So fortfahrend, kann man sich leicht überzeugen, dass jeder Differenzialquotient gleich Null wird. — Man sieht, dass der Gleichung(7) $z=\alpha$ genügt, den aus $z=\alpha$ folgt, $\frac{dz}{du}=0$, und diese beiden Zahlen substituirt, machen (7) identisch. Es ist somit $z=\alpha$ ein singuläres Integral, falls es nicht aus dem allgemeinen Integrale durch Specialisirung der Constanten hervorgeht.

Herr Rudolph Skuherský hielt nachstehenden Vortrag: „Die Theorie der Theilungspunkte als Beitrag zur Lehre von der freien Perspective." (Taf. XXII.)

Wenn auf eine beliebig im Raume gedachte Gerade A bestimmte Maasse aufgetragen werden sollen, oder wenn ein bestimmtes Maass dieser Geraden in eine gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll, so kann dieses, wie bekannt, auf folgende Art ausgeführt werden: Man ziehe irgend eine Gerade B, welche mit A in einer und derselben Ebene liegt, trage die gegebenen Maasse auf dieselbe auf, und führe durch die so erhaltenen Trennungspunkte parallele Linien, welche die Gerade A schneiden.

Haben diese parallelen Linien eine solche Richtung, dass die inneren und äusseren Winkel, welche dieselben mit der Geraden A und B einschliessen, einander gleich sind, so werden durch sie auf der Geraden A dieselben Maasse bestimmt, welche auf die Gerade B aufgetragen wurden.

Von diesem Satze wird dort eine nützliche Anwendung gemacht, wo es sich darum handelt, auf dem perspectivischen Bilde einer Geraden A bestimmte Maasse (perspectivisch) aufzutragen; dabei ist es von Vortheil, die bezeichnete Gerade B mit Rücksicht auf die eben angegebene Beschränkung in der Bildfläche zu wählen.

Da bei diesem Umstande die Trennungspunkte der auf B aufgetragenen Maasse schon die Durchschnitte der gedachten Theilungslinien mit der Bildfläche sind, so wird es sich nur um deren Verschwindungspunkt handeln, um die perspectivischen Bilder derselben zeichnen zu können.

Die perspectivischen Bilder der Theilungslinien werden das perspectivische Bild der Geraden A in Punkten schneiden, durch welche die entsprechenden Maasse auf diesem (perspectivisch) bestimmt sind.

Zieht man durch den Verschwindungspunkt *V* der Geraden *A* eine Parallele zu der Geraden *B* und trägt auf diese Parallele die wahre Länge des den Verschwindungspunkt *V* bestimmenden Sehstrahles *O V* von *V* nach *T*, so ist *T* der Verschwindungspunkt der genannten Theilungslinien oder der Theilungspunkt für die Gerade *A*, wie für das ganze System der zu *A* parallelen Geraden.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt es sich, dass je nach der Richtung der Geraden *B* der Theilungspunkt für ein und dieselbe Gerade ein anderer sein muss, und wenn man aus dem Punkte *V* als Mittelpunkte mit einem Halbmesser gleich *VT* einen Kreis beschreibt, so ist dieser Kreis der Ort aller Theilungspunkte, die für das System der zu *A* parallelen Geraden möglich sind.

In diesem Kreise kann der Theilungspunkt *T* nach Willkür gewählt werden; zieht man dann den Halbmesser *T V* und durch den Durchschnitt δ der Geraden *A* mit der Bildfläche eine Parallele zu *T V*, so ist diese letztere die dem Theilungspunkte *T* entsprechende Lage der Geraden *B*, auf welche die auf *A* zu bestimmenden Maasse in der wahren Grösse unmittelbar aufzutragen sind.

Die Grundsätze der Theorie der Theilungspunkte und den Beweis, dass die Entfernung *VT* des Theilungspunktes *T* einer Geraden *A* von dem Verschwindungspunkte *V* derselben der wahren Grösse des diesen Verschwindungspunkt bestimmenden Sehstrahles *O V* gleich sein muss, findet man in Herrn Professors Hönig darstellender Geometrie, Wien, 1845 systematisch entwickelt.

Die Art und Weise der hierortigen Entwicklungen stimmt mit jener in dem bezeichneten Werke überein, und der hervorgehobene Beweis kann in derselben Art für irgend eine Richtung *T V* leicht selbst geführt werden.

Das Allgemeine des Satzes der Theilungspunkte beruht, wie man leicht einsieht, dem Principe nach auf einer Anwendung der schiefen Projection.

Je nachdem die Richtung der die Gerade *A* projicirenden Linien diese oder jene ist, erhält man die verschiedenen Projectionen der Geraden *A* auf der Bildfläche, d. i. die verschiedenen Lagen der Geraden B, von denen die Lage des Theilungspunktes T für die in Rede stehende Gerade A abhängt.

Die betreffenden Theilungslinien müssen sich in den entsprechenden projicirenden Ebenen der zwei Geraden $A B$ befinden und der jedesmalige Theilungspunkt muss, weil er der Durchschnittspunkt einer durch das Auge parallel zu den Theilungslinien gezogenen Geraden mit der Bildfläche ist, auch in einer durch den Verschwindungspunkt V zu B gezogenen Parallelen VT enthalten sein, d. i. in dem Durchschnitte der durch das Auge parallel zu der projicirenden Ebene der Geraden $A B$ gelegten Ebene mit der Bildfläche liegen. Dieser Durchschnitt $T V$ ist nichts Anderes als die Projection des parallel zu der Geraden A gezogenen Sehstrahles $O V$ auf der Bildfläche, und da parallele Linien parallele Projectionen haben, die Richtung der projicirenden Geraden sei welche immer, muss $T V$ stets parallel zu B der Projection der Geraden A auf der Bildfläche sein und umgekehrt.

In Fig. I sei δV das perspectivische Bild einer Geraden A, δ der Durchschnitt dieser Geraden mit der Bildfläche und V ihr Verschwindungspunkt.

Zieht man Vf senkrecht auf DD', beschreibt aus f mit dem Halbmesser fO den Bogen $O g$, so ist Vg die wahre Grösse des zu der Geraden A parallelen Sehstrahles von dem Gesichtspunkt O bis zu seinem Durchschnitt V mit der Bildfläche gerechnet. Nun möge man so vorgehen, dass man aus V mit dem Halbmesser Vg den bezeichneten Kreis $T, T', T'' \ldots$ beschreibt, in diesem einen Punkt T als Theilungspunkt wählt, den Halbmesser TV zieht, diesen als die Projection des Sehstrahles $O V$ betrachtet und durch δ parallel zu TV die Gerade B als die dem Theilungspunkte T entsprechende Projection der Geraden A auf der Bildfläche zieht, oder umgekehrt: Man ziehe zuerst durch δ die Projection der Geraden A und durch V den zu derselben parallelen Halbmesser VT, welcher im Durchschnitt mit dem Kreis $T, T', T'' \ldots$ den entsprechenden Theilungspunkt T bestimmt.

Schneidet die Gerade A die Bildfläche in einem Punkte δ, so gehört dieser Punkt schon der Projection der Geraden A auf der Bildfläche an und es kann durch diesen die Gerade B parallel zu VT unmittelbar gezogen werden; schneidet aber die Gerade A die Bildfläche nicht innerhalb der Grenzen der Bildfläche, so wird es sich, um die Projection der Geraden A zeichnen zu können, nur darum handeln, einen Punkt zu bestimmen, welcher derselben angehört.

Va sei die Perspective einer Geraden und es sei die Entfernung eines Punktes a dieser Geraden von der Bildfläche gleich m bekannt. (Fig. 3.)

Durch den Punkt a ziehe man aA' eine auf der Bildfläche senkrechte und aD eine gegen die Bildfläche unter 45 Graden geneigte Gerade, ferner durch irgend einen Punkt a der aD eine zur Horizontallinie Parallele ap und mache $ap = m$. Durch d ziehe man pd geometrisch parallel zu aA'; diese schneidet die aD in dem Punkte d' ferner durch d die zu DD' parallele Gerade da', Da' schneidet die Gerade aA' in dem Punkte a', der die orthogonale Projection des Punktes a auf der Bildfläche ist. Führt man durch a' eine Parallele zu VA', der orthogonalen Projection des zu der Geraden A parallelen Sehstrahles, so erhält man die orthogonale Projection der Geraden A auf der Bildfläche. Dieser Projection entspricht, wie bekannt, der Theilungspunkt T, der sich in der Richtung des Durchmessers VA' befindet.

Man verbinde zwei Punkte a und b des perspectivischen Bildes der Geraden mit dem Theilungspunkte T, diese Theilungslinien aT und bT schneiden die orthogonale Projection von A in α und β.

Um nun die Projection der Geraden A für einen andern Theilungspunkt T' zu erhalten, ziehe man $T'a$ und $T'b$, in einem Punkte a der Geraden $T'a$ eine Parallele ap' zu $T'V$, mache $ap = \alpha\beta$ und ziehe durch p' eine Parallele zu $T'a$; diese schneidet die $T'b$ in einem Punkte β' und durch β' hat man nun abermals eine Parallele zu $T'V$ zu ziehen, welche die gesuchte Projection der Geraden A sein wird.

Dass $cp = \alpha\beta$ sein müsse, resultirt schon aus dem ersten im Eingange aufgestellten Grundsatze der Theorie der Theilungspunkte.

Es wäre nun auch der Fall möglich, dass man den Theilungspunkt für ein System paralleler Geraden zu bestimmen hätte, deren Verschwindungspunkt ausserhalb der Zeichnungsfläche liegt.

Es wäre (Fig. 4) ac eine solche Gerade, deren Verschwindungspunkt sich auf der Zeichnungsfläche nicht mehr bestimmen lässt; ob sich nun der Durchschnitt dieser Geraden mit der Bildebene construiren lässt, oder ob auch dieser ausserhalb der Zeichnungsfläche liegt, ist von keiner Bedeutung.

Es handelt sich vorerst darum, das perspectivische Bild der Geraden ac zu construiren. Zu diesem Behufe wird man im Allgemeinen auf der Geraden ac zwei Punkte ganz beliebig, falls es aber möglich ist, als einen derselben den Durchschnitt δ der Geraden ac mit der Bildfläche wählen und diese zwei Punkte in Perspective setzen.

Durch den Augpunkt ziehe man eine Gerade perspectivisch parallel zu ac, ihr perspectivisches Bild wird die Richtung nach dem unbekannten Verschwindungspunkte der Geraden ac haben. Man mache $A'\beta = ab, \beta\gamma = c''n$ und verbinde A' mit γ, $A'\gamma$ ist die gesuchte Gerade.

Nun denke man sich das rechtwinkelige Dreieck $OA'V$ um $A'V$ in die Bildfläche umgelegt; man errichte auf $A'V$ in A' die Senkrechte Aw, mache Aw gleich der Augdistanz und ziehe durch w die Gerade wV. Entweder mache man den Winkel $VwA' = (90 - \alpha)$, wo α der Neigungswinkel der Geraden ac mit der Bildfläche ist, oder man verfahre auf die Art, als wenn man das perspectivische Bild einer zu ac parallelen Geraden zeichnen sollte, die durch den Punkt w durchgeht; w ist als das perspectivische Bild des Punktes anzusehen, durch den die zu bestimmende Gerade geführt werden soll. Man mache $w\beta$ gleich ab und parallel zu DD, $\beta\gamma$ gleich nc'' und senkrecht auf DD, γd gleich bc' und parallel zu DD, ziehe $\gamma A'$ und dD, diese letzteren zwei Linien schneiden sich in C, der Perspective des Punktes c dessen Projection auf der Bildfläche γ und dessen Distanz gleich $\gamma d = bc'$ ist.

Hat man irgendwo in der Bildfläche einen Punkt w' gegeben, durch den eine Linie perspectivisch parallel zu ac gezogen werden soll, so wird man ganz auf dieselbe so eben angegebene Art verfahren; die drei Dimensionen $a'b$, nc'' und bc' bleiben constant und man bestimmt auf die nämliche Weise, wie man überhaupt die Perspective eines Punktes construirt, einen zweiten Punkt, durch den das perspectivische Bild $w'V$ der fraglichen Geraden gehen muss.

Wenn man das Dreieck $wA'V$ betrachtet, so ist $A'w$ die Distanz des Auges, $A'V$ die orthogonale Projection des den Verschwindungspunkt V der Geraden $A'C$ bestimmenden Sehstrahles S auf der Bildfläche und $wC\,V$ der um seine Projection $A'V$ in die Bildfläche umgelegte Sehstrahl S.

Der Winkel $A'VS$ ist gleich α dem Neigungswinkel der Geraden ac mit der Bildfläche, folglich der Winkel $VwA' = (90 - \alpha)$. Zieht man durch w die Gerade pwq (gt) parallel zu VA', macht $pwV = \alpha$, so erhält man ebenfalls die Richtung wcV.

Nun ist es klar, dass, wenn man den Winkel $Vwq = (180 - \alpha)$ halbirt, die Halbirungslinie wT in ihrem Durchschnitte mit VA' den Theilungspunkt T bestimmt. Es ist auch leicht einzusehen, dass, wenn man $A'w$ verlängert und $A'\varepsilon$ gleich $A'w$ macht, auch w und ε Theilungspunkte für die Gerade ac sind.

Wenn man sich einen Kreis zeichnen würde, dessen Halbmesser in einem bestimmten rationalen Verhältnisse mit jenem Kreise stände, dessen Halbmesser VT ist, und wenn man den Mittelpunkt desselben in irgend einer Geraden, z. B. der TV wählen und das Verhältniss der einzelnen Sehnen der Kreise berücksichtigen würde, so wäre man im Stande, in soweit es der Raum der Zeichnungsfläche gestattet, mittelst Aehnlichkeit der Figuren für die in Rede stehende Gerade ac Theilungspunkte nach Belieben zu bestimmen.

Das Verfahren, die einem bestimmten Theilungspunkte entsprechende Projection der zu theilenden Geraden auf der Bildfläche zu finden, ist dasselbe wie in jenen Fällen, wo sich der Verschwindungspunkt der Geraden noch innerhalb der Grenzen der Zeichnungsfläche befindet.

Der erfahrene Constructeur wird sich zur Genüge überzeugt haben, dass sich die Theilungslinien Fig. 1 (a) mit der zu theilenden Geraden öfters unter sehr spitzen Winkeln schneiden, so dass es in einzelnen Fällen nicht möglich ist, die Theilung richtig vorzunehmen.

Um jene Subtilität in der Abnahme der einzelnen gleichen Theile zu erzielen, die sich desto stärker kund gibt, je mehr man sich in der Theilung dem Verschwindungspunkte der zu theilenden Geraden nähert, ist es nöthig, mit der grössten Genauigkeit zu Werke zu gehen, doch ist dieses nur dann möglich, wenn die einzelnen Winkel, unter denen sich die Theilungslinien mit der zu theilenden Geraden schneiden, nicht viel kleiner als 60 Grade sind.

Durch das in dem Vorhergehenden angegebene Verfahren ist man im Stande, den Theilungspunkt nach Erforderniss der Umstände und zwar so zu wählen, dass man nahezu senkrechte Durchschnitte zwischen den Theilungslinien und der zu theilenden Geraden erhält, und sobald sich bei fortgesezter Theilung die Linien schief schneiden, steht es in der Macht des Constructeurs, den Theilungspunkt also gleich wieder zu verlegen.

Uebrigens lässt sich der Theilungspunkt T' jederzeit so wählen, dass, je geringer der Unterschied in der Abnahme der einzelnen Theile ist, je mehr man sich dem Verschwindungspunkte der zu theilenden Geraden nähert, die Durchschnitte derselben mit den Theilungslinien immer besser und besser werden, bis sie sich endlich gegen den Ort hin, wo die genaueste Arbeit erfordert wird, als unter rechten Winkeln ergeben. Fig. 1, *b*.

Das Gesagte lässt sich in dem am häufigsten vorkommenden Falle, wo sowohl der Verschwindungspunkt als der Durchschnittspunkt der zu theilenden Geraden auf der Zeichnungsfläche bestimmt werden kann, mit besonderer Leichtigkeit ausführen. Wo dieses nicht möglich ist, treten, wie in dem Vorhergehenden bezeichnet wurde, einige Modificationen ein; doch ereignet sich dieser Fall nur seltener, — und es wäre denn die vortheilhafte Anwendbarkeit des angegebenen Verfahrens zu erwarten.

Hr. Prof. Dr. Franz Leydolt hielt nachstehenden Vortrag: „Beiträge zur Kenntniss der Krystallform und der Bildungsart des Eises."

Aus den Beobachtungen, welche Brewster, Smithson, Clarke, de Thury und andere, über die Krystallgestalten des Eises gemacht haben, ist man zwar zu dem Schlusse gekommen, dass es in das rhomboedrische Krystallsystem gehöre, und mein, der Wissenschaft leider zu früh entrissener Freund, Dr. Botzenhart, hat aus den vorhandenen, ziemlich unvollständigen Angaben $R = 117^\circ\ 23'$; $a = \sqrt{1{,}2656}$ berechnet, womit auch die am Schnee so häufig vorkommenden regelmässigen Zusammensetzungen übereinstimmen, an welchen dann die Zusammensetzungsfläche $P+2$, die Umdrehungs-Axe senkrecht darauf ist [1]).

---

[1]) Schrötter. Die Chemie nach ihrem gegenwärtigen Zustande. Wien, bei C. Gerold, 1847. Bd. I. S. 223.

Fig. 1 (a)

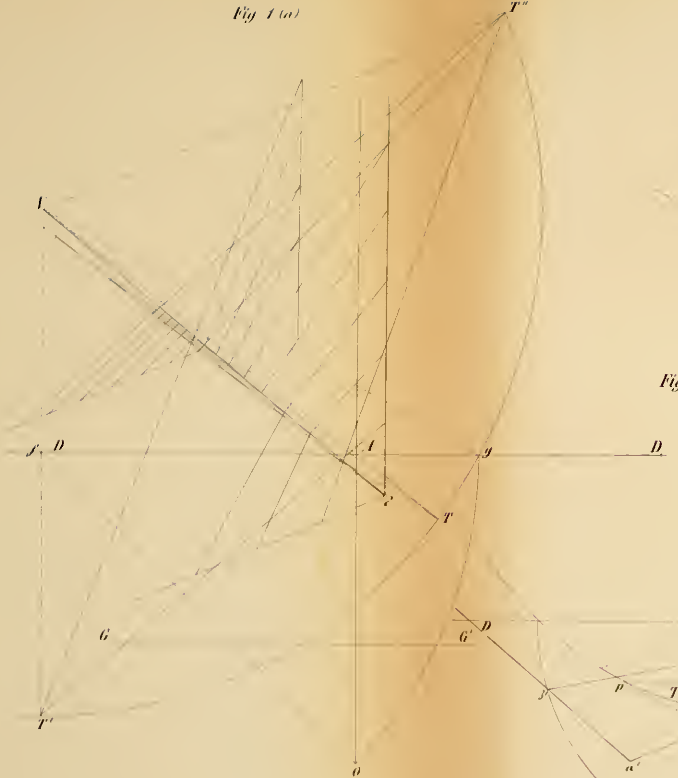

Fig. 3

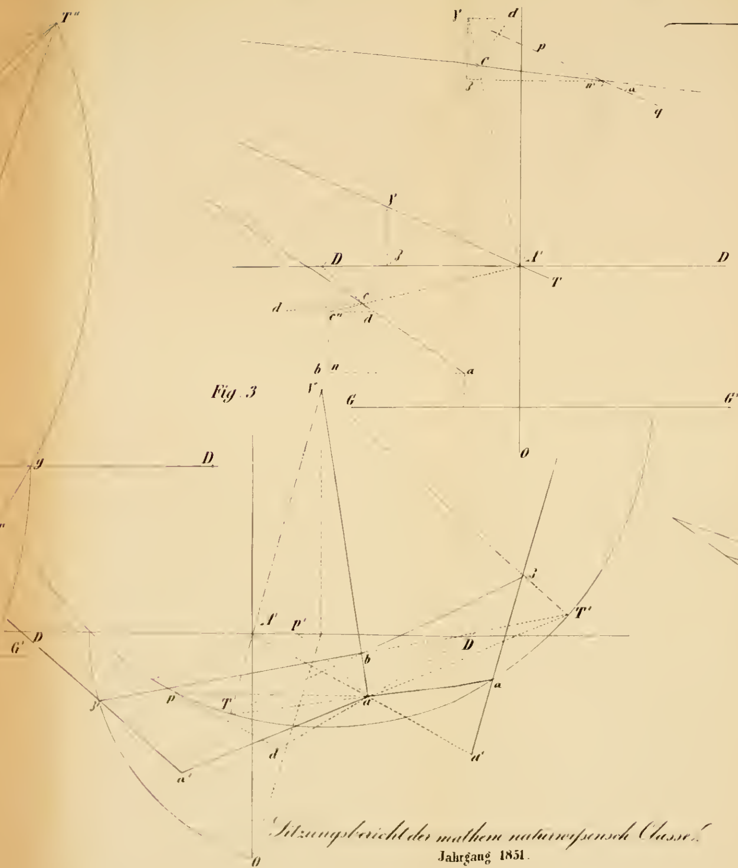

Fig. 4

Fig. 1. (b)