Über einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone

von

Dr. **Gustav Kohn,**
Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. December 1890.)

Während die metrischen Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone sehr vielfach studirt worden sind, scheinen deren projective Eigenschaften die Aufmerksamkeit der Mathematiker nur in geringem Grade auf sich gelenkt zu haben; wenigstens sind bisher nur sehr wenige projective Eigenschaften dieser Polygone bekannt geworden.[1]

Die vorliegende Arbeit unternimmt es nun, auf einem äusserst einfachen Wege mehrere projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone abzuleiten. Unter Anderem wird gezeigt, dass mehrere Eigenschaften, welche Clebsch in seiner Abhandlung „Über das ebene Fünfeck"[2] für das Fünfeck gegeben hat, eine Ausdehnung auf Poncelet'sche Polygone von beliebiger Seitenanzahl gestatten; ferner wird für Poncelet'sche Polygone von ungerader Seitenzahl ein vollständiges Analogon des Satzes gefunden, wonach die unendlich vielen Dreiecke, die unter Umständen einem Kegelschnitt eingeschrieben und gleichzeitig einem zweiten umschrieben werden können, immer Poldreiecke für einen dritten Kegelschnitt sind.

---

[1] Herr Gino Loria hat eine Geschichte der Poncelet'schen Polygone geschrieben (I poligoni di Poncelet, Turin 1889); dort findet man genaue Angaben über die einschlägige Literatur.

[2] Math. Ann., Bd. IV, S. 476 f.

§. 1. Hilfssätze.

Die nachfolgenden Betrachtungen stützen sich auf zwei wohlbekannte und einfache Hilfssätze:

1. Ist ein symmetrisches Punktsystem 2. Grades [eine symmetrische (2, 2) Correspondenz] auf einem Kegelschnitt vorgelegt, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve 2. Classe.

2. Sind die Punkte eines Kegelschnittes projectiv bezogen auf die $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Tangenten}\end{matrix}\right.$ eines zweiten Kegelschnittes, so gibt es immer eine $\left\{\begin{matrix}\text{Collineation}\\ \text{Correlation}\end{matrix}\right.$ der ganzen Ebenen dieser beiden Kegelschnitte, durch welche jene Beziehung vermittelt wird.

Der erste von diesen beiden Hilfssätzen ist in der Theorie der Poncelet'schen Polygone bereits verwerthet worden,[1] und zwar für eine Betrachtung, welche wir recapituliren müssen, weil auch hier von derselben Gebrauch gemacht werden soll.

Es seien zwei beliebige Kegelschnitte C und Γ in derselben Ebene vorgelegt. Man wähle auf C einen Punkt x beliebig, lege von x aus eine der beiden Tangenten an Γ und bezeichne ihren zweiten Schnittpunkt auf C mit x_1; von x_1 ziehe man wieder die Tangente, welche neben $x_1 x$ an Γ geht, und bezeichne ihren zweiten Schnittpunkt mit x_2; und fahre so fort. Die Construction des Punktes x_{n-1}, zu welchem man nach $(n-1)$-maliger Ausführung unserer Operation gelangt, ist hienach eine völlig eindeutige, sobald man von einer bestimmten unter den beiden Tangenten ausgeht, die vom Punkte x aus an den Kegelschnitt Γ gelegt werden können. Um uns bequem auszudrücken, wollen wir in der Folge den Punkt x_{n-1} als $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt von x bezeichnen. Entsprechend den beiden Tangenten, welche vom Punkte x aus an Γ gehen, besitzt dieser Punkt zwei $(n-1)^{\text{te}}$ Tangentialpunkte, und da die Beziehung zwischen x und x_{n-1} offenbar eine symmetrische ist, so sagt der erste von unseren Hilfssätzen, dass, wenn der Punkt x den Kegelschnitt C durchläuft, die Verbindungslinie ξ desselben mit seinem $(n-1)^{\text{ten}}$

[1] Siehe z. B. Weyr, Beiträge zur Curvenlehre, Wien, 1880, S. 28 f.

Tangentialpunkt x_{n-1} einen Kegelschnitt einhüllen wird, der mit Γ_n bezeichnet werden mag. Die Beziehung, welche zwischen dem Punkte x und seinem $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt x_{n-1} besteht, können wir dahin charakterisiren, dass vom Punkte x zum Punkt x_{n-1} eine gebrochene Linie führt, welche aus $(n-1)$ Tangenten des Kegelschnittes Γ sich zusammensetzt und ebenso wie Anfangs- und Endpunkt auch ihre $(n-2)$ Ecken auf C liegen hat. Unser Resultat lässt sich daher in Form des folgenden von Poncelet herrührenden Satzes aussprechen:

„Es gibt ein System von unendlich vielen einfachen n-Ecken P_n, welche einem Kegelschnitt C eingeschrieben sind und deren Seiten bis auf eine — ξ — einen zweiten festen Kegelschnitt Γ berühren; in jedem dieser Polygone ist dann die Seite ξ Tangente für einen und denselben dritten Kegelschnitt Γ_n."

§. 2. Die Polygone, welche einem Kegelschnitt eingeschrieben sind und deren Seiten bis auf eine einen zweiten Kegelschnitt berühren.

Es lässt sich leicht einsehen, dass eine beliebig gewählte Tangente ξ des Kegelschnittes Γ_n Seite für ein einziges Polygon P_n ist, dessen n Ecken auf dem Kegelschnitt C liegen und dessen ausser ξ noch vorhandene Seiten den Kegelschnitt Γ berühren. Denn die Annahme zweier solcher Polygone würde besagen, dass die $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkte des einen Schnittpunktes von ξ mit C beide in dem zweiten Schnittpunkte vereinigt liegen. Daraus würde folgen, dass die symmetrische Beziehung zwischen einem beliebigen Punkt x von C und einem $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt eine ein-eindeutige ist und der von den Verbindungslinien je zweier solcher Punkte eingehüllte Kegelschnitt Γ_n würde in einen doppeltgezählten Punkt ausarten — wir hätten einen Specialfall vor uns, den wir von der Betrachtung ausschliessen.

In jedem der Polygone P_n hat, wenn n eine ungerade Zahl ist, die Seite ξ desselben, welche Γ_n berührt, eine ganz bestimmte, auf C gelegene Gegenecke, und wenn n eine gerade Zahl ist, so hat ξ eine ganz bestimmte Γ berührende Gegenseite.

Nimmt man im Falle eines ungeraden n $(n = 2k+1)$ einen beliebigen Punkt y von C als Gegenecke der Seite ξ für ein Polygon P_n an, so ist dieses Polygon eindeutig bestimmt: seine

Seite ξ ist die Verbindungslinie der beiden k^{ten} Tangentialpunkte von y, seine $2k$ übrigen Seiten sind die $2k$ bei unserer Construction dieser Tangentialpunkte zur Verwendung gelangenden Tangenten von Γ.

Nimmt man im Falle eines geraden n ($n = 2k$) eine beliebige Tangente τ von Γ als Gegenseite von ξ für ein Polygon P_n an, so ist dieses Polygon wieder eindeutig bestimmt. Seine Seite ξ wird erhalten, wenn man für jeden der beiden Schnittpunkte von τ mit C in der oben angegebenen Weise von der von τ verschiedenen Tangente von Γ ausgehend den $(k-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt construirt und die beiden so erhaltenen Punkte verbindet. Die bei dieser Construction zur Verwendung gelangenden $2(k-1)$ Tangenten von Γ sind dann die Seiten, welche das Polygon P_n ausser ξ und τ noch besitzt.

Durch die eben angestellten Überlegungen ist bewiesen, dass, wenn man im Falle eines ungeraden n in jedem unserer Polygone P_n der Seite ξ ihre Gegenecke als entsprechend zuweist, eine ein-eindeutige, daher projective Beziehung zwischen den Tangenten von Γ_n und den Punkten von C hergestellt ist (denn ein Polygon P_n erwies sich sowohl durch Annahme der Seite ξ, als auch durch Annahme ihrer Gegenecke eindeutig bestimmt), und es ist ebenso gezeigt, dass, wenn man im Falle eines geraden n in jedem unserer Polygone P_n der Seite ξ die Gegenseite zuweist, eine ein-eindeutige, also projective Beziehung zwischen den Tangenten von Γ_n und jenen von Γ entsteht.

Nach dem zweiten der vorausgeschickten Hilfssätze wird daher, wenn n eine ungerade Zahl $= 2k+1$ ist, eine Correlation der Ebene existiren, vermöge welcher jeder zum System Σ gerechneten Tangente ξ von Γ_n derjenige Punkt y von C im System S als entsprechend zugewiesen ist, welcher in demjenigen Polygon P_n, für welches ξ eine Seite ist, deren Gegenecke darstellt.

Diese Correlation (Reciprocität) ist aber ein Polarsystem, denn es entspricht der beliebig gewählten Tangente ξ von Γ_n auch dann noch derselbe Punkt y von C, wenn man sie zum System S rechnet. Von der dem Punkte y des Systems S im System Σ entsprechenden Geraden ξ haben wir nämlich oben gesehen, dass sie als Verbindungslinien der beiden k^{ten} Tangentialpunkte des Punktes y erhalten wird. Jedem dieser beiden auf ξ gelegenen Punkte wird sonach im System Σ eine Gerade entsprechen, welche durch y hindurchgeht, da y k^{ter} Tangentialpunkt eines jeden dieser beiden Punkte ist, und hieraus folgt in der That, dass der zum System S gerechneten Geraden ξ wieder der Punkt y entspricht.

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte C und Γ in derselben Ebene vorgelegt und man betrachtet die unendlich vielen Polygone von derselben beliebig gewählten ungeraden Seitenanzahl, deren Ecken auf dem ersten Kegelschnitt liegen und deren Seiten bis auf eine den zweiten Kegelschnitt berühren, so ist diese letzte Seite in jedem der Polygone die Polare ihrer Gegenecke in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt K.

Das gemeinsame Poldreieck von C und Γ ist auch Poldreieck für den Kegelschnitt K dieses Satzes. Denn durch die harmonische Centralcollineation, welche irgend einen der Eckpunkte des gemeinsamen Poldreieckes von C und Γ zum Centrum seine Gegenseite zur Axe hat, werden die Kegelschnitte C und Γ in sich transformirt, mithin auch das System der zugehörigen Polygone P_n und daher auch der durch dieses System bestimmte Kegelschnitt K.

Wenden wir uns jetzt zum Fall eines geraden n. Hier sagt der zweite der beiden vorangestellten Hilfssätze, dass es eine Collineation der Ebene gibt, vermöge welcher in jedem Polygon P_n der Γ nicht berührenden Seite ξ ihre Gegenseite zugewiesen wird.

Die Natur dieser Collineation können wir insofern präcisiren, als wir im allgemeinen Falle, wo diese drei Doppelpunkte besitzt, die Doppelpunkte angeben können: es müssen dies die Ecken des gemeinsamen Poldreieckes von C und Γ sein. Durch die drei harmonischen Centralcollineationen, deren Centra die Ecken dieses Dreieckes und deren Axen deren Gegenseiten sind, werden die Kegelschnitte C und Γ in sich transformirt, also auch das System der Polygone P_n und die Gruppe der drei Doppelpunkte unserer durch das System der Polygone bestimmten Collineation. Durch die drei Centralcollineationen wird aber ein beliebiger

Punkt in die drei Punkte transformirt, die mit ihm zusammen ein Viereck bilden, dessen Diagonaldreieck das Poldreieck ist, und die Ecken dieses Poldreieckes sind daher die einzige Gruppe von drei Punkten, welche bei Anwendung der drei Centralcollineationen in sich übergeht.

§. 3. Die Poncelet'schen Polygone.

Die eben durchgeführten Entwicklungen besitzen das meiste Interesse in dem speciellen Falle, wo der Kegelschnitt Γ_n mit dem Kegelschnitt Γ zusammenfällt; dann haben wir unendlich viele dem Kegelschnitt C eingeschriebene und gleichzeitig dem Kegelschnitt Γ umschriebene Polygone. Poncelet hat bewiesen, dass, wenn es Ein derartiges Polygon gibt, unzählig viele solche Polygone existiren. Man pflegt jetzt ein Polygon, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben und gleichzeitig einem zweiten umschrieben ist, als Poncelet'sches Polygon zu bezeichnen.

Unsere Resultate lassen sich für Poncelet'sche Polygone von ungerader Seitenanzahl folgendermassen formuliren:

Jedes Poncelet'sche Polygon von ungerader Seitenanzahl ist sich selbst polar in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt K, und zwar ist jede Seite die Polare ihrer Gegenecke. Dieser Kegelschnitt K ist derselbe für all die Poncelet'schen Polygone, welche denselben umschriebenen und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt besitzen, und hat mit den beiden letztgenannten Kegelschnitten ein gemeinschaftliches Poldreieck.

Aus diesem Satze, der für den besonderen Fall des Dreieckes wohlbekannt ist, kann man sofort den folgenden ebenfalls für Dreiecke wohlbekannten Satz schliessen, welchen Herr Hurwitz in seiner schönen Abhandlung: „Über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über Schliessungsprobleme“ [1] gegeben hat.

„Gibt es Ein Polygon von ungerader Seitenzahl, das einem Kegelschnitt C eingeschrieben ist und dessen Eckpunkte die

[1] Math. Ann., Bd. XV.

Pole ihrer gegenüberliegenden Seiten sind in Bezug auf einen festen Kegelschnitt K, so gibt es unzählig viele solcher Polygone von derselben Seitenzahl und jeder Punkt von C ist Eckpunkt eines derartigen Polygons."

Nach den über das eine Polygon gemachten Voraussetzungen werden nämlich dessen Seiten denjenigen Kegelschnitt Γ berühren, welcher von den in Bezug auf K genommenen Polaren der Punkte des Kegelschnittes C eingehüllt wird. Es gibt desshalb nach dem Poucelet'schen Theorem unendlich viele dem Kegelschnitt C eingeschriebene und gleichzeitig dem Kegelschnitt Γ umschriebene Polygone und dies sind nach dem oben bewiesenen Satze die unzählig vielen Polygone des Hurwitz'schen Theorems.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Poncelet'schen Polygone mit gerader Seitenzahl über. Betrachten wir das System solcher Polygone, welche dem Kegelschnitt C eingeschrieben und gleichzeitig dem Kegelschnitt Γ umschrieben sind, so wird es nach den allgemeinen Auseinandersetzungen des §. 2 eine Collineation geben, vermöge welcher in jedem dieser Polygone jede Seite ihrer Gegenseite entspricht. Diese Collineation ist, wie ersichtlich, eine involutorische und desshalb ist sie eine harmonische Centralcollineation. Centrum und Axe dieser Collineation müssen eine Ecke des gemeinsamen Poldreieckes von C und Γ und ihre Gegenseite darstellen, denn Centrum und Axe dieser Collineation müssen durch jede der drei linearen Transformationen in sich übergehen, welche jeden der beiden Kegelschnitte C und Γ in sich überführen.

Wir erhalten das folgende im Wesentlichen bekannte Resultat:

Jedes Poncelet'sche Polygon von gerader Seitenanzahl wird durch eine harmonische Centralcollineation in sich übergeführt, und zwar erscheinen vermöge derselben die Gegenecken und Gegenseiten des Polygons einander zugewiesen. Die Collineation bleibt dieselbe für alle Polygone mit demselben umschriebenen und demselben eingeschriebenen Kegelschnitt und Centrum und Axe dieser Collineation sind Pol und Polare in Bezug auf jeden der beiden genannten Kegelschnitte.

§. 4. Die von den aufeinanderfolgenden gleichartigen Diagonalen eines Poncelet'schen Polygons gebildeten Polygone.

Jedes einfache n-Eck wird durch eine Diagonale in zwei Polygone von m und m' Seiten zerlegt, wo $m+m'=n+2$ ist. Diejenigen Diagonalen, für welche die Zahlen m und m' dieselben sind, mögen gleichartig heissen. Zwei gleichartige Diagonalen, deren Anfangs- und Endpunkte aufeinanderfolgende Eckpunkte des n-Eckes sind, bezeichnen wir als aufeinanderfolgend.

Betrachten wir jetzt ein System von Poncelet'schen Polygonen, welche denselben umschriebenen Kegelschnitt C und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt Γ besitzen, und denken wir uns in jedem dieser Polygone die gleichartigen Diagonalen irgend einer Art gezogen. Ein beliebiges dieser Polygone mag durch irgend eine dieser Diagonalen in ein Theilpolygon P_m von m Seiten und ein zweites $P_{m'}$ von m' Seiten zerfallen. Jedes dieser beiden Theilpolygone ist so beschaffen, dass alle seine Ecken auf C liegen und alle seine Seiten bis auf eine — die Diagonale des ursprünglichen Polygons — den Kegelschnitt Γ berühren. Wenn wir nun die in §. 2 gegebenen Sätze auf das System der Theilpolygone P_m anwenden, so folgt, falls m eine ungerade Zahl ist, dass die Seite ξ eines solchen Theilpolygons (d. i. die Diagonale des ursprünglichen) ihrer Gegenecke in einem Polarsystem entspricht, für welches das gemeinsame Poldreieck der Kegelschnitte C und Γ ebenfalls ein Poldreieck darstellt. Ist m eine gerade Zahl, so folgt, dass die Diagonale ξ ihrer Gegenseite in einer Collineation entspricht, für welche die drei Ecken des gemeinschaftlichen Poldreieckes der Kegelschnitte C und Γ die Doppelpunkte sind.

Ist die Seitenanzahl der Poncelet'schen Polygone, von denen wir ausgehen, eine ungerade, so wird von den beiden Theilpolygonen P_m und $P_{m'}$, in welche irgend eines jener Polygone durch eine Diagonale zerlegt wird, das eine immer eine gerade, das andere eine ungerade Seitenanzahl besitzen. Beachtet man noch, dass aufeinanderfolgende Diagonalen aufeinanderfolgende Ecken zu Gegenecken, aufeinanderfolgende Seiten zu Gegenseiten haben, so gelangt man durch Betrachtung der beiden Systeme von Theilpolygonen zu dem Satze:

Zieht man in einem Poncelet'schen Polygon von ungerader Seitenanzahl die aufeinanderfolgenden Diagonalen irgend einer Art, so erhält man wieder ein Poncelet'sches Polygon, welches dem ersten sowohl in einem gewissen Polarsystem, als auch in einer gewissen Collineation entspricht. Das gemeinsame Poldreieck des unserem Polygon umschriebenen und des ihm eingeschriebenen Kegelschnittes ist auch ein Poldreieck für dieses Polarsystem und seine Ecken sind die Doppelpunkte für diese Collineation. Dasselbe Polarsystem und dieselbe Collineation führen auch jedes andere Poncelet'sche Polygon in sein Diagonalpolygon über, welches denselben um- und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt besitzt wie das vorgelegte.

Ist die Seitenanzahl der betrachteten Poncelet'schen Polygone mit gemeinsamem um- und eingeschriebenen Kegelschnitt eine gerade, so haben beide Theilpolygone P_m und $P_{m'}$, in welche ein solches Polygon durch eine Diagonale zerlegt wird, entweder beide eine ungerade oder beide eine gerade Seitenanzahl und die beiden Systeme dieser Theilpolygone liefern den Satz:

Zieht man in einem Poncelet'schen Polygon von gerader Seitenanzahl die aufeinanderfolgenden Diagonalen irgendwelcher Art (die Hauptdiagonalen ausgenommen), so erhält man wieder ein Poncelet'sches Polygon. Sind die Diagonalen von der Art, dass jede derselben das Poncelet'sche Polygon in zwei Theilpolygone von ungerader Seitenzahl zerlegt, so entspricht das Diagonalpolygon dem ursprünglichen in zwei Polarsystemen; haben die beiden Theilpolygone gerade Seitenzahl, so entspricht das Diagonalpolygon dem ursprünglichen in zwei Collineationen. Diese Polarsysteme, beziehungsweise Collineationen führen auch jedes andere Poncelet'sche Polygon, welches denselben um- und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt besitzt, in sein Diagonalpolygon über, und das gemeinsame Poldreieck dieser beiden Kegelschnitte ist für die genannten Polarsysteme Poldreieck und Doppelpunktsdreieck für die genannten Collineationen.

Dass wir in diesem Satze den Fall ausschliessen mussten, wo die gezogenen Diagonalen Hauptdiagonalen (Verbindungslinien von Gegenecken) unserer Poncelet'schen Polygone sind, hat darin seinen Grund, dass die Theilpolygone P_m hier so geartet sind, dass die Sätze des §. 2 auf sie nicht Anwendung finden. Wir haben hier nämlich gerade jenen Fall vor uns, den wir bei den Betrachtungen des §. 2 gleich zu Beginn ausschliessen mussten.

§. 5. Über gewisse einfache Processe, durch welche aus einem Poncelet'schen Polygon successive unendlich viele andere abgeleitet werden können.

Wir haben im letzten Paragraph einen Process kennen gelernt, durch welchen man aus irgend einem vorgelegten Poncelet'schen Polygon P von n Seiten, ein neues P' von derselben Seitenzahl in einfacher Weise linear ableiten kann: man braucht in dem Polygon P nur die aufeinanderfolgenden Diagonalen einer beliebig gewählten Art zu ziehen. Auf das neue Polygon P' kann man wieder denselben Process anwenden und erhält ein drittes Poncelet'sches Polygon P''. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einer unbegrenzten Folge von Poncelet'schen Polygonen P, P', P'' von derselben Seitenzahl.

Nach §. 4 geht, wenn die Seitenzahl eine ungerade ist, das Polygon P in P' über durch Anwendung einer gewissen Collineation, deren Doppelpunkte die Ecken des Poldreieckes sind, welches der dem Polygon P umschriebene Kegelschnitt C mit dem diesem Polygon eingeschriebenen Kegelschnitt Γ gemein hat. Aus der Entstehung der Polygonreihe $P, P' P''$. folgt nun, dass durch diese Collineation überhaupt jedes Polygon der Reihe in das folgende (d. i. in sein Diagonalpolygon) übergeht. Dieselbe Bemerkung gilt nach §. 4 auch noch, falls die Seitenzahl des Polygons P eine gerade ist, unter der Voraussetzung, dass das Polygon P' aus dem Polygon P durch Construction der Diagonalen einer solchen Art hervorgeht, dass durch eine von ihnen das Polygon P in zwei Theilpolygone von gerader Seitenzahl zerlegt wird.

Ist das Polygon P, von dem man ausgeht, ein convexes, so ist offenbar jedes Polygon der Reihe P, P', P'' ein convexes und jedes folgende liegt ganz innerhalb des vorhergehenden: die Polygone nähern sich immer mehr einem Punkte. Wenn man i beliebig gross nimmt, so liegen diesem Punkte die Ecken der Polygone $P^{(i)}$ und $P^{(i+1)}$ beliebig nahe; der Punkt ist also im Falle der ungeraden Seitenzahl ein Doppelpunkt der Collineation, welche jedes Polygon unserer Reihe in das folgende überführt. Im Falle der geraden Seitenanzahl ist der Punkt, dem wir uns nähern, offenbar das Centrum der harmonischen Centralcollineation, welche das Polygon P, also auch jedes Polygon der Reihe P, P', P'' in sich überführt; denn dieses Centrum muss ja (als Schnittpunkt der Hauptdiagonalen) im Inneren eines jeden dieser Polygone liegen.

Wir haben den Satz:

Zieht man in einem convexen Poncelet'schen Polygon P die aufeinanderfolgenden Diagonalen irgend welcher Art, so erhält man wieder ein Poncelet'sches Polygon P'. Setzt man dieses Verfahren unbegrenzt fort, so nähert man sich unbegrenzt einem Punkte, und zwar demjenigen Eckpunkte des Poldreieckes, welches der dem Polygon P umschriebene Kegelschnitt mit dem diesem Polygon eingeschriebenen Kegelschnitt gemein hat, welcher innerhalb des Polygons liegt.

Ein anderer einfacher Process, vermöge dessen man aus einem Poncelet'schen Polygon P ein zweites P_1 von derselben Seitenzahl ableiten kann, besteht darin, dass man die Punkte, in welchen der Kegelschnitt Γ die aufeinanderfolgenden Seiten des Polygons P berührt, der Reihe nach verbindet. Das entstehende Polygon P_1 entspricht dem Polygon P im Polarsystem des Kegelschnittes Γ und ist daher wieder ein Poncelet'sches.

Ist die Seitenzahl eines Poncelet'schen Polygons P eine ungerade, so ist ihm das Polygon P_1 aus den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnittes collinear verwandt, weil nicht nur das Polygon P_1 dem Polygon P in einem Polarsystem, sondern auch dieses sich selbst in einem zweiten Polarsystem entspricht (§. 3). Das Doppelpunktsdreieck der Collineation, welche P in P_1 transformirt, ist das gemeinschaftliche Poldreieck von C und Γ, denn dasselbe ist Poldreieck für jedes der beiden Polarsysteme, durch deren successive Anwendung die Collineation erhalten wird. Denselben Process, durch welchen aus dem Polygon P das Polygon P_1 abgeleitet wird, kann man wieder auf P_1 anwenden und gelangt durch Fortsetzung des Verfahrens zu einer Reihe von Polygonen $P, P_1, P_2 .$ von denen jedes durch Anwendung unserer Collineation aus dem vorhergehenden hervorgeht.

Ist hingegen die Seitenanzahl des Polygons P eine gerade, so wird durch die harmonische Centralcollineation, welche das Polygon P in sich transformirt, auch jedes Polygon der Reihe $P, P_1, P_2 .$ in sich transformirt werden.

Geht man von einem convexen Polygon P aus, dessen Seitenanzahl grösser als 4 ist, so ist das Polygon P_1, welches von den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnittes Γ auf den aufeinanderfolgenden Seiten gebildet wird, ein innerhalb P gelegenes convexes Polygon (denn der Kegelschnitt Γ liegt, wie leicht zu sehen, innerhalb P). Die oben angestellte Überlegung bleibt anwendbar und wir haben den Satz:

Construirt man in einem vorgelegten convexen Poncelet'schen Polygon das Polygon der Berührungspunkte des eingeschriebenen Kegelschnittes, in dem so erhaltenen Polygon wieder das Polygon dieser Berührungspunkte u. s. f., so nähert man sich unbegrenzt einem gewissen Punkte, nämlich demjenigen Eckpunkte des Poldreieckes, welches der dem vorgelegten Polygon umschriebene Kegelschnitt mit dem diesem Polygon eingeschriebenen Kegelschnitt gemeint hat, welcher im Inneren des Polygons liegt.

Natürlich gelten unsere Betrachtungen auch für jedes Poncelet'sche Polygon, welches aus einem convexen durch Projection hervorgeht.

§. 6. Das Fünfeck.

Wir wollen jetzt unsere Sätze über Poncelet'sche Polygone für den Fall specialisiren, dass die Anzahl der Seiten $= 5$ ist.

Jedes beliebige einfache Fünfeck ist ein Poncelet'sches Polygon, da man ihm stets einen Kegelschnitt sowohl umschreiben als einschreiben kann.

Der Satz des §. 3 lautet für diesen Fall:

Ein beliebiges einfaches Fünfeck ist sich selbst conjugirt in einem gewissen Polarsystem, und zwar ist jede Seite die Polare ihrer Gegenecke. In demselben Polarsystem sind auch alle übrigen Fünfecke sich selbst conjugirt, welche denselben umschriebenen und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt haben wie das vorgelegte, und das gemeinsame Poldreieck dieser beiden Kegelschnitte ist Poldreieck auch für das Polarsystem.

Aus fünf geraden Linien als Seiten lassen sich $\frac{1.2.3.4.5}{2.5} = 12$ einfache Fünfecke bilden und die Ecken jedes dieser Fünfecke entsprechen nach dem oben aufgestellten Satze diesen fünf geraden Linien in einem Polarsystem; daraus folgt:

Unter den 10 Ecken eines vollständigen ebenen Fünfseits gibt es 12 Gruppen von je 5 untereinander collinearen Punkten; es sind dies die Ecken der 12 einfachen Fünfecke, welche in dem vollständigen Fünfseit enthalten sind.

Dass ein einfaches ebenes Fünfeck sich in einem gewissen Polarsystem selbst conjugirt ist, kann auch leicht direct, unabhängig von den Betrachtungen der vorliegenden Arbeit, eingesehen werden.

Es ist nämlich bekannt, dass die Angabe von zwei conjugirten Punkten eine lineare Bedingung für einen Kegelschnitt ist, so dass ein solcher im Allgemeinen durch Angabe von fünf Paaren conjugirter Punkte gegeben sein wird. Es wird desshalb in der Ebene eines einfachen Fünfeckes ein Kegelschnitt gegeben sein durch die Bedingung, dass die beiden Eckpunkte einer jeden der 5 Diagonalen des Fünfeckes in Bezug auf ihn conjugirt sein sollen. In Bezug auf diesen Kegelschnitt ist offenbar jede Seite die Polare der Gegenecke.

Diese Schlussweise hat den Vortheil, dass sie anwendbar bleibt für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen. Das einfache Sechseck im dreidimensionalen Raum hat 9 Diagonalen und eine Fläche 2. Ordnung erscheint festgelegt durch die Bedingung, dass die zwei Eckpunkte jeder von diesen Diagonalen conjugirt sein sollen in Bezug auf die Fläche.

Es folgt:

Ein beliebiges einfaches Sechseck im Raume ist in Bezug auf eine gewisse Fläche 2. Ordnung sich selbst conjugirt, und zwar ist jede Seitenfläche die Polarebene ihrer Gegenecke.

Als Corollar ergibt sich hieraus, dass unter den 20 Eckpunkten eines Sechsflachs $\frac{1.2.3.4.5.6}{2.6} = 60$ Gruppen von je 6 einander collinearen Punkten vorkommen; es sind dies die Gruppen der Eckpunkte der 60 einfachen Sechsecke, welche in dem Sechsflach enthalten sind. Denn jede Gruppe von solchen 6 Punkten ist nach unserem Satze denselben 6 Ebenen (den Ebenen des Sechsflaches) in einem Polarsystem zugewiesen.

Der grössere Theil der in den §§. 4 und 5 bewiesenen Sätze ist für den besonderen Fall des Fünfeckes von Clebsch in seiner Abhandlung: „Über das ebene Fünfeck" (Math. Ann., Bd. IV) gegeben worden; doch erscheinen die Resultate von Clebsch in mehrfacher Hinsicht ergänzt.

Clebsch findet, dass ein Fünfeck dem Fünfeck aus seinen Diagonalen collinear verwandt ist — wir wissen, dass es ihm auch polar verwandt ist. Clebsch findet, dass, wenn man im Falle eines convexen Fünfeckes diese Collineation wiederholt anwendet, man sich einem ihrer Doppelpunkte nähert — wir wissen, dass dieser Doppelpunkt ein Eckpunkt des Poldreieckes ist, welches der dem Fünfeck umschriebene Kegelschnitt mit dem dem Fünfeck eingeschriebenen Kegelschnitt gemein hat. Demselben Punkte nähert man sich nach §. 5 auch unbegrenzt, wenn man, von einem convexen Fünfeck ausgehend, das Fünfeck der Berührungspunkte des eingeschriebenen Kegelschnittes construirt und dieses Verfahren unbegrenzt fortsetzt.