cos^8 2\varphi = \frac{1}{16}(1 + \cos 4\varphi)^4 = \frac{1}{16}\Big\{1 + 4\cos\ 4\varphi + 6\cos^2 4\varphi +$$
$$+ 4\cos^3 4\varphi + \cos^4 4\varphi$$

Ist nun $28\cos^2 2\varphi + 70\cos^4 2\varphi + 28\cos^6 2\varphi + \cos^8 2\varphi = S$, so findet man

$$S = \frac{1}{16}\left\{\begin{array}{rl} 224 & [1 + \cos 4\varphi] \\ 280 & [1 + 2\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi] \\ 56 & [1 + 3\cos 4\varphi + 3\cos^2 4\varphi + \cos^3 4\varphi] \\ 1 & [1 + 4\cos 4\varphi + 6\cos^2 4\varphi + 4\cos^3 4\varphi + \cos^4 4\varphi] \end{array}\right.$$

$$S = \frac{1}{16}\Big\{561 + 956\cos 4\varphi + 454\cos^2 4\varphi + 60\cos^3 4\varphi + \cos^4 4\varphi\Big\}.$$

Eben so ist

$$\frac{454}{16}\cos^2 4\varphi = \frac{454}{32}\Big\{1 + \cos 8\varphi\Big\}$$
$$\frac{1}{16}\cos^4 4\varphi = \frac{1}{64}\Big\{1 + 2\cos 8\varphi + \cos^2 8\varphi\Big\}$$

$$\frac{1}{16}[454\cos^2 4\varphi + \cos^4 4\varphi] = [909 + 910\cos 8\varphi + \cos^2 8\varphi]\frac{1}{64}$$

und

$$\frac{1}{64}\cdot\cos^2 8\varphi = \frac{1}{128} + \frac{1}{128}\cos 16\varphi,$$

hiermit

$$1)\quad \cos^{16}\varphi = \frac{1}{2^8}\left\{\frac{8253}{128} + [8\cos 2\varphi + 56\cos^3 2\varphi + 56\cos^5 2\varphi + + 8\cos^7 2\varphi] + \frac{1}{16}[956\cos 4\varphi + 60\cos^3 8\varphi] + \frac{1}{128}\cos 16\varphi\right\}.$$

Ist aber das Product $\cos^{10}\varphi\ \sin^{16}\varphi$ gegeben, so hat man

$$\cos^{10}\varphi \sin^{16}\varphi = \frac{1}{2^{13}}\sin^{10}2\varphi\,[1-\cos 2\varphi]^3$$

$$= \frac{1}{2^{13}}\left\{\sin^{10}2\varphi - 3\sin^{10}2\varphi\cos 2\varphi + 3\sin^{10}2\varphi\,[1-\sin^2\varphi] - \sin^{10}2\varphi\cos^3 2\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{13}}\left\{-3\sin^{10}2\varphi\cos 2\varphi + 3\sin^{10}2\varphi\cos^3 2\varphi\right\} + + \frac{1}{2^{13}}\left\{4\sin^{10}2\varphi - 3\sin^{12}2\varphi\right\},$$

und da

$$4\sin^{10}2\varphi = \frac{4}{2^5}(1-\cos 4\varphi)^5 = \frac{8}{64}\left\{1 - 5\cos 4\varphi + 10\cos^2 4\varphi - - 10\cos^3 4\varphi + 5\cos^4 4\varphi - \cos^5 4\varphi\right\},$$

ferner

$$-3\sin^{12}2\varphi = \frac{-3}{2^6}(1-\cos 4\varphi)^6 = \frac{-3}{64}\left\{1 - 6\cos 4\varphi + 13\cos^2 4\varphi - - 20\cos^3 4\varphi + 15\cos^4 4\varphi - 6\cos^5 4\varphi + \cos^6 4\varphi\right\},$$

addirt und zusammengezogen:

$$= \frac{1}{64}\left\{5 - 22\cos 4\varphi + 35\cos^2 4\varphi - 20\cos^3 4\varphi - 5\cos^4 4\varphi + 10\cos^5 4\varphi - 3\cos^6 4\varphi\right\};$$

so wird der Ausdruck, nachdem man wie im vorigen Beispiele verfährt,

$$2)\quad \cos^{10}\varphi \sin^{16}2\varphi = -\frac{1}{2^{13}}\left\{3\sin^{10}2\varphi\cos 2\varphi + \sin^{10}2\varphi\cos^3 2\varphi\right\} + \frac{1}{2^{13+6}}\left\{271 - 22\cos 4\varphi - 20\cos^3 4\varphi\right\} + \frac{1}{2^{28}}\left\{111\cos 8\varphi - 3\cos^3 8\varphi\right\} - \frac{3}{2^{29}}\cos 16\varphi\Big\}.$$

§. 9.

Das Verfahren die trigonometrischen Differentialformeln zum Integriren einzurichten lässt sich also in folgende drei Puncte zusammenstellen:

I. Kommt im Zähler Eine der beiden Functionen mit einem ungeraden Exponenten vor, so führt die Substitution Cofunction $= w$ zum Resultate.

II. Uebersteigt der Exponent des Nenners den des Zählers, so verfahre man wie folgt:

a) wo beide Exponenten zugleich gerad oder zugleich ungerad sind gilt die Substitution $tang\ \varphi = w$;

b) wo beim geraden Exponenten des Zählers der des Nenners ungerad ist, gilt die Substitution

$$tang\ \tfrac{1}{2}\varphi = w,\ \text{oder}\ tang\ \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = w,$$

je nachdem *Sinus* oder *Cosinus* im Nenner vorkommt.

c) Kommen beide Exponenten im Nenner vor, doch so, dass, während ein Exponent gerad, der andere ungerad ist, so mache man zum Zähler die entwickelte Potenz von

$$(cos\ 2\varphi + cos\ 2\varphi)\ r = 1,$$

wo r gleich ist der halben um die Einheit verminderten Summe der beiden Exponenten, und behandle nun die so erhaltenen Glieder nach vorigen Puncten.

Anmerkung. Ist der Exponent im Zähler höher, als der im Nenner, so entwickelte man vermöge

$$cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$$

den Zähler nach der Function des Nenners, und man erhält Glieder, die theils nach vorigen Puncten schon lösbar sind, theils nach dem nun Folgenden zu behandeln sind.

III. Kommen beide Exponenten im Zähler vor, und sind sie zugleich gerad, so entwickle man mittelst des Satzes:

$$cos^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1 + cos\ 2\varphi);\quad sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1 - cos\ 2\varphi)$$

den gegebenen Ausdruck nach ungeraden Potenzen der Cosinusse der Vielfachen des Bogens, und behandle die so erhaltenen Glieder nach I).

Ist aber ein algebraischer Ausdruck zum Integriren vorgelegt, so mache man ihn zuerst trigonometrisch und verfahre nach irgend einem der drei angeführten Puncte, z. B.

1) $$\int \frac{x^9\, dx}{(2+3x^2)^{\frac{11}{2}}} = \frac{1}{3^5\ 2^{\frac{1}{2}}} \int \sin{}^9 y\, dy = -\frac{1}{3^5\ 2^{\frac{1}{2}}} \int (1-z^2)^4\, dz$$

$$= -\frac{1}{3^5 \sqrt{2}} \left(z - \frac{4}{3} z^3 + \frac{6}{5} z^5 - \frac{4}{4} z^7 + \frac{1}{9} z^9 \right) + C,$$

wo man $\frac{3}{2} x^2 = tang^2 y$, und dann nach (I) $cos\ y = z$ gesetzt, hat:

$$z = cos\ y = \frac{1}{[1+tg^2 y]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{[1+\frac{3}{2}x^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2+3x^2}}.$$

2) $$\int \frac{x^{11}\ .\ dx}{(-4+5x^2)^{13}} = \frac{\sqrt{5^{12}}}{2^{15}} \int \frac{dy}{sin^{12} y} = \frac{5^6}{2^{25}} \int \frac{(1+z^2)^5\, dz}{z^{12}} =$$

$$-\frac{5^6}{2^{25}} \left\{ \frac{z^{-11}}{11} + \frac{5}{9} z^{-9} + \frac{10}{7} z^{-7} + \frac{10}{5} z^{-5} + \frac{5}{3} z^{-3} + z^{-1} \right\} + C,$$

wo man $\frac{5}{4} x^2 = sec^2 y$, und dann $tang\ y = z = \sqrt{sec^2 y - 1} =$

$$= \sqrt{\frac{5}{4} x^2 - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{5x^2 - 4}$$ gesetzt hat.

3) Es ist $$\int \frac{x^n\, dx}{(2rx - x^2)^{\frac{m}{2}}} = \frac{1}{(2r)^{\frac{m}{2}}} \int \frac{x^{n-\frac{m}{2}}\, dx}{\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{\frac{m}{2}}}$$

$$= 2.(2r)^{n+1-m} \int \frac{sin\ y^{m+1-m}\ dy}{cos\ y^{m-1}},$$

sobald $\frac{x}{2r} = sin^2 y$, mithin

$$x = 2r\ sin^2 y$$
$$dx = 4r\ sin^2 y\ cos y$$
$$x^{\frac{m}{2}} = (2r)^{\frac{m}{2}}\ sin^m y$$

gesetzt wird. Es wird hierbei:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = 2\int dy = 2\ arc\ sin \sqrt{\frac{x}{2r}} + C.$$

4) $$\int \frac{x^{\frac{3}{5}}\ dx}{(1-x^2)^{14}} = \int \frac{sin^{\frac{3}{5}} y\ dy}{cos^{\frac{23}{5}} y} = \int (1+z^2)\, z^{\frac{3}{5}}\, dz,$$ wo zuerst

$x = sin\ y$ gesetzt wird, daher

$$x = tang\ y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$ u. s. w.

$$5)\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{7}}(1-x^2)^{\frac{16}{7}}}=\int\frac{dy}{sin^{\frac{3}{7}}y\,.\,cos^{\frac{25}{7}}y}=\int\frac{(1+z^2)\,dz}{z^{\frac{3}{7}}}$$

$$=\int\frac{dz}{z^{\frac{3}{4}}}+\int z^{\frac{11}{7}}\,dz=\frac{7z^{\frac{4}{7}}}{4}+\frac{7z^{\frac{18}{7}}}{18}+C;$$

hier ist $x=sin\,y$, mithin $z=tang\,y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ gesetzt.

Anmerkung. Da $(-a+bx^2)^{\frac{r}{2n+1}}=-(a-bx^2)^{\frac{r}{2n+1}}$ ist, so ist es hier sehr bequem, beide Substitutionen zu versuchen, nämlich man kann

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\;x=sec\,y,\quad \text{oder}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\;x=sin\,y$$

setzen, ohne in einen imaginären Ausdruck zu gerathen.

Wir wollen noch schliesslich einer Substitutionsart erwähnen, durch welche nicht selten die Mühe der Zerlegung in Partialbrüche erspart wird.

Es sei

$$dy=\frac{x^m\;dx}{(x+a)^r\;\varphi(x)}$$

gegeben, so wird man, wenn man $x+a=u$ setzt:

$$dy=\frac{(u-a)^m\;du}{u^r\;\varphi(u-a)}\quad\ldots\ldots\ldots\;1.$$

Eben so wird unter der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ ein Product ist aus Binomen mit ganzen Exponenten und aus Trinomen mit Exponenten von der Form $\left(\frac{t}{2}\right)$,

$$\frac{dx}{x^m\,(x+a)^r\,\varphi(x)}=-\frac{(u-1)^{m+p+r-2}\;du}{a^{m+r-1}U^r\,\Psi(u)}\quad\ldots\ldots\;2,$$

wenn man $a+x=ux$ setzt, woraus

$$x=\frac{a}{u-1},\quad dx=-\frac{a\;du}{(u-1)^2},\quad x+a=\frac{au}{u-1},$$

und etwa

$$\varphi(x)=\frac{\Psi(u)}{(u-1)^p}$$

folgt.

Dieser Substitutionsart kann man sich mit Vortheil bedienen in allen Fällen, wo im Nenner nur ganze Potenzen von Binomen, und höchstens nur ein Trinom mit einem Exponenten der Form $(\frac{t}{2})$ vorkommt; wodurch auf eine ganz einfache Weise die Zerlegung in Partialbrüche beseitigt wird, z. B.

1. Ist $x+2=u$, so ist

$$\frac{dx}{(x+2)^3(x+3)^4}=\frac{du}{u^3(u+1)^4},$$

und $u+1=uy$ gesetzt, hat man:

$$\frac{dx}{(x+2)^3(x+3)^4}=-\frac{(y-1)^5\,dy}{y^4}, \text{ wo } y=\frac{u+1}{u}=\frac{x+3}{x+2} \text{ ist.}$$

2. $\dfrac{dx}{(x+3)^3(x+2)^4(x^2+1)^5}=\dfrac{du}{u^3(u-1)^4(u^2-5u+10)^5}$, wenn man $x+3=u$ setzt.

Macht man überdiess $u-1=uy$, so ist

$$\frac{dx}{(x+3)^3(x+2)^4(x^2+1)^5}=-\frac{(y-1)^{15}}{y^4(5-14y+10y^2)}\,dy,$$

$$\text{wo } y=\frac{u-1}{u}=\frac{x+2}{x+3} \text{ ist.}$$

Der letztere Ausdruck kann nach der vorgetragenen Methode unmittelbar zum Integriren eingerichtet werden.

3. $\dfrac{dx}{x^5(x+3)^7(x^2+x+1)^{\frac{9}{2}}}=-\dfrac{(y-1)^{19}}{3^{11}y^7(7+y+y^2)^{\frac{9}{2}}}\,dy$, sobald $x+3=uy$ ist u. s. w.

Die Anwendung dieser Substitutionsart zeigt sich besonders vortheilhaft, wenn neben den Binomen auch ein Trinom der Form $(a+bx+cx^2)^{\frac{2n+1}{2}}$ im Nenner vorkommt — denn wollte man hier die Zerlegung in Partialbrüche anwenden, müsste man vorerst das erwähnte Trinom rational machen, wo sodann nothwendig alle Binome zu Trinomen werden, in welchem Falle die Zerlegung in Partialbrüche sehr mühsam und zeitraubend ist. (Siehe Beispiel 3.)

Herr Prof. Dr. Hyrtl übergab für die Denkschriften eine Abhandlung „Beiträge zur Morphologie der Urogenital-Organe der Fische," indem er den Inhalt derselben in freiem Vortrage auseinander setzte.

In Folge eines Commissionsberichtes über mehre von Hrn. Dr. Heinrich Pollak, in Brünn, eingesendete mathematische Noten wurde beschlossen, an den Verfasser ein aufmunterndes Schreiben zu erlassen und ihn zu grösseren Arbeiten einzuladen.

Sitzung vom 19. Juli 1849.

Der General-Secretär las nachstehenden Erlass des k. k. Ministeriums für Handel, über eine Eingabe der kaiserlichen Akademie:

„Bei dem lebhaften Interesse, das die Staatsverwaltung an der Förderung und dem Gedeihen der von der kaiserlichen Akademie verfolgten wissenschaftlichen Zwecke und Bestrebungen nimmt, findet sich das Handelsministerium mit Vergnügen veranlasst, dem in dem schätzbaren Schreiben der löblichen kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vom 12. April l. J. ausgedrückten Wunsche im vollsten Masse zu entsprechen, und indem man daher mittels eines gleichzeitig ergehenden Circular-Erlasses, wovon eine Abschrift mitfolgt, die in dem weiters anliegenden Verzeichnisse genannten k. k. Consular-Organe auffordert, sich die wirksame Förderung und Unterstützung jener Zwecke und Bestrebungen nach den im obigen Schreiben enthaltenen Andeutungen ernstlich angelegen sein zu lassen, und die Einleitung trifft, dass die gleiche Weisung an die in Brasilien bestehenden Consularämter im Wege der k. k. Gesandtschaft in Rio Janeiro gelange, kann man nur wünschen, dass die löbliche kaiserliche Akademie der Wissenschaften dieser Aufforderung recht bald interessante Mittheilungen oder sonst für sie nützliche Erfolge von Seite der Consularämter zu verdanken haben möge."

Wien den 3. Juli 1849.

Circulare an die k. k. Consular-Aemter.

„Die kaiserliche Akademie der Wissenschaften hat sich mit dem Ersuchen an das Handelsministerium gewendet, dass die k. k. Consular-Organe nach dem Beispiele anderer Staaten zur Mitwirkung für die Förderung wissenschaftlicher Zwecke veranlasst, und demnach aufgefordert werden möchten:

1. Naturalien und Alterthümer, in sofern deren Erwerb keine Kosten verursacht, einzusammeln und an sie einzusenden;

2. die Akademie aufmerksam auf grössere kostspielige Funde zu machen, und nach Thunlichkeit dahin zu wirken, dass selbe der Erwerbung durch die Akademie vorbehalten bleiben;

3. Individuen oder gelehrte Gesellschaften, welche sich mit Natur- oder Alterthumskunde beschäftigen, zum wissenschaftlichen Verkehr mit der Akademie anzuregen, und selben zu vermitteln.

Bei dem lebhaften Interesse, das die Staatsverwaltung an der Förderung und dem Gedeihen der von der kaiserlichen Akademie verfolgten wissenschaftlichen Aufgaben und Bestrebungen nimmt, findet sich das Handelsministerium gerne berufen, dem von ihr geäusserten Wunsche im vollsten Masse zu entsprechen, und (das betreffende k. k. Consular-Amt) wird demnach mittels des gegenwärtigen Circular-Erlasses aufgefordert, sich die wirksame Förderung und Unterstützung jener Zwecke und Bestrebungen nach den obigen Andeutungen, so weit es ohne Kostenbelastung für den Staatsschatz geschehen kann, thunlichst angelegen sein zu lassen, und dem in einzelnen Fällen von der kaiserlichen Akademie an dieselbe gerichtete weiteren Ansinnen bereitwillig nachzukommen. Man kann nur wünschen, dass die Akademie der gegenwärtigen Aufforderung, deren Inhalt von (dem betreffenden k. k. Consular-Amte) auch den unterstehenden Consular-Organen zur gehörigen Nachachtung bekannt zu geben ist, interessante Mittheilungen oder sonst für sie nützliche Erfolge zu verdanken haben möge.“

Verzeichniss

der Consularämter, an welche der Circular-Erlass unter der Z. $\frac{4054}{699}$ 1849 zu ergehen hat.

Alexandrien	Gen. Consulat.
Amsterdam	Gen. Consulat.
Athen	Consulat.
Algier	Gen. Agentie.
Ancona	Gen. Consulat.
Antwerpen	Consulat.
Beirut	Gen. Consulat.
Belgrad	Consulat.
Bergen	Consulat.
Barcellona	Gen. Consulat.
Bordeaux	Gen. Consulat.
Bremen	Consulat.
Bukarest	Agentie.
Corfu	Gen. Consulat.
Cadix	Gen. Consulat.
Cagliari	Consulat.
Constantinopel	Gen. Consulat.
Coppenhagen	Gen. Consulat.
Civita vecchia	Consulat.
Canea	Vice-Consulat.
Danzig	Consulat.
Durazzo	Vice-Consulat.
Frankfurt a. M.	Gen. Consulat.
Gallacz	Consulat.
Gibraltar	Consulat.
Havre de Grace	Gen. Consulat.
Hamburg	Consulat.
St. Helena	Consulat.
Jassy	Agentie.
Janina	Vice-Consulat.
London	Gen. Consulat.

Livorno	Gen. Consulat.
Liverpool	Consulat.
Lissabon	Gen. Consulat
Leipzig	Gen. Consulat.
Moscau	Consulat.
Mobile (Nordamerica)	Vice-Consulat.
Marseille	Gen. Consulat.
Malta	Consulat.
Northshielde	Vice-Consulat (England).
New-York	Gen. Consulat.
New-Orleans	Consulat.
Neapel	Gen. Consulat.
Odessa	Gen. Consulat.
Petersburg	Gen. Consulat.
Paris	Gen. Consulat.
Palermo	Gen. Consulat.
Patras	Consulat.
Riga	Consulat.
Stockholm	Consulat.
Stettin	Consulat.
Salonik	Consulat.
Smyrna	Gen. Consulat.
Scutari	Vice-Consulat.
Sira	Consulat.
Trapezunt	Consulat.
Tromsoe	Consulat.
Tripolis	Gen. Agentie.
Warschau	Gen. Consulat.

Ueber Antrag ihres Präsidenten beschloss die Classe, die Mitglieder aufzufordern, um der Zeitersparniss willen, ihre allfälligen Wünsche unmittelbar dem General-Secretär bekannt zu geben, der ermächtigt ist, dieselben sofort den betreffenden Consulaten mitzutheilen, ohne darüber vorerst die Genehmigung der Classe einzuholen.

Herr Dr. **Ryll** hat nachstehende Fortsetzung seiner „**Abhandlung über Ortsversetzungen durch Rechnung oder über die Elemente der Lagerechnung**," deren erster Theil bereits in diesen Berichten veröffentlicht wurde [1]), eingesendet:

Drittes Kapitel.

Vom algebraischen Ursprung der Lagefunction.

§. 20. Nachdem im Vorhergehenden auf die Umstände der Genesis der neueren Geometrie eingegangen worden, ist es nunmehr im Augenblick, wo es unvermeidlich wird, auf das Gebiet der Algebra zu treten, nicht unvermeidlich allein, sondern auch von Belang, auf die Natur der Algebra selbst in Kürze kritisch einzugehen, da gerade sie, wie erwähnt, es gewesen, der der Mangel eines Calcüls der Lage zum Vorwurf gemacht worden ist. Ihre eigene innere Natur muss es demnach auch sein, die Aufschluss darüber gibt, mit welchem Grund oder Ungrund diess geschah. Ich werde versuchen, dieser inneren Natur durch Entgegenhaltung mit der Arithmetik und dem Subordinatsystem zur Klarheit zu verhelfen. Algebra fällt mit Arithmetik nicht zusammen. Beide wollen und müssen unterschieden sein. Soll aber eine scharfe, dem Streben nach Deutlichkeit möglichst genügende Vorstellung der beiderseitigen Natur ausgebildet werden, so wird es nützlich sein, das zu scheiden, was beiden gemeinsam ist, von dem, wodurch sie heterogen erscheinen.

Gemeinsam ist offenbar lediglich die Rechnungsoperation, als durch welche nämlich nur die formale Seite des Rechnens beanzeiget wird, die nicht mehr als nur die Art und Weise ist, wie mit einem gegebenen Rechnungsobject verfahren wird. Das Unterscheidende dagegen liegt in dem, was schon im §. 1 als sächliche Basis angezogen worden, unter welcher nicht wie bei der Form ein solches Moment verstanden werden kann, welches sowohl *quoad existentiam*, wie auch *quoad modum* zum Rechnen erfordert würde, sondern nur irgend ein passiver Operationsgegenstand, der da bestimmt ist, zu dulden, wie mit ihm verfahren wird. Dieser ist nur *quoad existentiam* zur Möglichkeit der Rechnung erforderlich, kann dagegen von Fall zu

---

[1]) Vergleiche Sitzungsberichte 1848. IV. Heft. S. 90.

Fall, das ist *quoad modum* ein anderer und anderer sein. Ist er „die blosse Zahl," die abstract und nur absolut ist oder Null, so characterisirt er die reine Arithmetik; man nennt dies die Rechnung in ungenannten Zahlen. Wird er dagegen ein anderer, jedoch ein solcher, der gleichwohl nur absolut oder Null sein kann, so characterisirt er auch noch die Arithmetik, als Rechnung in benannten Zahlen; allein dieselbe ist nicht mehr rein, weil ihr Gegenstand jetzt nicht mehr die abstracte Zahl, sondern ein concreter ist, der schon verschiedene Eigenschaften und Beziehungen hat, wie Eigenschaften der verschiedenen Quantität, der Qualität, der Dauer, der Kräfte, der Räumlichkeit u. s. f. Unter diesen Eigenschaften können mehrere zugleich die Natur der Grösse an sich tragen, so zwar, dass jede einzeln fähig ist, ein Object der Rechnungsoperation zu sein. Wird nun an dem ganzen concreten Gegenstande wie an einem Individuum die Operation vollzogen, so liegt vielleicht mehr als es scheint, daran, mit dem Umstande vertraut zu werden, dass die Rechnung hier mit Gefahr umgeben ist, dem Missverständniss anheimzufallen. Die Möglichkeit hierzu liegt darin, dass in der Berechnung des ganzen Gegenstandes als Individuum nur Eine Grössenart berechnet wird, während wie vorausgesetzt, der ganze Gegenstand eine Mehrheit von Eigenschaften hat, worunter Einzelne je für sich Grössen sind, z. B. Volum, Dimension, Masse, Gewicht, Dichte, Werth u. m., und dass die Rechnung selbst, als bloss formal, als Verfahren — aus eigenem Antrieb nichts darüber auszusagen weiss, ob sie auf die eine oder die andere Eigenschaft bezogen sei. Es steht vielmehr vollends frei, sie dahin oder dorthin anzuwenden, allein es ist in Bezug auf den Success und Sinn von grössestem Belang den Umstand zur Klarheit zu erheben, dass die eine Eigenschaft, der Operation auch dort noch Success und Sinn geben kann, wo die andere diess nicht mehr im Stande ist. So kann zum Beispiel „die Dimension wie die Bewegung" nach vor- und rückwärts, nach rechts und links, nach oben und unten sich erstrecken, während „der Werth" kein Vor- und Rückwärts u. s. w.; „die Zeit" dagegen zwar schon nach gewöhnlichem Urtheile eine Art von Vor- und Rückwärts, allein kein Links und Rechts u. f. verträgt. Doch, kann dieses Vor- und Rückwärts, angewendet auf die Zeit nur ein Entlehntes sein — so zwar, dass, wenn es auch probabel scheint, sich dadurch über Vergangenheit und Zukunft auszusprechen, diess doch immer gegen die wahre Zeitnatur verstosst, da von der Gegenwart und von jedem andern Zeitpunct die Zeit nur in die Zukunft lauft und gelaufen ist, und wohl nie rückwärts laufen wird. So wie hier, spielt auch in andern Fällen eine ähnliche Art Uebertragung oder Entlehnung ihre Rolle, und so kommt es dahin, dass wie gesagt, die Rechnung im Bereich ihrer Application mit Gefahr umgeben ist, dem Missverständniss anheimzufallen. Daher die Unsicherheit und das Verworrene, in der Auslegung mancher Resultate, die der Calcül überhaupt gewährt, von dem man insbesondere nicht recht sagen könnte, ob er arithmetisch oder algebraisch war, z. B. indem die gesuchte Dichte imaginär hervorgekommen ist; — daher aber auch insbesondere das Vage in der Unterscheidung jener Demarcation, wo Arithmetik aufhört und Algebra beginnt. Und doch liegt daran, dass sie eine präcise sei. Diese Präcision nun beruht auf Folgendem: Der Unterschied kann wie gesagt, nur in dem Operationsgegenstande liegen, nicht in der Form der Operation. Die Arithmetik nun hat in ihrer Reinheit ein abstractes Object, die Zahl; in ihrer Application jedoch dehnt sie sich auf eine Reihe concreter Gegenstände aus, und zwar alle diejenigen, auf die sie mittelst der Zahl greifen kann. Die Algebra dagegen, die da nicht bloss absolute, sondern auch isolirte negative, ja auch sogenannte imaginäre Grössen zu ihrem Eigenthume zählt, steht eben darum auf einer anderen sächlichen Basis, und muss — so wahr diese Grössensorten auf keinem anderen Gebiete als dem des Subordinatsystemes ihre Heimat und genaue Erklärung finden, ihre innere Natur darin erkennen, dass auch ihr Gegenstand ein abstracter, und zwar mit jenem des Subordinatsystemes, also dem Raumort identisch ist, und dass, indem sie, um angewandt zu werden, auf concrete Gegenstände greift, diess nur kraft der Raumnatur geschieht. So sind Algebra und Arithmetik unterschieden. Jede hat in ihrer Reinheit ihr besonderes abstractes Operationsobject, und in ihrer Application gibt eben dieses Object die Beziehung an, in welcher die Application geschieht, indem aber beide einander im Gebiete der Anwendung begegnen (denn beide pflegen auf benannte Dinge angewandt zu werden), entsteht eben jener Zustand, wo man, der Unentschiedenheit der sächlichen Basis halber, nicht recht sagen könnte, ob die Operation arithmetisch oder algebraisch, und zwar ob ausschliessend oder auch nur mit Vorzug sei, es wird eben nur schlechthin operirt, ohne zu unterscheiden, ob es in der einen oder der andern Beziehung geschieht. Aber eben darum ist nicht hier, sondern nur bei der Reinheit der beiderseitigen abstracten Gegenstände der wahrhafte Unterschied zu finden, nämlich wie gesagt bei der Unterschiedenheit von Raum und Zahl. Und nun vollends die Zahl nach §. 1 zuletzt nur der Ausdruck einer Operation ist, also nur entlehnter Weise zum Operationsgegenstande wird, ohne diese Entlehnung aber nicht, so bleibt nur der Raumort als wirklicher abstracter Gegenstand aufrecht stehen, um den sich Algebra, neuere Geometrie und Subordinat-System wie um den Erisapfel streiten, und worüber ein vollgültiger Entscheid unumgänglich wird. Der sich einfach zu folgendem Resultate läutern will: Da nämlich die arithmetischen Rechnungen verglichen mit jenen der Algebra sich so verhalten wie die Eingeschränktheit auf eine blosse Linie zu den Bewegungen durch den gesammten unbegrenzten Raum, so dass in diesem auch jene begriffen sind; da ferner die geometrischen Systeme, so weit sie die Herrschaft über Bewegungen und Lagen für sich in Anspruch nahmen, das Vertrauen in diesen Beziehungen, wie die Geschichte nachgewiesen hat, zu rechtfertigen nicht im Stande sind; so ergibt sich nach dieser Einschränkung der Geometrie, und aus dem Umstande, dass in Beziehung auf die sächliche Basis zwischen Algebra und Subordinat-System voller Einklang herrscht, zum Resultate eine einzige Wissenschaft, nämlich Algebra durchweht vom Geiste des Subordinat-Systems, oder Algebra ausgestattet gerade mit jener Natur, deren Abgang ihr zum Vorwurf gemacht worden ist. So wird Algebra fürderhin mit vollem Selbstbewusstsein auch die Lage rechnen, und jeder andern Disciplin in diesem Geschäfte derogiren.

§. 21. Nunmehr ist also die innere Natur der Algebra, wie sie war und sein will, hinreichend erklärt. Da ihr Gegenstand, wie es eben hiess, in seiner Reinheit mit jenem des Subordinat-Systems identisch ist, so besteht, was die sächliche Basis betrifft, zwischen Algebra und Subordinat-System kein Unterschied. Und soweit die formale Seite des beiderseitigen Verfahrens dieselbe ist, kann auch auf der Formseite keine Verschiedenheit sein. Aus diesen Rücksichten sollte also das Subordinat-System mit der Algebra zusammen fallen. Allein dasselbe muss Anstand nehmen diess zu thun, und zwar der Resultate wegen, zu denen die sogenannte höhere Algebra vielfältig geführt, sowie des Lichtes wegen mit dem sie das Feld der Rechnungen bescheint, insbesondere aber der historischen Mängel wegen, deren im §. 16 u. f. Erwähnung geschah. Das Subordinat-System kann sich mit dem jetzigen Zustande der sogenannten höheren Algebra eben so wenig befreunden, als mit jenem der neueren Geometrie, es kann, in der Mitte zwischen beiden stehend, sich nur beschränken auf die Hoffnung, beide zu versöhnen, und die einzig mögliche Modalität ihrer Coalition darzubieten. Darum tritt es mit keiner anderen Hilfe als jener der einfachen Gesetze der Operation, seine Vermittlung an. Das nächste Ziel ist wie gesagt, die Aufdeckung der algebraischen Form der Lagefunction, auf die nunmehr auf der Basis des Subordinat-Systems ausgegangen wird.

Seien zu diesem Ende drei Grössen a, b und ε gegeben, von welchen mit Bedacht vorausgesetzt wird, dass sie sämmtlich „absolute" Grössen sind. Es ist diess eine Voraussetzung, die, soweit sie nur Werthe zulässt, die absolut sind oder Null, auch blosse Zahlen mit umschliesst, und demgemäss auf arithmetischen Boden den Fuss nicht minder setzen kann, wie auf das Gebiet der Algebra und des Subordinat-Systems. Was schon selbst sich wie ein Symptom von der fundamentalen Einheit der mehren Rechnungsdisciplinen darstellt, die überdiess durch das längst bekannte Factum, dass der Raumort sich der Operation und damit der Zahl so gern ins Schlepptau wirft, mächtig bejaht zu werden scheint. Sind nun a, b und ε sämmtlich auch ihrem Zahlwerthe nach von einander unterschieden, so fallen nothwendig auch die Potenzen a^ε und b^ε verschieden aus, jedoch nur so, dass bloss ihre absoluten Grössenwerthe differiren. Diese bloss quantitative Verschiedenheit (Differenz) kann aber der Voraussetzung gemäss nur zweifach sein, herrührend nämlich entweder von $a = b + \delta$, oder von $a = b - \delta$, das ist, dass a

entweder grösser oder kleiner erscheint als b; da ein dritter oder fernerer Fall auf dieser Voraussetzung nicht möglich ist.

Hat man nun, weil $a > b$, die Relation I. $a = b + \delta$, so werden wirklich a^ε und b^ε nicht gleich, und es muss diesemgemäss sein 1. $a^\varepsilon = b^\varepsilon + \Delta$.

Hat man dagegen, weil $a < b$, die Gleichung II. $a = b - \delta$, so werden auch jetzt a^ε und b^ε ungleich sein, und es wird sein müssen 2. $a^\varepsilon = b^\varepsilon - \Delta$, ohne in diesen Fällen vorauszusetzen, dass a, b, Δ, δ der ersten Alternativen mit den gleichnamigen Grössen der andern Alternativen identisch seien.

Zu Grunde gelegt also die einzige simple Relation $a \lessgtr b$, soll nunmehr die Frage sein, zu welchen Erscheinungen und Ergebnissen diese Verschiedenheiten, bezüglich des vorgesteckten Zieles führet? und soll deren Lösung nicht allein von dem arithmetischen Verhältniss in I. und II., sondern auch von dem geometrischen, sowohl aus diesen wie auch aus den noch übrigen Gleichungen 1. und 2. erwartet werden; aus den letzteren um so mehr, da wie früher erklärt worden, die Möglichkeit einer additiven Aenderung der Lage erst in Multiplications- oder Potenzfällen vorhanden ist, und es sich eben um die Erforschung der letzteren vorzugsweise handelt. Die Erforschung von $\frac{a}{b}$ wird zeigen, ob auf der zu Grunde gelegten Relation $a \lessgtr b$, die Möglichkeit zum Erscheinen verschiedener Lagen begründet werde oder nicht. Da wird demnach $\frac{a}{b}$, welches aus I. und II. sich in den Formen

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{\delta}{b}, \text{ und } \frac{a}{b} = 1 - \frac{\delta}{b}$$

ergibt, noch aus den Gleichungen 1. und 2. gesucht.

Zu diesem Ende aber ist erforderlich, die Grösse Δ, nicht durch willkürliche Setzung, sondern durch genaue Entwicklung in Functionform zu erhalten, da Δ offenbar eine abhängig-variable Grösse ist, und zwar abhängig von ε und δ und von b. Um diese Functionform zu erhalten, entwickelt man aus I. die Gleichung

$$\text{III.} \quad a^\varepsilon = [b + \delta]^\varepsilon = b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon \frac{\delta}{b} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2} b^\varepsilon \frac{\delta^2}{b^2} + \ldots =$$

$$= b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon \left[\frac{\delta}{b} + \frac{(\varepsilon-1)}{2} \frac{\delta^2}{b^2} + \frac{(\varepsilon-1)}{2} \cdot \frac{(\varepsilon-2)}{3} \frac{\delta^3}{b^3} + \ldots\right] = b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon \,.\, \varkappa$$

worin nur die Abkürzung

$$3.)\quad \frac{\delta}{b} + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^3} + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\cdot\frac{(\varepsilon-2)}{3}\frac{\delta^3}{b^3} + \dots = \varkappa$$

angewendet worden; und ebenso aus II. die Gleichung

$$\text{IV.}\ a^\varepsilon = [b-\delta]^\varepsilon = b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon \frac{\delta}{b} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2} b^\varepsilon \frac{\delta^2}{b^2} - \dots =$$

$$= b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon \left[\frac{\delta}{b} - \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2} + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\cdot\frac{(\varepsilon-2)}{3}\frac{\delta^3}{b^3} - \dots\right] = b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon \cdot k$$

worin gleichfalls nur zur Abkürzung

$$4.)\quad \frac{\delta}{b} - \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2} + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\cdot\frac{(\varepsilon-2)}{3}\frac{\delta^3}{b^3} - \dots = k$$

gesetzt worden, und es ergibt sich $+\Delta = \varepsilon b^\varepsilon . \varkappa$ sowie $-\Delta' = -\varepsilon b^\varepsilon . k$, welches die explicirten Formen der gesuchten Functionen Δ und Δ' sind. Indem $\varkappa$ und k im absoluten Zahlwerth, nach 3. und 4. verschieden sind, wird schon erkennbar, dass $+\Delta$ und $-\Delta'$ selbst in dem Fall nicht gleichen absoluten Zahlwerth haben, wo ε, b und δ in beiden dieselben sind; denn es ist die Verknüpfung zu $\varkappa$ eine andere als die zu k. Da nunmehr die Gleichungen III. und IV. mit jenen unter 1. und 2. zusammen fallen, so können unmittelbar die ersteren zur Entwicklung von $\frac{a}{b}$ verwendet werden.

Es folgt nämlich aus III. sofort die weitere

$$\text{V.}\qquad a = [b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon . \varkappa]^{\frac{1}{\varepsilon}} = b + \frac{1}{\varepsilon} b^{\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}-1)} . \varepsilon b^\varepsilon \varkappa +$$

$$+ \frac{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}{2} b^{\varepsilon(\frac{1}{\varepsilon}-2)} \varepsilon^2 b^{2\varepsilon} \varkappa^2 + \dots =$$

$$= b + b\varkappa + \frac{(1-\varepsilon)}{2} b\varkappa^2 + \frac{(1-\varepsilon)}{2}\cdot\frac{(1-2\varepsilon)}{3} b\varkappa^3 + \dots$$

woraus schon

$$5.)\quad \frac{a}{b} = 1 + \varkappa + \frac{(1-\varepsilon)}{2}\varkappa^2 + \frac{(1-\varepsilon)}{2}\cdot\frac{(1-2\varepsilon)}{3}\varkappa^3 + \dots$$

sich ergibt.

Ebenso folgt aus der Gleichung IV. die weitere

$$\text{VI.} \qquad a = (b^{\varepsilon} - \varepsilon b^{\varepsilon} k)^{\frac{1}{\varepsilon}} = b - \frac{1}{\varepsilon} b^{\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)} . \varepsilon b^{\varepsilon} k +$$

$$+ \frac{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}{2} b^{\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}-2\right)} . \varepsilon^2 b^{2\varepsilon} k^2 - \ldots = b - b\,k + \frac{(1-\varepsilon)}{2} b\,k^2 - \ldots$$

woraus man wieder wie eben zuvor

$$6.) \quad \frac{a'}{b} = 1 - k + \frac{1-\varepsilon}{2} k^2 - \frac{(1-\varepsilon)}{2} . \frac{(1-2\varepsilon)}{3} k^3 + \ldots$$

erhält.

§. 22. Entwicklungen, wie die vorstehenden sind, namentlich wenn sie als Identitäts-Gleichungen zwischen den ersten Gliedern a^{ε} oder a und den daraus folgenden Reihen behauptet werden, pflegt man nur bedingte Gültigkeit zuzugestehen, weil man glaubt Umstände angeben zu können, welche ungeachtet mancher Beweise für die Identität, diese letztere doch nicht immer denkbar machen. Ich habe nicht vor, die Allgemeingültigkeit dieser Entwicklungen insbesondere zu beweisen, weil wie gesagt, Beweise dafür vorhanden sind, z. B. von Crelle im Journal Tom. IV. 1829 u. a.; allein nicht unerwähnt kann ich die Gründe lassen, wegen welcher die Identität nicht unbedingt, sondern nur unter Bedingungen zugelassen wird. Entscheidend sind hier vorerst die Eigenschaften derjenigen Reihen, die man divergente nennt, und mit deren Begriffe man auch das Merkmal verknüpft, dass hier keine Summe denkbar sei. Ich glaube diesem nur die folgende einfache Bemerkung hinzufügen zu sollen. Wo eine Reihe durch Rechnung entwickelt wird, da ist jedes summande Glied der Reihe ein Resultat bestimmter Operationen, vollzogen an einem bestimmten Object; so dass jedes andere und andere Glied durch andere oder mehrfach vollzogene Operationen zu Stande kommt. Geschieht nun die Vollziehung der Operation an Grössen, die auch anders sollen als bloss absolut oder Null sein können, oder — weil man die Natur des Resultates nicht immer im Vorhinein erschöpfend anzugeben bezielen wird — die mindestens fähig sind, auch anders als absolut zu sein, das heisst die der Algebra oder dem Subordinat-System angehören, so wird viel abhängen davon, welche Operationen sich in den successiven Reihengliedern wiederholen.

Denn von der Multiplication oder Potenzirung ist nunmehr bekannt, dass dieselbe die Lage additiv zu verändern berufen sei. Je höher daher die Potenzen einer selbst absoluten Grösse, z. B. x, deren Lage als $f(o)$ bezeichnet worden, sich erheben, desto mehr erscheint auch die Lage, die von keiner Grösse hinweggedacht werden kann, im Verhältniss der Summanden zur Summe angestrengt, und die späteren Potenzen haben dann den vollständigen Ausdruck $= x^m f(m.o.)$. Ist nun hierin m sehr gross, mithin $m.o = \alpha$ irgend unbestimmt, so erscheint die Lage der spätesten Potenzen von x unter der vollständigen Form $= x^m f(\alpha)$ vollends unbestimmt, also erscheinen derlei Reihen mit einem Merkmal behaftet, welches an ihnen nicht minder wie der Zahlwerth Berücksichtigung verdient. Dasselbe muss insbesondere die Folge haben, dass die spätesten Glieder anstatt das Gesetz der Entwicklung dem Vorwurf preis zu geben, dass es geeignet sei auch Undenkbares zu erzeugen, vielmehr sich selbst in gewissem Umfange gegenseitig destruiren, auch selbst dann, wenn sie gar nicht insensibel sind, also auch wann die Reihen divergiren; so dass demgemäss, wann einmal die Lage vollständig zu ihrem Recht gelangt, sie nicht umhin mehr kann, dem Monopol von *plus* und *minus* zu derogiren. Dieser Umstand scheint die Vereinbarkeit einer Summe selbst mit einer divergenten Reihe wenigstens *quoad existentiam* zu vertheidigen, indem der Grenzenlosigkeit der Summe die Unvermeidlichkeit der erforderlichen Einbusse sich entgegenstellt; und wenn auch *quoad modum* für den Gang von der Reihe zur Summe noch wenig gewonnen ist, so scheint doch jenen Zweifeln, die da bei dem Gange von der Summe zur Reihe, die Identität oder die Gleichung zwischen Summe und Reihe nicht wollen gelten lassen, etwas von ihrem Boden genommen zu sein.

Andere Gründe gegen obige Entwicklungen werden auf längeren und verborgeneren Wegen aufgefunden; wovon um nur ein Beispiel hier vor Augen zu legen, schon ein Stück Geschichte zu wiederholen nöthig wird. Ich erinnere an die zuerst von Euler aufgestellte Gleichung:

$$(2\cos x^m) = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots$$

deren Allgemeingültigkeit, wie man weiss, nicht nur von Euler selbst, sondern nach ihm auch von Lagrange und Lacroix behauptet, nichtsdestoweniger aber die specielle Ungiltigkeit derselben von Poisson ganz einfach mittelst der Einsetzung von $\begin{cases} x=\pi \\ m=\frac{1}{3} \end{cases}$ exact vor Augen gelegt worden ist. Die Thatsache dieser partiellen Ungiltigkeit, gleichviel ob Täuschung oder Enttäuschung, schien aufzufallen, denn es wurden ihr eine Reihe von Aufklärungsversuchen zu Theil. Fragt man aber, wohin dieselben geführt, so kann die Geschichte nur zeigen, dass nach zwei Abhandlungen Crelle's (*Annales de Mathématiques T. XIII* und *Journ. T. V.*), zweien Poisson's vom September und December 1825 (im *Bulletin des sciences math.*), überdiess den Arbeiten von L. Olivier (Crelle's *Journ. I.*), Abel (Crelle's *Journ. I.*), Plana (*Ann. de Math. T. XI.*), von Poinsot und Cauchy — zuletzt im J. 1836 Grunert nicht nur auf sie und ihre Resultate, sondern zum Ueberfluss auch auf die Allgemeingiltigkeit des Binomialtheorems kopfschüttelnd hinübersah (S. Grunert's Encyklop. Art. Binomischer Satz, und Goniometrie), und so weit jetzt weder dem Euler'schen Räthsel geholfen ist, noch selbst das Binomialtheorem, falls es hiervon abzuhängen hätte, aufrecht steht. Man sieht, dass diess ein sehr abgeleiteter Zweifel auch mit gegen die obigen Entwicklungen ist, der aber, wenn er einer reif gewordenen Ernte verglichen werden möchte, eher gegen den gesäeten Keim als gegen das Entwicklungsgesetz gewendet werden kann. Es hat vielleicht weniger auf sich, zu erwähnen, ob und welche ähnliche Quellen von Bedenken ausserdem vorhanden sind, als die Frage zu haben scheint, ob darin nicht eine verfängliche Versuchung liegt, die den Verstand dergestalt umspinnt, dass er, wenn möglich selbst an den Gesetzen, als Formen, des Calcüls irre werden, und demgemäss die nicht mehr als bloss probable Eigenschaft der Con- und Divergenz sich über das Gesetz erheben möchte, um ihm nur manchmal das Recht der Giltigkeit zu lassen. Doch um direct die Natur der hier zusammentreffenden Dinge zu berühren, mag folgende Bemerkung dienen. Die Form einer Sache kann in keinem Falle mit dem gegenständlichen Gehalt davon identisch sein. Trennt man die Gesetzesform, als Verfahren, scharf und genau von dem ihr unterworfenen Object, und hält, der Unterschiedenheit im innern Wesen wegen, beide streng und beharrlich aus einander, so wird bezüglich der Successe dem Gesetz ein anderes Urtheil werden müssen, als dem vorausgesetzten Object. Nicht dem Gesetze gehört das zeitweise Nichtdürfen oder die Bedingtheit an, sondern dem gewählten oder gegebenen Object. Diess Object aber ist nicht allein verschieden dem blossen Zahlwerth nach, sondern es liegt daran, auch die qualitativen Verschiedenheiten, und diese vielleicht mehr als jene der Beachtung werth zu finden. Das Gesetz kann nicht umhin, sich unabänderlich in allen Fällen gleich zu bleiben, selbst wenn's zu sehr mannigfachen Resultaten führt; — das Object dagegen, obwohl im Gebiet der Algebra zuvörderst als Raumort immerhin abstract, ist nicht in allen Fällen gleich; denn es kann nicht nur als abgeleitet wie z. B. $\cos x$ und $\sin x$ u. s. f., sondern selbst als ursprünglich, z. B. a, b, ε als absolut gehaltene Grössen, voraussetzungsweise mit einer verschiedenen, möglicher Weise selbst correlativen Natur begabt erscheinen (was nicht gleichbedeutend ist damit, ob eine Grösse Function ist oder nicht; da diese Unterscheidung nicht bedenkt, dass zwei fundamentale Grössen wie a und θ, nach §§. 3 und 11 können wesentlich coëxistiren müssen), — und diese Natur ist's, die durch ihr Nichthervortreten, da sie doch Maass zu geben hätte, zu wahren Resultaten so gut wie zu falschen führt, je nach der Vollständigkeit der Application des Gesetzes auf die bestimmten Raumeigenschaften des Objectes, so wie nach der Ausdehnung des Bodens, der kraft der vorausgesetzten Natur des Objectes nur in Grenzen disponibel ist, ja auch sogar selbst eine Unmöglichkeit sein kann . . . Weil ich nun auf dieser Seite der Natur der Sache bald Fälle aufzuzeigen hoffe, an denen ersichtlich wird, worin sächlicherseits bei der Anwendung des Entwicklungsgesetzes Missverständnisse unterlaufen waren, glaube ich dem Gesetz den Vorwurf der Schuld an jenen Paralogismen ersparen zu können, die durch eine die Natur der Voraussetzung überschreitende oder verfehlende Anwendung davon, und nur durch sie erklärbar sind. Und in Uebereinstimmung hiermit scheint es mir nunmehr, über Erinnerung an den axiomatischen Werth des Gesetzes, so wie an die Nothwendigkeit der allzeitigen Berücksichtigung der Lage, und wie nicht minder an die Möglichkeit einer gegenständlichen, mehr oder minder ausgedehnten Boden gewährenden Verschiedenheit der jeweilig benützten Rechnungsbasis, in der auch sogar ein Widerspruch liegen kann, — nicht weiter für den Zweck erforderlich, in eine Erörterung der Beweise für die Giltigkeit der oben entwickelten Gleichungen hier näher einzugehen, weil, soweit sie die Gesetzmässigkeit der Entwicklungen betreffen, gegen sie kein Bedenken sich zu wenden scheint.

§. 23. Indem nun diese Entwicklungen sich unter diesen Rücksichten für alle absoluten Werthe von a und b, und insbesondere auch für jeden absoluten Werth von ε behaupten müssen, gelten dieselben auch dann, wann ε sehr kleine absolute Werthe annimmt, selbst wann's verschwindend wird. Man kann nun insbesondere unter den sehr kleinen Werthen solche wählen, deren Zähler die Einheit ist und der Nenner eine ganze Zahl, also $\varepsilon = \frac{1}{m}$, worin m ist eine ganze Zahl. Folglich auch $\frac{1}{\varepsilon} = m$ eine ganze Zahl. Hierdurch werden die Entwicklungen V. und VI. des Umstandes theilhaft, dass sie einen ganzen Exponenten haben, wodurch sie unter die für ohnehin evident gehaltenen und nicht bezweifelbaren fallen; während die beiden übrigen nämlich III. und IV. sich, ausser dafür vorhandenen Beweisen auch durch die, rücksichtlich der *in infinitum* fortlaufenden Potenzen gemachte Bemerkung vertheidigen können. Dieselben bleiben daher, wenn überhaupt, so insbesondere auch aufrecht für $\varepsilon = \frac{1}{\infty} =$ werdende Null. In diesem Falle aber verwandeln sich die 3., 4., 5., 6. in die folgenden:

$$3') \quad \varkappa = \frac{\delta}{b} - \frac{1}{2}\,\frac{\delta^2}{b^2} + \frac{1}{3}\,\frac{\delta^3}{b^3} - \frac{1}{4}\,\frac{\delta^4}{b^4} + \ldots,$$

und $$4') \quad k = \frac{\delta}{b} + \frac{1}{2}\,\frac{\delta^2}{b^2} + \frac{1}{3}\,\frac{\delta^3}{b^3} + \frac{1}{4}\,\frac{\delta^4}{b^4} + \ldots;$$

sowie $$5') \quad \frac{a}{b} = 1 + \varkappa + \frac{\varkappa^2}{2} + \frac{\varkappa^3}{2.3} + \ldots,$$

und $$6') \quad \frac{a'}{b} = 1 - k + \frac{k^2}{2} - \frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

Diese Gleichungen stehen aber in einem eben so bekannten als wichtigen Zusammenhange, welcher auf folgendem Wege am füglichsten ersichtlich wird. Setzt man in 5'. die unbestimmte Grösse $\varkappa$ auf den individuellen absoluten Werth $\varkappa = 1$, so erhält man dadurch

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = e; \quad \text{mithin} \quad a = b.e$$

und überzeugt sich so, dass wenn man oben in V. gleichfalls $\varkappa = 1$ sein lässt, auch das dortige a hierdurch übergeht in $a = b.e$. Dieser Umstand aber macht es möglich, die Grösse $\varkappa$ durch Setzung $\varkappa = 1$ aus der Gleichung V zu dem Ende zu entfernen, um dieselbe auf einem andern Weg nämlich als Exponenten wieder auf ihren Platz in derselben Reihe eintreten zu machen, und zwar mit dem Erfolge, dass sie alsdann als Exponent von $a = b.e$ erscheint. Nimmt man auf diese Art $\varkappa$ wirklich weg, und bringt's darauf als Exponenten wieder ein, so gelangt man zu der Form

$$\text{VII.} \quad a^{\varkappa} = (b.e)^{\varkappa} = (b^{\varepsilon} + \varepsilon b^{\varepsilon})^{\frac{\varkappa}{\varepsilon}} = b^{\varkappa} + b^{\varkappa}\varkappa + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2} b^{\varkappa} + \ldots$$

$$= b^{\varkappa}\left(1 + \varkappa + \frac{\varkappa(\varkappa-\varepsilon)}{2} + \frac{\varkappa(\varkappa-\varepsilon)}{2} \cdot \frac{(\varkappa-2\varepsilon)}{3} + \ldots\right);$$

mithin, indem beiderseits $b^{\varkappa}$ hinwegdividirt, und zugleich $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ eingesetzt wird, zu der einfacheren 7. $e^{\varkappa} = 1 + \varkappa + \frac{\varkappa^2}{2} + \frac{\varkappa^3}{1.4} + \ldots$ worin die Reihe als das rechtsstehende Glied offenbar identisch ist mit jener unter 5'.

Auf gleiche Art gelangt man, indem in derselben Gleichung V. nach der Einsetzung von $k = 1$, nun wieder die Grösse $-k$ als Exponent aufgenommen und die Giltigkeit der Entwicklung auch für diesen Exponenten zu Grunde gelegt wird, zu der Form

$$\text{VIII.} \quad a^{-k} = (b^{\varepsilon} + \varepsilon b^{\varepsilon})^{-\frac{k}{\varepsilon}} = b^{-k} - kb^{-k} + \frac{k(k+\varepsilon)}{2} b^{-k} -$$

$$\frac{k(k+\varepsilon)}{2} \cdot \frac{(K+2\varepsilon)}{3} b^{-k} + \ldots = b^{-k}\left(1 - k + \frac{k(k+\varepsilon)}{2} - \ldots\right),$$

woraus wieder für den Fall $\varepsilon = \frac{1}{\infty} = 0$, und $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = e^{-k}$, die einfachere folgt

$$8.) \qquad e^{-k} = 1 - k + \frac{k^2}{2} - \frac{k^3}{2.3} + \ldots,$$

deren Identität mit der Reihe 6'. gleichfalls in die Augen fällt. Es ist hierbei wohl zu beachten, dass nur in der Gleichung V. bloss vorübergehend und zu dem erwähnten Zweck $\varkappa = 1$ gesetzt und hierdurch $a = b.e$ erhalten worden; dass daher überall, wo die Bedingung $\varkappa = 1$ nicht gesetzt ist oder man sie nicht gesetzt wissen will, auch die Grösse a nicht den Werth $= b.e$ haben kann, sondern a den frühern allgemeinen, dem Zahlwerth nach unbestimmt bleibenden Werth behält. So insbesondere in den Gleichungen 5'. und 6'., worin namentlich die Grössen $\varkappa$ und $-k$ dieselben sind wie in 7. und 8.; so dass die Reihen dort und hier vollkommen dieselben sind. Nun können die in den Gleichungen 7. und 8. rechts befindlichen Reihen allgemeingiltig, das ist, zwar für alle abhängig von den Grundrelationen I und II hervorgehendem Werthe von $\varkappa$ und k, aber auch nur für diese, durch $e^{\varkappa}$ und e^{-k} ersetzt werden. Macht man hiervon Gebrauch, und ersetzt die beziehungsweise entsprechenden Reihen in 5.' und 6.' auf diese Art, so erhält man

$$9. \qquad \frac{a}{b} = e^{\varkappa} \quad \text{und} \quad 10. \quad \frac{a'}{b} = e^{-k}.$$

Diess ist das aufgesuchte Verhältniss zwischen a und b, wie es aus den Gleichungen 1. und 2. sich ergibt. Dieses Verhältniss war aus 1. und 2. nur dadurch zu erhalten, dass die Grösse ε, nachdem sie im Exponenten bloss dazu benützt worden, um die successiven den einzelnen summanden Bestandtheilen der Reihen gesetzmässig zukommenden Raumorte so zu markiren, wie sie dem Organismus der Summe a^{ε} oder a gemäss aufeinander folgen müssen; durch Depression auf $\varkappa =$ Null entfernt worden ist, ohne die einmal markirten Raumorte mehr aufzugeben. Dadurch nun, dass ε durch Setzung $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ entfernt wurde, erscheint diese Entwicklung von $\frac{a}{b}$ derjenigen angenähert, die aus I und II sich einfach ergeben hat, worin ε gleichfalls nicht erscheint, sondern $\frac{a}{b}$ nur abhängig von δ und von b bestimmt wird. Es erscheint demnach beiderseits dasselbe Resultat, abhängig von denselben Elementen. Setzt man demnach in 9. und 10. die ursprünglichen Werthe für a aus I. und II. beziehungsweise ein, so folgt: $1 + \frac{\delta}{b} = e^{\varkappa}$ und $1 - \frac{\delta}{b} = e^{-k}$. Mithin mit Berücksichtigung von 3. und 4., wie auch der auf die

Grösse e gegründeten Potenzen, als welche einem Logarithmensystem angehören, offenbar

$$11.)\quad \varkappa = log\left(1+\frac{\delta}{b}\right) = \frac{\delta}{b} - \frac{1}{2}\,\frac{\delta^2}{b^2} + \frac{1}{3}\,\frac{\delta^3}{b^3} + \frac{1}{4}\,\frac{\delta^4}{b^4} + \ldots,$$

und $$12.)\quad -k\,log\left(1-\frac{\delta}{b}\right) = -\left(\frac{\delta}{b} + \frac{1}{2}\,\frac{\delta^2}{b^2} + \frac{1}{3}\,\frac{\delta^3}{b^3} + \ldots\right).$$

Es geht also als Ergebniss aus dem Bisherigen nicht nur die Zusammensetzung der Grössen $\varkappa$ und $-k$ (Gl. 3. und 4.), sondern es geht auch aus den Gleichungen 7. bis 12. deren logarithmische Natur, das ist die Eigenschaft, den absoluten Zahlwerth einer Grösse, und nur ihn allein, exponentiell zu afficiren, bestimmt hervor. Man hat sonach den Schluss, dass der absolute Zahlwerth einer Grösse sowohl durch einen positiven als auch durch einen negativen Logarithmus beeinflusst werden kann; wornach sich bisher wohl schon positive und negative Logarithmen, aber noch keine weiteren, als Thatsachen aufzählen lassen.

§. 24. Diese Erfahrung jedoch, verbunden mit einer früheren, nach welcher die Möglichkeit der additiven Aenderung der Lage mit der Multiplication, somit auch mit dem speciellen Falle davon, das ist dem der Potenz, wohin auch die logarithmischen Systeme fallen, wesentlich zusammenhängt, regt eine weitere Erörterung an. Gelten die unter 7. und 8. dargestellten Gleichungen wohl auch dann, wann für die variablen Exponenten $\varkappa$ und $-k$ sogenannte imaginäre Grössen gesetzt werden, oder sind sie alsdann nicht mehr wahr? Indem nur das Eine oder das Andere gelten kann, so wird hier der Verstand abermals einen Scheideweg gewahr, und zwar seiner Besonderheit wegen einen solchen, wo es von Belang zu sein scheint, sich für die eine oder die andere der Alternativen zu entscheiden. Die Wissenschaft hat diesen Schritt wie es scheint nach Rücksichten der Probabilität oder einer Art von Wagniss gleich gethan, und die Alternative der Giltigkeit angenommen; allein ich kann nicht umhin bei dieser wichtigen Frage die Bemerkung hinzuzufügen, dass sich an sie und die Umstände ihrer Erörterung eine Reihe anderer problematischen Gegenstände knüpfen, die weil sie die Beleuchtung der realen Seite der Wissenschaft, insbesondere die Handhabung der Lage durch die Algebra weder gar nicht noch vollständig in Vollzug treten lassen, mit Umsicht geläutert, aufgeklärt oder hinweggeräumt werden müssen, auf dass der Weg hindurch ein sicherer sei, und die Algebra mit einer Strecke ihres Gebiets aus dem Zwielicht kommt. Zu mitleidenden Gegenständen solcher Art gehören: ob auch noch andere als positive und negative Logarithmen existiren; ob es mit Grund angeht, den Einfluss der Logarithmen auf absolute Grössenwerthe einzuschränken; in welchem Bewandtniss die nicht-absoluten Grössen zu dem Logarithmenwesen stehen, insbesondere welcher Fall zwischen $e^{\varkappa}$ und e^{-k} in der Mitte liegt u. f. — bei deren allmäliger Auflösung ich dahin zu gelangen hoffe, dass die Rhapsodien, unter welchen die Natur der Lage schon bisher die Rechnungen durchkreuzet hat, dem Verständniss näher rücken. Eingehend nun auf die Erörterung, muss ich zuvörderst hervorheben, wie dass geradezu hier, nämlich bei der Ausdehnung der Giltigkeit von 7. und 8. auch auf imaginäre $\varkappa$ und $-k$ einer jener Fälle im Wege liegt, wo ein vollkommen richtiges und wahres Resultat wie jede der Gleichungen 7. oder 8. es ist, durch eine unzulässige Verwendung davon in einen Paralogismus verwandelt wird, wodurch man bei aller Consequenz dennoch zu Irrthümern zwar nicht der Form, die da ihre Richtigkeit immerhin muthvoll behaupten kann, wohl aber dem Gehalte nach gelangt. Es wird vonnöthen sein, diesen Fall sowohl negativ oder indirect nach jener Richtung zu beleuchten wo die Fehlerquelle liegt, als auch in affirmativer Hinsicht oder direct zu zeigen, was die genuine wahre Natur des Falles ist, die da es klar zu machen im Stande wäre, ob eine imaginäre Grösse sich überhaupt zum Logarithmus eignet. Für den ersten Zweck, nämlich den der indirecten Erklärung muss die gleich Anfangs §. 21 mit Bedacht gemachte Voraussetzung in Erinnerung gebracht werden, als welcher gemäss Alles was bisher entwickelt worden, auf der Alles massgebend durchdringenden Basis ruht: dass a, b, ε sämmtlich und einzeln keine andern als nur absolute Grössen sind; auf welcher sächlichen Basis wie dort schon hervorgehoben worden, wohl bestimmt die zwei Fälle, dass nämlich entweder $a > b$ oder $a < b$ sei, aber auch eben nur diese beiden existiren. Beweis dessen ist die Unmöglichkeit, einen dritten Fall von Unterschiedenheit absoluter das ist in dieselbe ursprüngliche Linie fallender Grössen zu begreifen, zwischen welchen eine Divergenz auftreten muss, wenn eine fernere Unterschiedenheit angebbar werden soll. Bei ausgeschlossener Divergenz existirt demnach evident kein dritter oder fernerer Fall, und dieses wird hinreichender Grund sein, zu erklären, es könne auch durch einen solchen kein Resultat vermittelt werden. (Vergl. §. 1.)

Wird nun dennoch ein Resultat, das eines dritten oder ferneren Falles zu seiner Grundlage bedarf, mit der Behauptung seiner Giltigkeit aufgestellt, wie durch Ausdehnung der Gleichungen 7. und 8. auch auf imaginäre $\varkappa$ und $-k$ wirklich geschieht, so muss darüber bemerkt werden, dass dasselbe zu seiner sächlichen Basis etwas Nichtexistirendes, ja etwas Solches hat, dem die zu Grunde liegende Voraussetzung unmöglich macht zu existiren, und dass wenn es im Widerspruch mit der Voraussetzung dennoch — um obige Ausdehnung nicht vereitelt zu sehen, zu existiren geheissen wird, nur als ein Absurdum da stehen kann. Ein sächlich so begründetes Resultat wird, so wie es hohl und ohne gegenständlichen Gehalt erscheint, Niemand als der darunter offene Abgrund halten können. Diese Bemerkung, deren Zweck war zu zeigen, wie durch Ausdehnung der Gleichungen 7. und 8. auch auf imaginäre $\varkappa$ und $-k$, ein Ueberschreiten der für die Entstehung dieser Gleichungen disponibel gewesenen sächlichen Basis begangen wird, scheint mir zu genügen, um auf Grund derselben die Giltigkeit der erwähnten Gleichungen auch für imaginäre $\varkappa$ und $-k$ mindestens in Zweifel zu ziehen, und der Behauptung davon so lange entgegen zu stehen, bis nicht ein eigener Beweis dafür oder dagegen den diesfälligen Zweifel hebt. Und von da an tritt die Frage in ihr zweites Stadium, wo es darum sich handeln wird, direct zu zeigen, worin die wahre Natur der Sache liegt, die den Zweifel hebt.

§. 25. Es ist nicht gleichgiltig, wie man zu Werke geht, um dieses Ziel mit sicherem Bewusstsein zu erreichen, gleichwie dem der durch eine Gegend kommen will, ohne simultan überall hin oder beliebig wohin die Fusssohle zu setzen, es daran liegen wird, welche individuellen Schritte, und in welcher

Richtung hin er thut. Der Zusammenhang nun erheischt, in dem Falle, wo die Gleichungen 7. und 8. auch für imaginäre $\varkappa$ giltig wären, diese imaginären $\varkappa$ fortan für Logarithmen, und nur für solche zu erkennen; denn wären sie es nicht, könnten sie sofort nicht weiter als Exponenten von e fungiren, womit dann auch schon die besagten Gleichungen gerade um jenes Bindemittel oder jenen Nerv gebracht wären, wodurch eben deren Wahrheit und Geltung erklärlich wird, da im Gliede links nur ein Logarithmus erscheinen kann. Das Ziel der directen Erklärung wird demnach sein, zu zeigen, ob in der Reihe $N = 1 + \mathfrak{K}\sqrt{-1} + \frac{(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^2}{2} + \frac{(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^3}{2.3} + \frac{(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^4}{2.3.4} +$ u. s. f.; die Grösse $\mathfrak{K}$ eine logarithmische Natur besitzt, das ist ob sie den absoluten Zahlwerth irgend einer Grösse exponentiell beherrschen kann, oder ob sich das Gegentheil bewährt. Ergäbe sich Letzteres, so wäre die Algebra auf diejenige der beiden oben erwähnten Alternativen angewiesen, die bisher die nichtbetretene war, und wo es vor Allem Bedürfniss ist, bestimmt und von Grund aus zu erkennen, was sonst für eine besondere Natur, der Grösse k innewohnt, wenn dieselbe schon kein Logarithmus ist.

Die Algebra sähe dann mit einem Mal, und mit ihr wohl überhaupt der Calcül ein noch nicht cultivirtes Gebiet vor sich... Das Vehikel dieser Untersuchung wird hier abermals das Festhalten an solchen Operationsgesetzen sein, die allgemein bekannt und bewiesen sind. Rücksichtich der sächlichen Basis aber muss einer Neuerung Raum gegeben werden. Weil nämlich die frühere Voraussetzung der absoluten Form von a, b, ε, den Fall einer imaginären Grösse an der Stelle von $\varkappa$ nicht mehr umschloss, so kommt es nunmehr darauf an, die Grundvoraussetzung so zu stellen, dass auch dieser Fall noch Boden gewinnt. Die neue Grundvoraussetzung wird demnach nicht weiter absolute a, b, ε postuliren können, sondern soviel zu Grunde legen müssen, als eben nothwendige Bedingung ist, die Reihe N entstehen, und ihre Entstehung durch Einsicht in die Umstände davon evident zu machen. Die Art, diess zu erzielen, wird einfach sein. Es lag nämlich in der bisherigen Voraussetzung der absoluten a, b, ε nach dem Geiste des Subordinat-Systems die Forderung, dass keine dieser Grössen die absolute Lage dieses Systemes, das ist nach §. 4 die Lage der Linie A verlassen soll. Es waren diesem nach nicht nur ε, sondern waren auch b und auch $a = b \pm \delta$ auf diese Linie eingeschränkt, womit dann auch nothwendig alle Divergenz, namentlich zwischen a und b ausgeschlossen war, da insbesondere im Falle $a = b - \delta$, die Grösse a als absoluter Rest nur dasjenige ist, was nach Abzug des δ vom b übrig bleibt, wesshalb dort natürlich $\delta < b$ oder $\frac{\delta}{b} < 1$ sein muss. Und eben so haben auch die vorgekommenen Entwicklungen nur in dieser Linie gespielt. Eine Abänderung der sächlichen Basis hiervon kann demnach nur im Austritt aus dieser Linie liegen. Es käme nunmehr bloss auf die zweckmässige Art und Weise desselben an. Eine sehr einfache Art und Weise ist bereits durch die frühere Art der Voraussetzung angezeigt; es musste nämlich dort der Fall $a > b$ durch $a = b + \delta$, also ein positives δ, dagegen der Fall $a < b$ durch $a = b - \delta$ also durch ein negatives δ bezeichnet werden. Da also δ schon in zwei Lagen aufgetreten war, wird dasselbe mit Vorzug geeignet sein, in noch einer dritten und vierten Lage, als $+\delta\sqrt{-1}$ und $-\delta\sqrt{-1}$ zu erscheinen. Es liegt also zu allernächst, gerade dieses als stetig nächsten Schritt zu setzen, und im Uebrigen die Grössen b und ε fortan noch absolut zu lassen. Die neue Grundvoraussetzung soll demnach sein: „b und ε seien fortan absolut, und nur a trete in der Gestalt IX. $a = b \pm \delta\sqrt{-1}$ auf.“ Indem diess zu Grunde gelegt wird, kann kein Zweifel sein, worauf die nachfolgenden Entwicklungen sich fussen.

Sucht man aus dieser letzten Gleichung wieder wie vor die Form von Δ, so geht zunächst bei Anwendung von $\delta\sqrt{-1}$ die Form

$$\text{X. } a^\varepsilon = (b + \delta\sqrt{-1})^\varepsilon = b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon . \frac{\delta}{b}\sqrt{-1} - \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2} b^\varepsilon . \frac{\delta^2}{b^2} -$$

$$- \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2 . 3} b^\varepsilon . \frac{\delta^3}{b^3}\sqrt{-1} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)(\varepsilon-3)}{2 . 3 . 4} b^\varepsilon . \frac{\delta^4}{b^4} +$$

u. s. f.

$$= b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon \left\{ - \left(\frac{(\varepsilon-1)}{2} \frac{\delta^2}{b^2} - \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)(\varepsilon-3)}{2 . 3 . 4} \frac{\delta^4}{b^4} + \ldots \right) + \sqrt{-1} \left(\frac{\delta}{b} - \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2 . 3} \frac{\delta^3}{b^3} + \ldots \right) \right\},$$

bei Anwendung von $-\delta\sqrt{-1}$ dagegen die Form

$$\text{XI.}\quad a^\varepsilon = (b-\delta\sqrt{-1})^\varepsilon = b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon . \frac{\delta}{b}\sqrt{-1} - \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2} b^\varepsilon . \frac{\delta^2}{b^2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3} b^\varepsilon . \frac{\delta^3}{b^3}\sqrt{-1} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)(\varepsilon-3)}{2\,.\,3\,.\,4} b^\varepsilon . \frac{\delta^4}{b^4} - \text{u. s. f.}$$

$$= b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon \left\{ - \left(\frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2} - \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)(\varepsilon-3)}{2\,.\,3\,.\,4}\frac{\delta^4}{b^4} + \ldots \right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\delta}{b} - \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3}\frac{\delta^3}{b^3} + \ldots \right) \right\}$$

hervor. Und wenn man der Abkürzung wegen setzt

$$13)\quad \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2} - \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)(\varepsilon-3)}{2\,.\,3\,.\,4}\frac{\delta^4}{b^4} + \text{u. s. f.} = \varkappa',$$

sowie 14)

$$\frac{\delta}{b} - \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3}\frac{\delta^3}{b^3} + \text{u. s. f.} = \mathfrak{K},$$

so hat man den vorstehenden Entwicklungen gemäss die Gleichungen

$$\text{XII.}\quad a^\varepsilon = b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon(\varkappa' - \mathfrak{K}\sqrt{-1}, \quad \text{und} \quad a^\varepsilon = b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon(\varkappa' - \mathfrak{K}\sqrt{-1}),$$

aus welchen sich schon die verlangten explicirten Functionsformen für Δ angeben lassen, nämlich

$$\Delta = -\varepsilon b^\varepsilon(\varkappa' - \mathfrak{K}\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad \Delta' = \varepsilon b^\varepsilon(\varkappa' - \mathfrak{K}\sqrt{-1}).$$

Dieselben bieten schon von aussen her die Besonderheit dar, dass sie zum Unterschiede gegen früher nicht nur zweitheilig erscheinen, sondern nunmehr bloss im Vorzeichen von einander unterschieden sind.

Die Bedingung, unter welcher allein die fragliche Reihe N auf der vorausgesetzten Basis entstehen kann, wird nunmehr schon erkennbar; es muss nämlich, damit an der Stelle der vorigen Logarithmen $\varkappa$ und $-\mathfrak{K}$ die Grösse $\mathfrak{K}\sqrt{-1}$ erscheinen kann, die andere Grösse $\varkappa'$ nothwendig verschwinden. Die Reihe N entsteht demnach unter zwei Bedingungen, nämlich 1. wenn die in IX dargestellte Voraussetzung zu Grunde gelegt, und 2. wenn auf dieser Basis die Grösse $\varkappa' =$ Null gesetzt wird.

Fügt man demgemäss zu der ersteren, die schon zu Grunde liegt, auch die andere in XII hinzu, wodurch man nur mehr

$$\text{XII}'.\quad a^\varepsilon = b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon . \mathfrak{K}\sqrt{-1} \text{ und } a^\varepsilon = b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon . \mathfrak{K}\sqrt{-1}$$

behält, so gelangt man zu folgenden, aus XII′ sich ergebenden Entwicklungen:

$$\text{XIII.}\quad a = (b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon . \mathfrak{K}\sqrt{-1})^{\frac{1}{\varepsilon}} = b + b\,\mathfrak{K}\sqrt{-1} + \frac{(1-\varepsilon)}{2} b(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^2 + $$

$$+ \frac{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}{2.3} b(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^3 + \text{u. s. f.};$$

und

$$\text{XIV.}\quad a = (b^\varepsilon - \varepsilon b^\varepsilon . \mathfrak{K}\sqrt{-1})^{\frac{1}{\varepsilon}} = b - b\,\mathfrak{K}\sqrt{-1} + \frac{(1-\varepsilon)}{2} b(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^2 + $$

$$+ \frac{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}{2.3} b(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^3 + \text{u. s. f.}$$

Und wenn man sowohl in diesen beiden als auch in 13. und 14. für ε einen verschwindenden Zahlwerth, das ist $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ setzt, so ergeben sich aus 13. 14. XIII und XIV der Reihe nach die weitern Gleichungen

$$15)\quad \varkappa' = -\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{b^2} + \frac{1}{4}\frac{\delta^4}{b^4} - \frac{1}{6}\frac{\delta^6}{b^6} + \frac{1}{8}\frac{\delta^8}{b^8} \text{ u. s. f.}$$

$$16)\quad \mathfrak{K} = \frac{\delta}{b} - \frac{1}{3}\frac{\delta^3}{b^3} + \frac{1}{5}\frac{\delta^5}{b^5} - \frac{1}{7}\frac{\delta^7}{b^7} + \text{u. s. f.}$$

$$\text{XV.}\quad \frac{a}{b} = 1 + \mathfrak{K}\sqrt{-1} + \frac{(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^2}{2} + \frac{(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^3}{2.3} + \text{u. s. f.};$$

und

$$\text{XVI.}\quad \frac{a}{b} = 1 - \mathfrak{K}\sqrt{-1} + \frac{(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^2}{2} - \frac{(\mathfrak{K}\sqrt{-1})^3}{2.3} + \text{u. s. f.},$$

welche, nachdem nebst ihrem Zweck auch ihr Ursprung auf einer bekannten Basis dargelegt worden ist, nunmehr darüber zu erörtern kommen sollen, wieweit sie geeignete Mittel für das im §. 24 festgestellte nächste, und damit vielleicht auch die im §. 19 und §. 15 bezeichneten Ziele zu liefern im Stande sind.

§. 26. Es wurden für die Entstehung der Reihe N zwei Bedingungen aufgestellt. Was der Sinn der ersten Bedingung ist, wurde soweit bisher thunlich, oben dargelegt; es kommt daher jetzt noch darauf an, zu ermitteln, was der Sinn der andern ist. Ich behaupte, sie fordere als Preis, um welchen allein die Entstehung der Reihe N ermöglicht wird, die Hinwegtilgung alles dessen, was die Entwicklung Logarithmisches hervorgebracht. Beweis dessen ist, dass $\varkappa'$, welches Null werden soll, eben der in der Entwicklung auftretende Logarithmus ist. Denn es war nach **11)**

$$log\,(1 + \alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \ldots,$$

worin α, das ist dort $\frac{\delta}{b}$, was immer für ein absoluter Werth sein kann. Lässt man nun, dieser Beliebigkeit des absoluten Zahlwerthes wegen, α sich in $\alpha = \frac{\delta^2}{b^2}$ verwandeln, so hat man alsbald die Gleichung

$$log\,(1 + \frac{\delta^2}{b^2}) = \frac{\delta^2}{b^2} - \frac{1}{2}\frac{\delta^4}{b^4} + \frac{1}{3}\frac{\delta^6}{b^6} - \frac{1}{4}\frac{\delta^8}{b^8} + \ldots;$$

und wenn man hiervon die Hälfte nimmt, und diese sowohl positiv als negativ, wodurch die logarithmische Natur nicht aufgehoben werden kann, da sie ja nicht durch den Betrag, sondern durch den aus einer besonderen Bestimmung hervorgehenden Organismus einer Grösse, auch nicht durch das Vorzeichen + oder —, da sowohl $\varkappa$ auch — $\mathfrak{K}$ in **11.** und **12.** als Logarithmen aufgetreten sind, sich charakterisirt, so hat man evident

$$17)\quad \varkappa' = -\frac{1}{2}\,log\,(1 + \frac{\delta^2}{b^2}),\ \text{wie auch}\ -\varkappa' = \frac{1}{2}\,log\,(1 + \frac{\delta^2}{b^2}),$$

was auch noch auf anderem Wege bewiesen werden kann. Es ist nothwendig, beide Vorzeichen des Logarithmus $\varkappa'$ im Augenmerk zu haben, da $\varkappa'$ in den Gleichungen XII positiv und negativ erscheint, und jenes und dieses sich zum Behuf der Entstehung der Reihen XV und XVI hinwegräumen lassen muss. Die Grösse $\varkappa'$ ist also, so positiv wie negativ ein Logarithmus, das ist, sie hat die rechnungsgemässe Bestimmung, den absoluten Zahlwerth einer Grösse exponentiell zu dominiren. Dieses ist zwar an sich, wie eine Art algebraischer Aphorismus, bekannt; es wird aber nothwendig hinzuzufügen, dass die Algebra diese logarithmische Natur von $\varkappa'$ nicht als Endzweck, um eben nur isolirt zu wissen, dass $\varkappa'$ ein Logarithmus sei, hervorzutreiben scheint, sondern dass sie untrennbar daran hier den Willen knüpft, gerade dieser Logarithmus sei das Object, woran die obige zweite Bedingung vollzogen wird, als welche geradezu bezweckt, wie behauptet worden, diesen Logarithmus aus dem Weg zu räumen. Allein dieses ist noch nicht der vollständige Sinn der Bedingung. Es kommt noch hinzu, des Umstandes zu erwähnen, dass, indem $\varkappa'$, vergleichbar einem organischen Bestandtheil dessen, was auf der Grundvoraussetzung IX entstanden ist, getilgt wird, hierdurch auf die sächliche Basis für die Fortsetzung der Entwicklung, selbst, ein Angriff geschieht, der dieselbe ändert; und welchemgemäss derselben gerade diejenige Ausdehnung zu Theil wird, die nothwendig war, wenn Δ unmittelbar nicht zweitheilig, sondern nur in der Form $\Delta = \varepsilon b \varepsilon . \mathfrak{K} \sqrt{-1}$ hätte erscheinen sollen. Ein solcher Uebergang von mehr und weniger einer bekannten Basis hat nicht die Natur so verwerflich zu erscheinen, wie jener von weniger auf mehr, dessen im §. 24 Erwähnung geschah. Die Herabsetzung des $\varkappa'$ auf Null hat aber noch eine andere bezeichnendere Wirkung. Es besteht nämlich zwischen a und b ein Verhältniss der absoluten Werthe, ein Verhältniss, welches den Gleichungen 9. und 10. gemäss durch $e^{\varkappa}$ und e^{-K} dargestellt worden ist. Indem nun $\varkappa'$ als Logarithmus seinen angestammten Einfluss auf den absoluten Zahlwerth übt, so wird durch $\varkappa'$ = Null dieses Verhältniss der absoluten Werthe unausweichlich alterirt, und zwar wie klar zu sehen ist, im Sinne von $e^{\pm \varkappa'} \div 1$. Den Gleichungen XV und XVI liegt dann ob, die Wirkung hievon zu offenbaren. Soviel über den unmittelbar sich darbiethenden Sinn der betrachteten zweiten Bedingung. (Vgl. §. 30.) Nachdem so sich orientirt worden ist, dass die fortgesetzte Entwicklung aus Anlass der geänderten sächlichen Basis keinen Vorwurf zu besorgen hat, kann hinzugefügt werden, dass später die eigentliche Gestalt dieser geänderten Basis, wie auch das wahre Verhältniss der Werthe von a und b mit Präcision werde dargelegt werden. An dieser Stelle scheint mir jedoch noch die folgende Bemerkung nicht unnütz zu sein, dass wenn man diesen gewissermassen organischen Zusammenhang der Bestandtheile der vorstehenden Entwicklung ins Auge fasst, in ihm Mittel liegen, wodurch manche selbst problematische Gegenstände der Algebra sich dem Verständniss näher bringen lassen; namentlich was hier zunächst liegt: ob nur der absolute Zahlwerth der Grössen es ist, worauf der Einfluss der Logarithmen als solcher sich erstreckt, oder ob noch ein anderes Object diesem Einfluss unterliegt; dann ob auch noch andere als positive und negative Logarithmen solchen Einfluss auszuüben fähig sind. Der Leitfaden diess zu beantworten, soll der nachfolgende sein: Zu Grunde gelegt, dass zur Entstehung der Reihe N die im §. 25 erwähnten zwei Bedingungen zu erfüllen waren, so wurde die zweite Bedingung eben nur dadurch erkannt, dass in der rechnungsgemäss entwickelten Funktionsform von Δ ein Zerfallen dieser Function in zwei summande Bestandtheile, nämlich in $\pm \varepsilon b^{\varepsilon} . x'$ und $\mp \varepsilon b^{\varepsilon} . \mathfrak{K} \sqrt{-1}$ wahrzunehmen war, wovon bisher x' als Logarithmus, mithin der erste Bestandtheil $\pm \varepsilon b^{\varepsilon} . x'$ als gehörig zu einem absoluten Zahlwerth erkannt worden ist, — ganz analog den Gleichungen III und IV. Da nun die Absonderung des Theiles $\mp \varepsilon b^{\varepsilon} . \mathfrak{K} \sqrt{-1}$ von diesem absoluten Zahlwerth als Thatsache vor Augen liegt, so wird schon bei der Vermuthung, dieser Bestandtheil dürfte vielleicht zum absoluten Zahlwerth auch gar nicht gehören, das Bedürfniss rege, direct einzusehen, von welcher Natur derselbe ist, dass er sich so isolirt. Diess wird nöthigen, zu zeigen, welche Natur die Grösse $\mathfrak{K}$ sich vindicirt ihrem Organismus nach. Ist deren Natur festgestellt, so kommt zu erörtern, ob auch absolute Zahlwerthe davon abhängig sein können; und wenn $\mathfrak{K}$ diesen Einfluss nicht besitzt, so wird geschlossen, dass nur x' also der positive oder negative Logarithmus desselben fähig sei, woraus die vorstehenden Fragen sich schon von selbst und zwar simultan beantworten. Die Natur der Grösse $\mathfrak{K}$ verspricht sonach nach mehreren Seiten hin durch ihren Ursprung und rechnungsgemässen Zusammenhang eine eigenthümlich neue Rolle anzutreten, worüber sich hinzufügen lässt, dass wenn die Bahn vollends gebrochen ist, darin diejenige Rolle erkannt werden wird, die dem Winkel der alten Geometrie, wie der §. 11 vor Augen legt, unter so inhaltreichen Folgen verwehrt war.

§. 27. Was ist also die Grösse $\mathfrak{K}$? die Thatsache, dass sich innerhalb der Function Δ die Grösse $\mathfrak{K}\sqrt{-1}$ vom Logarithmus $\varkappa'$ rechnungsmässig abgesondert hat, scheint schon mindestens einigen Zweifel zu erwecken, ob $\mathfrak{K}$ doch noch ein Logarithmus sei, und gibt damit auch der Möglichkeit vom Gegentheile Raum. Indess während diess nur Ungewissheit weckt, so lässt sich von andern Seiten her direct erweisen, wie das $\mathfrak{K}$ gegenüber $\varkappa'$ unter eine andere davon ganz heterogene Grössensorte fällt. Beweis dessen ist die Organisation der Reihe 16, deren Eigenthümlichkeit auf folgendem Weg erkannt werden kann: Es ist nämlich eine der elementaren Formeln des Differentialcalcüls, dass $d\ tang\ x = \frac{dx}{cos\ x^2}$ ist, woraus man $dx = cos\ x^2 . d\ tang\ x$ erhält.

Nun aber hat man, rein nur durch Rücksichten auf Verhältnisse absoluter Grössenwerthe die Relation $cos\ x . sec\ x = 1$, also $cos\ x^2 = \frac{1}{sec\ x^2}$; und weil auch in gleichem Sinn $sec\ x^2 = 1 + tg\ x^2$ ist, so geht $dx = \frac{d . tg\ x}{1 + tg\ x^2}$ hervor. In dieser letzten Form kann man zur Abkürzung $tg\ x = \alpha$ setzen, denn es ist durch $tg\ x$ nicht mehr als der absolute Werth der Tangente indicirt; welchemgemäss dann $x = arc\ tg\,(=\alpha) = arc\ tg\ \alpha$ wird, wodurch man die bekannte Gleichung $d . arc\ tg\ \alpha = \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}$ erhält.

Aber das Glied rechts lässt die Verwandlung in eine Reihe zu, indem man der Gleichung

$$\frac{1}{1+\alpha^2} = (1+\alpha^2)^{-1} = 1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha^6 + \alpha^8 - \alpha^{10} + \ldots$$

gemäss, die eben erhaltene Reihe darin substituirt. Wird diese Substitution wirklich gemacht, so hat man die Gleichung

$$d . arc\ tg\ \alpha = (1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha^6 + \alpha^8 - \alpha^{10} + \text{ u. s. f.})\ d\alpha$$
$$= d\alpha - \alpha^2 d\alpha + \alpha^4 d\alpha - \alpha^6 d\alpha \cdot \ldots,$$

aus welcher dadurch, dass man auf beiden Seiten integrirt, die weitere Gleichung folgt.

$$arc\ tg\ \alpha = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5 + \frac{1}{7}\alpha^7 + \text{ u. s. f.},$$

oder auch $\alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5 - \frac{1}{7}\alpha^7 + \text{ u. s. f.} = arc\ tg\ \alpha,$

deren variables Element nur die Grösse α als sogenannt trigonometrische Tangente ist.

Betreffend nun den absoluten Zahlwerth der Tangente, so ist bekannt, dass dieselbe aller absoluten Werthe von Null an bis ∞ fähig ist, wesshalb kein Zweifel bleibt, es werde auch $\alpha = \frac{\delta}{b}$ darunter sein. Setzt man dieses ein, so kommt man mit der Gleichung

$$18)\ \frac{\delta}{b} - \frac{1}{3}\frac{\delta^3}{b^3} + \frac{1}{5}\frac{\delta^5}{b^5} + \frac{1}{7}\frac{\delta^7}{b^7} + \text{u. s f.} = arc\,tg \cdot \frac{\delta}{b},$$

indem man dieselbe mit 16) vergleicht, bei dem Schlusse an, es sei

$$19)\ \mathfrak{K} = arc\,tg. \frac{\delta}{b}.$$

So dass die Grösse $\mathfrak{K}$, gleichviel ob positiv oder negativ, ihrem innern Organismus nach, kein Logarithmus ist, sondern als Winkel oder Kreisbogen, also als eine Divergenz sich insinuirt; — was übrigens auch noch auf anderem Weg bewiesen werden kann.

Das bisher Ermittelte scheint hinzureichen, um auf das im §. 24 ins Aug gefasste Ziel als ein nunmehr erreichbares zurückzukommen. Wenn es dort, wie es hiess, indirect, aus Rücksichten der Einschleichung einer erweiterten sächlichen Basis bedenklich war, die Gleichungen 7 und 8 auch für imaginäre $\mathfrak{K}$ als giltig bestehen zu lassen, so scheint dieses Bedenken jetzt eine vielleicht nicht ungenügende directe Begründung zu finden, indem nicht nur die sächliche Basis der Reihe N gegen allen Widerspruch gewahrt, sondern auch zweierlei dargelegt worden ist, nämlich dass 1. zur Entstehung dieser Reihe vor Allem, alles Logarithmische sich unterdrücken lassen müsse, und 2. darnach eine Grösse $\mathfrak{K}$ nur übrig bleibe, die kraft ihrer eigenthümlichen Natur sich unter 19) auch ihren bestimmten Namen beilegt. Von da an wird es wohl ungereimt erscheinen müssen, mit $\mathfrak{K}$ oder vielmehr $\mathfrak{K}\sqrt{-1}$ eine logarithmische Natur und Fähigkeit zu verbinden; und weil dieses ist, so kann es nicht zulässig sein, in der Reihe N die Function eines Logarithmus zu erblicken. Und weil auch dieses ist, so kann die Reihe N als Nicht-Function eines Logarithmus, $e^{\mathfrak{K}\sqrt{-1}}$ als einer offenbaren Function davon keine haltbare Gleichung bilden. Diess gegen die Ausdehnung der Gleichungen 7. und 8. auch auf imaginäre $\varkappa$ und — $\mathfrak{K}$.

Indem hierwegen die Algebra sich genöthigt sieht, die bisher beliebte Alternative der Giltigkeit dieser Ausdehnung der mehrerwähnten Gleichungen zu verlassen, betritt sie mit der andern wirklich ein inner der Grenzen der bisherigen Wissenschaft nicht eingeschlossenes Gebiet. Wenn es auch bisher noch keine Erfahrungen auf demselben geben kann, — Eines steht rücksichtlich desselben doch immer fest, und zwar: dass, wenn die Algebra sich auch nur in einem Falle erinnerte, auf dem Subordinatsystem nothwendiger Weise zu stehen, was sie wohl nicht nur um indirect viel Widersinn (§§. 16, 17) zu vermeiden, sondern auch direct ihren Darstellungen durch irgend genügende sächliche Basis zur Denkbarkeit zu verhelfen, nicht in Abrede stellen wird; sie dann schon von demselben vollends gefangen ist, und es auch bleibt: da es aus dem Raume, steht man einmal darin, kein Hinausgelangen mehr gibt. Die Art des Hinausgelangens will ich hier nicht hervorziehen, wo, wie ich im §. 24 darzulegen genöthigt war, die sächliche Basis einer Entwicklung überschritten worden war; ein derlei Hinausgelangen aus dem Raume ist zwar allerdings möglich, allein da dasselbe nur in das Gebiet des Unerklärbaren und Absurden führt, so liegt diessfalls der wahren Wissenschaft daran, sich dagegen wohl zu wahren. Die Algebra wird daher mit auch nur Einem Falle, schon für alle Fälle auf dem Subordinatsystem als auf ihrer allgemeinen sächlichen Grundlage stehen müssen, — was sie auch immer darin erfährt und thut. Es bleibt demnach auch in dem eben zuvor besprochenen alternativen Falle das Subordinatsystem als unbearbeitete sächliche Grundlage übrig, und es wird daran gelegen sein, selbe von dort an, wo die Spuren der Cultur geendet haben, weiterhin zu erforschen.

§. 28. Wird der Orientirung wegen ein allgemeiner Ueberblick des neuen algebraischen Gebietes angestrebt, so haben sich dazu die Anhaltspuncte bereits hervorgethan. Seitdem nämlich $\mathfrak{K}$ rechnungsmässig zu einem Winkel oder Kreisbogen, also zu einer Divergenz herausgebildet worden ist, liegt die Gleichartigkeit dieser Grösse mit der im §. 3 durch θ bezeichneten so klar vor Augen, dass sie nicht weiter mehr verkannt werden kann. Es kann demnach die Grösse $\mathfrak{K}$ als die rechnungsgemässe, oder was dasselbe ist, algebraische Grundgrösse der Lage erklärt werden. Deren Dasein auf dem Gebiet der Algebra somit als constatirt anzusehen wäre. Ein weiterer Anhaltspunkt kann in der Zusammensetzung der expliciten Form der Function Δ wahrgenommen werden, wie selbe aus IX. hervorgegangen ist; denn es liegt darin die Thatsache klar vor Augen, wie dass der Calcül den Logarithmus und damit den absoluten Zahlwerth, von dem davon heterogenen Bogen, — also, um im Sinne des Subordinatsystemes zu reden, die Raumlinie und die Divergenz, exact von einander sondert, und zwar so exact, dass ungeachtet der Entstehung beider aus einer gemeinsamen Quelle, und der Dependenz von denselben Elementen b und δ, keines auf das andere, wie sich zeigen wird, *qua tale* unmittelbaren Einfluss übt. Diese Anhaltspunkte reichen hin, um erkennbar zu machen, dass die Algebra die beiden im §. 3 zur Möglichkeit der Ortsversetzung überhaupt geforderten Bedingungen wirklich rechnungsmässig zur Erfüllung bringt. Was nunmehr gleichfalls als constatirt angesehen werden kann. Das neu zu betretende Feld characterisirt sich demnach als ein solches, das die Elemente einer simultanen Rechnung von Grössenwerth und Lage vollständig und klar umfasst. Selbst davon, wie es dahin kommen könne, dass erst die Multiplication die Lage, und zwar nur im additiven Sinne ändert, kann gleichfalls die Form von Δ Nachricht geben; denn in ihr erscheint „der Logarithmus" des absoluten Werthes ja „mit der Grundgrösse der Lage additiv" verknüpft. Und fragt man, ob auch die im §. 11 erwähnte Forderung erfüllt sei, dass nämlich dem Winkel oder Bogen möglich sein müsse, zur Ausdrückung der anerkannten Unterschiedenheit zweier divergenten Linien in den Calcül rechnungsmässig einzutreten, so ist auch die erfüllt; denn die Rechnung hat ja durch Abscheidung der Reihe 14., diesen Bogen oder Winkel wirklich eigens entstehen gemacht. Nach dieser Orientirung, wodurch man über die fundamentale Eigenthümlichkeit des zu betretenden Gebietes Uebersicht erwirbt, soll zu den weiteren Zielen vorgeschritten werden.

Zur Ausdrückung der Lage forderte der §. 4 die geeignete dort sogenannte Lagefunction. Die Reihen XV und XVI sind aber Functionen der Grundgrösse $\mathfrak{K}$, nur mit der Besonderheit, dass die erstere Reihe eine Function der absoluten Divergenzgrösse $\mathfrak{K}$ ist, während in der anderen eine Function von $-\mathfrak{K}$ erscheint. Es kommt nun darauf an, was die Reihe XV oder N mit der vorhin betrachteten Function $f(\theta)$ noch weiter gemeinsam hat. Dieses anzugeben braucht man nicht erst insbesondere zu behaupten und zu beweisen, dass die Reihe N sich auf einen geschlossenen Ausdruck reducirt, wenn man die ebenso bekannte als wichtige Gleichung

$$\text{XVII.} \quad (\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x)^{\varepsilon} = \cos \varepsilon x + \sqrt{-1}\,\sin \varepsilon x$$

in Erwägung bringt; denn aus dieser ergibt sich sogleich, wie bekannt

$$\text{XVIII.} \quad \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x = (\cos \varepsilon x + \sqrt{-1}\,\sin \varepsilon x)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}} +$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}-1} . \sin \varepsilon x . \sqrt{-1} + \frac{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}{2} \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}-2} . (\sin \varepsilon x . \sqrt{-1})^2 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}-2\right)}{2.3} \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}-3} . (\sin \varepsilon x . \sqrt{-1})^3 + \ldots$$

$$= \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}} + \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} \sqrt{-1} + \frac{(1-\varepsilon)}{2} \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \left(\frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} \sqrt{-1}\right)^2 +$$

$$+ \frac{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}{2.3} . \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \left(\frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} \sqrt{-1}\right)^3 + \ldots =$$

$$= \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}} \Big[1 + \frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} \sqrt{-1}\right)^2 +$$

$$+ \frac{(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)}{2.3} \cdot \left(\frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} \sqrt{-1}\right)^3 + \ldots\ldots \Big],$$

worin schon die letzte eingeklammerte Reihe ganz analog derjenigen erscheint, die unter XIII angegeben worden ist. Setzt man nun auch hier den schon vorhin aufgenommenen Fall

$$\varepsilon = \frac{1}{m} = \frac{1}{\infty}$$

wieder ein, wodurch wirklich

$$\frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} = x \text{ und } \cos \varepsilon x^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1,$$

zu werden genöthigt wird, so behält man die Gleichung

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = 1 + x\sqrt{-1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{2} + \frac{(x\sqrt{-1})^3}{2 \cdot 3} + \ldots,$$

worin man nur den Bogen $\mathfrak{K}$ an die Stelle des Bogens oder Winkels x zu setzen braucht, um alsbald die Reihe N und damit auch die ganz gleichlautende in XV in geschlossener Form zu erblicken.

Es ist sonach die geschlossene Form XIX $\cos \mathfrak{K} + \sqrt{-1} \sin \mathfrak{K} = N$ gleichfalls eine Function der Grundgrösse der Lage, und zwar den Reihen XV und N bis zur Identität äquivalent. Der Umstand, dass die Algebra sich nicht nur fähig erwiesen hat, die Grundgrösse der Lage, wie Gleichung 14. zeigt, eigens entstehen zu machen, sondern auch dass sie aus dieser so gebildeten Grösse eine geschlossene Function, wie in XIX ersichtlich ist, zu Stande bringt, wird nun nicht verfehlen, das Augenmerk auf die Eigenschaften dieser Function im Vergleich mit denen der früher sogenannten Lagefunction zu lenken, um, was sie gemeinsam haben, vollends und klar zu sehen. Geht man nun die einzelnen in §. 4 bis 9 nachgewiesenen Eigenschaften sämmtlich, hier und dort vergleichend durch, so geht eine Congruenz derselben hervor, wie solche nur ein und dasselbe Ding darzubieten im Stande ist; und die Algebra wird, nachdem sie damit sich befreundet hat, nicht umhin mehr können, zum Vortheile des Lagecalcüls zu erkennen, wie dass sie nebst den hier oben berührten, thatsächlich zur Erfüllung gebrachten Bedingungen der Lagerrechnung, auch die wahrhafte Lagefunction selbst besitzt; und wie dass sie, um zum Bewusstsein dieses Besitzes zu kommen, nicht nöthig hat, gegen die formale Seite des Calcüls zu Felde zu ziehen, sondern nur mit der realen Begründung, die hier unter dem Namen der sächlichen Basis hervorgehoben worden, — überhaupt durch den im §. 15 angekündigten Fortschritt, insbesondere durch Fernhaltung jedes concreteren realen Widerspruchs — aus dem Zwielicht zu gelangen. Hiernach wird die algebraische Form der Lagefunction explicit als $f(\mathfrak{K}) = \cos \mathfrak{K} + \sqrt{-1} \sin \mathfrak{K}$ bekannt; oder wenn man lieber will, die eigentliche Natur der Function $\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta = f(\theta)$, in das Licht gestellt. In der sich auch insbesondere, seit $x' =$ Null Bedingung geworden, keine Spur von irgend logarithmischen Wesen mehr wird nachweisen lassen. Da nun insbesondere auch

$$[\cos\mathfrak{K} + \sqrt{-1}\,\sin\mathfrak{K}]^{-1} = \cos -\mathfrak{K} + \sqrt{-1}\,\sin -\mathfrak{K} = f(-\mathfrak{K}) = \frac{1}{f(\mathfrak{K})}$$

besteht, so tritt als eine erste Erfahrung auf dem neuen Gebiete, aus den Gleichungen XV und XVI das eigenthümliche Verhältniss zwischen a und b, nämlich

$$\text{XV}'\ \frac{a}{b} = f(\mathfrak{K}), \text{ und } \text{XVI}'\ \frac{a'}{b} = f(-\mathfrak{K}) = \frac{1}{f(\mathfrak{K})}$$

vor Augen, worin sich eben nichts anderes als ein Verhältniss der verschiedenen Lagen, das ist $a \div b = f(\mathfrak{K}) \div f(0)$, und $a' \div b = f(-\mathfrak{K}) \div f(0) = f(0) \div f(\mathfrak{K})$ zu erkennen gibt, welches, wenn man im Sinn des §. 4 die Grösse θ als $\theta = \mathfrak{K}$ verstehen will, die Lage der Linie N verglichen mit jener von A repräsentirt. Man hat solchemnach auch $a = b\,f(\mathfrak{K})$ sowie $a' = b\,f(-\mathfrak{K})$, in vollkommener Uebereinstimmung mit jener axiomatischen Supposition der multiplicativen Verknüpfung von Grössenwerth und Lage, als von welcher im §. 5 Gebrauch gemacht worden ist.

§. 29. Durch die Bedingung $\varkappa' =$ Null wurden zwar die Elemente b und δ auf besondere, wenn auch nicht constante, so doch an ein constantes Verhältniss gebundene Werthe gesetzt, wodurch auch $\mathfrak{K}$ ein constantes geworden ist. Allein so wenig diese Festsetzung darum erfolgt ist, um bei einem constanten $\mathfrak{K}$ anzukommen, sondern nur, um den Logarithmus $\varkappa'$ wegzutilgen, so wenig lässt sich die Wirkung davon trennen, dass man $\mathfrak{K}$ nicht variabel denken kann, ohne sogleich die Bedingung $\varkappa' =$ Null zu verletzen. Hierauf wird Rücksicht zu nehmen sein, wann der Einfluss von $\mathfrak{K}$ auf den absoluten Zahlwerth einer damit zusammenhängenden Grösse beurtheilt wird. Schon vor Allem der Umstand, dass während $\mathfrak{K}$ constant verbleibt, doch noch immer b sich ändern kann, also der absolute Zahlwerth von a hierbei variabel erscheint, führt zu der Erkenntniss, wie das $\mathfrak{K}$ den absoluten Werth von a nicht beherrscht. Erschöpfenderen Aufschluss aber über die Frage des Zusammenhanges zwischen dem absoluten Werthe a, und den Werthen von b und $\mathfrak{K}$ können die Gleichungen XV u. XVI geben.

Denn ist hiernach $\frac{a}{b} = cos\ \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\ sin\ \mathfrak{K}$, so wird auch $\frac{a^n}{b^n} = cos\ n\mathfrak{K} + \sqrt{-1}\ sin\ n\ \mathfrak{K}$ sein. Wäre nun $\mathfrak{K}$ = Null, so wäre $\frac{a}{b} = 1$, wären also die absoluten Werthe a und b einander gleich, wie sehr auch b varirt. Ist dagegen $\mathfrak{K}$ von Null verschieden, so wird sich jederzeit ein numerischer Werth n finden lassen, der durch Multiplication mit $\mathfrak{K}$, das Product $n\mathfrak{K}$ auf $= 2\pi$ oder allgemein auf $n\mathfrak{K} = 2h\pi$ erhöht, worin h eine ganze Zahl sein soll. Hat man sonach $n\mathfrak{K} = 2h\pi$, so ist dem absoluten Zahlwerth nach $sin\ n\ \mathfrak{K} = 0$, dagegen $cos\ n\ \mathfrak{K} = 1$, mithin wieder $\frac{a^n}{b^n} = 1$. Also sind die absoluten Werthe von a und b in allen Fällen gleich; und sie sind es so gewiss, dass sich für das Gegentheil nicht einmal die Möglichkeit wird begründen lassen, selbst wenn $\mathfrak{K}$ simultan die verschiedensten Werthe zu haben, oder variabel aufzutreten geeignet sein wird. Diese Wahrnehmung dürfte wohl im Stande sein, die oben durch die Bedingung $\varkappa'$ = Null in dem Masse $e^{\pm\varkappa'} \div 1$ erfolgte Herabsetzung jenes Verhältnisses der absoluten Werthe von a und b, welches vor dieser Bedingung statt gefunden hat, zur Klarheit zu erheben, indem das dadurch herbeigeführte eventuelle Verhältniss nunmehr exact als $a = b$ vor Augen gelegt wird. Wodurch erkennbar wird, dass mit der Erfüllung dieser Bedingung es darauf angelegt ist, dass nach Wegwerfung des Zahlwerthes, so weit es gehen mag, nur die Lage allein ihre Rolle spielt. Dessenungeachtet aber kommt man dennoch zu dem Schluss: dass die Grösse $\mathfrak{K}\sqrt{-1}$ als massgebendes Element der Reihe XV nicht nur einerseits ausschliessenden Einfluss auf die Lage übt, sondern auch anderseits auf den absoluten Zahlwerth einer andern damit zusammenhängenden Grösse wie a hier ist, keinen Einfluss zu üben im Stande ist. Doch muss ich sogleich hinzufügen, dass diess nur vom unmittelbaren und totalen gegenseitigen Einflusse gelten kann, da ein vermittelter Einfluss oder ein innerer Zusammenhang zwischen Grösse und Lage ja beständig vor Augen liegt, indem durch die Elemente b und δ so der Betrag des Logarithmus wie jener der Grundgrösse der Lage bestimmt wird, — das ist, der erstere wie auch die letztere sich als Functionen geltend machen, die, so heterogen sie übrigens sind, darin eine characteristische Uebereinstimmung beurkunden, dass die independenten Elemente b und δ beiden gemeinsam sind. Nur von diesen Functionen als solchen, dass ist als Totalitäten kann der gegenseitige Nichteinfluss behauptet werden, keineswegs in Beziehung auf die darin enthaltenen independenten Elemente, selbst wenn derselben mehr als bloss zwei wie hier, sich geltend machen würden. Zu dessen Beweis kann bisher nur die Gleichung IX $a = b \pm \delta\sqrt{-1}$ verwendet werden, weil eine andere auch Lagen mitführende Grundvoraussetzung noch nicht gegeben ist. In dieser aber braucht man nur $b = c\cos\lambda$ und $\delta = c\sin\lambda$ zu setzen, um alsbald nicht nur $tg\lambda = \frac{\delta}{b}$, mithin $\lambda = \mathfrak{K}$ zu erkennen, sondern auch $c^2 = b^2 + \delta^2$, also den absoluten Werth von c, der mit jenem der Grösse a identisch ist, von $\lambda = \mathfrak{K}$ independent zu finden. Sobald sich aber der Einfluss von $\mathfrak{K}$ auf die Lage als ein ausschliessender bewährt, so wird demgemäss der Einfluss des Logarithmus auf den Zahlwerth gleichfalls ein ausschliessender sein, und man gelangt dann zu dem weitern Schluss: der Einfluss der Logarithmen sei in der That nur auf den absoluten Zahlwerth eingeschränkt. Es lägen auch wirklich Symptome von etwas Unerklärbarem darin, wenn vorausgesetzt würde, dass aus der Uroperation, die nur im Setzen und Gesetzteswegnehmen besteht, auch solche Potenzen sich ergeben könnten, die etwas anderes als Setzen und Wegnehmen exhibirten. Denn es scheint doch ganz klar zu sein, dass in einer Potenz, deren absoluter Exponent im Zunehmen begriffen ist, ein cumulirtes Setzen liegt, und dass man dadurch, dass man anfängt, den absoluten Exponenten zu vermindern, eben nur Gesetztes wegzunehmen beginnt. Nun kann man das Wegnehmen fortsetzen, bis der Logarithmus Null geworden ist, ohne dann noch zu finden, dass man Alles Gesetzte weggenommen hat, da alsdann noch 1 übrig ist. Nimmt man noch fernerhin Theile hiervon weg, wodurch der Logarithmus sofort ein negativer wird, so setzt man eben nur das immer identisch bleibende Wegnehmen des noch vorhandenen Gesetzten fort, und diese Fortsetzung muss unter dem Wachsthum des negativen Logarithmus endlich soweit führen, dass alles Gesetzte weggenommen ist. Sieht man, um das Stadium, wo diess geschieht, rechnungsmässig dargelegt zu finden, auf die Gleichung IV, so erhellet dort, dass mit a = Null nothwendig auch $1 - \varepsilon K = 0$, das ist $1 = \varepsilon K$ oder $K = \frac{1}{\varepsilon}$ werden muss; woraus für den Fall als K allein den absoluten Werth von a beherrschen, mithin ε verschwinden soll, ein unendlich grosser Werth für K erkennbar wird.

Sobald dieses erreicht ist, ist alles Gesetzte vollständig hinweggenommen, und ein ferneres oder wie immer geartetes drittes Operiren erscheint, weil die sächliche Basis bereits erschöpft ist, nicht nur undenkbar und ohne Sinn, sondern kann auch nur zu Widersprüchen führen. Sollte es nützlich sein, bei einer solchen dritten Art des Logarithmirens, wie sie namentlich mit der sehr populären Gleichung

$$e^{\pm \mathfrak{K}\sqrt{-1}} = \cos \mathfrak{K} \pm \sqrt{-1} \sin \mathfrak{K}$$

geltend gemacht zu werden pflegt, nebst der bereits oben gezeigten Undenkbarkeit noch irgend einen resultirenden Widersinn zu zeigen, so wäre nur nothwendig, hervorzuheben, dass im Falle $\mathfrak{K} = 0$, sein müsste $e^{\pm 0\sqrt{-1}} = 1$, und dass mit gleichem Recht auch im Falle $\mathfrak{K} = 2\pi$ sich ergäbe $e^{\pm 2\pi\sqrt{-1}} = 1$, ferner in den Fällen $\mathfrak{K} = 4\pi$, 6π, 8π, u. s f., immer mit dem gleichen Recht

$$e^{\pm 4\pi\sqrt{-1}} = 1,\ e^{\pm 6\pi\sqrt{-1}} = 1,\ e^{\pm 8\pi\sqrt{-1}} = 1,$$

u. s. f., dass folglich dem gemeinsamen Zahlwerth $= 1$ zufolge auch

$$e^{0\sqrt{-1}} = e^{\pm 2\pi\sqrt{-1}} = e^{\pm 4\pi\sqrt{-1}} = e^{\pm 6\pi\sqrt{-1}} = e^{\pm 8\pi\sqrt{-1}} =$$

u. s. f. geschlossen werden müsste, wegen welcher Gleichheit und namentlich der unvermeidlich zu folgernden Gleichheit der Exponenten, nicht weniger bewiesen wäre, als dass

$$0 = \pm 2 = \pm 4 = \pm 6 = \pm 8 = \ldots = \pm 2h$$

sein soll; — was in der That nicht möglich ist. Und doch sind die Umstände so, dass die Algebra gegen die formale Seite dieses Schlusses keinen begründeten Vorwurf zu erheben im Stande ist.... Man wird sich daher nach Allem der Wahrnehmung nicht erwehren können, dass, indem der Calcül in den Gleichungen XII die Grössen x' und $\mathfrak{K}\sqrt{-1}$ als Logarithmus und Bogen sondert, er in der That eine tiefe Kluft zwischen beiden setzt, wovon schon an der Oberfläche diess Symptom sich zeigt, dass sie obwohl aus derselben Quelle entstammt, dennoch nicht einmal eines gegenseitigen unmittelbaren Einflusses, das ist eines solchen als Functionen mehr fähig bleiben, sondern nur in grösserer Tiefe durch die Gemeinschaftlichkeit der independenten Elemente noch verbunden sind. Ja man findet an ihnen insbesondere die Eigenthümlichkeit ausgeprägt, dass wenn δ ermächtigt wird, ins Unendliche zu wachsen, oder b ins Unendliche abzunehmen, der Logarithmus und mit ihm der absolute Zahlwerth auf keine Grenze stosst, während $\mathfrak{K}$ als Bogen einer Tangenten, selbst damals, wann diese ins Unendliche zunimmt, an die nicht überschreitbare Grenze $\frac{\pi}{2}$ gebunden bleibt. Die Zerklüftung der Grössen in XII macht ferner ausserdem, dass sie wie schon oben hervorgehoben wurde, die Bedingungen der Lagerechnung zur Erfüllung bringt, auch noch erkennbar, dass ausser Logarithmus und Bogen keine dritte oder fernere Grösse aus der Entwicklung habe hervorgehen können; einfach darum — weil dazu die nöthige sächliche Basis fehlt, indem die vorausgesetzte mit diesen Grössen erschöpft ist.

Steht nun nach der gegebenen realen Erklärung einmal die Erkenntniss fest, dass — so wie die Uroperation nur im Setzen und Gesetztes wegnehmen besteht — es nur positive und negative Logarithmen geben kann, und dass dieselben nur allein den absoluten Zahlwerth dominiren, so wird schon folgerungsweise erkennbar: erstlich, dass der Uebergang vom positiven zum negativen Logarithmus und umgekehrt, niemals durch das Zeichen $\sqrt{-1}$, sondern nur durch Null geschehen kann (wenngleich die näheren Umstände davon erst späterhin, auf Grund einer complicirteren sächlichen Basis bestimmter dargelegt werden können); zweitens, dass den negativen und imaginären Grössen als solchen, das ist als Producten eines absoluten Zahlwerthes mit speziellen Werthen der Lagefunction, keine eigenen Logarithmen zugehören können, da ja die Lagefunction als der Eine Factor, zufolge seiner hervorgehobenen Natur nichts Logarithmisches verträgt; und drittens dass das Bewandtniss zwischen den sämmtlichen nicht-absoluten Grössen und dem Logarithmenwesen sich dahin läutern will, es walte zwischen beiden weder volle Abhängigheit noch volle Independenz ob, und zwar wieder aus dem Grunde, weil die sämmtlichen nicht absoluten Grössen wesentlich Producte sind, bestehend aus dem Factor-Repräsentant des absoluten Zahlwerthes und dem Factor der Lage, davon der erstere von dem Logarithmus beherrscht wird, während der andere nur im mittelbaren Zusammenhang, keineswegs aber unter dem unmittelbaren Einfluss des Logarithmus steht. Und dieses dürfte aller Wahrscheinlichkeit nach, wann die Wissenschaft sich damit befreundete, die Folge haben, dass die gleichfalls ziemlich alte Streitfrage *circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos* (siehe §. 17) ihrem Abschluss genähert würde. Es erübrigt noch, dem Vorhergehenden gemäss, die durch die Bedingung $\varkappa' =$ Null erfolgte Abänderung der sächlichen Basis durch Darstellung ihrer aus der Aenderung hervorgegangenen Gestalt vollends zu beleuchten. Da nämlich nach IX. $a = b \pm \delta\sqrt{-1}$ gewesen ist, woraus sogleich

$$\frac{a}{b} = 1 \pm \frac{\delta}{b}\sqrt{-1}$$

sich ergibt, so hat man, indem hier zufolge 19. $\frac{\delta}{b} = tg\,\mathfrak{K}$ sein muss, offenbar auch

$$\frac{a}{b} = 1 \pm tg\,\mathfrak{K}\sqrt{-1}, \text{ das ist } \frac{a}{b} = 1 + \frac{sin \pm \mathfrak{K}}{cos \pm \mathfrak{K}}\sqrt{-1} \text{ oder}$$

$$\frac{a\,cos \pm \mathfrak{K}}{b} = cos \pm \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\,sin \pm \mathfrak{K} = f(\pm\mathfrak{K});$$

welches, wenn man

$$\left[\frac{a\,cos \pm \mathfrak{K}}{b}\right]^{\varepsilon} = cos \pm \varepsilon\mathfrak{K} + \sqrt{-1}\,sin \pm \varepsilon\mathfrak{K}$$

bildet, wirklich im Falle eines kleinen ε die Gleichung

$$[a\,cos \pm \mathfrak{K}]^{\varepsilon} = b^{\varepsilon} \pm \varepsilon\, b^{\varepsilon}\,\mathfrak{K}\sqrt{-1}$$

ergibt, die mit XII′ zusammenfällt. Wornach also, vermittelst der Setzung $\varkappa' =$ Null die anfängliche Grösse a zufolge der Depression nach Massgabe des Verhältnisses $e^{\pm\varkappa'} \div 1$, auf den

Werth $a \cos \mathfrak{K}$ herabgedrückt erscheint; womit sie um so dem b gleich zu werden, um $a - a \cos \mathfrak{K} = a\,(1 - \cos \mathfrak{K})$ abgenommen hat. Hierdurch wird denn auch die vorgefallene Metamorphose der Basis klar, und zwar dergestalt, dass sich dieselbe als eine bloss quantitative erweist, — womit die unterwegs bisher getroffenen Fragen der Reihe nach gelöset scheinen.

Viertes Capitel.

I. Vom Summiren im Lagecalcül und von der Summe in der Ebene.

§. 30. Aus der Gleichung XVIII war es möglich, durch Heraushebung von

$$\left[\frac{\cos \varepsilon x + \sqrt{-1}\,\sin \varepsilon x}{\cos \varepsilon x}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 + \frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon}\sqrt{-1} + \frac{(1-\varepsilon)}{2}\left[\frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon}\sqrt{-1}\right]^2 +$$

$$+ \frac{(1-\varepsilon)(1-2\,\varepsilon)}{2\,.\,3}\left[\frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon}\sqrt{-1}\right]^3 + \ldots.,$$

welches eben so viel ist als

$$\left[1 + \sqrt{-1}\,.\,tg\,\varepsilon x\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1 + \frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon}\sqrt{-1} + \text{ u. s. f.};$$

darauf durch Multiplication beiderseits mit b, und Anwendung eines so kleinen Werthes für ε, dass es erlaubt wird

$$tg\,\varepsilon x = \varepsilon x \text{ das ist } \frac{tg\,\varepsilon x}{\varepsilon} = x$$

zu setzen, bis zur Gleichung XIII, mithin auch bis zu XII′ ohne Hinderniss zurückzugelangen. Allein, wenn aufgegeben wäre, den recursiven Gang auch weiter bis zu der ursprünglichen Gleichung IX noch fortzuführen, so ist der weitere Weg nicht mehr so ganz offen, sondern er ist durch ein eigenthümliches Hinderniss verlegt, welches darin besteht, dass ein Uebergang von weniger auf mehr der sächlichen Basis erfordert wird, der nicht unbedenklich ist. Wollte man namentlich im oberwähnten Falle die Grösse $\varkappa'$ als von Null verschieden wieder eintreten machen, so wäre es nicht möglich, ohne in $\mathfrak{K}$ gleichfalls — zwar keine qualitative, immerhin aber eine quantitative Aenderung hervorzubringen, die jedoch wenn $\mathfrak{K}$ überhaupt vieler Werthe fähig ist, nicht wahrnehmbar werden kann. Denn, wenn $\varkappa'$ von Null verschieden werden soll, so kann diess nicht anders als durch eine Aenderung in den independenten Elementen b und δ zu Stande kommen, und so kann das Verhältniss $\frac{\delta}{b}$ nicht constant mehr bleiben, sondern muss bei constantem b die Grösse δ, oder umgekehrt, überhaupt wie der Zweck fordert b und δ zugleich sich ändern, wodurch auch $tg\,\mathfrak{K} = \frac{\delta}{b}$ verändert wird. So dass die Grösse $\mathfrak{K}$ eine andere ist bei $\varkappa' =$ Null, und eine andere ausser diesem Fall. Nun aber hat durch $\varkappa' = \frac{1}{2} log\,(1 + \frac{\delta^2}{b^2}) =$ Null nothwendig auch $\frac{\delta}{b} = 0$, also namentlich auch $\mathfrak{K} = arctg \frac{\delta}{b}$ selbst der Nulle gleich werden müssen, was in Wahrheit anstatt $cos\,\mathfrak{K} + \sqrt{-1}\,sin\,\mathfrak{K}$ nur 1 erscheinen macht. Doch kann diess den vorhergegangenen Entwicklungen, die mit einem solchen $\mathfrak{K}$ beschäftigt sind, nicht schaden; denn es war keine Nothwendigkeit des Calcüls, dass $\mathfrak{K} =$ Null geworden ist, sondern eine blosse Fiction, die da nur das Unumgängliche hat zeigen wollen, um einen beabsichtigten Zweck, nämlich die Entstehung der Reihe N zu realisiren; woran sich jedoch auch ein nichtunumgänglicher Anhang angeschlossen hat, nämlich der, dass diesmal der Grösse $\mathfrak{K}$ auch kein absoluter Werth übrig geblieben ist.

Obwohl es Fälle gibt, wo, wie sich wird sehen lassen, unter Verschwinden des Logarithmus dennoch die Divergenz nicht verschwinden kann, so glaubte ich doch den Anfang mit dem Falle machen zu müssen, der mit dem Logarithmus auch den Bogen verschwinden macht, weil dieser Fall in Absicht der Einfachheit auch wirklich der nächste ist. Betreffend aber den Beweis rücksichtlich der qualitativen Beschaffenheit von $\varkappa'$ und $\mathfrak{K}$, so habe ich am betreffenden Orte schon erklärt, dass derselbe auch auf anderem Wege geliefert werden kann, wie er denn nunmehr unter Umständen, wo $\varkappa'$ und damit auch $\mathfrak{K}$ nicht anullirt werden, nachfolgen soll, damit auf dem Wege zu der Form XV und XIX nicht mit $\varkappa'$ auch $\mathfrak{K}$ weggeworfen sei. Setzt man nämlich in der Grundvoraussetzung $a = b + \delta\sqrt{-1}$ unter

IX die Grösse $b = c \cos \lambda$ so wie $\delta = c \sin \lambda$, welches Verfahren nicht nur kein Hinderniss findet, sondern auch qualificirt zu einer bald wahrzunehmenden Bestimmung ist, so erhält man die Transformation $a = b + \delta \sqrt{-1} = c\,[\cos \lambda + \sqrt{-1}\, \sin \lambda]$. Mithin hat man auch $a^{\varepsilon} = c^{\varepsilon} \cos \varepsilon \lambda + c^{\varepsilon} \sqrt{-1}\, \sin \varepsilon \lambda$, woraus durch Vergleichung mit XII sich alsbald erschliessen lässt, dass $c^{\varepsilon} \cos \varepsilon \lambda = b^{\varepsilon} - \varepsilon b^{\varepsilon}.\varkappa'$, so wie $c^{\varepsilon} \sin \varepsilon \lambda = \varepsilon b^{\varepsilon}.\mathfrak{K}$ sein muss. Allein die erstere Form oder vielmehr die daraus unmittelbar sich ergebende $c.\cos \varepsilon \lambda^{\frac{1}{\varepsilon}} = [b^{\varepsilon} - \varepsilon b^{\varepsilon}.\varkappa']^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ist nahezu vollkommen identisch mit V, sie führt demnach auch nothwendig zu demselben Schluss, so dass daraus, wie dort gezeigt worden ist, im Falle $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$, wodurch $\cos \varepsilon \lambda^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1$ zu werden genöthigt wird, sich auch $\frac{c}{b} = e^{\varkappa'}$ ergibt. Hierdurch wird nicht nur $\varkappa' = \log \frac{c}{b}$ aufgezeigt, sondern auch, da durch die obige Transformation $c^2 = b^2 + \delta^2$, also auch $\frac{c}{b} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{b^2}}$ begründet ist, im Sinn der Behauptung $\varkappa' = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\delta^2}{b^2}\right)$ ersichtlich gemacht, und ausserdem ist auch $c = b.e^{\varkappa'}$. Andererseits hat man aus $c^{\varepsilon} \sin \varepsilon \lambda = \varepsilon b^{\varepsilon}.\mathfrak{K}$, im Falle $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$, wodurch $\sin \varepsilon \lambda = \varepsilon \lambda$ zu werden genöthigt wird, zunächst $\mathfrak{K} = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}}.\lambda$, welches wegen $\frac{c}{b} = e^{\varkappa'}$ also wohl $e^{\frac{\varkappa'}{\infty}} = e^0 = 1$, dann wegen $tg \lambda = \frac{\delta}{b}$ also $\lambda = arc\, tg \frac{\delta}{b}$, zu der Gleichung $\mathfrak{K} = arc\, tg \frac{\delta}{b}$ führt, gerade so wie im §. 27 erhalten worden ist. Wäre nun bei nicht unterdrücktem $\varkappa'$ der Weg zu der Form des Verhältnisses zwischen a und b zu finden, so reichte es hin, in der obigen Transformation, wornach $a = c\,(\cos \lambda + \sqrt{-1}\, \sin \lambda)$ erscheint, die Werthe $c = b.e^{\varkappa'}$ und $arc\, tg \frac{\delta}{b} = \mathfrak{K}$ einzusetzen, wodurch sich $a = b\, e^{\varkappa'}\, (\cos \mathfrak{K} + \sqrt{-1}\, \sin \mathfrak{K})$, mithin das fragliche Verhältniss $\frac{a}{b} = e^{\varkappa'}.f(\mathfrak{K})$ vor Augen stellt. Man sieht daraus, dass, weil nach §. 29 dem absoluten Zahlwerth nach $a = c$ besteht, wobei $c = b\, e^{\varkappa'}$ kurz zuvor bekannt geworden ist, zwischen a und b nicht nur eine Verschiedenheit der Lagen obwaltet, sondern auch eine Verschiedenheit im Zahlwerth, welche letztere durch $c\,(= a) + b = e^{\varkappa'} \div 1$ angegeben wird.

Hierzu füge ich nur anmerkungsweise noch bei, dass mir die gegenwärtige Art des Beweises zweckdienlicher scheint, nicht nur weil sie keine Verfolgung gegen die Grösse der Einen Qualität auch zum Schaden der Andern zu eröffnen braucht, sondern auch, weil sie Umstände, wie $\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}} = 1$ u. a. vor Augen legt, die zur rechten Zeit wichtig werden können. Weil dieselben in dem Fall, wo $a = b$ geworden ist, wo also die sächliche Basis nur $= b$ erscheint, allenthalben evanesciren, und wann man sie nicht anderweitig kennt, aus dieser sächlichen Basis nicht erkennbar werden, so leuchtet ein, wie unthunlich es ist, von hier aus zu einem Mehr der sächlichen Basis zu übergehen.

Und so wie sich hier der Gang von einem bedingten Resultat zum Ursprung desselben als von Hinderniss, wenn nicht selbst Gefahr fehlzuschliessen, umgeben zeigt, so ist im Fall eines Rechnungsresultates überhaupt, rücksichtlich dessen nicht einmal klar ist, ob dasselbe von einer Bedingung abhängt oder nicht, noch weniger möglich, die Beziehung zu desselben Ursprung wahrzunehmen; bei welcher Sachlage dann nicht nur die sächliche Basis zurückfällt in die Verborgenheit, sondern auch das Resultat selbst in Betreff seiner Haltbarkeit bald zum Unglauben, bald zum Aberglauben führt. Es ändert die Sache nicht, wann die Wissenschaft diesen Zustand in eigene ständige Benennungen hüllt, wie etwa bei der Gleichung

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta - \tfrac{1}{3}\sin 3\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \ldots$$

geschieht, wo man den in den Fällen $\theta = \pi$, 3π, überhaupt $\theta = (2h + 1)\pi$ sich offenbarenden Widersinn, dass nämlich $(2h + 1)\frac{\pi}{2} =$ Null sein soll, mit dem Namen der „Unstätigkeit" belegt. Das was hier die entscheidende Rolle spielt, liegt dennoch immer darin, dass die Beziehung des Resultates sammt Unstätigkeit zu seinem Ursprung nicht hergestellt und beleuchtet ist. Durch die Entstehung aus der Quelle als durch die reale Begründung werden bei vorwurfsfreier Form allein die Ergebnisse klar, weil so nicht nur die sächliche Basis als ursprüngliches Datum oder Grundvoraussetzung bekannt erscheint, sondern auch die innerhalb der Entwicklung nöthigen Vorgänge vor das Bewusstsein treten, und so ihr Resultat im Zusammenhang mit seinem realen und formalen Erforderniss sich zeigt.

Die bisherige Algebra bleibt aber in mannigfachen Puncten hinter ihrem Erforderniss zurück. Sie bleibt namentlich vielfach hinter dem realen Erforderniss zurück; welcher Umstand, wie ich zu zeigen hoffe, sogar die Folge hat, dass selbst die Uroperation, nämlich das Addiren, bisher nur als ein sehr specieller Fall geübt wird, und dass sie selbst mit diesem Theile ihres Wesens und Umfangs noch im Zwielicht steht. Denn man kann schon überhaupt die Algebra muthvoll fragen, ob ihre Anwendung der Operationsbezeichnungen „ + und — " eine feststehende, Eine Bedeutung hat, oder ob nicht vielmehr die Verwendung eine mehrdeutige ist; man kann insbesondere in letzterem Fall sie fragen, ob sie der Folgen davon mächtig ist. Ich glaube sogar, dass wann d'Alembert in diese Frage eingegangen wäre, sein End-Urtheil über die Beschaffenheit der algebraischen Analyse eine eingreifendere Schärfe und Bestimmtheit angenommen hätte; und — vielleicht hätte Descartes in gleichem Falle, selbst seinem System mehr als misstraut.

Doch wie der Zustand gegenwärtig ist, wird die Läuterung des Calcüls immer bedingt sein, nicht allein durch ein Zurückgehen bis auf die Uroperation oder das Summiren, sondern selbst durch ein Eingehen auf die Präcision der Zeichen. Denn es steht fest, und wann ein Vorwurf darin läge, so könnte die Wissenschaft sich dessen kaum erwehren — dass die Zeichen + und — nicht blosse Operationszeichen sind. Die Operation aber auszudrücken, ist sicher Ein Zweck davon, und zwar ein auferlegter Zweck. Käme nun darüber hinaus, factisch auch nicht mehr als Eine weitere Bedeutung noch hinzu, so gäbe sich derjenige Zustand zu erkennen, denn man Zweideutigkeit nennt; und diess so wahr als Eins und Eins, Zwei sind. Es lässt sich nicht beweisen, dass diess so sein müsse; wohl aber kann das Gegentheil bewiesen werden, nämlich dass diess so nicht sein muss. Und selbst der Behauptung der Unschädlichkeit davon lässt sich entgegentreten, indem man damit zusammenhängende Ergebnisse vor Augen legt, von denen nicht die Klarheit und Entwicklung, sondern nur die Unklarheit und Verwicklung der Wissenschaft Vortheil zieht. Was die Darthuung des erwähnten Gegentheils betrifft, so habe ich schon vorhin, namentlich im §. 6 gezeigt, dass wann es sich um die Bezeichnung der sogenannten negativen Lage handelt, diese Lage durch $f\overline{(\pi)}$ gegeben werden kann, während die sogenannte imaginäre Form durch $f\overline{\frac{\pi}{2}}$ oder $f\overline{\frac{3\pi}{2}}$, und die absolute oder positive Lage durch $f\overline{o}$, und $f\overline{2\pi}$ u. s. f. dargestellet wird. Wo also in der Ebene immer eine Grösse liegt, — niemals bedarf sie, mag der Fall wie immer beschaffen sein, weder das Zeichen +, noch —, noch $\sqrt{-1}$ um ihre Lage zu exhibiren; denn, es thut diess die Lagefunction. Ja die Bezeichnung mit + und — und $\sqrt{-1}$ kann, wenn es um die Sache Ernst ist, nicht einmal für zureichend zur Darstellung der Lage erkannt werden, denn woher kommt ihr die Möglichkeit zu, die mitten dazwischen liegenden Stadien der Lage, woher die Fähigkeit, den Umstand der Rückkehr, jenen der Wiederholung der Rückkehr zu einer von diesen, oder zu einer der gar nicht ausdrückbaren Zwischenstadien der Lagen, dann die Richtung des Ueberganges, klar und exact hinzustellen. Wo dagegen nicht eine Lage zu bezeichnen ist, sondern für eine zu vollziehende Hinzufügung oder Wegnahme, also für eine blosse Operation ein Zeichen benöthiget wird, da thut nicht die Lagefunction den erforderlichen Dienst, sondern da muss + für die Hinzufügung, und für die Wegnahme — verwendet werden. Beides nur hiefür allein. Hierbei muss rücksichtlich der Folgen es Maxime sein: Die Rechnung soweit sie im Setzen besteht, gleichviel ob dasselbe ein erstes oder ein wie oft immer, selbst ins Unendliche wiederholtes ist, als Setzen von etwas, was ein Datum ist, zu betrachten; und soweit sie ein Wegnahmen einschliesst, ihre an das Dasein des Gegebenen gebundene Subsistenz, aus begreiflichem Grund durch die Endlichkeit der Wegnahme bedingt zu finden; so zwar, dass wann diese Endlichkeit der Wegnahme nicht nur zur Erschöpfung des Gegebenen führt, sondern die Rechnung auch dann noch weiter zu andern als mit dem Datum qualitativ identischen Resultaten gelangt, diese Resultate wie die ganze weitere Rechnung hohl und ohne Gehalt erscheinen müssen; es wäre denn, dass ein von dem Erschöpften qualitativ verschiedenes Gegebene existirte, welches als eine neue, also zweite sächliche Basis dem Calcül unterschoben, ihm auch in seiner Fortsetzung Gehalt verleiht. So dass, während der Nichtsinn Regel ist, der Sinn nur im Wege einer neu sich einschleichenden Setzung oder Fiction, durch einen dieselbe begünstigenden Zufall gerettet wird; wie der Fall ist, wann man Vermögen oder Zeit berechnet hat, und sie negativ resultiren. Was weiter die Schädlichkeit der Folgen betrifft, die hervorgehen, wann die Annehmbarkeit einer mehrfachen Bedeutung der erwähnten Zeichen vorausgesetzt wird, so scheint es angezeigt zu sein, diess einem folgenden Orte vorzubehalten, wo eine derlei Folge unter Umständen ihrer Entstehung wird wahrgenommen werden können. (S. §. 34.)

§. 31. Nach geschehener Feststellung des Zweckes, für welchen allein die Operationszeichen zu verwenden sind, soll nunmehr zu demjenigen Rechnungsverfahren übergegangen werden, mittelst dessen gegebene Theile in Ein Ganzes verbunden werden sollen. Es wird von realer Seite vor Allem klar sein, dass hier, wo das Subordinatsystem die allgemeine sächliche Basis bildet, es nur Grössen dieses Systemes sind, die der beabsichtigten Behandlung unterzogen werden können. Und wenn man auf die formale Seite blickt, so wird gleichwol nicht schwer zu erkennen sein, dass das Ergebniss sich durch ein von dem gewöhnlichen Addiren abweichendes Verfahren bedingt erweist. Es scheint zweckdienlicher zu sein, dieses Verfahren der Sache nach wahrnehmbar zu machen, als es durch Namen oder Worte darzustellen, zumal dasselbe bereits theilweise in Vollzug gekommen ist, also nicht mehr für ganz unbekannt gelten kann. Denn erinnert man sich der bisher behandelten Grundvoraussetzungen, so kamen in derselben bereits Fälle vor, wo Theile, die durch das Zeichen + auseinander gehalten waren, ihrer jezt ins Auge gefassten Bestimmung ein Ganzes zu liefern, wirklich zugeführt worden sind. Es geschah zwar ein Gleiches auch mit den durch — gebildeten Binomen; doch scheint es gut zu sein, diese Fälle noch vor der Hand ausser Acht zu lassen, nicht nur weil das Minuszeichen keine Addition exhibirt, sondern auch weil dasselbe ausser der damit angezeigten Wegname, die aber auf eine Raumlinie angewandt mit einer bestimmten Lage concurrirt, auch dieser Lage zur Bezeichnung dient, mithin zweideutig ist. Geht man auf die reinen Summationsfälle zurück, so wurde schon im §. 28 die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \cos \mathfrak{K} + \sqrt{-1} \sin \mathfrak{K} = f\overline{\mathfrak{K}},$$

das ist 20) $b \cos \mathfrak{K} + b\sqrt{-1} \sin \mathfrak{K} = b \,.\, f\overline{\mathfrak{K}}$

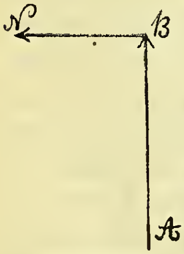
erlangt, wodurch zwei rechtwinkelig gegen einander stehende Bestandtheile wirklich in Ein Ganzes verbunden worden sind, so zwar, dass das Letztere sowohl seinem absoluten Betrage als auch seiner Position nach exact determinirt erscheint. Hieran bietet sich vor der Hand jedoch nur der Werth der Form, während dem Gehalte nach, eben nicht mehr als $b = b$ ausgesprochen wird, da wie bekannt $\mathfrak{K}$ = Null darin besteht, also der zweite Summande eine Nulle ist.

Ein anderer Fall wurde im §. 29 angezeigt, als worin die zwei Bestandtheile des Binom's der Grundvoraussetzung IX zur Verbindung zu einem Ganzen vorbereitet worden sind, indem nämlich $b = c \cos \lambda$ und $\delta = c \sin \lambda$ gesetzt worden ist, mittelst welcher Transformation auch sofort $b + \delta\sqrt{-1} = c\,(\cos \lambda + \sqrt{-1} \sin \lambda) = c \,.\, f\overline{\lambda}$ erhalten wird. Da nun dieser Transformation gemäss nicht nur $tg\,\lambda = \frac{\delta}{b}$, also wegen $\frac{\delta}{b} = tg\,\mathfrak{K}$, offenbar $\lambda = \mathfrak{K}$ sich zeigt, sondern auch wegen $\frac{a^n}{c^n} = 1$ sich dem absoluten Werthe nach $c = a$ ergibt; da ferner gemäss derselben Transformation $b^2 + \delta^2 = c^2$, also $c = \sqrt{b^2 + \delta^2}$ ohne Doppelzeichen erhalten wird, so geht offenbar, indem jederzeit $log\, U = log\, U$ also allgemein $U = e^{log\, U}$ sein muss, auch $c = e^{log \sqrt{b^2+\delta^2}}$ hervor, welches mit dem abloluten Werthe von a zusammenfällt. Dieses setzend gelangt man zu dem Resultat

$$21)\ b + \delta\sqrt{-1} + e^{log \sqrt{b^2+\delta^2}} \,.\, f\overline{\mathfrak{K}},$$

wornach denn auch diese zwei Bestandtheile zu einem Ganzen verbunden sind. Legt man nun den gegebenen Bestandtheilen den ihnen gebührenden Namen der summanden Theile bei, weil sie es in der That ja sind, so wird man schnell darüber orientirt sein, dass das Ganze sich unwiderstehlich den Namen der Summe vindicirt; da ein Ganzes, das mehreren summanden Theilen gleicht, von je her Summe heisst. Und so wird man den Thatbestand einer neuen Summation gewahr, einer Summation, die so speciell sie bisher ist, und so ungewohnt sie erscheinen mag, dennoch bald ihren realen und formalen Zusammenhang mit der gewöhnlichen Addition so ersichtlich machen wird, dass die letztere, die ohnehin der Form nach fast nur in $b + \delta = b + \delta$ besteht, sich darunter wird subsumiren lassen.

Was die reale Seite betrifft, so kann man bezüglich der gewöhnlichen Addition nur von deren Erscheinungen in der geraden Linie sprechen; denn, darüber hinaus würde sie (die Addition), algebraisch nicht geübt. Geht man aber auf diese Erscheinungen in der geraden Linie, ein, so liegt, wie man seit jeher weiss, ihr Kraftmoment darin: dass, wann zwei gerade Linien zu addiren sind, der Raumort, der die Summe endbegrenzen soll, dorthin sich stellt, wohin der Endpunct des zweiten Summanden in der diesem eigenen Richtung fällt; so zwar dass derselbe, wann der zweite Summande die gleiche Richtung mit dem ersten hat, über den ersten Summanden um die ganze Länge des zweiten hinaus zu liegen kommt (vergl. §. 1); wogegen er, wann der zweite Summande die entgegengesetzte Richtung von jener des ersten hat, also die Aufgabe hier unter der Form $b + \delta . f_{\overline{\pi}}$ zu erscheinen hätte, innerhalb des ersten Summanden, und zwar um die ganze Länge des zweiten einwärts fällt. Immer besteht also von realer Seite das Addiren darin, dass erstlich der Anfangspunkt des zweiten Summanden im Endpunkt des ersten festgestellt, und sodann auf Richtung des zweiten Summanden zu dessen Endpunct als dem Endort der Summe übergangen wird, wodurch man ausser dem gegebenen Anfangspunkt jetzt auch den Endpunkt der Summe kennen lernt. Geht man mit dieser Erfahrung nun zu den Summationsfällen 20) und 21) über, so wird darin der von sächlicher Seite eben dargelegte Vorgang buchstäblich realisirt. Denn es soll aufgegeben sein, die Summation $AB + BN$, deren erst nur oberflächlichen Ansatz die nebenstehende Zeichnung ersichtlich macht, zu vollführen. Ehe zur Vollführung geschritten wird, ist es eine unerlässliche Forderung, die beiden Summanden zu kennen, das heisst, es ist Forderung, die Merkwürdigkeiten derselben in der geschärften Sprache des Calcüls wahrzunehmen, damit im Bewustsein Klarheit möglich wird. Was die absoluten Beträge



betrifft, so sind sie als Data einfach klar. Was jedoch die Lagen betrifft, so liegt nicht nur eine Verschiedenheit derselben vor, sondern es ist auch nicht festgesetzt, ob die Eine auf die Andere, oder ob beide auf eine Dritte hier gar nicht erscheinende, als auf die absolute zu beziehen seien. Und da alles dieses bekannt, oder um genau zu reden „gegeben" sein muss, ehe man in der Aufgabe was unternimmt, so hat die obbesagte unerlässliche Forderung eigentlich den alleinigen Zweck, dieses zu erfragen. Weil diess Data sind, so mögen sie durch Setzung also heissen: Die Linie AB gelte für absolut, die BN sei dagegen orthogonal. Jenes wird durch $AB f(\overline{o})$ exhibirt, worin $f\bar{o}$ auch hinwegbleiben kann; und um BN zu characterisiren, muss eine der BN gleiche Linie, etwa BM in absoluter Lage gedacht werden, die dann durch Versetzung in die Lage $f\overline{\tfrac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}$, mit der BN congruent erscheinen wird. Da sonach

$$BN \equiv BM \,.\, f\overline{\tfrac{\pi}{2}} = BM \,.\, \sqrt{-1}$$

besteht, so geht der obige Summationsansatz in den ihm congruenten, aber präcisen

$$AB + BN \equiv AB + BM \,.\, \sqrt{-1}$$

über, worin das zweite Binom zur Vollführung der Summation vorbereitet ist. Wenn man hierin die absoluten Werthe mittelst

$$AB = AC \cos\lambda \text{ und } BM = AC \sin\lambda$$

ganz so wie oben transformirt, welches eben so viel heisst, als wenn man eine in die Lage von AB fallende also mit ihr zugleich absolute Linie AC zu Hilfe ruft, und zwar von einer solchen Grösse, wie sie durch die Gleichung

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2,$$

das ist

$$AC = AB \,.\, \sqrt{1 + \frac{\overline{BM}^2}{\overline{AB}^2}} = AB \,.\, e^{\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\overline{BM}^2}{\overline{AB}^2}\right)}$$

determiniret wird, so wird man zuvörderst erkennen, dass wie die Gleichung

$$AB + BM \,.\, \sqrt{-1} = AC\,[\cos\lambda + \sqrt{-1}\,\sin\lambda] = AC \,.\, f\bar{\lambda}$$

lehrt, diese AC der absolute Werth der Summe ist. Allein noch ist AC nicht schlechthin die Summe, da zu deren Vollständigkeit ja auch die Lage $f\bar{\lambda}$ gehört; indessen schon zeigt sich an der Linie AC, dass ihr absoluter Werth mit AN zusammenfällt. Nimmt man nun noch die Lage $f\overline{\lambda}$ hinzu, die wirklich nur einzig der Linie AN angehört, da sie durch

$$tg\,\lambda = \frac{BM}{AB} \text{ also } \lambda = arc\; tg\frac{BM}{AB}$$

determiniret wird, so hat man die Congruenz $AC\,.f\overline{\lambda} \equiv AN$. Es ist also wie man sieht, in der That N der Grenzort der Summe und AN die Summe selbst sammt allem Zugehör. Und da hiermit der nämliche reale Vorgang, der in der geraden Linie die Summe finden lehrte, auch hier am Weg zum Resultat mit Präcision vollzogen wird, so erscheint das dort hervorgehobene Wesen der Addition auch dieser Summation eigen: mithin jene und diese von realer Seite in voller Uebereinstimmung. Wenn in dem gegenwärtigen Fall der zweite Summande weder dieselbe Lage wie der erste, noch die derselben entgegengesetzte hat, sondern in einer dritten davon rechtwinkelig abweichenden Lage aus der geraden Linie hinaus in die Ebene tritt, so kann diese Verschiedenheit, die bloss die Lage betrifft, nicht hindern, dass sich die dargelegte Operation als eine wahre Summation behaupte; denn: alsdann würde ein gleiches Hinderniss auch zwischen die beiden Summationsfälle $b + \delta$ und $b - \delta = b + \delta f\overline{\pi}$ in der geraden Linie treten, die sich gleichfalls nur durch die Lage des einen Summanden unterscheiden. Soviel über die reale Seite dieses Summationsfalles, an welchem schon nicht nur Symptome von der Bestimmung der Summation, einen grösseren Spielraum als die blosse gerade Linie zu beherrschen, wahrzunehmen sind, sondern welcher beinahe auch berechtigt scheint, sich der geometrischen Lösung des Problems, betreffend den gleichen Fall der Zusammensetzung der Kräfte, zur Seite zu stellen.

Uebergehend nun zu der formalen Seite der vorstehenden Summation, so ist es vor Allem klar und bekannt, dass im ersten Stadium der Cumulation des Grundactes der Rechnung (§. 9.) nämlich in der linearen Summation bisher keine bemerkenswerthe Methode dieser Addition im Gebrauche war; die Algebra hat sich in diesem Stadium lediglich darauf beschränkt, $b + \delta = b + \delta$ und auch $b - \delta = b - \delta$ zu sagen, und dieses als formalen Gehalt, als Methode der Summation bestehen zu lassen. Im zweiten Stadium, nämlich jenem der Multiplication dagegen, gab es schon Spuren einer besonderen Methode der Transformation eines Binoms; so hat sich namentlich die Gleichung

$$b \pm \delta\sqrt{-1} = r\,(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\sin\varphi) = r\,.\,e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}$$

einer ausgebreiteten Verwendung erfreut, wobei r zu der ständigen Benennung eines Modulus gekommen ist. Allein ich habe gezeigt, dass $\varphi\sqrt{-1}$ zur Natur und somit auch Dienstleistung als Logarithmus nicht befähigt ist — wesshalb sich diese Spur von Summation nicht bewährt. Auch die Integration als Summirungsmethode kann hieher nicht bezogen werden, da nicht unendlich viele kleine, sondern vor der Hand nur zwei, und zwar wie immer beträchtliche Grössen zu summiren sind. Eine ganz bestimmte Methode innerhalb des zweiten Stadiums ergaben aber die Gleichungen 9. und 10. (vergl. §. 23), als wornach sich im Resultat $a = b\,.\,e^{x}$ und $a' = b\,.\,e^{-K}$, das ist wegen I und II „$b + \delta = b\,.\,e^{x}$ und $b - \delta = b\,.\,e^{-K}$" ergeben hat. So dass nach dieser Methode jede zwei Grössen summirt werden können, sobald die Summationsaufgabe nur mit der Grundvoraussetzung I und II im Einklang steht. Hat man nun dieses zur Kenntniss genommen, und wendet den vergleichenden Blick sodann der Summation

$$b + \delta\sqrt{-1} = b\,e^{x}\,.\,f\overline{\mathfrak{K}}$$

zu, so trifft man auch hier genau dieselbe Form der Summe an, mit der einzigen Verschiedenheit, dass während dort $f\overline{(0)}$ die Lage war, sie hier als $f\overline{\mathfrak{K}}$ erscheint. Welches aber eine Verschiedenheit ist, die allein sich dazu eignet, die Eigenthümlichkeit der neuen Summe genau zu characterisiren, und die sonach nicht entbehrt werden kann. Also besteht auch auf der formalen Seite zwischen jener und dieser Summation genaue Uebereinstimmung. Es kann nicht Wunder nehmen, dass hier, wie man sieht, zur Ausführung der Summation sich des Logarithmirens bedient wird; es ist diess nur ein rechnungsmässig determinirter Ausdruck dessen, was Leibnitz und d'Alembert wie eine Art Vorhersagung in Betreff des Lagecalcüls ausgesprochen haben, da sie meinten, die Lage müsste anders als die absoluten Grössen in die Rechnung einbezogen sein. Obwohl es nicht Zweck ist, diese ledige Muthmassung bewährt oder nicht bewährt zu finden, so thun sich dennoch schon an der vorliegenden Summation Anhaltspuncte dazu hervor, da mit der linearen Summation in das zweite Stadium getreten werden muss, um zwischen der einen und andern Art der Summation eine vollkommene Uebereinstimmung zu finden.

§. 32. Die unter der Form 21) aufgestellte Summation ist aber nur ein vereinzelter Fall des aus der absoluten Linie getretenen zweiten Summanden, und zwar nur derjenige Fall, wo dieser Summande geradezu orthogonal aus der Linie tritt. Es wird demnach fernerhin darauf ankommen, diesen Zwang von ihm wegzunehmen, um die Successe der Summation auch in allen jenen Fällen wahrzunehmen, wo der zweite Summande eine ganz beliebige Lage $f\overline{\theta}$ in der mit θ zugleich gegebenen Ebene inne hat. Hiernach wird die sächliche Basis der Summation unter einer neuen Form erscheinen müssen, und zwar wird, weil

$$\delta f\overline{\theta} = \delta\,[\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta]$$

besteht, die neue Grundvoraussetzung die Gestalt

$$\text{XX}\quad a = b + \delta f\overline{\theta} \text{ das ist } a = b + \delta[\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta]$$

annehmen, wobei die Grössen b und ε noch fortan absolut verbleiben. Indem man auch auf dieses Datum wieder die nämlichen algebraischen Gesetze wie vorhin, in Anwendung bringt, gelangt man zu der folgenden Entwickelung:

$$\text{XXI}\quad a^{\varepsilon} = [b + \delta(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)]^{\varepsilon} =$$

$$= b^{\varepsilon} + \varepsilon b^{\varepsilon}\,.\,\frac{\delta}{b}(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) +$$

$$+ \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2} b^{\varepsilon}\,.\,\frac{\delta^2}{b^2}\,(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\,\sin 2\theta) +$$

$$+ \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3}\,.\,b^{\varepsilon}\frac{\delta^3}{b^3}(\cos 3\theta + \sqrt{-1}\,\sin 3\theta) + \ldots$$

$$= b^{\varepsilon} + \varepsilon b^{\varepsilon}\left\{\left(\frac{\delta}{b}\cos\theta + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\cos 2\theta + \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3}\frac{\delta^3}{b^3}\cos 3\theta + \ldots\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{-1}\left(\frac{\delta}{b}\sin\theta + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\sin 2\theta + \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3}\frac{\delta^3}{b^3}\sin 3\theta + \ldots\right)\right\},$$

als worin man nur wieder die Abkürzungen

$$22)\ \frac{\delta}{b}\cos\theta + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\cos 2\theta + \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3}\frac{\delta^3}{b^3}\cos 3\theta + \ldots = \varkappa''$$

und

$$23)\ \frac{\delta}{b}\sin\theta + \frac{(\varepsilon-1)}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\sin 2\theta + \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{2\,.\,3}\frac{\delta^3}{b^3}\sin 3\theta + \ldots = \mathfrak{K}'$$

einzuführen braucht, um sofort abermals bei der Form

$$\text{XXII}\quad a^\varepsilon = b^\varepsilon + b^\varepsilon\,[\varkappa'' + \mathfrak{K}'\sqrt{-1}]$$

anzulangen, die wie der Anblick zeigt, der XII vollkommen analog erscheint. Es wird demgemäss auch hier behauptet, dass zwischen $\varkappa''$ und $\mathfrak{K}'$ eine eben solche Zerklüftung eintritt, wie sie dort bereits zu sehen war; das heisst, dass auch hier $\varkappa''$ ein Logarithmus und $\mathfrak{K}'$ ein Kreisbogen ist. Der Beweis dessen liegt wieder in jener Transformation, für welche XXIII $b + \delta\cos\theta = c\cos\lambda$, und $\delta\sin\theta = c\sin\lambda$ zu Hilfe genommen wird. Denn, sowie man hierdurch zunächst

$$\text{XXIII}'\ a = c\,[\cos\lambda + \sqrt{-1}\sin\lambda];$$

also weiter auch

$$a^\varepsilon = c^\varepsilon\cos\varepsilon\lambda + c^\varepsilon\sqrt{-1}\sin\varepsilon\lambda$$

erhält, so gelangt man dadurch, dass man diese zuletzt erhaltene Form mit der ganz gleichbedeutenden Gleichung XXII vergleicht, zu den bezeichnenden Gleichungen

$$\text{XXIV}\ c^\varepsilon\cos\varepsilon\lambda = b^\varepsilon + \varepsilon b^\varepsilon\,.\,\varkappa'' \text{ und XXV } c^\varepsilon\sin\varepsilon\lambda = \varepsilon\,b^\varepsilon\,.\,\mathfrak{K}'.$$

Allein die erstere derselben ist, wie man sieht, ganz analog mit der Gleichung III, so dass sie auch auf die in V und VII gewiesene Art zur Auffindung des Verhältnisses zwischen c und b, behandelt werden kann. Nimmt man diese Behandlung mit ihr vor, so kommt man, indem man gleichfalls wie dort, am Ende

$$\varepsilon = \frac{1}{\infty} \text{ setzt, wodurch } \cos\varepsilon\lambda^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1$$

zu werden genöthigt wird, bei dem Resultate

$$\frac{c}{b} = e^{\varkappa''} \text{ an; wornach in der That } \varkappa'' = \log\frac{c}{b}$$

erscheint, wie behauptet worden ist. Eben so geht, betreffend die Grösse $\mathfrak{K}'$, aus der Gleichung XXV schon unmittelbar

$$\mathfrak{K}' = \left(\frac{c}{b}\right)^{\varepsilon} \cdot \frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon}$$

hervor, welche Form in dem so eben gesetzten Falle $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$, wodurch

$$\sin \varepsilon\lambda = \varepsilon\lambda \text{ also } \frac{\sin \varepsilon\lambda}{\varepsilon} = \lambda$$

zu werden genöthigt wird, in der Gestalt

$$\mathfrak{K}' = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}} . \lambda$$

vor Augen tritt. So dass hierdurch $\mathfrak{K}'$ einem ausgesprochenen Kreisbogen λ gleich erscheint, gleichfalls wie behauptet worden ist. Diese Beweisführung hat aber zunächst nur den Zweck gehabt, die qualitative Beschaffenheit von $\varkappa''$ und $\mathfrak{K}'$ ersichtlich zu machen, ohne auf die expliciten Formen dieser Grössen, oder die Art wie sie Functionen sind, näher einzugehen. Da es aber wünschenswerth ist, die beiden Grössen nicht nur in geschlossener Form, die so eben erhalten worden, sondern auch bei geschlossener Form wo möglich noch explicit zu erhalten, damit das Zuthun der independenten Elemente b und δ und θ bündig ausgesprochen und doch ersichtlich sei, so bleibt noch übrig, die Transformation XXIII dahin zu benützen, um daraus $\frac{c}{b}$ und λ explicit zu finden. Nimmt man sich diesen Zweck zu erreichen vor, so hat man offenbar aus der besagten Quelle

$$b^2 + \delta^2 + 2\, b\, \delta \cos\theta = c^2,$$

mithin

$$\frac{c}{b} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{b^2} + 2\frac{\delta}{b}\cos\theta},$$

also auch

$$\varkappa'' = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\delta^2}{\delta^3} + 2\frac{\delta}{b}\cos\theta\right);$$

wodurch sich

$$24)\quad \frac{\delta}{b}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\frac{\delta^3}{b^3}\cos 3\theta - \frac{1}{4}\frac{\delta^4}{b^4}\cos 4\theta + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\delta^2}{b^2} + 2\frac{\delta}{b}\cos\theta\right)$$

ergibt.

Andererseits hat man eben so klar

$$\frac{c \sin\lambda}{c \cos\lambda} = \frac{\delta \sin\theta}{b+\delta\cos\theta}$$

mithin kurz

$$tg\,\lambda = \frac{\delta \sin\theta}{b+\delta\cos\theta},$$

also auch

$$\lambda = arc\,tg\,\frac{\delta \sin\theta}{b+\delta\cos\theta},$$

und damit

$$\mathfrak{K}' = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}} arc\,tg\,\frac{\delta\sin\theta}{b+\delta\cos\theta}$$

wodurch gleichfalls die Gleichung

$$25)\ \frac{\delta}{b}\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\frac{\delta^3}{b^3}\sin 3\theta - \frac{1}{4}\frac{\delta^4}{b^4}\sin 4\theta + \ldots =$$

$$= \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}}.\,arc\,tg\,\frac{\delta\sin\theta}{b+\delta\cos\theta}$$

erhalten wird.

Diesemnach treten die Umstände der in XX aufgegebenen und durch die Transformation XXIII vermittelten Summation sämmtlich und vollständig hervor, so dass man nicht nur das Resultat, welches einfachsten Falles

$$b + \delta f\overline{\theta} = c f\overline{\lambda}$$

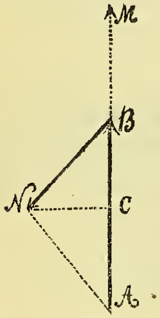
ist, in der genauen expliciten Form

$$26)\ b + \delta f\overline{\theta} + b\,.\,e^{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\delta^2}{b^2}+2\frac{\delta}{b}\cos\theta\right)}.\int\overline{\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}}.\,arc\,tg\,\frac{\delta\sin\theta}{b+\delta\cos\theta}}$$

erhält, sondern auch die mit seiner Entstehung verbundenen Vorgänge und Folgen klar beleuchten kann. Wie auch sogleich Einiges davon erwähnt werden soll.

§. 33. Obwohl der in der Grundvoraussetzung enthaltenen Grösse *b* bisher noch immer nicht gestattet war, anders als schlechthin absolut zu sein, und nur *a* allein hiervon in seinem zweiten Summanden eine Ausnahme machen dürfte, so wird es der Algebra dennoch möglich, die auf dem neu betretenen Gebiete gemachten Erfahrungen in etwas zu erweitern. Es ist ein characteristischer Umstand der Aufgabe XX, dass sie mit dem der

Mechanik bekannten Falle beinahe zusammentrifft, wo zwei um einen, von einem Quadranten verschiedenen Winkel divergirende Componenten zu einer Resultanten zu verbinden sind. Ich sage „beinahe", so wie ich diess auch bei der Gleichung 21.) beizusetzen genöthigt war; und zwar aus dem Grund, dass der Grösse b als der Einen Componenten bisher noch nicht gestattet war, anders als bloss absolut zu sein. In solchem Falle nun weiss aber die Mechanik, welche absolute Grösse die Resultante hat, und gibt auch vor, die Lage der Resultanten determiniren zu können. Nun, auch die Algebra behauptet dieselbe Aufgabe, wenigstens bezogen auf die mit θ zugleich gegebene Ebene — in diesem Umfange aber auch exact — auflösen zu können, und so weit auch die Mechanik exact zu sein vermag, mit ihr übereinzustimmen. Beweis davon kann die folgende geometrische Darlegung sein. Sind die Componenten AB und BN unter der Neigung ABN zur Darstellung der Resultanten aufgegeben, so ist gewiss



$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2\,AB\,.\,BN\cos ABN$$

diejenige geometrische Gleichung, welche den absoluten oder numerischen Werth der Resultanten AN zu geben verpflichtet ist. Sagt man nun, es sei im Falle der Zeichnung $AB = b$ bezüglich der Lage absolut, um hierdurch den Anfang der systemgemässen Divergenzen festzustellen, dann, es sei $BM = \delta$ dem absoluten Betrage nach mit BN gleich, so ist alsbald klar zu sehen, dass BN nur in der Lage BM absolut sein würde, und dass demgemäss, weil gegebener Massen BN von der absoluten Lage um den Winkel MBN divergirt, dieser Winkel die systemgemässe Divergenz der Componenten BN ist. Man hat sonach $MBN = \theta$, und $BN = BM.f\overline{MBN} = \delta f\overline{\theta}$. Weil nun $ABN = \pi - \theta$, mithin bekanntlich $\cos ABN = \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta$, also kurz $\cos ABN = -\cos\theta$ besteht, weil ferner in der Gleichung $\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2\,AB\,.\,BN\cos ABN$ nach geometrischem Gebrauche unter AN und BN nur die zugehörigen numerischen Werthe verstanden werden können, und in der That auch immer nur so verstanden worden sind, wesshalb für BN nur $BM = \delta$ allein zu setzen kommt, so erhält man dieses substituirend, die Form $\overline{AN}^2 = b^2 + \delta^2 + 2b\delta\cos\theta$, wodurch $\overline{AN}^2 = c^2$ also $AN = c$, numerischer oder absoluter Werth der Resultanten vor Augen tritt. In dieser Beziehung kommen also Mechanik und Algebra bei demselben Resultate an.

Andererseits wird $BAN = \mathfrak{K}'$ als die Grundgrösse der Lage von AN auf folgende Art erkannt. Man hat nämlich zunächst $CN = AN \sin\mathfrak{K}'$ und $AC = AN\cos\mathfrak{K}'$ in geometrischem Sinn; also so weit schon $tang\ \mathfrak{K}' = \frac{CN}{AC}$. Nun aber ist wegen $ABN = \pi - \theta$; bekanntlich auch $\sin ABN = \sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta$, oder kurz $\sin ABN = \sin\theta$; mithin, aber immerfort im geometrischen Sinn, auch $CN = BN \sin CBN = \delta\sin\theta$, und $BC = BN\cos CBN = -\delta\cos\theta$; wodurch sofort

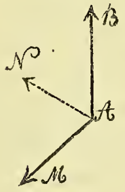
$$AC = AB - BC = b + \delta\cos\theta,$$

erhalten wird. Wenn man nun die eben erhaltenen Werthe benützt, so erhält man sogleich $tg\ \mathfrak{K}' = \frac{\delta\sin\theta}{b + \delta\cos\theta}$, wodurch auch die Neigung BAN beinahe so wie oben auf algebraischem Weg bestimmt wird. Es ist sonach nicht zu läugnen, dass der algebraische Calcül, indem er sein neues Gebiet betreten hat, dort selbst fast schon bei dem ersten Schritte eine Begegnung mit der geometrischen Mechanik bekömmt, eine Begegnung, die, woferne der algebraische Calcül allein berufen sein soll, in seinem Gebiete Mass zu geben, ihm vielleicht wohl auferlegen wird, die Rivalin zu bekämpfen, um sein Gebiet von fremdem Einflusse zu räumen. Da der Zusammenstoss innerhalb der Lösung eines und desselben Problems, wie man sieht, bezüglich seiner Thatsächlichkeit nicht bezweifelt werden kann, so muss es wohl als eine der Entscheidung entgegen sehende Frage hingestellt bleiben, ob in der That der Algebra der Vorzug gebührt, das angeregte Problem zu lösen. Diess wäre die Eine Erfahrung, die die Algebra neuerdings zu machen im Falle ist. Es gibt hierbei Umstände, die zu Gunsten der Algebra so mächtig streiten, dass es scheint, die geometrische Mechanik werde in Absicht derselben gestehen müssen, der Algebra nachzustehen. Denn, während die Mechanik weder die Aufgabe, so einfach sie ist, in der geschärften Sprache des Calcüls, ohne Figur aufzustellen, noch für die zu deren Lösung erforderliche Operation einen rechnungsmässigen Namen anzugeben, noch das Resultat in einem ungetrennten

Ausdruck zusammen zu fassen im Stande ist; bezeichnet die Algebra die Aufgabe einfach durch $b + \partial f\overline{\theta}$, erklärt die aufgegebene Operation für eine ledige Summation, und gibt für die Summe sammt Zugehör die einfache Form $c f\overline{\mathfrak{K}'}$ an. Ja noch mehr, der Gewalt ihres eigenen klaren Augenscheines weichend, muss die geometrische Mechanik bekennen, dass die Lagen der drei Linien AB, BN, AN verschieden sind, da ein Dreieck inzwischen liegt; sie muss einräumen, dass wann AB absolut wie hier, sein soll, BN unter der genauen Form $BN = BMf\overline{\theta}$, und $AN = cf\overline{\mathfrak{K}'}$ erscheint. Nöthigt man sie nun, diese wahren expliciten Werthe in der Gleichung

$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2\,AB.BN \cos ABN, \text{ —}$$

nicht aus blossem Belieben, so wie es bisher ein blosses Belieben war, die Linien, ungeachtet sie verschieden liegen, bloss für numerische Werthe anzunehmen, sondern weil sie factisch, so wie in der Figur darin stehen, — auch einzusetzen, so wird sogar sichtbar, dass die Gleichung dadurch eine unrichtige wird. Und doch rührt diess nur davon her, dass durchgängige Richtigkeit in Betreff der Bestandtheile darin Platz genommen hat. Eine solche Beschaffenheit des Calcüls nun, scheint es, kann nicht befriedigend sein. Was aber anderseits die geometrische Bestimmung der Lage der Resultanten betrifft, so wird sie nur bezogen auf die Eine der beiden Componenten bestimmt. Ist aber dies, und kommt hinzu: erstlich, dass auf keine Art ausser Zweifel gestellt ist, welche der beiden Componenten AB und AM eher berufen sein soll, dass darnach die Bestimmung geschieht; und dann, dass bei Allem dem die Lage so der Einen wie der andern Componenten, bezogen auf den Raum, eine überall gleich-absolute, also nicht festbestimmte ist; so muss erkennbar werden, dass des letzteren Grundes wegen eine durchgängige Bestimmtheit der Lage der Resultanten AN schon gar nicht möglich wird, während sich der dann noch allein übrig bleibenden relativen Bestimmung, des ersten Grundes wegen eine doppelte Zweideutigkeit entgegenstellt — und zwar nicht nur eine Zweideutigkeit in Betreff des Anfangs der Divergenz, sondern auch in Betreff ihrer Richtung. Und



solche Umstände dürften sich in der That nicht eignen, die geometrische Bestimmtheit der fraglichen Lage zu vertheidigen. Eine andere neue Erfahrung liegt in Folgendem. Als in der Gleichung XII die Grössen $\varkappa'$ und $\mathfrak{K}$ sich von einander trennten, und über diese Thatsache in die Erörterung der Umstände davon eingegangen ward, da wurde dort die Wahrnehmung gemacht: dass der unter 17.) dargestellte Logarithmus $\varkappa'$ an keine Grenze gebunden war, mithin er und sein zugehöriger Zahlwerth von a, ins Unendliche zu- und abzunehmen geeignet war. Geht man mit dieser Notiz nunmehr zu der Gleichung 24.) über, worin links der Logarithmus $\varkappa''$ als das erscheint, was er als Logarithmus dem Werth nach ist, während rechts angegeben wird, von was er der Logarithmus ist, so ist man genöthigt, zu erkennen, dass sowohl der Logarithmus $\varkappa''$ als auch der Zahlwerth, wozu er gehört, periodisch sind; das heisst, dass sie durch alle möglichen absoluten Werthe θ wohl Aenderungen ihres Werthes erleiden, allein Aenderungen von solcher Art, dass unter ins Unendliche fortwachsenden θ ihre Werthe weder gleichfalls ins Unendliche fortwachsen, noch fortan abnehmen können, sondern zur wiederholten Rückkehr zu denselben Werthen gezwungen sind. Ursache davon ist das Dasein eines dritten independenten Elementes θ in der Functionsform für $\varkappa''$ und $\frac{c}{b}$, welches vorhin sich noch nicht so wirksam hat insinuiren können, da es bloss als specieller Fall nämlich als $\theta = \frac{\pi}{2}$ und darum constant im Spiele war, während es jetzt entfesselt ist, und hierdurch die besagte Periodicität zu Stande bringt. Periodicität schliesst aber Phasen ein. Der Zahlwerth und sein Logarithmus haben demnach Phasen, — deren Vorhandensein durch die gleich ursprünglich unter XX dem zweiten Summanden gegebene Lage, die wie gesagt eine in der Ebene beliebige ist, bedingt und erklärt wird; deren Wirkungen dagegen in den sämmtlichen darauf begründeten Folgerungen zu erblicken sind. Es werden dadurch, um einer früheren Frage zu gedenken, die Umstände klar, unter welchen der Uebergang von der Form $e^{\varkappa}$ zu $e^{-\varkappa}$ erfolgt; denn, setzt man in $\frac{c}{b} = e^{\varkappa''}$ aus 24) den Werth für $\varkappa''$ ein, so erhält man dadurch

$$\frac{c}{b} = e^{\frac{b}{b} \cos\theta - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\cos 2\theta + \cdots} = e^{\frac{1}{2}\log\left[1 + \frac{2}{b^3} + 2\frac{\delta}{b}\cos\theta\right]} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{b^3} + 2\frac{\delta}{b}\cos\theta};$$

woraus man entnimmt, dass man dem Summanden δf_θ in der Grundvoraussetzung XX nur andere und andere Lagen zu geben braucht, um sofort auch die Summe entsprechend, nicht nur durch alle successiven Phasen des absoluten Werthes zu- und abnehmen, sondern gleichzeitig auch in Bezug auf ihre Lage in die einander nachfolgenden Phasen eintreten zu sehen. Worunter auch dasjenige Stadium als eine singuläre Phase angetroffen wird, wobei der fragliche Uebergang geschieht, — vorausgesetzt, dass der Uebergang unter den Umständen des gegebenen Falles möglich ist. Die Bedingung dieser Möglichkeit liegt aber darin, dass die Summe

$$\frac{\delta^2}{b^2} + 2\frac{\delta}{b}\cos\theta = \text{Null}$$

werden „kann," ohne dass δ eine Nulle oder b unendlich sei. Soll nun diese Bedingung durch die Lage des Summanden $\delta f_{\bar{\theta}}$ also durch das absolute Element θ allein ihre Erfüllung finden, so wird wegen $\cos\theta = -\frac{1}{2}\frac{\delta}{b}$, zweierlei verlangt, α) das $\cos\theta$ essentiell negativ werde, mithin θ im zweiten oder dritten Quadranten stehe, und β) dass die Data nicht schon ursprünglich so beschaffen seien, dass $\frac{\delta}{2b}$ den absoluten Zahlwerth 1 überstiege. Weil namentlich die letztere Forderung nicht das independente Element θ, sondern die independenten Elemente b und δ zur Mitwirkung beruft, so leuchtet ein, dass in der Ebene des absoluten θ eine grosse Anzahl gegebener Fälle sind, wo die fragliche Bedingung nicht erfüllt werden kann. Die übrigen, gleichfalls zahlreichen Fälle dagegen, wo, weil $\frac{\delta}{2b}$ schon nach den ursprünglichen Daten den Zahlwerth 1 nicht übersteigt, die Bedingung im zweiten und dritten Quadranten des θ zur Erfüllung kommt, lassen die Phase des Uebergangs allgemein dahin characterisiren, dass im Augenblick derselben der absolute Betrag der Summe wegen $\frac{c}{b} = 1$ nothwendig allzeit $c = b$ sein muss, während die Lage der Summe, überhaupt ausserhalb der absoluten Linie fällt (wie sie insbesondere z. B. in dem Falle $b = \delta$ bei $\mathfrak{K}' = \frac{\pi}{3}$ erscheint). Diess sind diejenigen Fälle, in denen $\mathfrak{K}'$ von Null verschieden bleibt, ungeachtet $\varkappa''$ verschwunden ist; letzteres jedoch nur in der bezeichneten Phase, und unter der Tendenz, um mit der nächsten Phase entgegengesetzt aufzutreten.

Eine dritte Erfahrung macht die Algebra ferner, wann sie zu ermitteln unternimmt, wie die Gleichung

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \ldots$$

in den Fall kommen kann, bei gewissen Werthen von θ, wie man zu sagen pflegt, unstetig zu sein. Wenn man nach dem nächsten Grunde dieser sogenannten Unstetigkeit fragt, so liegt derselbe wohl darin, dass man in der Darstellung

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\delta \sin\theta}{b + \delta\cos\theta} = \frac{\delta}{b}\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\sin 2\theta + \ldots$$

eine erwiesene Gleichung zu erblicken glaubt. Denn sobald dieses ist, so muss in dem Fall, wo $b = \delta$ aufgegeben wird, schon nothwendig

$$\frac{\delta\sin\theta}{b+\delta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = tg\,\frac{\theta}{2} \text{ also } \operatorname{arc\,tg}\frac{\delta\sin\theta}{b+\delta\cos\theta} = \frac{\theta}{2}$$

werden, wodurch dann nicht nur

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \ldots,$$

sondern auch durch fernere Einsetzung von $\theta = (2h + 1)\pi$, eben so nothwendig

$$(2h+1)\frac{\pi}{2} = \sin(2h+1)\pi - \frac{1}{2}\sin 2(2h+1)\pi + \ldots = 0$$

zu Stande kommt; so dass $(2h+1)\frac{\pi}{2} = 0$ mit allen ganzen h dasjenige ist, was man — vielleicht, um in der Bewunderung des Calcüls consequent zu sein — nur Unstetigkeit nennt. Allein die Entstehung der Gleichung XXV und der daraus hervorgegangenen 25) enthält wie es scheint, einen zureichenden Beweis dafür, dass in der Darstellung

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\delta\sin\theta}{b+\delta\cos\theta} = \frac{\delta}{b}\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{b^2}\sin 2\theta + \ldots$$

in der That keine Gleichung liegt, weil, während auf der rechten Seite nach 23) offenbar $\mathfrak{K}'$ steht, auf der linken nach §. 32 nur λ erscheint, da doch wegen

$$\mathfrak{K}' = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}} . \lambda, \text{ der Bogen } \lambda = arc\, tg\, \frac{\delta - \theta}{b + \delta \cos \theta}$$

nur ein Factor von K' ist. Erwäget man nun, dass der andere hinweggelassene Factor $\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}}$ unter Einfluss der Daten der Grundvoraussetzung steht, und dass sich insbesondere c als der variable absolute Werth der Summe darin massgebend erweiset, so wird man erkennen, dass hiervon selbst in dem Werthe $\mathfrak{K}'$ Aenderungen zu gewärtigen sind. In den Unstetigkeitsfällen nun nehmen die Data der sächlichen Basis folgende Gestaltung an. Weil $\theta = (2h + 1)\pi$ eingesetzt wird, so muss bei jedem ganzen h sofort $\delta f\overline{(2h + 1)\pi} = -\delta$ werden, mithin $b + \delta f\overline{\theta} = b - \delta$, wodurch die Grundvoraussetznng XX in einer ihrer Phasen mit II zusammenfällt. Und weil überdiess auch noch $b = \delta$ vorausgesetzt wird, so hat man vollends $b - \delta = 0$, also

$$c = \sqrt{b^2 + \delta^2 + 2\, b\, \delta \cos \theta} = \text{Null},$$

wesshalb unvermeidlich auch

$$\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}} = 0$$

werden muss. Mithin auch

$$\mathfrak{K}' = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{\infty}} \cdot \frac{\theta}{2} = 0 \,. (2h + 1) \frac{\pi}{2} = \sin (2h + 1) \pi - \frac{1}{2} \sin 2 (2h + 1) \pi + \ldots$$

diesseits und jenseits Null, wornach für die Unstetigkeit kein Raum mehr übrig bleibt.

Könnte es nützlich sein, den eben besprochenen Fall zur mehreren Verdeutlichung durch geometrischen Augenschein ersichtlich zu machen, so dürfte es genügen, im Fall der Zeichnung zuvörderst den absoluten Werthen nach, $AB = BM = BN$ vorauszusetzen, wodurch die Bestimmung $b = \delta$ aufgenommen ist. Denkt man nunmehr hinzu, es werde um den Mittelpunct B ein Kreis mit dem Halbmesser $AB = b$ beschrieben, dessen Umfang also die

Puncte A, M, N mit umfassen muss, so wird man erkennen, dass nach einem einfachen geometrischen Satze zu jeder Zeit:

$MBN = 2\,BAN$ oder $\theta = 2\,\mathfrak{K}'$ besteht, und zwar selbst dann, wann schon θ anfängt, einem Halbkreis gleich zu sein. Mit diesem Vorgange ist aber das Einrücken des Punctes N im Orte A nothwendig verbunden, und an dieses Einrücken knüpft sich ebenso nothwendig das Verschwinden der Resultanten AN. Je mehr aber diese dem Verschwinden genähert wird, desto exacter tritt ihre Lage orthogonal gegen die absolute auf; und indem sie es am exactesten zu werden strebt, wird sie (die Lage) kraft ihres nothwendigen Zusammenhangs mit dem absoluten Zahlwerth in den Verfall des letzteren mit hineingerissen, — nicht wegen ihrer selbst, denn sie hat als $\mathfrak{K}' = \frac{\pi}{2}$ oder gar $\mathfrak{K}' = (2h + 1)\frac{\pi}{2}$ nicht einmal die Möglichkeit des Verschwindens in sich, sondern — um sowohl in einem geeigneten Augenblick der algebraischen Thatsache der Coëxistenz von Zahlwerth und Lage das Wort zu reden, als auch das Stadium der Entscheidung rücksichtlich eines besonderen Ueberganges anzuzeigen.

§. 34. Weil die Algebra, begriffen in Verfolgung des vorgesetzten Endziels, nicht umhin kann, die ihr im Wege stehenden Hindernisse, wo sie solche findet, zu bekämpfen, so wird es eine nächste Nothwendigkeit sein, in dasjenige Bedenken näher einzugehen, welches bei Erklärung der erweiterten Summation die einstweilige Ausschliessung der Grundvoraussetzungen $b - \delta$ und $b - \delta\sqrt{-1}$ vom Begriff der Summation nach sich gezogen hat. Rücksichtlich der Uroperation wurde vorhin bemerkt, dass ihr Wesen im Setzen und Gesetzteswegnehmen besteht. Wenn man auf den blossen Wortlaut dieser Erklärung reflectirt, so könnte es möglich werden, dass die bisher gebrauchten Grundvoraussetzungen in einem andern Licht erschienen, als ihre Natur verlangt, und als sie gemacht worden sind; namentlich wann man auf $a = b \pm \delta$ und $a = b \pm \delta\sqrt{-1}$ Rücksicht nimmt. Es wird zwar kein Hinderniss existiren, in der Aufgabe $b + \delta$, nachdem darin b ursprünglich gesetzt worden, die Hinzufügung von $+ \delta$ gleichfalls für ein Setzen zu erkennen, und vielleicht wäre der Anstand bei der Hinzufügung von $+ \delta\sqrt{-1}$ auch nicht von Belang; es könnte aber schon considerable Hindernisse geben in der Aufgabe $b - \delta$, nachdem darin b ursprünglich gesetzt worden, die Hinzufügung von $- \delta$ gleichfalls für ein Setzen anzusehen. So weit überhaupt selbst Urtheile nicht vollends frei, sondern abhängig von bestimmenden Gründen sind, kann eine derlei Erscheinung nicht befremden, gleichwie das Sehen in einem Hause nicht von dem Anwesenden abhängt, sondern von der vorgesehenen Anstalt für das Licht. Das Verständniss der Dinge kann nicht unbedingt dasselbe sein, wann es auf den schmalen Raum einer Linie eingeschränkt ist, als es werden muss, wann es über den Erfahrungen mindestens einer Ebene sich begründen kann. Seit die Algebra sich die Kenntniss einer Summation von der Form $b + \delta f\bar{\theta}$ erworben hat, hat sie die Einsicht erlangt, dass sie den Begriff und Namen einer Operation nicht davon abhängen lassen kann, dass ein Rechnungsdatum mehr oder minder beträglich erscheint; dass sie namentlich in der Aufgabe $b + \delta f\bar{\theta}$ nicht eine andere Operation erkennen kann, wann $\theta = \pi$, und wieder eine andere, wann $\theta = 0$ gegeben wird. Grund dessen ist nicht nur diess, dass, indem θ von 0 bis π und darüber hinaus stetig wächst, auch die Qualität der Operation einen Uebergang haben müsste, und man in die Nothwendigkeit käme, den individuellen Werth oder vielmehr die Werthe für θ angeben zu müssen, bei welchen der Uebergang geschieht; — sondern Grund ist ferner, dass, wenn der Fall $b + \delta f\bar{0} = b + \delta$ wie gewöhnlich ist, als Addition, dagegen der Fall $b + \delta f\bar{\pi} = b - \delta$ als Subtraction ausgezeichnet wird, die sämmtlichen übrigen noch in $b + \delta f\bar{\theta}$ enthaltenen Fälle ohne Namen bleiben; während doch jene und diese nur Einzelfälle Eines und desselben Begriffes und Ausdruckes sind, und für Alle ein gemeinsames Verfahren, das Resultat zu finden, existirt. Auf die Thatsache des Daseins dieses gemeinsamen Verfahrens gestützt, wie es für die Ebene bereits theilweise ist angegeben worden, kann ich nicht umhin hervorzuheben, dass es nur ein ausserwesentlicher Umstand ist, dem es zu verdanken kommt, dass einzelne Fälle der Aufgabe $b + \delta \,.\, f\bar{\theta}$ durch besondere Namen isolirt hingestellt werden, sowie es ehedem aus gleichartigem Grunde Sitte war, einzelnen Fällen von Zahlenverhältnissen ständige Namen beizulegen; — und habe demgemäss die Benennung Summation angewandt, in welcher unter der Form $b + \delta . f\bar{\theta}$ die sämmtlichen vorhergegangenen Grundvoraussetzungen kraft ihres Wesens mitinbegriffen sind, so dass auch die vorhin einstweilen ausser Acht gelassenen, mit „—" bezeichneten Fälle unter diese Benennung fallen.

Macht man nun, in Verfolgung der weitern Zwecke, mit der Frage: Ob in der Aufgabe $b - \delta$ denn nicht eine offenbare Wegnahme vor Augen liege, den letzten Gang, so muss, weil die Zeit der Reife gekommen ist, die Frage verneint werden. Ich glaube diese Verneinung mit Nachdruck aussprechen zu müssen, weil es mir scheint, dass es hier darauf ankommt, gegen das Erbübel der bisherigen Algebra in seinem tiefsten Grunde vorzugehen. Auf dass der blosse Name der Subtraction sich gegen die ausgesprochene Verneinung nicht erhebe, wurde bereits vorgesehen.

Der Beweis von realer Seite aber beruht auf Folgendem: Wäre auch nur Ein Fall der Aufgabe $b + \delta f\bar{\theta}$ aufzuzeigen, der für die Wegname geltend gemacht werden kann, so müsste auch über ihn behauptet werden, er sei bedingt durch einen besonderen Werth von θ. Allein ein solcher Werth vermag den zweiten Summanden nur in eine besondere Lage zu versetzen. Wird aber eine Grösse in eine besondere Lage nur versetzt, so kann nicht behauptet werden, dass sie dadurch weggenommen sei, da sie ja in der ihr gegebenen Lage factisch liegt und darin wahrgenommen werden kann. Und anderseits, würde irgend ein Fall für die Wegnahme geltend gemacht, so müsste gegen ihn behauptet werden, dass die absoluten Grössenwerthe b und δ beliebig sind. Sobald aber dieses ist, so kann auch $b = 0$ gegeben werden, während δ wie immer beträchtlich bleibt. Diess wäre aber ein Fall, wo man nichts gesetzt hätte, und doch noch wegnehmen zu können glaubt; was nicht für unbedenklich gelten kann. Zahlwerth und Lage nun erschöpfen das reale Feld; auf diesem Felde hat demnach die Wegnahme keinen Anhaltspunct. Es bleibt daher keine Möglichkeit vorhanden, auch nur in Einem Falle von $b + \delta f\bar{\theta}$ eine Wegnahme übrig zu behalten, und erwächst die Nothwendigkeit, die sämmtlichen Fälle davon für ursprüngliche Setzungen anzusehen, so dass auch $-\delta$ eine ursprüngliche Setzung ist. Doch sind die ursprünglichen Setzungen selbst mehrerlei; namentlich wird es nunmehr von Belang, das „Setzen schlechthin" und das „Entgegensetzen" herauszuheben und von einander sorgfältig zu scheiden, und wann diess geschehen ist, auf den Vergleich zwischen diesem Entgegensetzen und der Wegnahme insbesondere einzugehen. Der erstere Unterschied ist im Subordinatsysteme einfach durch die Lage klar. Den Anderen dagegen vermag dasselbe nicht klar zu machen, und es vermag ihn darum nicht klar zu machen, weil mit dem Ort im Raume keineswegs die Anzahl derjenigen Objecte erschöpft ist, die überhaupt dem Calcül unterliegen. (Vgl. §. 1.) Solchemnach wird und kann der andere Unterschied nicht einmal algebraisch sein. Indem aber sogar das Feld, worauf derselbe spielt, ein anderes wird, muss sich das Augenmerk erweitern, und muss vorerst dieses Feld bestimmt werden, um auf diesem dann den gesuchten Unterschied mit Schärfe zu verfolgen, — weil nur so zu ermessen sein kann, wie viel oder wie wenig es auf sich hat, dass das Wegnehmen eben so wie das Entgegensetzen auf eine ganz identische Art im Calcül dargestellt wird.

Wenngleich das Feld der Algebra dem Wegnehmen (Subtrahiren) zu enge wird — das Feld der Grösse überhaupt kann von ihm nicht verlassen werden; es spielt demnach auf Letzterem. Ist aber diess, so bleibt keine Möglichkeit vorhanden, das Wegnehmen durch irgend eine Lage erklärlich zu finden; denn die Lage passt auf gar viele Grössensorten nicht, zumal auf solche nicht, für die nur ein absolut Sein oder Nichtsein möglich ist. Nach dieser Orientirung wird der Unterschied in seinen wesentlichen Richtungen bereits zu characterisiren sein. Wegnehmen geht nämlich nie in grösserem Masse an, als ein vorhandenes Zu-Verminderndes beträgt; Entgegen-Setzen dagegen geht auch in grösserem Masse an, als Früher-Gesetztes vorhanden ist. Die Wegnahme dehnt ihre Anwendung auf alle möglichen Grössensorten aus; das Entgegensetzen dagegen nicht auf alle Sorten, sondern zuvörderst nur auf die Grössen des Subordinatsystems, und demnächst noch auf die, die unter räumlichen Modalitäten entweder thatsächlich erscheinen, oder durch selbe verständlich sind; also, wo zwar Arten des Seins, hier aber nur räumlich darstellbare Arten sich an das Sein der

Grössendinge knüpfen wie im Fall von Bewegungen, Geschwindigkeiten, Kräften, Linien u. f. zu sehen ist. Die Wegnahme bringt einen directen Angriff auf das Sein der Dinge als der ihr unterworfenen Grössen in Vollzug, und bewirkt eine theilweise oder vollständige Aufhebung des Seins; das Entgegensetzen dagegen ist kein Act von Angriff oder Aufhebung, sondern ein Act der blossen Aussage oder Darstellung, wie dass zwei ursprünglich gegebene Grössen in einer bestimmten Relation der Lage stehen. Indem also das Wegnehmen ausschliessend auf das Feld des absoluten Vorhandenseins, somit der blossen Zählbarkeit, und damit des Verfahrens mit was immer für Grössen, das ist der Operation sich stellt, bezieht sich das Entgegensetzen nur auf besondere Gegenstände der Operation. Jenes zeigt seine Pluralität darin, dass es alle möglichen Grössensorten umfasst, seine Singularität in dem, dass es nur den absoluten Werth beherrscht, während dieses seine Pluralität in der Disposition über Zahlwerthe und Lagen, seine Singularität in der blossen Räumlichkeit erblicken lässt. Kurz: das Erstere spielt im arithmetischen Calcül seine Rolle, und zwar auf der formalen Seite dieses Calcüls, — während das Entgegensetzen der realen Seite oder der sächlichen Basis, und zwar im algebraischen Calcül angehört. Hierdurch erscheinen sie dem Wesen nach heterogen und der gefundene Unterschied zeigt die Kluft dazwischen an. Und doch wird so das blosse Wegnehmen wie auch der Gegensatz allenthalben durch das Zeichen „—" exhibirt. Dieses zeigt, dass im tiefsten Fundament des Calcüls folgende Kriterien liegen. Indem durch „—" sowohl ein Rechnungsobject als auch ein Verfahren dargestellt wird, so erscheint dadurch Gegenstand und Operation veridentificirt und vermengt. Sind aber diese nicht mehr unterscheidbar, so wird nicht möglich, klar anzugeben, was eine isolirte negative Grösse ist, was für ein Vorgang in der Entstehung eines positiven Productes aus zwei negativen Factoren sich vollzieht, ob und wie etwa dieses Product von einer absoluten Grösse verschieden ist, zu welchen Wurzeln jedes Grades die negative Grösse führt, und woher dieselben kommen; denn, die Möglichkeit diess zu erkennen, fordert Trennung des realen und formalen Moments. Weil ferner unter der Form $b + \delta f_{\pi}$ ein wiederholtes Setzen, unter $b - \delta$ dagegen ein

Setzen und Wegnehmen, also dort eine Addition hier Subtraction dargestellt gefunden wird, und beides Eine und dieselbe reale Bedeutung hat, so fällt der Zweisinn hier auch auf die Operation als die Formseite zurück, die ihrerseits ausser Stand gesetzt ist anzugeben, ob Addition eher vorhanden ist als Subtraction. Dieses ist jedoch hier vorerst augenfällig, wo es bereits bekannt geworden ist, dass im Ueberschreiten der Grenze der Wegnahme, der Uebergang auf den Gegensatz geschieht. Allein die Begrenztheit der Subtraction pflegt im Allgemeinen vollends nicht bemerkt zu werden, sohin ausser Acht zu bleiben; wodurch Solches gethan erscheint: als ob man stillschweigend einverstanden wäre, auf den ledigen Gegensatz „für alle Fälle" gefasst zu sein. Herrscht demnach dieser vor, so trifft der Zweisinn die Grundoperation auch für allen Fall. Anderseits, indem der Gegenstand bereits theilweise (das ist als bloss algebraischer Gegenstand) mit der Operation veridentificirt wird, und diese letztere dadurch zum Widerstreit im Wesen bringt, kommt das Ansehen des Gegenstandes der Operation, oder der sächlichen Basis selbst, innerhalb des Calcüls in Verfall. Denn erinnert man sich der Thatsache, dass eine Grössensorte dem Calcül auch dort noch Sinn und Success geben kann, wo eine andere diess nicht mehr zu thun vermag, ein sehr beschränkter Calcül (der arithmetische nämlich), daher auf alle Grössensorten passt, ein etwas erweiterter schon auf wenigere Sorten, ein noch erweiterter abermals auf eine kleinere Zahl davon, und ein vollends entfesselter, das ist algebraischer, nur auf Eine, das ist auf die Raumlinie allein, — so wird man gewahr, dass die stufenweise Ausdehnung des Calcüls verbunden ist mit einer stufenweisen Ausschliessung der Gegenstände, das ist mit einer beschränkteren Anwendung oder vielmehr Anwendbarkeit des Calcüls, also das Verständniss bedingt durch die Wahrnehmung hiervon. Kann aber diese Wahrnehmung nicht gemacht werden, weil der Gegenstand sich mit der Operation durchkreuzt und veridentificirt, so bricht auch über die reale Seite des Calcüls Verdunkelung ein. Und so sieht man den Anfangs gar nicht complicirten Zweisinn in den Zeichen bald die Uroperation lähmen und verwirren, sich auch in der Multiplication, in der Wurzelgrösse und darüber hinaus mit gleichem Effekte geltend machen, und nicht minder auch die reale Seite selbst ins Dunkel ziehen. Und dieser Bezeichnung, behaftet mit einem solchen Zweisinn schon im Keime ist die folgenreiche Rolle zugefallen, die Grundfeste zu sein, worauf der ganze Bau der neuern Wissenschaft sicher stehen soll. Dieselbe hat aber ihrer Bestimmung nicht genügt, da sie von dort an, wo sie den Geist Descartes' bestochen, nie die Klarheit und Entwicklung, sondern wie gesagt, nur die Unklarheit und Verwicklung der Wissenschaft gefördert hat.

Da aber die Rechnung der Lage oder überhaupt die nunmehrige Algebra einen solchen Zweisinn wie jede Unbestimmtheit überhaupt, ihrem Vorrücken auf dem betretenen Gebiet nicht förderlich finden kann, so muss sie wünschen, das Zeichen „—" von der realen Seite des algebraischen Calcüls vollends zu entfernen und dafür der Lagefunction den Eingang zu verschaffen, auf dass dieselbe nicht nur den eben bekannt gewordenen Gegensatz und die sämmtlichen Vorgänge in der Ebene zu exhibiren, sondern auch die über die Ebene hinausfallenden Erscheinungen zu beleuchten im Stande ist. Dadurch bleibt das Zeichen „—" ausschliesslich formaler Natur, und werden die Zweifel über die Natur der negativen Grössenform im tiefsten Keime unterdrückt. Dadurch wird aber auch bewirkt, dass die beiden Zeichen + und — soweit dieselben zur Bezeichnung der Lage verwendet werden, nicht nur wie es vorhin hiess, das Monopol in diesem Geschäfte verlieren, sondern gegenüber der Function der Lage auf allen Puncten den Rückzug aus dem Subordinatsystem anzutreten genöthiget sind, um so in der That nur reine Operationszeichen zu sein. So lange es der Algebra nicht gelungen ist, in die alles durchdringende Bezeichnung Eindeutigkeit einzuführen, scheint keine Hoffnung vorhanden zu sein, die Data, so wie die Vorgänge und Ergebnisse des Calcüls aus dem Zwielicht herausgelangen zu sehen.

§. 35. In dem bisherigen wurde zwar die Summation zweier in der mit θ gegebenen Ebene wie immer divergirenden Componenten ausgeführt; allein es war die Einschränkung beigefügt, dass die Eine dieser Componenten nämlich b, noch immer an die ursprüngliche oder absolute Lage gebunden bleiben soll, so wie diess der unter XX ausgesprochenen Grundvoraussetzung gemäss zur Basis angenommen worden ist. Nunmehr soll aber die Summation auch ohne diese Einschränkung vollzogen werden, zu welchem Ende nöthig wird, die Data der sächlichen Basis darnach zu stellen. Es wird demnach vorausgesetzt: Die beiden Summanden sollen jeder seinerseits eine vollends beliebige Lage haben, und bleiben nur dadurch beschränkt, dass keiner die mit θ gegebene Ebene überschreiten soll; die Grösse ε dagegen bleibt fortan absolut. Unter diesen Bestimmungen wird XVII $a = b f\overline{\alpha} + \delta f\overline{\theta}$ als sächliche Basis aufgegeben, worin die beiden Summanden auf einen rechnungsmässigen Summenausdruck zu reduciren sind. Werden zu diesem Ende die beiden Grundgrössen der relativen Lagen in Bezug auf ihre Zahlwerthe verglichen, so wird sich zeigen, ob sie einander gleich oder ungleich sind. Es sei der letztere Fall als der allgemeinere, der auch den erstern mit umfasst, gegeben, und sei $\theta > \alpha$, so wird $\theta = \alpha + \theta'$ und $\theta' = \theta - \alpha$ sein. Weil hierwegen $f\overline{\theta} = f\overline{\alpha + \theta'} = f\overline{\alpha} \,.\, f\overline{\theta'}$ besteht, so verwandelt sich die Grundvoraussetzung in die Form

$$\text{XXVII}' \quad a = b f\overline{\alpha} + \delta f\overline{\alpha} . f\overline{\theta'} = f\overline{\alpha} \, [b + \delta f\overline{\theta'}],$$

woraus man erkennt, dass das früher auf die Grundvoraussetzung XX angewendete Verfahren auch hier ungeändert angewendet werden kann; denn, indem man zur Summirung innerhalb des Factors $[b + \delta f\overline{\theta'}]$, sich wieder der Transformation

$$b = \delta \cos \theta' + c \cos \lambda', \text{ und } \delta \sin \theta' = c \sin \lambda'$$

bedient, und dadurch $b + \delta f\overline{\theta'} = c f\overline{\lambda'}$ erhält, erscheint der nämliche Process nur um eine Anzahl Grade von der absoluten Lage seitwärts gemacht, ohne an seiner Natur etwas einzubüssen und führt zu dem Resultat $b f\overline{\alpha} + \delta f\overline{\theta} = c f\overline{\alpha + \lambda'}$. Soll hierin c und λ' auch explicit dargestellt werden, so hat man vorerst

$$b^2 + \delta^2 + 2 b \delta \cos \theta' = c^2 \;, \quad \text{also} \quad c = \sqrt{b^2 + \delta^2 + 2 b \delta \cos (\theta - \alpha)},$$

oder auch $c = e^{\frac{1}{2} \log [b^2 + \delta^2 + 2 b \delta \cos (\theta - \alpha)]}$; und demnächst

$$\frac{c}{c} \cdot tg \lambda' = \frac{\delta \sin (\theta - \alpha)}{b + \delta \cos (\theta - \alpha)}, \text{ das ist } tg \lambda' = \frac{c}{c} \cdot \frac{\delta \sin (\theta - \alpha)}{b + \delta \cos (\theta - \alpha)}, \quad \text{also}$$

$$\lambda' = arc\, tg \frac{c}{c} \cdot \frac{\delta \sin (\theta - \alpha)}{b + \delta \cos (\theta - \alpha)},$$

wodurch dem Verlangen genügt werden kann.

Um hiernach auch den Fall klar zu machen, wo schon in der Grundvoraussetzung $\theta = \alpha$ gegeben wird, also $\theta' = 0$ erscheint, so braucht man diesen Werth nur in c und λ' einzusetzen, um alsbald

$$c = b + \delta \text{ und } \lambda' = 0$$

zu erhalten, wodurch das Resultat

$$b f\overline{\alpha} + \delta f\overline{\alpha} = e^{log\,(b+d)} . f\alpha$$

wird, in welchem, abgesehen von dem Factor $f\overline{\alpha}$, der unter *I* zu Grunde gelegte Fall zum Vorschein kommt. Wäre dagegen $\theta' = \pi$, so käme abgesehen von dem Factor $f\overline{\alpha}$ wieder der Fall *II* hervor. Nähme man weiter in θ' eine ungerade Anzahl Quadranten an, so würde sich alsbald, abermals abgesehen von $f\overline{\alpha}$ der Fall der unter IX zu Grunde gelegten sächlichen Basis zeigen; während wann θ' beliebig bleibt, abgesehen von $f\overline{\alpha}$ der unter XX vorausgesetzte Fall vor Augen tritt. Die Grundvoraussetzung XXVII schliesst demnach die sämmtlichen vorhergegangenen Fälle in sich ein, und führt die Wahrnehmung herbei, dass nicht nur die bloss arithmetische Werkstätte der Rechnung, die im Fall $\theta' = 0$ nicht überschritten wird, sondern auch die algebraische, wenn nämlich θ' von Null verschieden ist, je nach Massgabe der Lage $f\overline{\alpha}$ in der ganzen in Anspruch genommenen Ebene transportirt werden kann.

Was bisher von zwei Summanden gesagt worden ist, lässt sofort die Ausdehnung auch auf mehrere zu, mag deren Anzahl welche immer sein. Denn, haben zwei ebene Grössen überhaupt sich summiren lassen, so muss dies auch für den Fall thunlich sein, wann die Eine derselben bereits eine Summe ist. So wird es thunlich, die Summe zweier ebenen Grössen mit einer dritten, die Summe von dreien mit einer vierten, die von vieren mit einer fünften u. s. f. zu Einem Resultate zu verbinden, dessen allgemeine Form jederzeit nur zwei Bestandfactoren hat und haben kann, wovon der Eine den resultanten Zahlwerth, der Andere die resultante Lage zeigt. Je mehr aber die Summation sich häuft, desto bedrängter sieht man auch das Gesammtresultat werden, wenn man bedenkt, dass jeder Summande mit einem variablen Zahlwerth und einer variablen Lage auf den Schauplatz treten kann, deren jedes sowohl dem Zahlwerth, als auch der Lage des

Gesammtresultates imponirt. Und nimmt man hinzu, dass jedes solche Resultat auch einen bestimmten Raumpunkt stets im Schlepptau führt, so kommt man doch wohl dahin, zu sehen, dass schon die blosse ebene Summation für gar mannigfache Raumerscheinungen in ihrer Ebene, explicite und vollends leicht verständliche Formen liefern kann.

Der General-Secretär las ein Schreiben des Herrn Prof. Schrötter aus London vor, welches die meteorologische Commission auf die ausgezeichneten registrirenden magnetischen meteorologischen Instrumente des Herrn Charles Brooke aufmerksam macht.

Herr Custos-Adj. Heckel überreichte für die Denkschriften eine Abhandlung „Beiträge zur Kenntniss der fossilen Fische Oesterreichs. III. Abtheil. *Pycnodus*." Derselbe legte zugleich galvanoplastische Abklatsche von fossilen Fischen vor, welche selbst wieder auf der Druckpresse abgezogen wurden. Auch zeigte derselbe Original-Fischabdrücke, welche durch Aetzen prägnanter hervorgerufen wurden.

Herr Professor Dr. Brücke hielt nachfolgenden Vortrag: „Bemerkungen über die Mechanik des Entzündungsprocesses."

Um der Vieldeutigkeit des Wortes „Entzündung" zu entgehen muss ich vorausschicken, dass ich von demjenigen Processe rede, bei welchem in den Capillargefässen bei langsamer werdender und zuletzt erlöschender Blutbewegung in ihnen die Blutkörperchen sich anhäufen, so dass sie dieselben zuletzt vollständig anfüllen und verstopfen.

Diese Erscheinung kann man bekanntlich besonders leicht hervorrufen und beobachten, wenn man die unter dem Mikroskope ausgespannte Schwimmhaut eines Frosches mit Ammoniakflüssigkeit betupft. Man sieht alsdann zuerst eine Beschleunigung der Blutbewegung, die wohl von vermehrten Herzcontractionen herrührt, da der Frosch in seinen Bewegungen und seinem Bestreben zu entfliehen andere deutliche Zeichen des Schmerzes und der Angst giebt. Die Bewegungen des Thieres verlangsamen oft plötzlich die Circulation und lassen sie dann eben so plötzlich wieder in schnellen Gang kommen, was, wie jeder leicht einsieht, in der vorübergehenden Compression grosser Gefässstämme seinen Grund hat. Nach kurzer Zeit beruhigt sich das Thier, und es treten die ersten Zeichen des Entzündungsprocesses auf. Man sieht, dass sich das Blut in den Capillargefässen und kleinen Venen langsamer bewegt, dass beide mehr Blutkörperchen führen als gewöhnlich, und dass diese beiden Erscheinungen fortwährend zunehmen, bis endlich die Blutbewegung in einer Provinz des Capillargefässsystems und den in ihr entspringenden kleinen Venen gänzlich aufhört und die Gefässe erweitert und strotzend mit hochroth gefärbten Blutkörperchen angefüllt sind, die so dicht gedrängt liegen, dass man die Umrisse der einzelnen nur selten noch unterscheiden kann. Untersucht man die Arterien, welche in die von der Stase ergriffene Provinz führen, so findet man ihre letzten Zweige häufig auch schon voll Blutkörperchen, welche sich fort und fort langsam vermehren und die Arterie immer weiter nach aufwärts anfüllen. Indem nämlich in Folge jeder Herzsystole das Blut etwas in dem Gefässe vorrückt, bei der Diastole aber wieder zurückweicht, lagern sich an den ruhenden Blutkörperchen, wie man dies leicht mit den Augen verfolgt, immer neue an, da sie schwerer als die Blutflüssigkeit durch die langsame rückgängige Bewegung weniger afficirt werden, als durch den raschen Impuls nach vorwärts. Untersucht man eine solche Arterie, in der man die Fluctuationen bemerkt genauer, so findet man, dass sie in ihrem oberen Theile bedeutend verengt ist, so dass oft ein einzelner mit Blutkörperchen gefüllter Ast dicker ist als der Stamm, aus dem er nebst mehreren anderen Aesten entspringt; ja wenn man die Arterien da, wo sie von den Zehen aus sich in die Schwimmhaut hineinbegeben vor dem Versuche mit dem Glasmikrometer durchmisst, so kann man sich leicht überzeugen, dass der innere Durchmesser derjenigen, welche den betreffenden Theil der Capillargefässe zunächst speist, während der Entwicklung der Stase auf die Hälfte, ja auf ein Drittheil und selbst auf ein Viertheil seiner ursprünglichen Grösse reducirt wird. Diesen Zustand der Verengerung der Arterien und der

Fluctuation in denselben habe ich bei ausgebildeter Stase oft noch vier bis fünf Stunden lang beobachtet.

Ueber den Zusammenhang der vorbeschriebenen Erscheinungen sind verschiedene Hypothesen aufgestellt worden, die aber grösstentheils kein Gegenstand wissenschaftlicher Discussion sein können, da sie höchst problematische Kräfte, wie z. B. eine vermehrte Anziehung zwischen den Blutkörperchen und den Wänden der Capillargefässe in Requisition ziehen. Nur auf die bekannte Ansicht von Henle muss ich hier näher eingehen, da sie die gangbare ist, und mit Recht den von anderen Autoren aufgestellten vorgezogen wird. Henle sagt in seinem Handbuch der rationellen Pathologie (Bd. II. p. 461): „Mit der Erweiterung der Gefässe, welches auch die Ursache derselben sei, sehen wir die Strömung des Blutes sich verlangsamen. Diese Thatsache, auf einem bekannten hydraulischen Gesetze beruhend, bedarf kaum einer besonderen Erklärung." Diess ist der Obersatz von Henle's Entzündungstheorie, durch welchen er die Verlangsamung der Blutbewegung aus der Erweiterung der Capillargefässe und der kleinen Venen ableitet, welche er als das Primäre betrachtet, ihn müssen wir also zunächt ins Auge fassen. Wenn ich durch eine irgend wie gestaltete Röhre Flüssigkeit hindurchtreibe, so kann ich die mittlere Geschwindigkeit derselben in irgend einem Stücke der Röhre, welches ich als cylindrisch betrachte, ausdrücken durch $v = \frac{p}{tq}$, wenn ich unter p das Flüssigkeitsvolum verstehe, welches in der Zeit t durchpassirt, und unter q den Querschnitt des betreffenden Theils der Röhre. Hiernach scheint es allerdings als ob v abnehmen müsse, wenn q wächst, man darf aber nicht vergessen, dass p selbst Function von q ist, und dass es leicht geschehen kann, dass bei einem Wachsen von q der Quotient $\frac{p}{tq}$ grösser wird als er vorher war. Ob dieser Fall eintritt, wird, wenn der als Triebkraft benutzte Druck derselbe bleibt, natürlich abhängen von der Gestalt und den Dimensionen der Röhre und von der Ausdehnung, in welcher q verändert wird. Betrachten wir das Gefässsystem und die Verhältnisse, unter welchen sich das Blut in denselben bewegt, so finden wir, dass zwar in den Capillaren das Blut langsamer fliesst als in den Arterien; und selbst etwas langsamer als in den Venen, und dass mithin der Gesammtquerschnitt des Blutstroms in den Capillaren am grössten ist; auf der andern Seite leuchtet es aber ein, dass trotzdem wegen der Feinheit und der netzförmigen Anordnung der Capillaren der Widerstand, den der Blutstrom in denselben erfährt, sehr bedeutend sei, ja die gesammte Einrichtung des Gefässsystems deutet darauf hin, dass er in ihnen und in den letzten Zweigen der Arterien grösser sei, als irgend wo anders. Es ist ferner, da die Capillaren ausserordentlich enge Röhren sind, klar, dass mit ihrer Erweiterung der Widerstand in ihnen sehr rasch abnehmen muss, und es möchte deshalb einige Schwierigkeit haben mit Hülfe des hydraulischen Lehrsatzes, auf den sich Henle bezieht, zu beweisen, dass eine Erweiterung der Capillaren eine Verlangsamung und nicht vielmehr eine Beschleunigung der Blutbewegung in ihnen zur Folge haben müsse. Wollten wir aber selbst zu Gunsten der Ansicht von Henle die übertriebene und erweislich falsche Annahme machen, dass der Widerstand, den der Blutstrom in den Capillaren erfährt, verschwindend sei, gegen den Gesammtwiderstand, den ihm das System der Arterien und Venen entgegensetzt, so würde sich dennoch aus der Erweiterung der Capillaren die Entwicklung der Stase nicht vollständig ableiten lassen. Die Erweiterung der Capillaren ist nämlich so gering, dass sie von einzelnen Beobachtern ganz in Abrede gestellt wird, und nach meinen Beobachtungen beträgt sie während der Entwicklung der Stase wenigstens nicht über ein Viertheil des ursprünglichen Durchmessers der Capillaren. Eine solche Erweiterung würde also selbst unter der obigen Voraussetzung, wenn wir die ursprüngliche Geschwindigkeit des Blutstromes in den Capillaren = 1 setzen, dieselbe nur auf 6,4 reduciren können. In den kleinen Venen ist die Erweiterung etwas bedeutender, aber es ist bekannt, dass nicht in ihnen, sondern in den Capillaren die Stase beginnt, und ich werde später zeigen, dass die Gefässerweiterung ebensowohl Folge als Ursache der Stase sein kann. Erweiterungen der Capillaren auf das Doppelte ihres Durchmessers und mehr, wie sie einige Schriftsteller beschreiben, kommen während der Entwicklung der Stase niemals vor, sondern man findet sie nur in Schwimmhäuten, in welchen die Entzündung bereits einige Zeit bestanden hat. Die localen Aussackungen an Capillargefässen und kleinen Venen, auf welche Hasse und Kölliker (Zeitschrift für rationelle Medicin, Bd. IV. S. 1.) aufmerksam gemacht haben, gehören ebenfalls einem spätern Stadium der Entzündung an, über welches der Akademie zu berichten ich ein anderes Mal die Ehre haben werde.

Was die oben beschriebene Verengerung der Arterien anlangt, so wird ihrer in Henle's Erklärung nicht gedacht, andere Schriftsteller wie Thomson (Meckel's deutsches Archiv f. Physiologie Bd. I. p. 437) und Koch (Meckel's Archiv 1832 pag. 121) erwähnen sie, ohne jedoch fruchtbare Schlüsse aus ihren Beobachtungen abzuleiten. Fragen wir zunächst nach der möglichen Ursache dieser Verengerung, so liegt es auf der Hand, dass sie nicht Wirkung der Elasticität der Arterienwände sein kann, denn diese würde nur eine Verengerung bewirken, wenn der Druck, den das Blut von innenher auf dieselben ausübt, nachliesse, und unter den Erscheinungen der Stase finden wir keine, welche dies zur Folge haben könnte. Die Arterien müssen also durch ihre contractilen Fasern verengt sein, und wir können als Ursache hierfür den anomalen Zustand aufstellen, in welchen ihre Zweige durch die Stase versetzt sind. Wenn aber dieser im Stande ist Contraction in der Arterie zu erregen, so ist kein vernünftiger Grund vorhanden, wesshalb dieselbe auch nicht schon primär durch das ursprünglich angewendete Reizmittel erregt sein sollte, und es drängt sich uns desshalb die zweite Frage auf, ob sich nicht vielleicht die Erscheinungen der Stase aus der Arterienverengerung ableiten lassen.

Wenn man sich zuvörderst nur denkt, dass in eine sich verzweigende Röhre Flüssigkeit hineingetrieben werde, so ist es klar, dass bei eintretender Verengerung der Stammröhre unter übrigens gleichen Verhältnissen die Stromgeschwindigkeit in den Zweigen vermindert werden muss, da der Gesammtwiderstand des Röhrensystems vermehrt wird, und somit würde schon aus dieser Betrachtung eine Verlangsamung des Blutstroms der Capillaren durch Verengerung der Arterien erhellen. Man muss aber ausserdem noch berücksichtigen, dass die Capillargefässe keine vereinzelte Zweigröhren sind, sondern dass sie und die kleinen Venen ein zusammenhängendes Netzwerk bilden, in welches an gewissen Puncten Blut eintritt, während an andern wiederum Blut daraus abfliesst. In einem solchen Netzwerke geht nicht allein durch die Reibung der Flüssigkeit an den Wänden eine bedeutende Menge von lebendiger Kraft verloren, sondern auch dadurch, dass sich verschieden gerichtete Ströme treffen und ein und dieselbe Flüssigkeitsmasse gleichzeitig Impulse von entgegengesetzten Seiten her erhält. Wenn sich nun in einem Röhrensystem von unveränderlicher Form und Grösse Mass und Richtung der Bewegung so auf die einzelnen Puncte des Systems vertheilen, dass der Gesammtverlust an lebendiger Kraft auf das unter den actuellen Verhältnissen mögliche Minimum reducirt wird, so werden andererseits Veränderungen in dem Caliber einzelner Röhren, abgesehen von den Veränderungen, welche sie in dem Gesammtwiderstande des Röhrensystems hervorbringen, eine andere Vertheilung der Bewegung auf die verschiedenen Theile des Systems in Rücksicht auf Mass und Richtung derselben bedingen. Betrachten wir den Kreislauf unter dem Mikroskop, so bemerken wir, dass sich im normalen Zustande das Blut in dem ganzen Capillarnetze mit anscheinend ziemlich gleicher Geschwindigkeit bewegt, nur in einzelnen, etwas weiteren Gefässen, welche man an einzelnen Stellen als Uebergänge aus den Arterien in die Venen in das Capillarnetz eingewebt findet, ist die Bewegung etwas rascher, wovon die Ursache auf der Hand liegt. Verengert sich nun eine Arterie, so muss diese dem normalen Zustande und der normalen Weite der Arterien entsprechende Gleichmässigkeit in der Vertheilung der Bewegung in der nächsten Umgebung gestört werden, und hieraus erklärt es sich, dass in Folge der Verengerung einer kleinen Arterie nicht nur locale Verlangsamung der Circulation, sondern auch localer Stillstand und selbst veränderte Richtung der Bewegung in einzelnen Gefässen erzeugt werden kann. Es fragt sich nun, ob man auch die übrigen Erscheinungen der Entzündung von diesem Standpuncte aus erklären könne. Diejenige, welche zunächst und gleichzeitig mit der Verlangsamung der Bewegung in die Augen fällt, ist die Vermehrung der Blutkörperchen in dem langsamer fliessenden Blute. Die Blutkörperchen sind specifisch schwerer als die Blutflüssigkeit und sie werden nur durch die Bewegung des Blutes in demselben flott erhalten, der Blutstrom reisst sie mit sich durch die Capillaren hindurch, und man sieht oft, wie sie sich wenden und biegen müssen, um ihre engen und krummen Wege zu durchwandern. Wenn ein Strom, der einen specifisch schwereren festen Körper mit sich führt, an Geschwindigkeit verliert, so wird die Geschwindigkeit des festen Körpers in der Richtung des Stromes nicht nur absolut abnehmen, sondern auch relativ zu der mittleren Stromgeschwindigkeit, er wird sich senken, in die langsamer bewegten Schichten gelangen, darauf auf dem Boden des Strombettes noch ruckweise fortgewälzt werden und endlich liegen bleiben. Bedenkt man, dass den betreffenden Gefässen immer neues Blut zugeführt wird, und dass bei verlangsamter Blutbewegung die mittlere Geschwindigkeit der Blutkörperchen zu der mittleren Geschwindigkeit der Blutflüssigkeit nicht mehr in demselben Verhältnisse steht wie bei rascherer Strömung, so ist es klar, dass sich bei steigender Verlangsamung die Blutkörperchen in den Gefässen mehren, bis sie dieselben am Ende vollständig anfüllen, nun ihrerseits ein neues Hemmniss für die Circulation bilden, und die letzten Reste derselben aufheben. Man kann diese Erscheinung mit derjenigen vergleichen, welche man an Flüssen wahrnimmt, die sich durch den Sand, welchen sie mit sich führen, ihr eigenes ursprüngliches Bett versperren, und sich neue Wege zum Meere suchen müssen. Dagegen, dass die Verlangsamung des Blutstromes die Ursache der Anhäufung der Blutkörperchen sei, kann man einwenden, dass keine Anhäufung der Blutkörperchen in den Capillaren der Schwimmhaut Statt findet, wenn man die Circulation dadurch verlangsamt, dass man die Schenkelarterie comprimirt, man muss aber wohl bedenken, dass hierdurch die Blutzufuhr für das ganze Bein vermindert wird, was durch die Zusammenziehung einzelner kleiner Arterienzweige nicht in merklichem Grade geschieht, und zweitens, dass die Circulation in dem ganzen Beine gleichmässig verlangsamt wird, und mithin die Blutkörperchen nicht mehr Ursache haben, sich in der Schwimmhaut anzuhäufen, als irgend wo anders.

Endlich fragt es sich, wie sich aus dem bisher Erörterten die Ausdehnung der Gefässe, in welchen das Blut stagnirt ableiten lasse. Da der Druck, den das Blut auf die Gefässwände ausübt, abhängig ist von dem Widerstande, den es noch zu überwinden hat, so nimmt bei normaler Circulation derselbe von den kleinen Arterien zu den Capillargefässen und von da zu den Venen rasch ab, in denjenigen Gefässen aber, in welchen sich die Blutkörperchen angehäuft haben, ist der Widerstand offenbar vermehrt, und sind sie an irgend einer Stelle vollständig verstopft, so bilden sie von dieser an nach aufwärts einen blinden Anhang an dem zuführenden Gefässe, in dem der Druck so stark ist wie an der Stelle dieses Gefässes, an welcher der letzte Ast von ihm abgeht, in dem das Blut noch strömt.

Durch die vorstehenden Betrachtungen meine ich nicht erwiesen zu haben, dass alle Stasen von Verengerung der Arterien herrühren; ich glaube sogar dergleichen zu kennen, welche aus anderen Ursachen entstehen: nur so viel, glaube ich, geht aus dem Gesagten hervor, dass sich aus der Verengerung kleiner Arterienzweige die Erscheinungen der Stase mindestens ebenso gut und ebenso vollständig ableiten lassen, als aus einer primären Erweiterung der kleinen Venen und der Capillaren, bei welchen letzteren das Vermögen selbstständig ihr Lumen zu verändern noch dazu im höchsten Grade zweifelhaft ist. Wenn es Manchem auf den ersten Anblick paradox erscheinen mag, dass durch Verengerung der zuführenden Gefässe Entzündung entstehen soll, so liegt diess einerseits in den zum Theil sehr undeutlichen Vorstellungen, welche über die Mechanik des Kreislaufes verbreitet sind, andererseits darin, dass man an den alten Vorurtheilen über Congestion klebend noch immer nicht aufhört, sich die Entzündung als Stockung des Blutes mit Anhäufung desselben in den kleinen Gefässen vorzustellen, während doch die directe Beobachtung zeigt, dass sich zunächst nicht das Blut in denselben anhäuft, sondern nur die Blutkörperchen, und dass in den betreffenden Gefässen die Menge des Blutplasmas nicht nur relativ zu der der Blutkörperchen, sondern absolut vermindert ist, indem die Blutkörperchen die Räume erfüllen, welche im normalen Zustande von ihm durchflossen wurden. Wenn sich aber die Erscheinungen der auftretenden Stase aus der Verengerung der Arterien herleiten lassen, so scheint es mir da, wo auf einen angebrachten Reiz sowohl Arterienverengerung als Stase beobachtet wird, die natürlichste Auffassung zu sein, dass man erstere bei ihrem Auftreten als die unmittelbare Folge der Reizung und als Ursache der übrigen

Erscheinungen ansieht, da die Zusammenziehung der Arterienwände auf Reize zu den sicheren und wohlerworbenen Thatsachen in der Physiologie gehört, und man sich hierbei jeder Hypothese über Erweiterung der Venen und Capillargefässe durch directe oder Reflexlähmung in den Gefässnerven überhoben sieht.

Hr. Dr. Elfinger legte über Einladung des Hrn. Prof. Hyrtl der Versammlung seine Zeichnungen anatomischer und pathologischer Gegenstände vor. Er hatte sich auf dieses Fach vorzüglich desshalb geworfen, weil der ausgezeichnetste Künstler hinter den Anforderungen der Wissenschaft zurückbleibt, wenn er nicht selbst darin bewandert ist. Am fühlbarsten ist diess bei der Uebertragung der Zeichnungen auf Stein und namentlich bei Colorirung derselben, wo die Gleichheit der Exemplare so schwer zu erreichen ist. Dr. Elfinger hat sich desshalb insbesondere mit der Chromolithographie vertraut gemacht und vom Herrn Director der k. k. Hof- und Staatsdruckerei, Regierungsrathe Auer in seinen Bemühungen kräftig unterstützt, mit des rühmlich bekannten Künstlers Hartinger Beihilfe ein Werk über Hautkrankheiten mit lebensgrossen Abbildungen im Farbendruck herauszugeben unternommen. Die Original-Zeichnungen nach der Natur sowohl als die Farbendrucke erhielten den vollen Beifall der Anwesenden.

Dr. Elfinger stellte sein Talent zur Disposition der kaiserlichen Akademie.