Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre: Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer.

Von dem w. M. Prof. Jos. Petzval.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 15. Jänner 1852.)

Man kann sagen, dass es eine grosse und kleine Wissenschaft gebe, so wie es einen grossen und kleinen Krieg gibt. Ich rechne zur ersten unter andern die riesigen Denkmethoden der mathematischen Wissenschaften und die des forschenden und messenden Experimentes; zur andern aber das Aufhäufen von wissenschaftlichen Thatsachen, die verschiedenen Anschauungsweisen und Analogien, deren man sich bedient, um zur Erklärung der speciellen und ins Detail gehenden Erscheinungen mit leichterer Mühe zu gelangen, abstracte Wahrheiten dem gewöhnlichen Verstande zugänglicher zu machen, den populären und elementaren Unterricht zu unterstützen u. s. w., Anschauungsweisen, deren Inbegriff die Grundlage zu sein scheint von jenem feinen Instincte, der die grössten Wissenschaftsforscher in ihren Bestrebungen leitet und die Wahrheit gerade da suchen lässt, wo sie wirklich ist. Beide sind gleich wichtig zur Ausbildung des Menschengeschlechtes und unser Wissen wäre vermuthlich auf einer sehr niedrigen Stufe, ohne das innige Ineinandergreifen der grossen und kleinen Wissenschaft. Die grosse kann gar nicht entstehen, wenn ihr die kleine nicht vorgearbeitet hat; eine Mechanik des Himmels wäre unmöglich gewesen, ohne diejenigen Thatsachen der Beobachtungen, die zu den Kepler'schen Gesetzen führten. Die kleine dagegen verirrt sich sehr bald, wenn sie nicht an der Hand der grossen fortschreitet und durch dieselbe fortwährend controlirt wird, in das Reich des Irrthums; denn sie ist nur zu sehr geneigt ihre Analogien auszudehnen über die Gebühr, aus äusseren Aehnlichkeiten auf innere zu schliessen, aus den äusseren Aehnlichkeiten der Erscheinungen ihre Identität zu folgern und verfällt so, wie die Geschichte gelehrt hat, oft in Irrthümer, über die eine gesunde und nüchterne Anschauungsweise oft nur nach einem harten Kampfe von einem halben Jahrhunderte den Sieg davon zu tragen vermag. In der That: ein Beobachter bemerkt, dass ein Lichtstrahl durch eine kleine Oeffnung in ein verfinstertes Zimmer geradlinig eindringe, so wie der von einem Bogen abgeschossene Pfeil oder eine Büchsenkugel, und findet sich gleich geneigt, diese flüchtige Aehnlichkeit in eine Hypothese auszuspinnen; die Sonne wird ihm zum Geschütz, das in jedem Augenblicke Miriaden von Projectilen nach allen Seiten herumschleudert. Die Einfachheit der Annahme, die daraus folgende ungezwungene Erklärung gewisser Erscheinungen, die selbst eine Beleuchtung mittelst der mathematischen Analysis erträgt, werden eben so viele Veranlassungen, in der äusseren Aehnlichkeit eine innere Identität zu vermuthen; endlich erklärt sich noch überdies ein grosser Mann für die Emanationshypothese und ihre Herrschaft im Gebiete der Physik ist, trotz der beinahe gleichzeitig auftauchenden richtigeren Ansichten, denen nur derselbe Grad populärer Einfachheit fehlt, für ein halbes Jahrhundert begründet. Selbst das mächtigste Instrument der Wahrheit: die mathematische Analysis wird aufgeboten zu Gunsten des Irrthums, bis endlich dieser, eben unter der Last der zu seiner Erhaltung aufgebotenen Hülfshypothesen, zusammenbricht. Nun fassen die richtigeren Ansichten der Vibrationshypothese, auf den mathematischen Calcul gestützt, festen Fuss; mancherlei Erscheinungen, die sich früher nicht erklären liessen, finden in derselben ihre ungezwungene Erklärung, die aber in vollem Masse nur demjenigen verständlich ist, der den mathematischen Lapidarstyl, in dem die Differentialgleichungen zu ihm sprechen, auszulegen versteht. Der übrige, wissensdurstige Theil des menschlichen Geschlechtes aber muss abermals mit Analogien, dem gewöhnlichen Leben entnommen und von der kleinen Wissenschaft aufgefunden, abgespeist werden; erfindungslustige Parteigänger der letzteren ermangeln dann wieder nicht, diese Analogien über die Grenzen ihrer Gültigkeit auszudehnen; so droht die alte Herrschaft des Irrthums von Neuem hereinzubrechen in veränderter Gestalt, wenn nicht die Geister der Differentialgleichungen sich unser annehmen und uns davon befreien. Ich kann mich rühmen, einiger Bekanntschaft mit diesem Geisterreiche gewürdigt worden zu sein, wesshalb ich mir erlaube dieser Versammlung einige grosse Wahrheiten ins Gedächtniss zurückzurufen, die zwar schon sehr alt sind, aber eben auch darum in Gefahr zu stehen scheinen, vergessen, oder verdunkelt, oder missverstanden zu werden.

Bekanntlich besitzen wir folgende 3 Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von materiellen Punkten, das gleiche Elasticität nach allen Seiten besitzt:

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2} = 3\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} + 2\frac{d^2\eta}{dx.dy} + 2\frac{d^2\zeta}{dx.dz}$$

$$(1) \quad a\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dx^2} + 3\frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2} + 2\frac{d^2\xi}{dx.dy} + 2\frac{d^2\zeta}{dy.dz}$$

$$a\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + 3\frac{d^2\zeta}{dz^2} + 2\frac{d^2\xi}{dx.dz} + 2\frac{d^2\eta}{dy.dz};$$

aus ihnen geht, durch Differentiation der ersten nach x, der zweiten nach y, der dritten nach z, Addition und Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen θ, vermittelst der Substitution:

$$(2) \qquad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

mit Leichtigkeit folgende vierte Gleichung hervor:

$$(3) \qquad a\frac{d^2\theta}{dt^2} = 3\left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{d^2\theta}{dz^2}\right);$$

auch ist bekannt, dass diese neu eingeführte Veränderliche θ, die durch die Bewegungen ξ, η und ζ, längs den 3 Coordinatenaxen angebracht, an allen Punkten des Systems erzeugte Veränderung der Einheit des Volums bedeute, oder, mit andern Worten, durch diese Bewegungen wird das Volumen $dx.\ dy.\ dz$ eines Elementartheilchens verwandelt in $(1+\theta)\ dx\ dy\ dz$, so dass also dieses θ die, durch die Bewegung an der Stelle $x\ y\ z$ hervorgebrachte, Verdichtung oder Verdünnung bezeichnet.

Jedermann weiss ferner, dass es nicht genüge ein Gesetz, also auch eine Differentialgleichung, denn eine solche stellt auch ein Gesetz oder vielmehr einen Inbegriff von sehr vielen Gesetzen dar, zu kennen, dass es vielmehr überdies nöthig sei, auch über die Grenzen seiner Wirksamkeit genaue Rechenschaft geben zu können; es ist daher nothwendig, an diesem Orte zu bemerken, dass die aufgezählten Differentialgleichungen allerdings einseitige Wesen seien, gegründet auf gewisse Voraussetzungen, ausser deren Bereiche sie keine Anwendung verstatten. So wird in der Regel gesagt, ξ, η, ζ seien sehr kleine Verschiebungen eines Theilchens aus seiner Ruhelage; diese Bedingung ist indessen in dieselben keineswegs niedergelegt, denn bei ihrer Ableitung werden nur $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ gegen Δx, Δy und Δz als sehr klein betrachtet und ihre Quadrate vernachlässigt; sie haben daher ihre volle Gültigkeit auch für solche Bewegungen, bei denen grosse Räume ξ, η und ζ von den Theilchen zurückgelegt werden, wenn nur diese Räume für nahe an einander liegende Theilchen wenig von einander verschieden sind.

Ich muss ferner zugeben, dass die in Rede stehenden Differentialgleichungen ihrer Ableitungsweise nach ein im stabilen Gleichgewichte sich befindendes Medium voraussetzen oder mindestens ein solches, welches wegen der Stabilität der Bewegungen sich auf ähnliche Weise benimmt; gleichwohl muss aber bemerkt werden, dass eine dieser Gleichungen, nämlich die aus den ersten drei abgeleitete vierte, auch gültig sei für einen flüssigen Körper unter der Bedingung der Continuität der Masse, und dass die bekannten Bewegungsgleichungen eines flüssigen Körpers unter zwei verschiedenen hypothetischen Voraussetzungen: Parallelismus der Schichten und fadenförmige Bewegung genannt (ohne diese Voraussetzungen lassen sich die Rechnungen nicht durchführen), auf eine progressive Bewegung mit grossen ξ, η und ζ und ein nicht im stabilen Gleichgewichte stehendes System materieller Punkte, d. h. den Ausfluss des Wassers aus der Wandöffnung eines Gefässes, angewendet, richtige Resultate geliefert habe, dass also keine Ursache vorhanden sei, die Richtigkeit der Gleichungen etwa nur auf elastische Körper zu beschränken, was zu thun vermuthlich auch Niemandem einfallen wird, da sie ja der Theorie des Lichtes zu Grunde liegen. Die obenerwähnte Bedingung der Continuität der Masse besagt, so wie sie in Rechnung gesetzt ist, nichts mehr, als dass ein Theilchen von der Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedums dx, dy, dz, das diese Form am Anfange des Zeitelementes dt hatte, am Ende desselben abermals ein Parallelepiped bilde, mit Seiten, die unendlich wenig von dx, dy, dz verschieden sind, und Winkeln, die unendlich wenig von einem rechten abweichen. Sonst ist in Bezug auf die Formänderung der Elementartheilchen, die durch die Bewegung hervorgebracht wird, gar keine Voraussetzung gemacht; diese kann daher eine periodisch wiederkehrende oder progressive sein; es ist daher immer möglich, dass, unbeschadet der Bedingung der Continuität der Masse, das Körperelement in einer längeren Zeit t aus seiner parallelepipedischen Gestalt in eine band- oder fadenförmige übergehen kann, so dass also diese Bedingung im Grunde weiter fast gar nichts zu sagen scheint, als, dass während der Bewegung im Innern des Körpers keine absolut leeren Risse oder Spalten entstehen und sohin die Differentialgleichung sogar geeignet erscheint, die Gesetze sehr bedeutender Strömungen, mit nachweisbarer Ruhelage im Innern eines flüssigen Mittels, zu liefern.

Endlich muss noch zugegeben werden, dass die besprochenen Differentialgleichungen einen gewissen, regelmässigen, inneren Bau des Systems von materiellen Punkten voraussetzen, auf welches sie sich beziehen, kraft dessen die Anordnung um ein jedes Theilchen, stets ein und dieselbe ist, und einem jeden Punkte auf der diametral entgegengesetzten Seite und in demselben Abstande ein Gegenpunkt entspricht. Man nimmt an, dass eine solche Anordnung im Zustande des Gleichgewichtes mindestens annäherungsweise vorhanden sei.

Allen diesen verschiedenen Annahmen gegenüber und im Angesichte gewisser Ergebnisse des Experimentes, deren Erklärung, wie wir in neuerer Zeit erfahren haben, sich aus unseren Differentialgleichungen nicht ziehen lässt, muss wohl zugegeben werden, dass sie mit der Zeit eine Regeneration erleiden und durch andere der Erfahrung inniger sich anschmiegende ersetzt werden müssen; welche aber auch immer diese anderen sein mögen, so werden sie doch drei Haupteigenschaften mit den hier aufgestellten gemein haben. Ich erlaube mir, die verehrte Classe auf diese drei Haupteigenschaften aufmerksam zu machen; sie sind:

Erstens: Die lineare Form, die wir, mindestens in erster Annäherung, der Bequemlichkeit des Rechnens wegen, stets beibehalten und dadurch erzeugen werden, dass wir alle $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ gegen Δx, Δy, Δz als sehr klein betrachten, und ihre Quadrate vernachlässigen. Hierdurch sind aber nur heftigere Bewegungen, bei denen die Continuität der Masse verletzt wird, ausgeschlossen.

Zweitens: Die Verschiebungen ξ, η, ζ können als solche und undifferenzirt in den Gleichungen nicht erscheinen, aus dem einfachen Grunde, weil eine rein progressive Bewegung aller Theilchen des materiellen Systems in derselben Richtung und parallel zu einander, bei welcher sämmtliche Differentialquotienten dieser Verschiebungen der Nulle gleich sind, offenbar keinerlei innere Kräfte zu wecken im Stande ist.

Drittens: Nach der Zeit t werden nur die zweiten Differentialquotienten der Verschiebungen in derselben Art vorkommen, wie dies oben in den vorgelegten Gleichungen der Fall ist, aus dem einfachen Grunde, weil der zweite Differentialquotient des durchlaufenen Raumes, nach der Zeit genommen, den analytischen Ausdruck der Kraft gibt, welche die wirkliche Bewegung der Masse $=1$ erzeugen kann, und wir offenbar bei einer jeden Ableitung der neuen Gleichungen, wie diese auch aussehen mögen, von dem d'Alembert'schen Principe Gebrauch zu machen genöthigt sein werden.

Erlauben Sie mir jetzt, Ihnen nur diejenigen Naturgesetze vorzuführen, die als unmittelbare Folge der oben aufgezählten drei ewigen und ohne alle Widerrede unbedingt nothwendigen Eigenschaften, nicht sowohl der hier aufgeführten, als vielmehr derjenigen Gleichungen zu betrachten sind, die wir besitzen werden, wenn die Wahrheit, die wir unablässig suchen, gefunden ist, wenn wir im Stande sein werden, das Weltsystem aus einem einzigen Grundgesetze zu construiren und wenn dieses letztere keine Hypothese mehr sein wird, sondern eine erwiesene Wahrheit, gerade so, wie das Newton'sche Attractionsgesetz keine Hypothese mehr ist. Nicht Ansichten also sind es, die mit der Zeit kommen und gehen, sondern unumstössliche, ewige Wahrheiten, freilich bereits sehr alte, denen Sie gebeten werden ein geneigtes Ohr zu schenken. Nun — es ist ja nicht nöthig, immer neue Bekanntschaften zu machen, man kann sich ja auch mitunter Einmal mit den alten Freunden unterhalten.

Das erste dieser Gesetze ist das Gesetz der Coexistenz der elementaren Bewegungen, deren ein System von materiellen Punkten fähig ist. Um seine Bedeutung vollkommen einzusehen, wird folgende Darstellung genügen: Eine jede Function der Coordinaten und der Zeit, welche anstatt der abhängigen Veränderlichen gesetzt (denken Sie, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, anstatt θ in der Gleichung (3)) Genüge leistet, ist eine Auflösung der Gleichung und stellt eine mögliche Bewegungsweise des Systems dar, deren Gesetze in eben der gedachten Function ihren Ausdruck finden. Lassen sich mehrere solche von einander verschiedene Functionen auffinden, so gibt es mehrere, Sie können sagen elementare Bewegungsweisen des Systemes.

Es ist nun eine unmittelbare Folge der linearen Form der Differentialgleichungen, dass, wenn $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ von einander verschiedene, Genüge leistende Functionen sind, eben so viele mögliche Bewegungsweisen repräsentirend, nicht nur auch:

$$C_1\theta_1,\ C_2\theta_2,\ C_3\theta_3,\ \ldots$$

als genügende Werthe dastehen, sondern auch ihre Summe:

$$\theta = C_1 \theta_1 + C_2 \theta_2 + C_3 \theta_3 + \ldots .$$

die Eigenschaft besitzt Genüge zu leisten, und sohin eine zusammengesetzte Bewegungsweise darstellt, bestehend aus allen elementaren, welche neben einander existiren, ohne sich gegenseitig zu beirren; man könnte auch so sprechen: dem Aufrufe zur Bewegung, der in jeder der Functionen θ_1, θ_2, θ_3, ... liegt, leistet das Mittel gerade so Folge, als ob die übrigen gar nicht da wären. Wenn sohin kraft der ersten dieser Bewegungsweisen irgend ein Theilchen des Mittels in der Zeit t einen Raum $= \alpha_1$ zurückzulegen gezwungen wäre, wenn eben so der Raum, der der isolirt stattfindenden zweiten Bewegung entspricht $= \alpha_2$ wäre, der Raum für die dritte $= \alpha_3$ u. s. w. hiesse, so wäre dasselbe Mittel auch aller 3 Schwingungsweisen zusammengenommen fähig und das Theilchen, von welchem die Rede ist, würde kraft derselben in der Zeit t den Raum $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ zurückgelegt haben. Die Wichtigkeit dieses Satzes wird mich entschuldigen, wenn ich denselben mit folgendem Beispiele zu erläutern suche: eine schwingende Saite ist auch ein System von materiellen Punkten, sie gibt einen gewissen Grundton, den die erste ihr eigenthümliche elementare Schwingungsweise kund gibt; in der Mitte leise berührt und angeschlagen gibt sie die höhere Octave dieses Grundtones als zweite Schwingungsweise u. s. w. Gemäss dem Principe nun der Coexistenz der elementaren Bewegungen vermag dieselbe Saite, unter herbeigeführten günstigen Umständen, beide Töne zugleich zu schwingen und einen Eindruck auf das Ohr zu veranlassen, als wären 2 Saiten neben einander gespannt, deren eine den erwähnten Grundton, die andere die höhere Octave gibt, und als würden beide Saiten zugleich angeschlagen.

Denkt man sich nun, um das oben Gesagte zu verallgemeinern, in einem materiellen Mittel zwei Bewegungen verschiedener Natur erregt, auf die geeignete Weise: die eine mag eine Strömung sein, hervorgerufen durch einen in progressiver oder drehender Bewegung begriffenen Körper, eine Bewegung, bei welcher sich eine Ruhelage angeben lassen muss, denn eine solche setzen die Differentialgleichungen ihrer Ableitungsweise nach voraus, eine Bewegung also, bei der die Theile des Mittels eine entferntere Ruhelage suchen und die wegen der grossen Amplitude oder des Mangels der Periodicität nicht gut eine Undulation genannt werden kann; ferner noch eine zweite, die wir eine wirkliche Undulation sein lassen, hervorgebracht durch einen leuchtenden oder schallenden Körper. Die eine und die andere muss offenbar, in die Sprache der Analysis übersetzt und durch unsere Zeichen ausgedrückt, wenn auch nicht den Differentialgleichungen, die ich Ihnen vorgeführt habe, doch wenigstens denjenigen Genüge leisten, die mit der Zeit an ihre Stelle treten und nothwendigerweise mit den vorgeführten die drei oberwähnten Eigenschaften gemeinschaftlich besitzen werden. Nun, nach dem so eben hervorgehobenen Principe der Coexistenz der elementaren Bewegungen ist es klar, dass jede Verschiebung wie ξ, η, ζ und so auch jede damit im Zusammenhange stehende Grösse, wie θ, erscheinen wird, als eine Summe von zwei verschiedenen Functionen, etwa:

$$(4) \qquad \theta = \Theta + \Theta_1$$

von welchen die erste Θ das Gesetz der Strömung, die andere Θ_1 das Gesetz der undulatorischen Bewegung in sich schliessen wird. Ist die Strömung nur auf einen gewissen Raum beschränkt, etwa nur auf eine gewisse Entfernung von dem bewegten Körper merkbar, so ist offenbar Θ eine Function, die, nebst der Eigenschaft die Differentialgleichung zu erfüllen, noch die andere hat, bloss merkbare Werthe zuzulassen für gewisse x, y, z, die Punkten in der Nähe des bewegten Körpers angehören. Für Punkte ausserhalb dieser Nähe aber kann die Function Θ_1, die die undulatorische Bewegung repräsentirt, als allein von der Nulle verschieden auftreten. Wenn Sie sich dieselbe vorstellen unter einer Gestalt wie:

$$(5) \qquad \Theta_1 = \frac{Q}{r} \cos(st - kr),$$

wo:

$$(6) \qquad r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

ist, s und k aber constante Coëfficienten darstellen, so haben Sie einen leuchtenden oder schallenden Punkt vorausgesetzt, dessen Coordinaten a, b und c sind. Denken Sie sich ferner die Zeit t um τ wachsend, so dass:

$$s\tau = 2\pi$$

ist, so erhält offenbar Θ_1 denselben Werth in den beiden Zeiten t und $t + \tau$, und man bezeichnet dem zu Folge das kleine Zeittheilchen τ mit dem Namen Oscillationsdauer. Verwandelt man ebenso r in $r+\rho$, so dass:

$$k\,\rho = 2\,\pi$$

wird, so hat der in Θ_1 vorhandene Cosinus offenbar einerlei Werth wie früher und es ist ρ der Abstand zweier Punkte des Raumes, wo dieser Cosinus einerlei Werth hat — ein Abstand, den wir mit dem Namen Wellenlänge belegen. Die Schwingungsdauer τ gibt sich subjectiv als Tonhöhe oder Farbe kund, und es geht aus diesen analytischen Definitionen unmittelbar folgendes Corollarium hervor:

Schwingungsdauer und Wellenlänge sind lediglich der Function Θ_1, die die undulatorische Bewegung repräsentirt, entnommene Dinge, welche mit der Function Θ, die das Gesetz der Strömung enthält, gar nichts gemein haben. In Bezug also auf diese beiden Umstände hat die undulatorische Bewegung durch das Vorhandensein oder den Durchgang durch die Strömung durchaus gar nichts gelitten und keine Veränderung erfahren und Alles dieser Bewegung Eigenthümliche: Wellenlänge, Oscillationsdauer u. s. w., ist genau im Alten geblieben; nur im Innern des Raumes, wo die Strömung Statt findet, wo sohin Verdichtungen oder Verdünnungen vorkommen, die so bedeutend sind, dass sie den Gleichungs-Coëfficienten einen veränderlichen Werth ertheilen, kann auch die Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen andern Werth annehmen, aber Oscillationsdauer und damit zusammenhängend Ton und Farbe bleiben unerschütterlich dieselben. Ist daher ein schwingender und seine Schwingungen an die Luft oder den Aether mittheilender Körper zugleich im Zustande einer Bewegung von anderer Sorte, die ebenfalls dem Mittel mitgetheilt wird und die Bedingungen der Continuität der Masse und der vorhandenen Ruhelage erfüllt, so findet jede dieser beiden Bewegungen so Statt, als ob die andere gar nicht da wäre, und der von der Undulation erzeugte Ton bleibt derselbe, was auch die andere von der Tonquelle angenommene Bewegung sein mag. Wir erwähnen dies nur an dem gegenwärtigen Orte ohne ins Detail der analytischen Entwickelungen in Bezug auf die Unverwüstlichkeit des Einen Bewegungselementes— der Schwingungsdauer nämlich — einzugehen, weil wir unverzüglich durch eine umfassende, dem Gleichgewichtszustande sowohl als dem einer permanenten Strömung sich anpassende Analysis den Gegenstand in ein helles Licht zu setzen gesonnen sind. Wir werden stets bei der Voraussetzung bleiben, dass die endlichen Differenzen der

Verschiebungen: $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ stets sehr klein seien, oder mit anderen Worten: dass nahe an einander liegende Theilchen beinahe einerlei Bewegung annehmen; die dieser Voraussetzung zu Folge vernachlässigten Quadrate der angedeuteten Differenzen veranlassen eine Vereinfachung unserer Gleichungen, machen aber auch, dass dieselben nur annäherungsweise richtig sind. Wir gestehen daher gerne die Möglichkeit ein, dass diese in Rechnung gezogenen Quadrate kleine Abweichungen beurkunden können von den Rechnungsresultaten, die aus unseren annäherungsweise richtigen Gleichungen gezogen werden. Diese Rechnungen durchzuführen hat zwar noch Niemand versucht, wovon der Grund nicht bloss in der Schwierigkeit derselben, sondern auch und vielleicht mehr noch in dem Umstande liegt, dass die Erfahrung bisher keinerlei merkbare Verschiedenheit in den Fortpflanzungsgesetzen heftiger und minder heftiger Undulationen nachgewiesen hat. Wiewohl wir daher über diese Abweichungen vor der Hand noch gar nichts Bestimmtes sagen können, so wissen wir doch, dass sie sich unter die secundären Wirkungen gruppiren und in der Undulationstheorie beiläufig eine Rolle spielen, wie die planetarischen Störungen in der Mechanik des Himmels und dass sie in grösserer Entfernung von der Erregungsquelle, wo unsere Gleichungen wegen der wirklich sehr kleinen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ erst ihre rechte Geltung gewinnen, als verschwindend zu betrachten sind. Um eine klare Anschauung der Bewegungsweisen, von denen hier die Rede ist, zu geben, kann man sich ein schwingendes Pendel denken, dessen Linse entweder selbst ein tönender Körper ist oder einen solchen birgt. Hier hat man offenbar eine Ruhelage und zwei Sorten von Bewegungen des Mittels, in dem sich ein solches System befindet: die eine rührt von den Schwingungen des Pendels her, die andere von den ungleich kleineren Vibrationen des tönenden Körpers, und der Ton ist derselbe, ob sich das Pendel in Bewegung oder in Ruhe befindet.

Da die in unseren Formeln erscheinenden ξ, η, ζ die Bedeutung besitzen von Verschiebungen aus der Ruhelage, so setzen offenbar die angeführten Gleichungen die Existenz einer solchen voraus und scheinen unbrauchbar zu werden in all' denjenigen Fällen, wo sich keine Lage angeben lässt, in der die Theilchen des Mittels unter der Wirkung der gegebenen Kräfte in Ruhe zu sein vermögen. Z. B. wenn ein Körper in einem Mittel in Drehung versetzt und bei derselben Drehungsgeschwindigkeit erhalten wird — eine Bewegung, in die er gewisse Theile dieses Mittels mitverflieht, was am Ende einen permanenten Strömungszustand zur Folge hat, oder, wenn ein Körper in geradliniger, mit constanter Geschwindigkeit stattfindender, progressiver Bewegung in einem solchen Mittel begriffen ist, woraus dann wieder ein permanenter Strömungszustand in der Nähe des Körpers hervorgeht. Dieser Fall ist, den Ergebnissen nach, dem umgekehrten gleichgeltend, wo der Körper ruht und das Mittel mit constanter Geschwindigkeit sich gegen ihn bewegt. In diesen und und allen ähnlichen Fällen lässt sich keine Ruhelage angeben, wohl aber ein permanenter Strömungszustand, d. h. ein solcher, bei welchem an einer und derselben Stelle x, y, z stets ein und dieselbe Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung vorhanden ist, und dieser Zustand tritt jetzt an die Stelle der Ruhelage. Er ist offenbar der häufiger in der Natur vorkommende und muss es auch sein, aus der einfachen Ursache, weil die Existenz einer Ruhelage bei einem flüssigen Mittel, wie man weiss, an eine gewisse analytische Bedingung geknüpft ist, die besagt, dass ein gewisser Ausdruck ein vollständiges Differential einer Function mehrerer Veränderlichen sein muss. Man ist sohin genöthigt, den permanenten Strömungszustand als den normalen und die Ruhelage als einen speciellen Fall anzusehen, sohin ist es von Wichtigkeit, auch in solchen Fällen den Einfluss der Strömung und Undulation auf einander zu erörtern. Setzen wir zu diesem Zwecke ein solches ganz oder theilweise mit ähnlichen Strömungen durchzogenes Mittel voraus, nennen die Componenten der im Punkte x, y, z vorhandenen Geschwindigkeit, so wie sie der Strömung allein angehört, u, v, w, die Masse des am Ende der Zeit t durch den Punkt x, y, z sich bewegenden Theilchens m, nehmen ferner an, dass nebst der Strömung sich noch eine undulatorische Bewegung über das Mittel lege und dass diese die Coordinaten, die dem Theilchen in Folge der strömenden Bewegung allein zukommen würden, um die kleinen Zusätze ξ, η, ζ vermehre. Wir beziehen sowohl die u, v, w als auch die ξ, η, ζ nicht auf ein bestimmtes Theilchen, sondern auf einen bestimmten Ort und betrachten somit alle diese Grössen als Functionen von x, y, z und t, bezüglich als Bewegungsweisen, die nicht einem bestimmten Massenelemente, sondern gerade demjenigen angehören, welches am Ende der Zeit t sich durch den Punkt x, y, z hindurchbewegt. Für ein anderes, am Ende derselben Zeit t durch den Punkt $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ hindurchgehendes Theilchen m'

gehen die $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ genannten Grössen über in $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$, $\xi + \Delta \xi$, $\eta + \Delta \eta$, $\zeta + \Delta \zeta$.

Lassen wir jetzt die Zeit t um ihr Differential dt zunehmen, so gelangt das Massenelement m, unter dem Einflusse der Strömung allein, offenbar von dem Orte x, y, z nach einem anderen, dem die Coordinaten $x + u\,dt$, $y + v\,dt$, $z + w\,dt$ angehören. An diesem neuen Orte und in dieser neuen Zeit geht eine jede Function $f(x, y, z, t)$, die irgend einen Umstand der Bewegung analytisch repräsentirt, über in $f(x + u\,dt,\, y + v\,dt,\, z + w\,dt,\, t + dt)$, oder, kraft der Taylor'schen Formel in:

$$f + \frac{df}{dx} u\,dt + \frac{df}{dy} v\,dt + \frac{df}{dz} w\,dt + \frac{df}{dt} dt,$$

wofür wir, von einer allgemein bekannten symbolischen Ausdrucksweise Gebrauch machend, setzen wollen:

$$f + \left(\frac{d}{dx} u + \frac{d}{dy} v + \frac{d}{dz} w + \frac{d}{dt}\right) f.dt.$$

Es gehen daher nach dieser Bezeichnungsweise die Grössen ξ, η, ζ der Reihe nach über in:

$$\begin{aligned}
&\xi + \left(\frac{d}{dx} u + \frac{d}{dy} v + \frac{d}{dz} w + \frac{d}{dt}\right) \xi.dt \\
(7)\qquad &\eta + \left(\frac{d}{dx} u + \frac{d}{dy} v + \frac{d}{dz} w + \frac{d}{dt}\right) \eta.dt \\
&\zeta + \left(\frac{d}{dx} u + \frac{d}{dy} v + \frac{d}{dz} w + \frac{d}{dt}\right) \zeta.dt
\end{aligned}$$

und es wird sich jetzt zunächst darum handeln, erstens die durch die Undulation modificirte Geschwindigkeit des Massentheilchens m und zweitens die Kraft auszudrücken, die die thatsächliche Bewegung desselben aber isolirt gedachten Theilchens erzeugen kann.

Bekanntlich ist aber die Geschwindigkeit gleich dem Quotienten, den man erhält, den während des Zeittheilchens dt zurückgelegten Raum durch dt dividirend. Nun geht aber unser Massentheilchen m am Ende der Zeit t, und in Folge der Strömung und Undulation zugleich, durch den Ort $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$; am Ende der Zeit $t + dt$ aber geht dasselbe Massentheilchen m, dem früher Gesagten nach, durch den Punkt, dem die Coordinaten angehören:

$$x+\xi+u\,dt+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)\xi.\,dt$$
$$y+\eta+v\,dt+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)\eta.\,dt$$
$$z+\zeta+w\,dt+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)\zeta.\,dt,$$

und zieht man von ihnen beziehlich die früheren Coordinaten $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ ab, so sind die Reste gleich den drei Componenten des binnen der unendlich kleinen Zeit dt durchlaufenen Raumes, aus welchen, durch Division mit dt, die gesuchten drei Componenten der Geschwindigkeit hervorgehen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &u+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)\xi\\ &v+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)\eta\\ &w+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)\zeta. \end{aligned}$$

Die drei Componenten der eine solche Bewegung zu erzeugen fähigen Kraft werden auf ähnliche Weise gefunden, da sie bekanntlich gleich sind den Producten aus der Masse m in den Quotienten, den man erhält, den der Geschwindigkeit binnen des Zeittheilchens dt zukommenden Zuwachs durch dt dividirend, und man verschafft sich auf dem eben betretenen Wege für diese drei Componenten ohne Schwierigkeit folgende ebenfalls symbolische Ausdrücke:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &m\left[\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\right)u+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\xi\right]\\ &m\left[\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\right)v+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\eta\right]\\ &m\left[\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\right)w+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\zeta\right], \end{aligned}$$

bei denen nur noch folgende zwei Dinge zu bemerken kommen:

Erstens: ist bei dem zu den ersten Theilen dieser Ausdrücke gehörigen symbolischen Factor der Bestandtheil $\frac{d}{dt}$ ganz ausgelassen, darum, weil der Voraussetzung nach die Strömung eine permanente ist, sohin die u, v, w nur als Function der x, y, z ohne t dastehen, was zum Verschwinden der Differentialquotienten $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ Veranlassung gibt.

Zweitens: haben wir die zu den zweiten Theilen derselben Ausdrücke gehörigen, mit den Differentialquotienten von u, v und w, nach x, y und z genommen, verbundenen Glieder als sehr klein vernachlässigt, indem wir voraussetzten, dass zwar u, v, w, wenn man will, sehr gross, d. h. die Strömung eine beliebig heftige sein könne, wesshalb auch die Glieder mit den Quadraten der u, v, w beibehalten erscheinen, dass aber demungeachtet $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, $\frac{dv}{dx}$, ... sehr kleine, mit den $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}$, ... zu derselben ersten Ordnung der Kleinheit gehörige Grössen seien, oder mit anderen Worten, dass zwei nahe an einander liegende Punkte auch nahe dieselbe Bewegung annehmen. Die unmittelbare Folge hievon ist, dass alle Glieder von der Form:

$$\frac{du}{dx}\frac{d\xi}{dx},\ \frac{du}{dx}\frac{d\xi}{dy},\ \frac{du}{dy}\frac{d\xi}{dx},\ \ldots\ldots$$

als sehr kleine Grössen der zweiten Ordnung zu betrachten und sohin wegzulassen sind, was wir auch so eben gethan haben.

Die Kräfte nun, die an einer solchen Bewegung Schuld tragen, sind zum Theil gewisse äussere, zum Theil Molecularkräfte.

Erstere denken wir uns als Functionen von x, y, z, ohne t, und, zerlegt nach den drei Coordinatenaxen, die auf die Einheit der Massen bezüglichen Componenten X, Y, Z bietend. Die anderen sehen wir als Functionen der Entfernung r zweier Theilchen m und m' und ihrer Massen an von der Form:

$$m\,m'.\,r\,f(r)$$

mit den drei Componenten:

$$(10)\qquad m m' f(r)\Delta x,\ \ m m' f(r)\Delta y,\ \ m m' f(r)\Delta z.$$

Es sind daher die Gesammtsummen aller auf das Theilchen m nach den drei Coordinatenaxen wirkenden, sowohl molecularen, als auch äusseren Kräfte, wenn gar keine Undulation ξ, η, ζ stattfände, der Reihe nach:

$$(11)\qquad X+S[m m' f(r)\Delta x],\ \ Y+S[m m' f(r)\Delta y],\ \ Z+S[m m' f(r)\Delta z],$$

ist aber noch überdies eine Undulation vorhanden, die die Zusätze ξ, η, ζ zu den Coordinaten der Vorausetzung nach zur Folge hat, so verwandeln sich Δx, Δy, Δz und r der Reihe nach in:

$$\Delta x+\Delta\xi,\quad \Delta y+\Delta\eta,\quad \Delta z+\Delta\zeta,\quad r+\Delta r$$

wo in Folge von:

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

und wenn man die höheren Potenzen von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ hinweglässt,

$$\Delta r = \frac{\Delta x}{r}\Delta\xi + \frac{\Delta y}{r}\Delta\eta + \frac{\Delta z}{r}\Delta\zeta \text{ ist.}$$

Da nun noch überdies $f(r)$ in $f(r + \Delta r)$ übergeht, und die Taylor'sche Formel:

$$f(r + \Delta r) = f(r) + f'(r)\Delta r$$

liefert, so erhält man, stets die höheren Potenzen der $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ vernachlässigend, für die obigen drei Kräftesummen für den Fall einer der Strömung übergelegten undulatorischen Bewegung, die folgenden drei Ausdrücke:

$$(12)\quad \begin{aligned}
&X + S\{mm'f(r)\Delta x\} \\
&\quad + S\left\{mm'\left(f(r) + f'(r)\frac{\Delta x^2}{r}\right)\Delta\xi\right\} \\
&\quad + S\left\{mm'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\Delta\eta\right\} \\
&\quad + S\left\{mm'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\Delta\zeta\right\}, \\
&Y + S\{mm'f(r)\Delta y\} \\
&\quad + S\left\{mm'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\Delta\xi\right\} \\
&\quad + S\left\{mm'\left(f(r) + f'(r)\frac{\Delta y^2}{r}\right)\Delta\eta\right\} \\
&\quad + S\left\{mm'f'(r)\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\Delta\zeta\right\}, \\
&Z + S\{mm'f(r)\Delta z\} \\
&\quad + S\left\{mm'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\xi\right\} \\
&\quad + S\left\{mm'f'(r)\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\eta\right\} \\
&\quad + S\left\{mm'\left(f(r) + f'(r)\frac{\Delta z^2}{r}\right)\Delta\zeta\right\}
\end{aligned}$$

und es ist nur noch übrig, sie den früher gefundenen Ausdrücken (9) für die Kräfte, welche dieselbe Bewegung erzeugen können, gleichzusetzen, um sofort zu denjenigen Gleichungen zu gelangen, die alle Umstände der Bewegung, der strömenden sowohl als auch der schwingenden, geben. Diese Gleichungen sind:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\right)u+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\xi=\\
&\quad=X+S\,\{m'f(r)\,\Delta x\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\,\frac{\Delta x^2}{r}\right)\Delta\xi\right\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'\,f'(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\,.\,\Delta\eta\right\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'\,f'(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\zeta\right\}.\\
&\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\right)v+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\eta=\\
&\quad=Y+S\,\{m'f(r)\,\Delta y\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'\,f'(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\,.\,\Delta\xi\right\}\\
(13)\qquad&\quad\quad+S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\,\frac{\Delta y^2}{r}\right)\Delta\eta\right\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'f'(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\zeta\right\}.\\
&\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\right)w+\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\zeta=\\
&\quad=Z+S\,\{m'f(r)\,\Delta z\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'\,f'(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\xi\right\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'\,f'(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\eta\right\}\\
&\quad\quad+S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\,\frac{\Delta z^2}{r}\right)\Delta\zeta\right\}.
\end{aligned}
$$

Setzt man in ihnen $\xi=\eta=\zeta=0$, d. h. statuirt man nur eine Strömung und keine Undulation, so gelangt man zu folgenden, nur die Gesetze der Strömung gebenden Gleichungen:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
\frac{u\,du}{dx}+\frac{v\,du}{dy}+\frac{w\,du}{dz}&=X+S\,\{m'f(r)\,\Delta x\},\\
\frac{u\,dv}{dx}+\frac{v\,dv}{dy}+\frac{w\,dv}{dz}&=Y+S\,\{m'f(r)\,\Delta y\},\\
\frac{u\,dw}{dx}+\frac{v\,dw}{dy}+\frac{w\,dw}{dz}&=Z+S\,\{m'f(r)\,\Delta z\},
\end{aligned}
$$

die auf dem Wege der Integration zu den Werthen von u, v, w leiten werden, Werthe, die offenbar reine Functionen der Coordinaten x, y, z sind, ohne t, wie auch vorausgesetzt wurde. Sie wirklich zu integriren, oder auch nur die Existenz des Integrals zu beweisen, ist an diesem Orte nicht nothwendig, weil man einerseits von der Existenz permanenter Strömungen aus der Erfahrung überzeugt ist, und andererseits die Behauptung eines Skeptikers: dass Strömungen unmöglich seien, uns bei der Erreichung unseres speciellen Zweckes sehr wenig anfechten würde.

Denken wir uns die für u, v, w aus der Integration der vorliegenden Gleichungen hervorgehenden Werthe in die (13) hineinsubstituirt, so ist eine solche Substitution der Anfrage äquivalent ob sich über einen solchen Strömungszustand eine undulatorische Bewegung legen lasse, und welche? Die Antwort erscheint zunächst in Gestalt eines Systemes von drei Gleichungen, die man bekömmt, die (14) von den (13) abziehend, nämlich:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\xi &= S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\frac{\Delta x^2}{r}\right)\Delta\xi\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}.\Delta\eta\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}.\Delta\zeta\right\},\\
\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\eta &= S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}.\Delta\xi\right\}\\
&+S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\frac{\Delta y^2}{r}\right)\Delta\eta\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}.\Delta\zeta\right\},\\
\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w+\frac{d}{dt}\right)^2\zeta &= S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}.\Delta\xi\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}.\Delta\eta\right\}\\
&+S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\frac{\Delta z^2}{r}\right)\Delta\zeta\right\};
\end{aligned}
$$

es sind gemischte Differenzen- und Differenzialgleichungen und man kann sie in reine Differentialgleichungen verwandeln, durch Entwickelung von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ mittelst der Taylor'schen Formel, indem man nämlich:

$$
\begin{aligned}
\Delta\xi = {} & \frac{d\xi}{dx}\Delta x+\frac{d\xi}{dy}\Delta y+\frac{d\xi}{dz}\Delta z\\
&+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\xi}{dx^2}\Delta x^2+\frac{d^2\xi}{dy^2}\Delta y^2+\frac{d^2\xi}{dz^2}\Delta z^2\right)\\
&+\frac{d^2\xi}{dy\,dz}\Delta y\,\Delta z+\frac{d^2\xi}{dx\,dz}\Delta x\,\Delta z+\frac{d^2\xi}{dx\,dy}\Delta x\,\Delta y+\ldots
\end{aligned}
$$

setzt, und anstatt Δy und Δz die ähnlichen Werthe einführt, die Summen, die so hervorgehen, in so viele Theile zerlegt, als Glieder mit verschiedenen Differentialquotienten unter dem Summenzeichen stehen und diese Differentialquotienten als Factoren vor das Summenzeichen schreibt. Es ist nun zu bemerken, dass die auf diese Weise gewonnenen reinen Differentialgleichungen in der Regel nach den Coordinaten x, y und z veränderliche Coëfficienten bekommen werden, in Folge des Umstandes, dass bei der vorhandenen Strömung die Dichte und Elasticität des Mittels von Punkt zu Punkt variiren kann, ferner dass auch erste, dritte, mit einem Worte Differentialquotienten von ungerader Ordnungszahl, mit eben solchen nach x, y, z, veränderlichen Coëfficienten vorkommen werden in den zweiten Theilen dieser Gleichungen in Folge des Umstandes, dass es Orte geben kann, wo die Dichte des Mittels sich dermassen ändert, dass einem jeden materiellen Punkte m', der sich in der Umgebung von m befindet, in der Verlängerung der Linie $m\,m'$ und in gleicher Entfernung nicht mehr ein Gegenpunkt angehört. Die in Rede stehenden Coëfficienten der ungeraden Differentialquotienten werden daher solche Functionen von x, y und z sein, die an allen Punkten, in deren Nähe die Dichte des Mittels sich nicht ändert, der Nulle gleich sind und an den andern in deren Nähe eine Aenderung der Dichte stattfindet, von der Nulle verschieden ausfallen. Endlich hat man sich offenbar anstatt der in den ersten Theilen der Gleichungen (15) vorkommenden u, v, w die Werthe in x, y, z gesetzt zu denken, die aus der Integration der Gleichungen (14) hervorgegangen sind.

Dies vorausgesetzt, schreiten wir zur Intregration der vorliegenden Gleichungen insoferne nur, als diese bei unserer vollständigen Unkenntniss der in Summengestalt vorkommenden Coëfficienten und der u, v, w möglich ist und statuiren zu diesem Zwecke:

$$(16)\quad \xi = e^{\pm st\sqrt{-1}}\,\mathfrak{X},\quad \eta = e^{\pm st\sqrt{-1}}\,\mathfrak{Y},\quad \zeta = e^{\pm st\sqrt{-1}}\,\mathfrak{Z},$$

unter $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ Functionen von x, y, z verstanden, die kein t mehr in sich enthalten, während s als eine reine, weder x, noch y, noch z, noch t enthaltende Constante gedacht wird. Die Substitution dieser Werthe in die Gleichungen (15) ist offenbar der Anfrage äquivalent, ob sich über die Strömung ein periodischer Schwingungszustand, irgend veränderlich in seinen Eigenschaften von Punkt zu Punkt, aber mit constantem s, d. h. mit constanter Schwingungsdauer legen lasse? Hierauf erhalten wir die Antwort durch das Substitutionsresultat, d. h. durch folgendes System von drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\pm s\sqrt{-1}\right)^2\mathfrak{X} &= S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\frac{\Delta x^2}{r}\right)\Delta\mathfrak{X}\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\,.\,\Delta\mathfrak{Y}\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\mathfrak{Z}\right\},\\
\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\pm s\sqrt{-1}\right)^2\mathfrak{Y} &= S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\,.\,\Delta\mathfrak{X}\right\}\\
&+S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\frac{\Delta y^2}{r}\right)\Delta\mathfrak{Y}\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\mathfrak{Z}\right\}.\\
\left(\frac{d}{dx}u+\frac{d}{dy}v+\frac{d}{dz}w\pm s\sqrt{-1}\right)^2\mathfrak{Z} &= S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\mathfrak{X}\right\}\\
&+S\left\{m'f'(r)\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\,.\,\Delta\mathfrak{Y}\right\}\\
&+S\left\{m'\left(f(r)+f'(r)\frac{\Delta z^2}{r}\right)\Delta\mathfrak{Z}\right\};
\end{aligned}\tag{17}$$

sie sind nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ linear; durch Elimination aus ihnen bekömmt man eine einzige, nur irgend eine dieser drei Functionen, etwa $\mathfrak{X}$ enthaltende, ebenfalls lineare Differentialgleichung, mit Coëfficienten, die x, y, z in sich enthalten aber kein t, weil dieses nur in der Exponentielle $e^{\pm st\sqrt{-1}}$ vorhandene t durch Division der ganzen Gleichung mit derselben gänzlich weggefallen ist. Nun entspricht aber einer jeden linearen Differentialgleichung jedesmal ein Integral, wie in meinem Werke: „Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coëfficienten", 1. Abschnitt, §. 3, bewiesen wird; es gibt also immer Functionen von x, y, z, welche anstatt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gesetzt, den Gleichungen (17) Genüge leisten, sie enthalten offenbar auch das $\pm s\sqrt{-1}$, lassen sich also in den reellen und imaginären Theil zerlegen, so dass man hat:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \mathfrak{X}_1 \pm \mathfrak{X}_2\sqrt{-1}\\
\mathfrak{Y} &= \mathfrak{Y}_1 \pm \mathfrak{Y}_2\sqrt{-1}\\
\mathfrak{Z} &= \mathfrak{Z}_1 \pm \mathfrak{Z}_2\sqrt{-1}
\end{aligned}\tag{18}$$

bemerkt man zu dem noch, dass auch:

$$e^{\pm st\sqrt{-1}} = \cos. st \pm \sqrt{-1}.\sin. st$$

ist und dass man einem jeden Genüge leistenden particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung noch einen willkürlichen constanten Factor anhängen und auch die Summe von mehreren solchen Integralen als genügenden Werth hinstellen kann, so erhält man folgende Werthe der Verschiebungen ξ, η, ζ:

$$(19)\quad \begin{aligned} \xi &= A_1 (\cos. st + \sqrt{-1}.\sin. st)(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 \sqrt{-1}) + \\ &+ A_2 (\cos. st - \sqrt{-1}.\sin. st)(\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2 \sqrt{-1}), \\ \eta &= A_1 (\cos. st + \sqrt{-1}.\sin. st)(\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Y}_2 \sqrt{-1}) + \\ &+ A_2 (\cos. st - \sqrt{-1}.\sin. st)(\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2 \sqrt{-1}), \\ \zeta &= A_1 (\cos. st + \sqrt{-1}.\sin. st)(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 \sqrt{-1}) + \\ &+ A_2 (\cos. st - \sqrt{-1}.\sin. st)(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2 \sqrt{-1}); \end{aligned}$$

A_1, A_2, sind hier willkürliche Constanten und setzt man, um die scheinbar imaginären in augenscheinlich reelle Ausdrücke zu verwandeln,

$$(20)\quad \begin{aligned} A_1 + A_2 &= \mathfrak{A}_1 \\ (A_1 - A_2)\sqrt{-1} &= \mathfrak{A}_2 \end{aligned}$$

so wird:

$$(21)\quad \begin{aligned} \xi &= (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X}_2) \cos. st + (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{X}_2) \sin. st \\ \eta &= (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Y}_2) \cos. st + (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{Y}_2) \sin. st \\ \zeta &= (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_2) \cos. st + (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{Z}_2) \sin. st. \end{aligned}$$

Man sieht es diesen Ausdrücken an, dass sie in einem jeden Punkte des Raumes, also für jedes x, y, z, und verschiedene Zeiten genau denselben Werth wieder annehmen, wenn t um ein Zeittheilchen:

$$\tau = \frac{2\pi}{s}$$

wächst; es ist also τ die constante Schwingungsdauer und folglich lässt sich eine undulatorische Bewegung mit constanter Schwingungsdauer über eine beliebige, permanent gewordene Strömung legen und dies zwar auf unendlich viele verschiedene Arten, schon aus dem Grunde, weil in Bezug auf den constanten Werth von s gar keine beschränkende Annahme vorgekommen ist. Man wird daher, kraft des Principes der

Coexistenz der kleinsten Schwingungen die Verschiebungen ξ, η und ζ auch Summen gleichsetzen können von ähnlichen Gliedern, wie die in den 2. Theilen der Gleichungen (21) enthaltenen Glieder, die sich nur im Werthe von s, und der Integrationsconstanten unterscheiden, d. h. man hat folgendes allgemeine Integral:

$$
(22) \qquad \begin{aligned}
\xi &= S\,\{\mathfrak{U}\cos. st + U\sin. st\}\\
\eta &= S\,\{\mathfrak{V}\cos. st + V\sin. st\}\\
\zeta &= S\,\{\mathfrak{W}\cos. st + W\sin. st\},
\end{aligned}
$$

wo wir der Kürze wegen:

$$
(23) \qquad \begin{aligned}
\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{X}_2 &= \mathfrak{U}, & \mathfrak{A}_2\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_2 &= U\\
\mathfrak{A}_1\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{Y}_2 &= \mathfrak{V}, & \mathfrak{A}_2\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{Y}_2 &= V\\
\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{Z}_2 &= \mathfrak{W}, & \mathfrak{A}_2\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{Z}_2 &= W
\end{aligned}
$$

gesetzt haben.

Ich habe in meinen vor einiger Zeit gehaltenen Vorlesungen: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen" gezeigt, dass sich durch solche Summen, wie die für ξ, η, ζ hingestellten, jeder beliebige Anfangszustand analytisch darstellen lässt, mit andern Worten: dass man für $t = 0$ und für schicklich gewählte Werthe der Integrationsconstanten jede der sechs Grössen: ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ gleich machen könne einer beliebigen Function von x, y und z — den Beweis dieses Satzes werden Sie ebenfalls in meinem früher erwähnten Werke über die linearen Differentialgleichungen finden. Hieraus folgt, dass jeder beliebige anfängliche Erregungszustand nur zu Undulationen mit constantem s und folglich mit constanter Schwingungsdauer Veranlassung geben könne. Da ferner $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ eben so gut wie ξ, η, ζ Integrale sind von linearen Differentialgleichungen, so lässt sich von ihnen auch das Aehnliche behaupten: für $x = 0$ nämlich und schickliche Werthe der darin vorhandenen Integrationsconstanten oder auch für $\varphi\,(x, y, z) = 0$, d. h. in einer bestimmten Fläche, und für schickliche Werthe der Integrationsconstanten, verwandeln sie sich in beliebige Functionen der Coordinaten x, y, z. Dies besagt, dass jeder permanente, der Fläche $\varphi\,(x, y, z) = 0$ anhängende, durch einen sin. st oder cos. st auf eine constante Schwingungsdauer beschränkte Schwingungszustand, eben nur zu einem solchen im fortpflanzenden Mittel Veranlassung werde.

Endlich kann noch gezeigt werden, dass eine schwingende Bewegung mit veränderlicher Schwingungsdauer, d. h. mit einem s, welches eine Function ist von x, y, z, oder zunächst von u, v, w und eben dadurch wieder von x, y, z, sich in einem, gewissen Strömungen unterworfenen Mittel gar nicht einmal fortzupflanzen vermöge. In der That: substituiren wir abermals die Werthe (16) in die Differentialgleichungen (15), unter der Voraussetzung jedoch eines variablen, von x, y, z abhängigen s, so erhalten wir anstatt der Substitutionsresultate (17) andere, dadurch wesentlich von den früheren unterschiedene, dass, selbst nach geschehener Division durch die Exponentielle $e^{\pm st\sqrt{-1}}$, die abermals als gemeinschaftlicher Factor erscheint, die Zeit t nicht herausfällt, sondern vielmehr theils als algebraischer hinzutretender Factor, theils auch im Exponenten einer Exponentielle zurückbleibt. Sie enthalten somit einen Widerspruch; denn — einmal hat man beim Differenziren die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ betrachtet als nach t constant, andererseits erscheinen sie, kraft der letztangedeuteten Substitutionsresultate, die t in sich enthalten, als Functionen von t. Unsere Voraussetzung eines variablen s ist daher eine widersprechende.

Da nun ein jeder, sowohl anfängliche, als einem schwingenden Körper anhängende permanente Erregungszustand nur Schwingungen mit constanter Dauer in einem ruhenden sowohl als auch in einem strömenden Mittel veranlassen kann, da ferner Schwingungen mit irgend einer und aus irgend welcher Ursache von Ort zu Ort veränderlichen Schwingungsdauer sich gar nicht fortpflanzen können, so tritt uns als Ergebniss unserer Untersuchungen folgender einfache Satz entgegen:

Bei jeder schwingenden Bewegung ist die Schwingungsdauer eine constante, weder von der Dichte des Mittels, noch von den in demselben sonst noch vorhandenen Strömungen abhängige Grösse.

Es kann sich also, auf Veranlassung der veränderlichen Dichte und der veränderlichen Strömungsintensität und Richtung, in der undulatorischen Bewegung die Oscillations-Amplitude verändern, ingleichen die Wellenlänge und Fortpflanzungs-Geschwindigkeit, und nur die Schwingungsdauer bleibt unerschütterlich stets eine und dieselbe und spielt demnach in der Undulationstheorie dieselbe Rolle, wie etwa die grosse Achse der Bahn in der Mechanik des Himmels.

Wenn ein viel besuchter Meeresstrich durch darin vorhandene Klippen und Untiefen für die Schifffahrt gefährlich ist, so erbaut man gewöhnlich hohe Leuchtthürme, um selbst den in den Gewässern minder bekannten Schiffer vor Schaden zu wahren. Auch der grosse Ocean des Wissens hat seine gefährlichen Stellen, seine Klippen und Untiefen. Wird man daher gewahr, dass eine grössere Anzahl von Wissensbeflissenen an der Klippe eines bestimmten Irrthumes Schiffbruch leiden, so ist es an der Zeit, eine einfache und grosse Wahrheit zum Range eines Principes zu erheben, damit sie, wie ein hoher Leuchtthurm dastehend, auch die minder bewanderten Anhänger des Wissens vor der Herrschaft dieses Irrthumes bewahre. Es ist an der Zeit, eine solche grosse Wahrheit mit allen Hülfsmitteln, welche die mathematische Analysis bietet, fest und unerschütterlich zu begründen, wenn sie etwa früher, wie im gegenwärtigen Falle, zwar Gemeingut der wissenschaftlichen Welt, aber mehr Gegenstand eines feinen, wissenschaftlichen Instinctes, als der mathematischen Ueberzeugung war. Es ist endlich Zeit sie aufzunehmen, nicht bloss in die Lehrbücher der höheren Wissenschaft, sondern auch, wenn gleich ohne Beweis, in jene des populären Wissens. Meinen Theil an der Aufstellung des eben ausgesprochenen Satzes, den ich das „Princip der Erhaltung der Oscillationsdauer" nennen möchte, glaube ich durch den gegenwärtig vorgetragenen Beweis genommen zu haben und es liegt, ohne dass ich es ausdrücklich zu sagen brauche, darin die stillschweigende Aufforderung an die ehrenwerthe Classe sowohl, als auch an die übrigen Pfleger der Wissenschaft, das Ihrige auch zu diesem Zwecke beizutragen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1852

Band/Volume: 08

Autor(en)/Author(s): Petzval Joseph Maximilian

Artikel/Article: ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre: Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer. 134-156