bringen, um 5 bis 6 Loth zu sammeln, bisweilen aber auch durch einen glücklichen Zufall einige Pfund in kürzerer Zeit erwerben.

Ausser dem Kampfer sammeln die Betheiligten auch *Benzoë*, welche Speccrei auch in diesen Wäldern reichhaltig vorkommt.

---

# Vorträge.

## *Note über Gleichungen.*

Von **Simon Spitzer,**

Assistent und Privat-Docent am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen von höherem als viertem Grade in geschlossener Form ist bis jetzt nicht gelungen. Es gibt aber gewisse Gattungen von Gleichungen, wie die binomischen, und einige, die sich auf solche zurückführen lassen, die allgemein lösbar sind; ferner die reciproken, die, wenn sie vom $2n^{\text{ten}}$ oder $2n+1^{\text{ten}}$ Grade sind, sich stets durch eine einfache Substitution auf Gleichungen vom $n^{\text{ten}}$ Grade zurückziehen, und daher eine Auflösung bis zum 9. Grade gestatten, und so noch einige andere Gleichungen.

Ich habe hier besonders hervorgehoben die binomischen und reciproken Gleichungen, aus dem Grunde weil, wenn Gleichungen solche sind, der Mathematiker sie gleich auf den ersten Blick als solche erkennt. Bedürfte das Erkennen erst eigener, vielleicht gar längerer Untersuchungen, so würden diese Gleichungen sehr an praktischem Werthe verlieren, weil man ja doch nicht fordern kann, oder erwarten wird, dass der Mathematiker eine Reihe von Voruntersuchungen anstellen soll, ehe er sich an die eigentliche Auflösung macht.

Bei meinen Untersuchungen über Gleichungen bot sich mir eine gewisse Gattung derselben dar, die sich, analog den reciproken, auch durch eine einfache Substitution, auf halb so hohem Grade zurückführen lassen. Solche Gleichungen zu erkennen, ist sehr leicht, und erfordert, mir wenigstens, gar keine besonderen Rechnungen da, nach der Methode die ich einschlage Gleichungen zu lösen, eben diese wenigen Rechnungen in jedem Falle gemacht werden müssen.

Hat nämlich eine Function $\varphi(x)$ die Eigenschaft, dass alle ihre ungeraden Differentialquotienten

$$\varphi'(x), \quad \varphi'''(x), \quad \varphi^{(5)}(x) \ldots$$

für einen bestimmten Werth von $x$, etwa für $x = \alpha$ verschwinden, so lässt sich $\varphi(x)$ auf die Form bringen

$$\varphi(x) = \psi(x^2 - 2\alpha x)$$

wodurch, wenn $\varphi(x) = 0$ ist, sich diese Gleichung durch Substitution von $x^2 - 2\alpha x = u$ auf eine Gleichung halb so hohen Grades reducirt.

Denn, setzt man in der gegebenen Function $\varphi(x)$ statt $x$, $\alpha + y$, so erhält man:

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha + y)$$

oder entwickelt:

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + y\varphi'(\alpha) + \frac{y^2}{2!}\varphi''(\alpha) + \frac{y^3}{3!}\varphi'''(\alpha) + \frac{y^4}{4!}\varphi''''(\alpha) + \ldots$$

und da nach der Voraussetzung

$$\varphi'(\alpha), \quad \varphi'''(\alpha), \quad \varphi^{(5)}(\alpha), \ldots$$

sämmtlich Null sind

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \frac{y^2}{2!}\varphi''(\alpha) + \frac{y^4}{4!}\varphi^{(4)}(\alpha) + \ldots$$

Nun ist

$$x = \alpha + y, \text{ also } y^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

und folglich

$$(1) \quad \varphi(x) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \\ + \frac{\varphi^{(4)}(\alpha)}{4!}(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)^2 + \ldots$$

d. h.

$$\varphi(x) = f(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) = \psi(x^2 - 2\alpha x)$$

Um $\alpha$ zu bestimmen, bemerke man, dass sich die Gleichung (1) in folgender Form wiedergeben lässt:

$$(2) \quad x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \ldots + A_{2n} = (x^2 - 2\alpha x)^n + \\ + B_1(x^2 - 2\alpha x)^{n-1} + \ldots + B_n$$

oder auch in folgender:

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \ldots + A_{2n} = x^{2n} - 2\alpha n x^{2n-1} + \ldots + B_n$$

daraus sehen wir, dass

$$A_1 = -2\alpha n, \quad \text{oder} \quad \alpha = -\frac{A_1}{2n}$$

ist.

Der hier betretene Weg ist einer allseitigen Erweiterung fähig, wir begnügen uns mit einigen Andeutungen.

1) Sind für einen gewissen Werth von $x$, etwa für $x = \alpha$ die Differentialquotienten:

$$\varphi'(x) \text{ und } \varphi''(x), \quad \varphi^{(4)}(x) \text{ und } \varphi^{(5)}(x), \quad \varphi^{(7)}(x) \text{ und } \varphi^{(8)}(x) \dots$$

sämmtlich gleich Null, so lässt sich $\varphi(x)$ darstellen als Function von $x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha x$, es ist nämlich alsdann:

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi'''(\alpha)}{3!}(x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3) + $$
$$+ \frac{\varphi^{(6)}(\alpha)}{6!}(x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3)^2 + \dots$$

u. s. w.

2) Lässt sich eine Function $f(u)$ auf die Form

$$(3) \quad f(u) = \varphi(u^3 + au^2 + bu)$$

bringen, so finden zwischen den ungeraden Differentialquotienten Beziehungen Statt, die analog sind den vorher aufgestellten. Um diese zu erhalten, setze man:

$$u = x + y\sqrt{-1}$$

Dadurch geht (3) über in:

$$(4) \quad f(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(v + w\sqrt{-1})$$

wo der Kürze halber

$$v = x^3 + ax^2 + bx - y^2(3x + a)$$
$$w = y(3x^2 + 2ax + b - y^2)$$

gesetzt wurde. Entwickelt man die Gleichung (4), so erhält man:

$$\left[f(x) - \frac{y^2}{2!}f''(x) + \frac{y^4}{4!}f^{(4)}(x) - \dots\right] +$$
$$+ y\sqrt{-1}\left[f'(x) - \frac{y^2}{3!}f'''(x) + \frac{y^4}{5!}f^{(5)}(x) - \dots\right] =$$
$$\left[\varphi(v) - \frac{w^2}{2!}\varphi''(v) + \frac{w^4}{4!}\varphi^{(4)}(v) - \dots\right] +$$
$$+ w\sqrt{-1}\left[\varphi'(v) - \frac{w^2}{3!}\varphi'''(v) + \frac{w^4}{5!}\varphi^{(5)}(v) - \dots\right]$$

und hieraus folgen:

$$f(x) - \frac{y^2}{2!}f''(x) + \frac{y^4}{4!}f^{(4)}(x) - \dots =$$
$$\varphi(v) - \frac{w^2}{2!}\varphi''(v) + \frac{w^4}{4!}\varphi^{(4)}(v) - \dots$$
$$y\left[f'(x) - \frac{y^2}{3!}f'''(x) + \frac{y^4}{5!}f^{(5)}(x) - \dots\right] =$$
$$= w\left[\varphi'(v) - \frac{w^2}{3!}\varphi'''(v) + \frac{w^4}{5!}\varphi^{(5)}(v) - \dots\right]$$

Wenn also eine Gleichung $f(u) = 0$ sich auf die Form $\varphi(u^3 + au^2 + bu)$ bringen lassen soll, so muss der Ausdruck:

$$y\left[f'(x) - \frac{y^2}{3!} f''(x) + \frac{y^4}{5!} f^{(5)}(x) - \ldots\right]$$

den Factor $w = y\ (3x^2 + 2ax + b - y^2)$ besitzen, d. h. es muss

$$(5)\quad f'(x) - \frac{y^2}{3!} f''(x) + \frac{y^4}{5!} f^{(5)}(x) - \ldots$$

durch

$$3x^2 + 2ax + b - y^2$$

theilbar sein.

Die hiebei erscheinenden Grössen $a$ und $b$ sind sehr leicht zu bestimmen, denn in dem eben betrachteten Falle lässt sich die Gleichung (3) so schreiben:

$$u^{3n} + A_1 u^{3n-1} + A_2 u^{3n-2} + \ldots + A_{3n} =$$
$$= (u^3 + au^2 + bu)^n + B_1 (u^3 + au^2 + bu)^{n-1} + \ldots + B_n$$

oder auch:

$$u^{3n} + A_1 u^{3n-1} + A_2 u^{3n-2} + \ldots + A_{3n} =$$
$$= u^{3n} + nau^{3n-1} + \left[nb + \frac{n(n-1)}{2} a^2\right] u^{3n-2} + \ldots + B_n$$

somit ist:

$$A_1 = na, \quad A_2 = nb + \frac{n(n-1)}{2} a^2 \quad .$$

und hieraus hat man:

$$a = \frac{A_1}{n}, \quad b = \frac{1}{n}\left(A_2 - \frac{n-1}{2n} A_1^2\right)$$

Umgekehrt, ist $3x^2 + 2ax + b - y^2$ ein Factor von

$$(5)\quad f'(x) - \frac{y^2}{3!} f''(x) + \frac{y^4}{5!} f^{(5)}(x) - \ldots$$

so ist

$$f(u) = \varphi(u^3 + au^2 + bu)$$

Denn, dividirt man (5) durch $3x^2 + 2ax + b - y^2$, so sind die aufeinander folgenden Theile des Quotienten

$$\frac{f'(x)}{3x^2 + 2ax + b}\ ,$$

$$\frac{f'(x)}{(3x^2 + 2ax + b)^2} - \frac{f''(x)}{3!\,(3x^2 + 2ax + b)}$$

$$\frac{f'(x)}{(3x^2 + 2ax + b)^3} - \frac{f''(x)}{3!\,(3x^2 + 2ax + b)^2} + \frac{f^{(5)}(x)}{5!\,(3x^2 + 2ax + b)}$$

ganze rationale Polynome, respective vom Grade $3n-3$, $3n-5$, $3n-7, \ldots$ und multiplicirt der Reihe nach mit $1, y^2, y^4, \ldots$, die wir kurz so andeuten wollen:

$$\frac{f'(x)}{3x^2+2ax+b} = Q_1\, x^{3n-3} + \ldots$$

$$\frac{f'(x)}{(3x^2+2ax+b)^2} - \frac{f'''(x)}{3!\,(3x^2+2ax+b)} = Q_2\, x^{3n-5} + \ldots$$

$$\frac{f'(x)}{(3x^2+2ax+b)^3} - \frac{f'''(x)}{3!\,(3x^2+2ax+b)^2} - \frac{f^{(5)}(x)}{5!\,(3x^2+2ax+b)} = Q_3\, x^{3n-7} + \ldots$$

Wir haben hier eine Reihe linearer Differentialgleichungen, denen genügt wird, für:

$$f(x) = (x^3 + ax^2 + bx)^m$$

wie man sich durch unmittelbare Substitution überzeugen kann: also genügt auch eine Summe solcher Auflösungen, jedes Glied mit einer willkürlichen Constante multiplicirt, d. h. obige Gleichungen werden befriedigt, für:

$$f(x) = \varphi(x^3 + ax^2 + bx)$$

3) Ganz eben so hat man, wenn

$$f(u) = \varphi(u^4 + au^3 + bu^2 + cu)$$

ist, für $u = x + y\sqrt{-1}$

$$f(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(v + w\sqrt{-1})$$

wo

$$v = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - y^2(6x^2 + 3ax + b) + y^4$$
$$w = y\,[4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c - y^2(4x + a)]$$

sind, und folglich muss in diesem Falle der Ausdruck

$$(5)\quad f'(x) - \frac{y^2}{3!} f'''(x) + \frac{y^4}{5!} f^{(5)}(x) - \ldots$$

den Factor

$$(6)\quad 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c - y^2(4x + a)$$

haben. Die Grössen $a$, $b$, $c$ lassen sich so, wie im früheren Falle bestimmen. Umgekehrt, ist das Polynom (5) durch das Polynom (6) theilbar, so ist

$$f(u) = \varphi(u^4 + au^3 + bu^2 + cu)$$