Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins

(II. Mittheilung)[1]

von

Emil Weyr,

w. M. k. Akad.

1. Unter den Flächen eines Büschels $n$ter Ordnung gibt es $4(n-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunkte (Knoten). Wenn die gemeinschaftliche Schnittcurve der Flächen (die Grundcurve des Büschels) einen Doppelpunkt besitzt, so vertritt er zwei von jenen $4(n-1)^3$ Knotenpunkten. Die sämmtlichen durch R_6 gehenden F_3 bilden ein Büschel, dessen Grundcurve aus R_6 und den drei Quadrisecanten $Q_1 Q_2 Q_3$ besteht. Jeder der vier Schnittpunkte $a_{i\varkappa}$ ($\varkappa \doteq 1, 2, 3, 4$) von R_6 mit Q_i zählt somit für zwei von den 32 Knotenpunkten, welche das F_3-Büschel enthalten muss. Jeder dieser zwölf Punkte $a_{i\varkappa}$ ist Doppelpunkt für eine durch R_6 hindurchgehende cubische Fläche. Ausser diesen zwölf F_3 mit Knotenpunkten auf den Q-Geraden (vergl. I. Mittheilung, Art. 18), von denen jede doppelt zu zählen ist, werden somit noch acht Flächen F_3 existiren, welche Knotenpunkte besitzen und R_6 enthalten.

2. Von diesen acht Flächen können wir die Entstehung von vier in folgender Weise angeben.

Das durch die drei Q-Geraden bestimmte Hyperboloid besitzt mit jeder F_3 des Büschels die drei N-Geraden gemeinschaftlich; da nun die F_3 durch eine der N-Geraden, welche (alle Q schneidend) beliebig gewählt werden kann, eindeutig bestimmt erscheint, so bilden die N-Tripel, welche auf den einzelnen F_3 des Büschels

[1] Siehe diese Berichte, Bd. XCIX, S. 932.

liegen, eine (rationale) cubische Involution auf jenem Hyperboloide. Diese Involution wird vier Doppelelemente besitzen. D. h. es gibt vier F_3 des Büschels (jenen vier Doppelelementen entsprechend), von denen jede zwei unendlich nahe (zu einander windschiefe) Gerade enthält. Eine solche Fläche besitzt jedoch einen Knotenpunkt, welcher auf den vereinigten zwei Geraden gelegen ist.

3. Die sämmtlichen in dem Büschel der F_3 auftretenden Knotenpunkte kann man in zwei Classen eintheilen. In solche, welche auf dem Hyperboloide H liegen, welches durch die drei Quadrisecanten Q bestimmt ist und in solche, welche dem H nicht angehören. Die auf H liegenden Knotenpunkte sind wieder zweierlei Art; solche, welche auf einer der Geraden Q_1, Q_2, Q_3 liegen und solche, welche nicht Punkte dieser Geraden sind. Wenn der Knotenpunkt $\varkappa$ einer durch R_6 gehenden F_3 der Curve $(R_6\,Q)$ angehört, so muss er ein Doppelpunkt der Curve sein, weil diese Curve der Schnitt jener den Knotenpunkt $\varkappa$ besitzenden F_3 mit irgend einer anderen Fläche des Büschels ist. Solcher Knotenpunkte $\varkappa$ gibt es also nur 12; es sind die Schnittpunkte von R_6 mit den drei Quadrisecanten Q, und zwar zählt jeder doppelt.

Es sei nun F_3 jene durch R_6 gehende cubische Fläche, welche einen der zwölf Punkte, in denen R_6 von den drei Quadrisecanten getroffen wird, zum Knotenpunkte hat; derselbe sei etwa auf Q_1 gelegen, er heisse $\varkappa$, während a, b, c die drei übrigen Schnittpunkte von R_6 mit Q_1 sein mögen. Da R_6 aus $\varkappa$ projicirt einen Kegel fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins liefert, welcher Q_1 zur dreifachen Erzeugenden hat, so muss er noch zwei Doppelerzeugende besitzen. Es gehen also durch $\varkappa$ zwei Gerade, welche R_6 ausser in $\varkappa$ noch zweimal treffen; es seien $a'b'$, respective $a''b''$, diese Treffpunkte. Die Geraden $\varkappa abc$, $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ gehören F_3 an, weil jede mit F_3 mehr als drei Punkte gemeinsam hat.

Wenn eine cubische Fläche einen Knotenpunkt $\varkappa$ erhält, so schneiden sich in demselben sechs der Fläche angehörige gerade Linien, von denen jede zwei windschiefe von den 27 Geraden der Fläche absorbirt,[1] so dass noch weitere 15 Gerade auf einer

[1] Siehe Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig 1867, S 351.

solchen Fläche auftreten. Von den sechs durch $\varkappa$ gehenden Geraden von F_3 haben wir bereits drei. Die Geraden $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ sind zwei Trisecanten, welche die Trisecante abc in einem von a, b und c verschiedenen Punkte (in $\varkappa$) schneiden. Wenn wir also die Trisecante abc mit T_1 bezeichnen, so werden $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ mit t_2, t_3 zu bezeichnen sein (siehe I. Mittheilung, Art. 17). Die Quadrisecante Q_1 erscheint so vereinigt mit der zu ihr windschiefen Trisecante T_1.

Die Ebene $(T_1 t_2)$ enthält die Nichtsecante N_3, und die Ebene $(T_1 t_3)$ enthält die Nichtsecante N_2. Die durch $\varkappa$ zu Q_2 und Q_3 gelegte Transversale gehört F_3 an, weil sie mit der Fläche vier Punkte gemein hat, und da sie auch eine Erzeugende des Hyperboloides H ist, so ist es die dritte Nichtsecante N_1. Die Ebene $N_1 Q_2$ schneidet R_6 in einem Punkte, welcher, mit $\varkappa$ verbunden, eine der F_3 angehörige (weil mit F_3 vier Punkte gemein habende) Gerade liefert; dasselbe gilt von der Ebene $N_1 Q_3$. Die erste von diesen beiden Geraden verbindet $\varkappa$ mit einem zweiten Curvenpunkte, ist also eine Bisecante, und zwar jene, welche N_1 und Q_2 schneidet, und das ist B_{21} (siehe die Tabelle auf S. 16 und 17 der I. Mittheilung); aus demselben Grunde ist die andere dieser beiden Geraden B_{31}.

Nun haben wir alle sechs durch $\varkappa$ gehenden Geraden der cubischen Fläche F_3: $Q_1 \equiv T$, t_2, t_3, N_1, B_{21}, B_{31}. Die übrigen 15 von ihnen und von einander verschiedenen Geraden von F_3 liegen in den 15 Ebenen, welche jene sechs Gerade paarweise verbinden.

In der Ebene $(T_1 t_2)$ liegt N_3; in der Ebene $(T_1 t_3)$ liegt N_2. In der Ebene $(T_1 B_{21})$ liegt E_2, in $(T_1 B_{31})$ liegt E_3. In $(Q_1 N_1)$ liegt B_{11}, und da $Q_1 \equiv T_1$, so ist N_1 auch die dritte in der Ebene $(T_1 B_{11})$ gelegene Gerade; die in $(T_1 B_{11})$ liegende dritte Gerade von F_3 ist aber E_1 so dass also $N_1 \equiv E_1$. Die Gerade B_{21} erscheint somit als dritte Gerade in der Ebene $(E_1 Q_2)$; dies ist jedoch nach dem zu Grunde liegenden Schema auf S. 16 und 17 der I. Mittheilung die Gerade e_3, so dass also $B_{21} \equiv e_3$. Aus ganz analogen Gründen ist $B_{31} \equiv e_2$.

In der Ebene $(t_2 t_3)$ muss eine einpunktige Secante von R_6 liegen, welche zugleich Gerade der F_3 ist; da jede einpunktige Secante zwei Q-Gerade schneiden muss, die in Rede stehende jedoch Q_1 offenbar nicht schneiden kann, so muss sie Q_2 und Q_3

schneiden, und dies ist dem Schema gemäss entweder E_1 oder e_1. Nun muss aber diese Gerade, weil in der Ebene $(t_2 t_3)$ liegend, die Geraden t_2 und t_3 schneiden, folglich ist es e_1.

Es liegt also in der Ebene $(t_2 t_3)$ die Gerade e_1.

In der Ebene $(t_2 N_1)$ muss eine Trisecante liegen, und zwar nach dem Schema offenbar T_3; ebenso liegt in der Ebene $(t_3 N_1)$ die Trisecante T_2.

In der Ebene $(B_{21} B_{31})$ muss eine Trisecante liegen; nun werden B_{21} und B_{31} gleichzeitig nur von den Trisecanten t_1 und T_1 geschnitten, da aber T_1 in der Ebene $(B_{21} B_{31})$ nicht liegen kann, so liegt in der Ebene $(B_{21} B_{31})$ die Trisecante t_1.

In $(B_{21} N_1)$ liegt Q_2, in $(B_{31} N_1)$ liegt Q_3.

In der Ebene $(t_2 B_{31})$, welche identisch ist mit $(t_2 e_2)$, liegt B_{22}.

In der Ebene $(t_2 B_{21}) \equiv (t_2 e_3)$ liegt B_{32}.

In $(t_3 B_{31}) \equiv (t_3 e_2)$ liegt B_{23} und in $(t_3 B_{21}) \equiv (t_3 e_3)$ liegt B_{33}.

Nun haben wir alle 15 Gerade der Fläche F_3, von denen keine durch $\varkappa$ hindurchgeht; die übrigen 12 Geraden von F_3 sind paarweise vereinigt und gehen durch den Knotenpunkt $\varkappa$, und zwar sind vereinigt: N_1 mit E_1, e_2 mit B_{31}, e_3 mit B_{21}, Q_1 mit T_1. Ferner ist vereinigt t_2 mit B_{13} und t_3 mit B_{12}; denn es ist t_2 die dritte Gerade in der Ebene $(B_{22} B_{31})$ und daher identisch mit B_{13}, und da t_3 die dritte Gerade in $(B_{33} B_{21})$ ist, so muss sie nach dem Schema mit B_{12} identisch sein.

4. Wenn der Knotenpunkt $\varkappa'$ einer durch R_6 gehenden F_3 wohl auf dem durch die drei Quadrisecanten $Q_1 Q_2 Q_3$ bestimmten Hyperboloide H liegt, aber keiner dieser Quadrisecanten angehört, so wird die durch $\varkappa'$ gehende, die drei Q schneidende Erzeugende von H eine Gerade von F_3 sein, und zwar eine N-Gerade; die anderen zwei N Geraden können nicht beide von der durch $\varkappa'$ gehenden verschieden sein. Denn wenn dies der Fall wäre, so hätte die durch $\varkappa'$ gehende, mit den Q zu demselben Systeme gehörende Erzeugende von H mit F_3 vier Punkte gemeinschaftlich, würde also ganz der F_3 angehören, so dass H mit F_3 vier Erzeugende eines Systems gemeinsam hätte, was nicht möglich ist, weil sonst F_3 zerfallen müsste in H und eine Ebene. Von den drei N-Geraden, welche H mit F_3 gemeinsam hat, fallen folglich zwei zusammen in jener, die durch den Knotenpunkt $\varkappa'$ geht; es liegt

also $\varkappa'$ auf einer Doppelerzeugenden jener cubischen Erzeugendeninvolution, welche das F-Büschel auf H bestimmt.

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Doppelerzeugende jener cubischen Involution zu einem auf ihr gelegenen Knotenpunkte $\varkappa'$ Veranlassung gibt, so dass den vier Doppelelementen der cubischen Involution entsprechend vier durch R_6 gehende F_3 mit Knotenpunkten $\varkappa'$ auftreten werden.

Um nämlich die beiden Trisecanten $t_2 t_3$ von R_6 zu finden, welche eine gegebene Trisecante T_1 schneiden, hat man (I. Mittheilung, Art. 8) durch T_1 an H die beiden Tangentialebenen zu legen; jede von ihnen enthält eine der beiden Trisecanten. Diese beiden Tangentialebenen erhält man, wenn H mit T_1 in den Punkten a, b zum Durchschnitte gebracht wird, und wenn man durch a, b die Erzeugenden N_2, N_3 von H legt, welche die Q schneiden, so sind die Ebenen $(T_1 N_2)$, $(T_1 N_3)$ die gesuchten. Zugleich sind N_2, N_3 zwei von den drei N-Geraden, welche der durch R_6 und T_1 bestimmten F_3 angehören. Fallen $N_2 N_3$ zusammen, ein Doppelelement der mehrerwähnten cubischen Involution bildend, so ist T_1 Tangente von H in $a \equiv b$, und weil die beiden Ebenen $(T_1 N_2)$, $(T_1 N_3)$ zusammenfallen, so werden auch die beiden Trisecanten $t_2 t_3$, welche T_1 schneiden, unendlich nahe zu einander rücken. Ist N_1 die dritte, das Doppelelement $N_2 N_3$ zu einem Tripel der cubischen Involution ergänzende Erzeugende von H, so wird t_2 von N_1 und N_3 (von letzterer etwa in m), und t_3 wird von N_1 und N_2 (von letzterer etwa in n) geschnitten. Die durch T_1 und R_6 gehende F_3 enthält auch t_2 t_3 $N_1 N_2 N_3$ und wird ausserdem noch die drei Trisecanten T_2 T_3 t_1 enthalten. Da sowohl t_2, t_3 unendlich nahe sind, als auch N_2, N_3, so sind auch m, n zwei unendlich nahe Punkte, und weil T_3 sowohl t_2 als auch N_1 schneidet, so wird der Schnittpunkt n' von T_3 und N_2 ein zu n unendlich naher Punkt sein, und ebenso muss der Schnitt m' von T_2 und N_3 unendlich nahe zu m sein. Und weil T_2 und T_3 die t_1 schneiden und t_1 auch die unendlich nahen Geraden $N_2 N_3$ trifft, so müssen auch T_2 und T_3 unendlich nahe zusammenrücken. Der Punkt, in welchem $m n m' n'$ vereinigt sind, ist folglich ein Knotenpunkt von F_3, weil durch ihn drei Gerade $N_2 t_2 T_2$ von F_3 hindurchgehen. Es gehen also durch diesen Knotenpunkt die drei binären Geraden $N_2 \equiv N_3$, $T_2 \equiv T_3$, $t_2 \equiv t_3$. In der Ebene $(T_2 t_2)$ liegt die Gerade N_1, in $(N_2 T_2)$ liegt t_1 und in $(N_2 t_2)$ liegt T_1. Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Ganzen neun Bisecanten von R_6; die durch den Knotenpunkt gehenden zwei Trisecanten $T_2 t_2$ vertreten sechs von diesen Bisecanten, so dass durch ihn noch drei Bisecanten von R_6 gehen werden, welche der F_3 angehören müssen, weil jede mit F_3 vier Punkte gemeinschaftlich hat. Jede von diesen Bisecanten muss eine Q-Gerade treffen, und keine zwei können dieselbe Q-Gerade treffen, weil sonst in einer durch diese Q-Gerade gehenden Ebene zwei Bisecanten liegen würden, was unmöglich ist. Diejenige, welche Q_1 trifft, ist die dritte Gerade in der Ebene $(Q_1 N_2) \equiv (Q_1 N_3)$, und somit ist sie sowohl B_{12} als auch B_{13}; ebenso ist jene, welche Q_2 trifft, sowohl B_{22} als auch B_{23}, und endlich ist die dritte, welche Q_3 trifft, sowohl B_{32} als auch B_{33}. Es gehen also durch $\varkappa'$ auch die drei binären Geraden $B_{12} \equiv B_{13}$, $B_{22} \equiv B_{23}$, $B_{32} \equiv B_{33}$.

In den Ebenen $(N_1 Q_1)$, $(N_1 Q_2)$, (N_1, Q_3) liegen die Bisecanten B_{11}, B_{21}, B_{31}. In den sechs Ebenen, welche T_2 und t_2 mit den drei durch $\varkappa'$ gehenden Bisecanten verbinden, liegen die sechs einpunktigen Secanten e, E. Jede einpunktige Secante muss zwei Q-Gerade treffen. In der Ebene $(T_2 B_{12})$ liegt eine einpunktige Secante, welche Q_1 nicht trifft (weil sonst durch den Schnitt von Q_1 und B_{12} drei Gerade gingen); es kann dies also nur e_1 oder E_1 sein. Weil aber diese fragliche Gerade auch T_3 trifft, so wird es E_1 sein; es liegt also in der Ebene $(T_2 B_{12})$ die Gerade E_1. Ebenso erkennt man, dass in $(T_2 B_{22})$, respective $(T_2 B_{32})$, die Geraden E_2, respective E_3, liegen, ferner in den Ebenen $(t_2 B_{12})$, $(t_2 B_{22})$, $(t_2 B_{32})$ die Geraden e_1, e_2, e_3. Hiemit sind alle Geraden der Fläche F_3 erschöpft.

5. Wir haben endlich noch solche F_3 durch R_6 zu betrachten, welche nicht auf dem Hyperboloide H liegende Knotenpunkte $\varkappa''$ besitzen. Wir werden später sehen, dass es vier solche Flächen gibt und wollen hier nur die Anordnung der Geraden einer solchen F_3 näher untersuchen.

Legt man durch $\varkappa''$ zu je zwei Q-Geraden eine Transversale, so wird dieselbe, weil mit F_3 vier Punkte gemeinsam habend, ganz auf F_3 liegen. Da jede von diesen drei Geraden zwei Q-Gerade schneidet, so können es nur einpunktige Secanten sein, und da jede durch den Knotenpunkt $\varkappa''$ gehende Flächengerade zwei zusammenfallende windschiefe Gerade vertritt, so wird die durch $\varkappa''$ zu Q_2, Q_3 gelegte Transversale die beiden einpunktigen Secanten $E_1 \equiv e_1$ darstellen; ebenso ist $E_2 \equiv e_2$ die durch $\varkappa''$ zu Q_1, Q_3 gelegte Transversale und $E_3 \equiv e_3$ die durch $\varkappa''$ zu Q_1, Q_2 gelegte Transversale.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Ganzen neun Bisecanten von R_6 hindurch; die durch $\varkappa''$ gehenden müssen der Fläche F_3 angehören, weil jede mit ihr vier Punkte gemeinschaftlich hat; keine von ihnen kann mit einer der drei E-Geraden identisch werden, weil dies ja einpunktige Secanten sind. Anderseits gehen durch einen Knotenpunkt einer F_3 nur sechs Flächengerade; drei von ihnen haben wir bereits in E_1, E_2, E_3, so dass sich die sechs durch $\varkappa''$ gehenden Bisecanten auf drei Gerade reduciren müssen. Durch das Zusammenfallen zweier Bisecanten entsteht eine Trisecante, welche aber dann drei durch den Punkt gehende Bisecanten vertritt. Es werden also die neun durch $\varkappa''$ gehenden Bisecanten durch drei durch $\varkappa''$ gehende Trisecanten von R_6 dargestellt sein, und $\varkappa''$ erscheint somit als der Durchschnitt dreier Trisecanten.

„Jeder dem Hyperboloide H nicht angehörige Knotenpunkt einer durch R_6 gehenden Fläche dritter Ordnung ist der Schnittpunkt dreier Trisecanten der Curve.“

Da auch die letzten drei Geraden binäre Gerade von F_3 sein müssen, so haben wir sie mit $T_1 \equiv t_1$, $T_2 \equiv t_2$, $T_3 \equiv t_3$ zu bezeichnen.

In den Ebenen $(T_2 T_3)$, $(T_3 T_1)$, $(T_1 T_2)$ liegen die drei Nichtsecanten N_1, N_2, N_3; und endlich liegen in den neun Ebenen $(E_i T_\varkappa)$ die neun Bisecanten $B_{i\varkappa}$ (siehe das Schema in der I. Mittheilung).

Dass es vier Flächen F_3 durch R_6 gibt, welche nicht auf H gelegene Knotenpunkte $\varkappa''$ besitzen, folgt eigentlich schon aus der Zahl der Knotenpunkte des F_3-Büschels; im Ganzen müssen 32 Knoten auftreten, und da die 12 Schnittpunkte von R_6 mit den drei Q-Geraden 24 Knoten vertreten und auf jedem Doppelelemente der cubischen Erzeugendeninvolution auf H ein Knoten liegt, so bleiben noch vier Knoten übrig, welche dem Hyperboloide H nicht angehören.

6. Die zwölf auf Q_1, Q_2, Q_3 liegenden Punkte von R_6, welche nach Früherem als Knotenpunkte von durch R_6 gehenden F_3 auftreten, kann man als durch R_6 schon gegeben betrachten und aus ihnen dann die 21 Geraden jeder dieser F_3-Flächen ableiten.

Zu den beiden Quadrupeln der übrigen acht Knotenpunkte und damit auch zu den zugehörigen acht F_3 kann man in folgender Art gelangen.

Es sei wie früher $\varkappa$ einer der zwölf Punkte von R_6, welche auf den drei Q-Geraden liegen; z. B. einer der vier Schnittpunkte von R_6 mit Q_1. Die durch R_6 gehende F_3, welche $\varkappa$ zum Knotenpunkte hat, wird das Hyperboloid H ausser in den drei Q-Geraden noch in drei Geraden $N_1 N_2 N_3$ schneiden. Die erste von diesen drei Geraden, N_1, ist die durch $\varkappa$ zu Q_2, Q_3 gelegte Transversale. Wenn t_2, t_3 die beiden durch $\varkappa$ gehenden Trisecanten sind (welche R_6 ausser in $\varkappa$ noch in je zwei Punkten treffen), so muss N_2 in der Ebene $Q_1 t_2$ und N_3 in der Ebene $Q_1 t_3$ liegen. Wenn man also Q_2 und Q_3 mit der Ebene $Q_1 t_2$ schneidet und diese beiden Schnittpunkte verbindet, so hat man N_2; ebenso verbindet N_3 die Schnitte von Q_2, Q_3 und der Ebene $Q_1 t_3$. Die Tripel N_1, N_2, N_3, welche den einzelnen durch R_6 gehenden F_3 angehören, bilden auf H eine cubische Involution, für welche wir (den 12 $\varkappa$ entsprechend) zwölf Tripel in der eben angegebenen Weise construiren können. Durch irgend zwei dieser Tripel ist die Involution bestimmt. Es seien D_1, D_2, D_3, D_4 ihre vier Doppelemente, so liegt auf jeder dieser vier Geraden ein Knotenpunkt $\varkappa'$, und haben wir früher gezeigt, dass durch $\varkappa'$ zwei Trisecanten $t \equiv t_3$, $T_2 \equiv T_3$ und drei Bisecanten $B_{12} \equiv B_{13}$, $B_{22} \equiv B_{23}$, $B_{32} \equiv B_{33}$ hindurchgehen, von denen die erste Q_1, die zweite Q_2 und die dritte Q_3 schneidet. Es sind also z. B. B_{12}, Q_2 und D_1 drei in einer Ebene liegende Gerade; man wird also B_{12} erhalten, wenn man R_6 mit der Ebene $Q_1 D_1$ schneidet und die zwei Schnittpunkte (welche ausser den vier auf Q_1 liegenden auftreten) mit einander verbindet. Ebenso ergibt sich B_{22}, respective B_{32}:

„Die drei Ebenen $Q_1 D_i$, $Q_2 D_i$, $Q_3 D_i$ [wobei D_i ($i = 1$, 2, 3, 4) ein Doppelelement der cubischen auf H auftretenden Erzeugendeninvolution ist] bestimmen auf R_6 drei Punktepaare, deren drei Verbindungsgeraden sich in einem Punkte $\varkappa'_i$ von D_i schneiden. Die vier

Punkte $\varkappa_i'$ sind Knotenpunkte für vier cubische durch R_6 gehende Flächen."

7. Um zu den vier Knotenpunkten $\varkappa''$ zu gelangen, welche dem Hyperboloide H nicht angehören, betrachten wir das Flächenbüschel F_3; jede Fläche desselben enthält die sechs Geraden E_i, e_i $(i = 1, 2, 3)$, welche einpunktige Secanten von R_6 sind und jene zwei Q schneiden, die den Index i nicht tragen. Durch irgend eine einpunktige Secante, welche zwei der Q-Geraden trifft, ist die sie enthaltende F_3 des Büschels vollkommen bestimmt und somit auch jene zweite einpunktige Secante, welche dieselben zwei Q-Geraden schneidet. Die Paare $E_i\, e_i$ bilden somit auf einer Fläche vierter Ordnung vom Geschlechte Eins (I. Mittheilung, Art. 19) eine Paarinvolution J_1^2, und ebenso werden die beiden Punkte (E_i), (e_i), in denen die Geraden E_i, e_i der R_6 begegnen, auf dieser Curve eine J_1^2 bilden. Diese J_1^2 hat vier Doppelpunkte (sie ist offenbar fundamental für die R_6), und es wird somit auch viermal vorkommen, dass die Geraden E_i und e_i identisch werden. Dies geschieht aber, wie wir gesehen haben, für jede Fläche, welche einen Knotenpunkt $\varkappa''$ besitzt, da in diesem Falle $E_1 \equiv e_1$, $E_2 \equiv e_2$, $E_3 \equiv e_3$ wird und diese Geraden durch $\varkappa''$ gehen (siehe Art. 5). Wenn man also durch die vier Doppelpunkte der J_1^2 zu den beiden Q-Geraden, welche den Index i nicht tragen, Transversalen legt, so liegt auf jeder einer der vier Knotenpunkte $\varkappa''$. Den Werthen $i = 1, 2, 3$ entsprechend erhält man drei Paarinvolutionen J_1^2 mit dreimal vier, d. i. zwölf Doppelpunkten und somit auch zwölf Gerade (von denen jede zwei Q-Gerade trifft), die viermal zu je dreien durch einen Knotenpunkt hindurchgehen.

Die Paarinvolutionen, von denen gesprochen wurde, können in folgender Weise bestimmt werden. Jede Paarinvolution J_1^2 auf einem Träger vom Geschlechte Eins ist durch ein Elementenpaar bestimmt.

Um z. B. die J_1^2, welche durch die Punktepaare auf E_1, e_1 gebildet wird, zu erhalten, haben wir nur ein solches Geradenpaar zu construiren; dazu eignet sich irgend eine der vier F_3, welche Knotenpunkte $\varkappa$ auf der Geraden Q_1 besitzen. Es sei $\varkappa$ einer der vier Schnittpunkte von Q_1 mit R_6 und zugleich Knotenpunkt der Fläche F_3, für welche wir das Paar E_1, e_1 kennen; es ist nämlich nach Art. 3 die durch $\varkappa$ zu Q_2, Q_3 gelegte Transversale die Gerade

E_1, während e_1 in der Ebene $t_2 t_3$ liegt, wenn t_2, t_3 die beiden durch $\varkappa$ gehenden Trisecanten sind (welche R_6 ausser in $\varkappa$ noch je zweimal schneiden). Die dem Index $i = 1$ entsprechende J_1^2 ist also bestimmt, wenn man dem Punkte $\varkappa$ (als Schnittpunkt von R_6 mit E_1) den letzten Schnittpunkt von R_6 mit der Ebene $t_2 t_3$ (als Schnittpunkt von R_6 mit e_1) als entsprechenden Punkt zuordnet. Zugleich haben wir den Satz:

„Durch jeden der vier Schnittpunkte a, b, c, d einer Quadrisecante mit der Curve R_6 gehen zwei Trisecanten, deren Ebene die Curve in dem Punkte a', b', c', d' respective schneiden möge; die vier Punktepaare aa') bb', cc', dd' gehören einer und derselben Paarinvolution auf R_6 an. So erhält man den drei Quadrisecanten entsprechend drei (fundamentale) Paarinvolutionen. Legt man durch die vier Doppelpunkte jeder dieser Involutionen die Transversalen zu den beiden Quadrisecanten, denen die betreffende Involution nicht entspricht, so erhält man zwölf Gerade, welche viermal zu je dreien durch vier Punkte $\varkappa''$ hindurchgehen. Diese Punkte $\varkappa''$ sind Knotenpunkte von vier durch R_6 hindurchgehenden Flächen dritten Grades.“