Zur Construction der Polargruppen

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1891.)

1. Erste Polare eines Quadrupels auf einem Kegelschnitte. Es seien auf einem Kegelschnitte K_2 als binärem Träger vier Punkte (a) gegeben, welche von einem zweiten Kegelschnitte K'_2 ausgeschnitten werden; es sollen die drei Punkte $(a)^o_1$ der ersten Polargruppe eines Poles o von K_2 bezüglich des Quadrupels (a) construirt werden.

Betrachtet man die Tangente t_o des Kegelschnittes K_2 für den Punkt o doppeltgezählt als einen Kegelschnitt t^2_o, so bestimmt dieser Kegelschnitt mit K'_2 ein Büschel, dessen Kegelschnitte aus K_2 eine biquadratische Involution ausschneiden. Diese Involution hat in o einen vierfachen Punkt und noch drei weitere Doppelpunkte δ, in welchen K_2 von Kegelschnitten des Büschels berührt wird.

Nun gilt der Satz:[1] Hat eine Involution n^{ter} Ordnung einen n-fachen Punkt o, so sind ihre $n-1$ Doppelpunkte, die sie ausserhalb o hat, die Punkte der ersten Polargruppe des Poles o bezüglich aller ihrer Gruppen. Daher bilden die drei Berührungspunkte δ die gesuchte Polargruppe $(a)^o_1$.

Diese Berührungspunkte liegen auf der Jacobi'schen Curve J des Netzes, das durch die Kegelschnitte K_2, K'_2, t^2_o bestimmt ist. Die Curve J ist ein Kegelschnitt, welcher die Doppelpunkte

[1] Siehe meine Arbeit: Über die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren, diese Sitzungsber., 88. Bd., S. 1041.

der Kegelschnitte des Büschels K_2, K_2' oder die Ecken d_1, d_2, d_3 des Diagonaldreieckes des Viereckes (a) enthält. Ferner enthält J die beiden Punkte, in welchen t_o von Kegelschnitten dieses Büschels berührt wird, also den Punkt o und denjenigen Punkt $\mathfrak{o}$, welcher o in der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht, die dem Büschel zugehört. Nun enthält aber der Kegelschnitt, welcher der Tangente t_o in dieser Verwandtschaft entspricht, auch die fünf Punkte $d_1, d_2, d_3, o, \mathfrak{o}$, wesshalb sich ergibt:

Das Polartripel $(a)_1^o$ des Quadrupels (a) auf dem Kegelschnitte K_2 wird von demjenigen Kegelschnitte ausgeschnitten, welcher der Tangente t_o von K_2 in der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht, die zu den vier Punkten (a) gehört.

Jedem der drei Punkte $(a)_1^o$ entspricht daher in dieser Verwandtschaft ein Punkt, der auf der Tangente t_o liegt. Da aber dieser entsprechende Punkt auch auf der Tangente dieses Punktes von $(a)_1^o$ liegen muss, so folgt als Construction der linearen Polare: Man nehme auf der Tangente des Poles o den Punkt $\mathfrak{o}$, welcher o in der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht; der Berührungspunkt der Tangente, welche von $\mathfrak{o}$ noch an K_2 gelegt werden kann, mit K_2 ist diese lineare Polargruppe.[1]

2. Erste Polare eines Tripels auf K_2. Die erste Polare eines Punktes a_1 der vier Punkte (a) des vorigen Artikels bezüglich des Quadrupels (a) besteht aus a_1 und aus den zwei Punkten der ersten Polare $[a]_1^{a_1}$ des Poles a_1, bezüglich der drei übrigen Punkte $[a]$ von (a). Der Kegelschnitt J, welcher der Tangente t_{a_1} des Kegelschnittes K_2 entspricht, berührt daher K_2 in a_1 und schneidet noch in den beiden Punkten $[a]_1^{a_1}$.

Nun gibt es (s. die Figur auf S. 319) eine Perspectivität, in welcher der Punkt a_1 das Centrum ist, und in welcher den Punkten a_2, a_3, a_4 die Punkte d_2, d_3, d_1 entsprechen. In dieser Perspectivität wird dem Kegelschnitte K_2 ein Kegelschnitt entsprechen, welcher ihn in a_1 berührt, und welcher die Punkte d_1, d_2, d_3 enthält, welcher demnach mit J identisch ist. K_2 und J entsprechen sich in dieser Perspectivität, müssen sich daher auf der Perspectivitätsaxe in

[1] Vergl. G. Kohn, Über einen Satz von Stephanos, diese Sitzungsberichte, 90. Bd., S. 231.

den Punkten $[a]_1^{a_1}$ schneiden. Diese Axe ist aber die Perspectivitätsaxe der perspectivischen Dreiecke a_2, a_3, a_4 und d_2, d_3, d_1; sie ist die lineare Polare des Punktes a_1 bezüglich der Curve dritter Ordnung, die aus den drei Seiten des Dreieckes $[a]$ besteht; daher:

Die erste Polare eines Poles o bezüglich eines Tripels auf einem Kegelschnitte wird ausgeschnitten von der linearen Polare des Poles o bezüglich des Dreiseits, welches die Punkte des Tripels bilden.

3. Erste Polare für höhere Gruppen. Es seien nun (a) die Punkte eines Quadrupels auf einer cubischen Raumcurve und o ein weiterer Punkt derselben. Wählen wir die Parameterdarstellung der Coordinaten der Punkte der Curve folgendermassen:

$$x_i = \frac{1}{\rho - \rho_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so entsprechen den Werthen $\rho = \rho_i$ die Ecken des Coordinatentetraeders und dem Werthe $\rho = \infty$ der Einheitspunkt des Coordinatensystems mit den Coordinaten $x_i = 1$.

Verlegen wir die Punkte (a) in die Ecken des Coordinatentetraeders, so sind demnach die ihnen entsprechenden Parameter: $\rho = \rho_i$; den Pol o können wir dann noch in den Einheitspunkt mit dem Parameter $\rho = \infty$ verlegen.

Ist $f = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)(\rho - \rho_4)(\rho - \rho_5)$, so ist die erste Polare des Punktes $\rho = \infty$ bezüglich f dargestellt durch $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$. Daher genügen die Parameter der Punkte des ersten Polartripels des Einheitspunktes o der Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = f \Sigma \frac{1}{\rho - \rho_i} = f \Sigma x_i = 0.$$

Nun ist aber die Einheitsebene mit der Gleichung $\Sigma x_i = 0$ die lineare Polare des Einheitspunktes bezüglich des Coordinatentetraeders, dasselbe aufgefasst als Fläche vierter Ordnung; demnach gilt: Die Punkte der ersten Polargruppe eines Punktes o einer cubischen Raumcurve bezüglich einer Gruppe von vier Punkten dieser Curve liegen in der Polarebene von o bezüglich der Fläche vierter Ordnung, die von den Seitenflächen des Tetraeders der vier Punkte gebildet wird.

Da sich der angegebene Beweis auf Räume beliebiger Dimension entsprechend ausdehnen lässt, folgt der Satz:

Die Punkte der ersten Polargruppe von $n+1$ Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung (und desshalb rationalen Curve) des Raumes von n Dimensionen für einen beliebigen Punkt der Curve als Pol liegen auf der linearen Polare bezüglich der Fläche $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von den Seitenflächen des Polyeders der $n+1$ Punkte gebildet wird.

Diese Polarebene des Punktes o wird bekanntlich in folgender Weise construirt: Man schneide die Gerade, welche o mit einer Ecke des Polyeders verbindet, mit der gegenüber liegenden Seitenfläche des Polyeders, so erhält man in den Seitenflächen des Polyeders $n+1$ Punkte, die ein neues Polyeder bilden, welches dem gegebenen perspectivisch ist für das Centrum o. Die Perspectivitätsebene ist die gesuchte Ebene.

Die r^{te} Polare von $\rho = \infty$ wird, wenn

$$f = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\cdot\;\;\cdot(\rho-\rho_{n+1})$$

ist, dargestellt durch $\dfrac{\partial^r f}{\partial \rho^r} = 0$; daher liegen die Punkte der r^{ten} Polargruppe auf der Fläche:

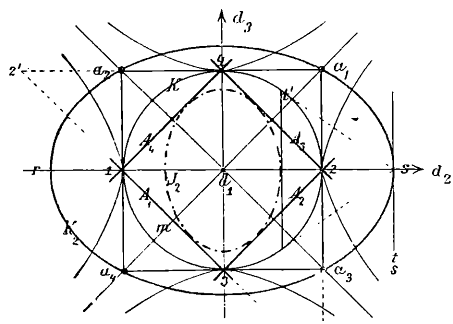
$$\frac{\partial^r f}{\partial \rho^r} = f.\Sigma \frac{1}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_r)} = f.\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = 0.$$

$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = 0$ ist aber die $(n+1-r)^{\text{te}}$ Polare des Poles o bezüglich des obigen Polyeders, woraus sich allgemein ergibt: Die Punkte der r^{ten} Polargruppe bezüglich der Punktgruppe von $n+1$ Punkten liegen auf der $(n+1-r)^{\text{ten}}$ Polare des Poles bezüglich des Polyeders.

4. Die Polarinvolution des Quadrupels. Das erste Polartripel $(a)_1^o$ für einen Pol o bezüglich des Quadrupels (a) auf einem Kegelschnitte K_2 variirt, wenn o sich auf K_2 bewegt, in einer cubischen Involution; die Seiten der Dreiecke $(a)_1^o$ berühren den Involutionskegelschnitt J_2 dieser Involution.

Ist o einer der Punkte a_i von (a), so ist nach Art. 2 die eine Seite dieses Dreieckes die lineare Polare A_i des Punktes a_i bezüglich des Dreiseits, welches von den drei übrigen Punkten (a) gebildet wird. Der Kegelschnitt J_2 berührt daher die vier Geraden (A). Diese Geraden (A) sind nach Art. 2 die Perspectivitätsaxen der Perspectivitäten, in welchen das Diagonaldreieck $d_1\, d_2\, d_3$ der Punkte (a) perspectivisch ist zu dreien der Punkte (a), mit dem vierten als Perspectivitätscentrum. Herr Schröter hat gezeigt,[1] dass jeder Kegelschnitt, welcher die Punkte (a) enthält, bezüglich einer Gruppe von vier Kegelschnitten, welche „harmonisch-zugeordnet“ genannt werden, denselben Polarkegelschnitt hat, welcher die Geraden (A) berührt.

Denkt man sich die Punkte (a) wie in der gezeichneten Figur als Ecken eines Quadrats, so sind auch die Geraden (A) Seiten eines Quadrats, und man sieht, dass die Punkte a_i den Geraden A_i bezüglich des Kreises K polar sind. Von den vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten sind in unserer Figur drei reell, nämlich der Kreis K und die beiden gezeichneten gleichseitigen Hyperbeln; der vierte Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist imaginär und hat, wenn $x_i = 0$ die Gleichungen der Seiten A_i sind, und $\Sigma x_i = 0$ ist, die Gleichung $\Sigma x_i^2 = 0$.



Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist eine Combinante des Kegelschnittsbüschels mit den Grundpunkten (a), er hat nach Herrn Mertens die Eigenschaft,[2] dass sich auf ihm die harmonischen Kegelschnitte je zweier beliebigen Kegelschnitte des Büschels schneiden und dass er auf jeder Seite des Dreieckes d_1, d_2, d_3 das Punkte-

[1] Siehe Steiner's Vorlesungen, S. 417. Vergl. Kohn, Über das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck, diese Sitzungsber., Bd. 93, S. 314.

[2] Siehe F. Mertens, Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft bezüglich eines Kegelschnittbüschels hat. Diese Sitzungsber., Bd. 91, S. 637.

paar enthält, welches gleichzeitig die Ecken des Dreieckes und die Schnittpunkte mit den durch den gegenüber liegenden Eckpunkt laufenden Seiten des Viereckes (a) harmonisch trennt. Letztere Eigenschaft kann man auch so ausdrücken: $\mathfrak{K}$ hat das Dreieck d_1, d_2, d_3 als Polardreieck und das Viereck (a) als Polviereck. Setzt man in $\Sigma x_i^2 = 0$ z. B. $x_4 = 0$, so erhält man in $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0$ die Gleichung der Hesse'schen Covariante des Tripels der drei Schnittpunkte der Geraden A_4 mit den drei übrigen Geraden (A); daher enthält $\mathfrak{K}$ die Hesse'schen Covarianten der Tripel, welche drei Seiten des Vierseits (A) auf der vierten ausschneiden. Diesen Satz und den vorhergehenden findet man bei Herrn Kohn geometrisch bewiesen.

Der Punkt s sei ein Schnittpunkt der Geraden d_1, d_2 mit dem Kegelschnitte K_2; die Polargruppe $(a)_1^s$ wird nach Art. 1 von dem Kegelschnitte ausgeschnitten, welcher der Tangente t_s in der mit dem Büschel verbundenen Steiner'schen Verwandtschaft zugehört. Da aber diese Tangente durch die Ecke d_3 des Polardreieckes geht, so zerfällt dieser Kegelschnitt in die Gerade $d_1 d_2$ und in die Gerade t', welche t_s von den Geraden $a_1 a_3$ und $a_2 a_4$ harmonisch trennt. Die erste Polargruppe besteht daher aus dem Punkte r, in welchem $d_1 d_2$, und den beiden Punkten, in welchen t' den Kegelschnitt K_2 schneidet. t' ist demnach die Seite des Dreieckes $(a)_1^s$, also eine Tangente des Involutionskegelschnittes J_2. Da aber t' von s durch die Punkte 1, 2 harmonisch getrennt wird, so ist t' die Polare von s bezüglich des Kreises K. Der Kegelschnitt J_2 berührt daher die Geraden (A) und die Gerade t', welche fünf Gerade die Polaren der Punkte (a) und s bezüglich K sind; J_2 ist demnach der Polarkegelschnitt von K_2 bezüglich K. Nach dem oben angeführten Schröter'schen Satze folgt dann, dass J_2 auch polar zu K_2 ist bezüglich $\mathfrak{K}$ und der beiden gleichseitigen Hyperbeln; es ergibt sich der Satz:

Der Involutionskegelschnitt der Involution der ersten Polaren des Quadrupels (a) auf einem Kegelschnitte K_2 eines Büschels ist polar zu K_2 bezüglich des dem Büschel combinanten Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, überhaupt polar bezüglich der vier Kegelschnitte der harmonisch-zugeordneten Gruppe, welche zu dem Vierecke (a) gehört.

Die beiden Kegelschnitte E_1, E_2, für welche (a) ein äquianharmonisches Quadrupel ist, berühren nach Herrn Kohn die Seiten des Vierseits (A), sie sind daher einander polarreciprok bezüglich des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$: der eine ist der Involutionskegelschnitt der Polarinvolution des Quadrupels (a) auf dem anderen.

Variirt der Kegelschnitt K_2 in dem Büschel, so beschreiben die Schnittpunkte n_1, n_2 desselben mit einer Seite des Vierseits (A), z. B. mit A_1, eine quadratische Involution; zu dieser gehören die Paare $m\infty$, $1\,1'$, $2'\,3$. Die Doppelelemente dieser Involution sind daher die Hesse'sche Covariante des Tripels $m\,1'\,2'$, welches man erhält, indem man die Punkte a_2, a_3, a_4 aus a_1 auf A_1 projicirt, also nach Obigem die Schnittpunkte von A_1 mit $\mathfrak{K}$. Da nun aber die Schnittpunkte von A_1 mit K_2 Punkte der ersten Polargruppe des Poles a_1 sind, so folgt, dass das Dreieck $a_1 n_1 n_2$ ein Polardreieck des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ ist. Dasselbe gilt für die Polartripel, welche irgend einen der Punkte a_i enthalten; es folgt demnach:

Die Dreiecke, welche von Polartripeln des Quadrupels (a) gebildet werden, sind Polardreiecke des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$.

Hieraus ergibt sich, dass die Doppelpunkte dieser Polarinvolution auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen; da aber diese Doppelpunkte die Hesse'sche Covariante des Quadrupels bilden, folgt:

Die Hesse'sche Covariante des Quadrupels (a) auf einem Kegelschnitte des Büschels liegt auf dem combinanten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ des Büschels.

5. Zweite und gemischte Polaren des Quadrupels. Die zweite Polare $(a)_2^o$ eines Punktes o des Kegelschnittes K_2 bezüglich des Quadrupels (a) wird durch eine Gerade g^o ausgeschnitten. Da jeder Punkt von K_2 zu zwei solchen zweiten Polaren gehört, so umhüllen diese Geraden g^o einen Kegelschnitt $\mathfrak{J}_2$. Jedem Punkte o von K_2 entspricht so eine Tangente g^o von $\mathfrak{J}_2$ und umgekehrt; diese Kegelschnitte entsprechen einander daher in einer Reciprocität R, in welcher jedem Punkte o die entsprechende Gerade g^o zugehört.

Wird als Pol o einer der Punkte (a), z. B. der Punkt a_1 genommen, so besteht die zweite Polare $(a)_2^{a_1}$ aus a_1 und einem Punkte α_1, der die lineare Polare von a_1 bezüglich der drei übrigen

Punkte ist und in folgender Weise gefunden werden kann. Man bestimme die Tangente t_{a_1} von K_2 im Punkte a_1; dann ist die Gerade $a_1 \alpha_1$ die lineare Polare von t_{a_1} bezüglich des Tripels T der drei Geraden $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_1 a_4$. Es lässt sich nun zeigen, dass der Kegelschnitt k_2 des Büschels, welcher die Geraden $a_1 \alpha_1$ berührt, den Kegelschnitt K_2 stützt, dass er Polardreiecken von K_2 umschrieben ist. Ist in der That λ der Parameter der Tangente t_{a_1} des Punktes a_1 in ihrem Büschel und ist

$$D\lambda^3 + 3\Theta\lambda^2 + 3\Theta'\lambda + D' = 0$$

die annullirte Discriminante des Büschelkegelschnittes

$$\lambda K_2 + K_2' = 0,$$

so sind die Wurzeln dieser Gleichung die Parameter der drei Geraden des Tripels T. Soll nun der Kegelschnitt $\lambda = 0$ den Kegelschnitt $\lambda = \infty$ stützen, so muss $\Theta = 0$ sein; dann ist aber $\lambda = 0$ die lineare Polare von $\lambda = \infty$ bezüglich der drei Wurzelparameter, womit die Behauptung erwiesen.

In der oben aufgestellten Reciprocität R entsprechen daher den Punkten a_i des Quadrupels (a) die Tangenten t_{a_i} des Kegelschnittes k_2. Diese Reciprocität ist demnach die Polareciprocität bezüglich k_2, und man erhält den Satz:

Die zweite Polare eines Punktes o von K_2 bezüglich des Quadrupels (a) liegt auf der Polare g^o des Punktes o bezüglich des Kegelschnittes k_2, welcher das Quadrupel enthält und K_2 stützt. Der Kegelschnitt $\mathfrak{J}_2$ ist daher polar von K_2 bezüglich k_2.

Ist auf K_2 ein Tripel gegeben, so bilden die ersten Polaren dieses Tripels eine quadratische Involution, deren Centrum der Brianchon'sche Punkt dieses Tripels ist. Nimmt man daher die zwei ersten Polartripel des Quadrupels (a) für die Pole o und o', so wird die Verbindungslinie B der Brianchon'schen Punkte b und b' dieser Tripel aus K_2 die gemischte Polare von oo' bezüglich des Quadrupels (a) ausschneiden.

Rücken o, o' unendlich nahe, so übergeht diese gemischte Polare in die reine Polare von o, daher wird B zur Geraden g^o, und es folgt, dass der Ort der Brianchon'schen Punkte b der Polartripel von (a) der Kegelschnitt $\mathfrak{J}_2$ ist.

Um die Gerade B, welche die gemischten Polare der Pole o, o' ausschneidet, zu bestimmen, suche man daher die diesen Polen bezüglich k_2 polaren Geraden g^o und $g^{o'}$; dieselben berühren den Kegelschnitt $\mathfrak{J}_2$ in zwei Punkten der Geraden B. Oder: B ist die Polare bezüglich $\mathfrak{J}_2$ des Punktes m, dessen Polare bezüglich k_2 die Gerade oo' ist.

oo' ist Polare von m bezüglich k_2, und b sei der Pol von B bezüglich k_2, so sind oo' und b polar bezüglich K_2, denn m und B sind polar bezüglich $\mathfrak{J}_2$, und $\mathfrak{J}_2$ ist Polare von K_2 bezüglich k_2. Daher hat die Gerade oo' für K_2 denselben Pol wie B für k_2: Die Gerade oo', welche die Pole o und o' verbindet, entspricht der Geraden, welche die gemischte Polare dieser Punkte aus K_2 ausschneidet, in der Collineation, in welcher entsprechende Gerade denselben Pol bezüglich K_2 und k_2 haben.

In dieser Collineation entspricht dem Kegelschnitte K_2 ein Kegelschnitt, welcher aus K_2 die Hesse'sche Covariante des Quadrupels (a) ausschneidet. Denn die Hesse'sche Covariante des Quadrupels (a) wird gebildet von den Polen o, deren zweite Polare ein doppeltgezählter Punkt ist, für welche also die Polare g^o bezüglich k^2 den Kegelschnitt K_2 berührt. Diese vier Geraden g^o, welche den Punkten der Hesse'schen Covariante entsprechen, sind demnach die gemeinsamen Tangenten von K_2 und $\mathfrak{J}_2$. Die Pole dieser Geraden g^o bezüglich k_2 sind dann die Punkte der Hesse'schen Covariante; um sie zu finden, polarisirt man zunächst K_2 an k_2 und erhält $\mathfrak{J}_2$, dann polarisirt man $\mathfrak{J}_2$ an K_2 und erhält denjenigen Kegelschnitt, welcher K_2 in der obigen Collineation entspricht, und auf welchem diese Punkte liegen.

Von den beiden Kegelschnitten E_1, E_2 (s. vorig. Art.), auf welchen das Quadrupel (a) äquianharmonisch ist, stützt einer den andern; daher wird die Polare $\mathfrak{J}_2$ des Kegelschnittes E_1 bezüglich E_2 unendlich vielen Polardreiecken von E_2 eingeschrieben sein. Da aber die zweite Polare eines Punktes o von E_1 für (a) auf der Polare dieses Punktes o bezüglich E_2 liegt, so folgt, dass der iterirte Process der zweiten Polare für ein äquianharmonisches Quadrupel sich nach dreimaliger Anwendung schliesst.[1]

[1] Vergl. meine Arbeit: Über ein Schliessungsproblem, diese Sitzungsberichte, Bd. 90, S. 164.

Die drei Kegelschnitte, für welche a ein harmonisches Quadrupel ist, haben zu Tangenten in a_1 die Geraden der cubischen Covariante des Tripels T. Eine dieser Tangenten für einen dieser Kegelschnitte H_2 ist dann die lineare Polare der Geraden $a_1 a_2$ bezüglich der beiden übrigen Strahlen des Tripels T, also ist $a_1 a_2$ die lineare Polare von dieser Tangente bezüglich des Tripels; demnach ist der Kegelschnitt k_2 des Büschels, welcher H_2 stützt, ein zerfallender Kegelschnitt. Die Polare g^o des Punktes o bezüglich dieses zerfallenden Kegelschnittes geht dann durch den Doppelpunkt desselben, und es ergibt sich leicht, dass hier der Process der zweiten Polare sich nach viermaliger Anwendung schliesst.

6. Das Quintupel auf der cubischen Raumcurve. Auf einer Raumcurve dritter Ordnung C_3 sind fünf Punkte (a) gegeben; die ersten Polargruppen $(a)_1^o$ der Punkte o dieser Curve bezüglich dieses Quintupels bilden eine biquadratische Involution. Die Ebenen des Tetraeders, dessen Ecken die Punkte $(a)_1^o$ sind, osculiren daher eine Raumcurve dritter Classe $\mathfrak{C}^3$.

Die erste Polare eines Punktes a_i der Gruppe (a) besteht aus a_i und aus der ersten Polare $[a]_1^{a_i}$ bezüglich der Gruppe der vier übrigbleibenden Punkte $[a]$. Nach Art. 3 erhält man die Ebene A_i, welche die Gruppe $[a]_1^{a_i}$ aus C_3 ausschneidet als Polarebene von a_i bezüglich des Tetraeders $[a]$. Diese Ebene ist also ganz unabhängig von der durch die fünf Punkte (a) gelegten C_3, sie ist eine simultane Covariante zwischen a_i und der Gruppe $[a]$. So erhält man für jeden der Punkte a_i eine entsprechende Ebene A_i, und die fünf Ebenen A_i bilden ein Fünfflach, welches dem Fünfeck (a) covariant ist.[1]

Weist man den fünf Punkten a_i die fünf Ebenen A_i zu, so ist hiedurch eine Reciprocität des Raumes bestimmt. Eine solche Reciprocität hat zwei Kernflächen zweiten Grades; die eine ist der Ort des Punktes, dessen entsprechende Ebene ihn enthält, und die andere ist die Enveloppe dieser Ebene. Diese Flächen müssten Covarianten des Fünfeckes sein.

---

[1] Herr Kohn hat a. a. O. dieses Fünfflach „als dem Fünfeck associirt" bezeichnet und diese Gebilde hinsichtlich ihrer Reciprocität an 26 Flächen zweiten Grades betrachtet.

Nun hat Herr Klein gezeigt,[1] dass ein Fünfeck im Raume nur eine einzige covariante Fläche zweiten Grades besitzt, die sogenannte Hauptfläche des Fünfeckes. Daher müssen die beiden Kernflächen, und zwar in die Hauptfläche zusammenfallen, die Reciprocität muss eine Polarreciprocität, und zwar diejenige an der Hauptfläche sein.

Wir beweisen nun: Die Curve $\mathfrak{C}^3$, die Enveloppe der Ebenen der Tetraeder $(a)_1^o$, ist die Polare der gegebenen Curve C_3 bezüglich der Hauptfläche. Es sei a_i^o eine Ecke des Tetraeders $(a)_1^o$ und A_i^o die ihr gegenüberliegende Ebene des Tetraeders. Dann sind die Curven C_3 und $\mathfrak{C}^3$ projectiv aufeinander bezogen, indem dem Punkte a_i^o die Ebene A_i^o zugeordnet ist.

Es wurde oben gezeigt, dass für den Pol a_i, welcher dem Quintupel (a) angehört, die Ebene A_i des Fünfflaches (A) die Punkte $[a]_1^{a_i}$ der ersten Polare ausschneidet: a_i und $[a]_1^{a_i}$ bilden zusammen das Tetraeder $(a)_1^{a_i}$. Hieraus folgt, dass in der soeben bestimmten Projectivität der Curven C_3 und $\mathfrak{C}^3$ den Punkten a_i die Ebenen A_i zugewiesen sind.

Bestimmt man ferner die polarreciproke $C^{3\prime}$ der Curve C_3 bezüglich der Hauptfläche, so wird diese Curve $C^{3\prime}$ (da den Punkten a_i die Ebenen A_i reciprok sind) die fünf Ebenen A_i enthalten, und zwar werden die Punkte a_i den Ebenen A_i in derselben Reihenfolge projectiv sein. Demnach gilt: Die Curven $\mathfrak{C}^3$ und $C^{3\prime}$ enthalten die fünf Ebenen A_i, und diese Ebenen sind auf diesen Curven in derselben Reihenfolge projectiv.

Es lässt sich aber zeigen: Es gibt keine zwei Curven dritter Ordnung durch fünf Punkte, auf welchen Curven diese fünf Punkte in derselben Reihenfolge projectiv wären. Denn projicirt man aus einem der fünf Punkte die beiden Curven auf eine Ebene, so erhält man zwei Kegelschnitte eines Büschels, auf welchen die vier Basispunkte in derselben Reihenfolge projectiv wären, und dies ist nicht möglich. Demnach müssen die Curven aus jedem der fünf Punkte durch denselben Kegel projicirt werden, also müssen sie identisch sein.

Wendet man die duale Form dieses Satzes auf die Curven $\mathfrak{C}^3$ und $C^{3\prime}$ an, so folgt, dass dieselben zusammenfallen müssen, wodurch der obige Satz bewiesen ist.

---

[1] Siehe F. Klein, Geometrisches über Resolventen, M. Ann., Bd. 4, S. 350.

Es ergibt sich aber ferner, dass jede Seitenfläche des Tetraeders $(a)_1^o$ die Polarebene bezüglich der Hauptfläche für den gegenüberliegenden Eckpunkt als Pol ist, daher:

Die Tetraeder $(a)_1^o$ sind Polartetraeder der Hauptfläche.

Ist ein Punkt einer Fläche zweiter Ordnung ein Eckpunkt eines Polartetraeders dieser Fläche, so fällt noch ein zweiter Eckpunkt des Tetraeders mit ihm zusammen. Die Gruppen $(a)_1^o$, welche einen der Durchstosspunkte der Hauptfläche mit C_3 enthalten, müssen ihn demnach noch einmal enthalten; desshalb sind diese Punkte die Doppelpunkte der Polarinvolution, oder:

Die Durchstosspunkte der Curve C_3 mit der Hauptfläche bilden die Hesse'sche Covariante des Quintupels (a).

7. Räume höherer Dimension. Die Beweise der vorstehenden Sätze sind so gewählt, dass sie sich ohneweiters für Räume höherer Dimension verallgemeinern lassen.

Hat man in einem Raume von n Dimensionen $n+2$ Punkte (a), so lässt sich zu diesen Punkten ein associirtes $(n+2)$-Flach (A) construiren. Sind $x_i = 0$ die Gleichungen der Ebenen (A) und ist $\Sigma x_i = 0$, so ist $\Sigma x_i^2 = 0$ die Gleichung der Hauptfläche, in Bezug auf welche (a) und (A) polar sind.

Wird nun eine beliebige Raumcurve n^{ter} Ordnung C_n durch die $n+2$ Punkte (a) gelegt, so schneidet die Ebene A_i aus der Curve die Polargruppe $[a]_1^{a_i}$ des Poles a_i bezüglich der $n+1$ anderen Punkte (a) aus. Die Ebenen des $(n+1)$-Polareckes $(a)_1^o$ umhüllen eine Curve $\mathfrak{C}^n$, welche zu C_n bezüglich der Hauptfläche polar ist. Die $(n+1)$-Ecke $(a)_1^o$ sind Polarecke der Hauptfläche. Die Hauptfläche schneidet C_n in den Punkten der Hesse'schen Covariante der Gruppe (a).

Nach dem letzten Satze lässt sich vermuthen, dass zwischen den Covarianten der Gruppe (a) auf C_n und den covarianten Flächen des $(n+2)$-Eckes ein Zusammenhang besteht; ich werde diesen Zusammenhang in einer nächsten Arbeit begründen und weiter entwickeln.