Über das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung

von

Georg Pick in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. April 1891.)

Bei Gelegenheit einer früheren Arbeit[1] (über Raumcurven vierter Ordnung und die zugehörigen elliptischen Functionen) habe ich mich eingehender mit der Invariantentheorie zweier Flächen zweiter Ordnung beschäftigt; die damaligen Untersuchungen habe ich in jüngster Zeit vervollständigt und möchte im Folgenden den auf die Strahlencomplexe bezüglichen Theil derselben mittheilen.

Eine Übersicht über die vorhandenen fundamentalen Complexe lässt sich leicht mittelst der canonischen Form der Grundflächen gewinnen (§. 1). Das hiebei verwendete Verfahren kann auch ohne Schwierigkeit zu einem strengen Beweisverfahren ausgestaltet werden.[2]

In den §§. 2 und 3 werden die Complexe in symbolischer Form aufgestellt und ihre Bedeutung und fundamentalen Relationen entwickelt.

Eine interessante Anwendung bezieht sich auf die Strahlengleichung des Polartetraëders. Dieselbe ist von Herrn Mertens durch Nullsetzen der Funnctionaldeterminante von sechs quadratischen Complexen gewonnen worden.[3] Es wird hier

---

[1] Diese Sitzungsberichte, 1889. Im Folgenden Kürze halber mit „R." citirt.

[2] Vergl. die Behandlung der Flächen dritter Ordnung bei Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, II, S. 418 ff.

[3] Diese Sitzungsberichte, 1885.

gezeigt werden, dass sich ihre linke Seite als ganze Function dritten Grades zweier anderer quadratischer Complexe ausdrückt (§. 4).

§. 1.

Die Complexe in canonischer Form.

Zwei Flächen zweiter Ordnung seien in canonischer Darstellung gegeben:

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2$$
$$f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Bezeichnet man mit p_{ik} die Strahlencoordinaten

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i,$$

so kann man sich über die vorhandenen covarianten Complexe dadurch orientiren, dass man aus diesen Grössen und geeigneten Functionen der λ_i Ausdrücke zusammensetzt, die gegenüber jenen Collineationen sich invariant verhalten, welche die canonische Gestalt der Grundformen in sich überführen. Diese Collineationen bestehen einerseits in Vorzeichenänderungen der Coordinaten x_i, anderseits in Vertauschungen derselben bei gleichzeitigen entsprechenden Vertauschungen der λ_i. Die ersteren haben Zeichenänderungen der Strahlencoordinaten, die letzteren Vertauschungen derselben zur Folge. Man gewinnt zunächst leicht das Resultat, dass es keine linearen covarianten Complexe geben kann.

Um quadratische Complexe zu bilden, betrachten wir erstens ein Glied von der Form p_{ik}^2. Ein solches zieht, nach dem früher Gesagten, alle übrigen Quadrate der Strahlencoordinaten nach sich. Bezeichnet man mit l_{ik} die Wurzel einer Resolvente sechsten Grades der Gleichung

$$\omega(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = 0,$$

so ergeben sich die folgenden sechs quadratischen Complexe:

$$\Sigma p_{ik}^2,\ \Sigma l_{ik} p_{ik}^2, \ldots \Sigma l_{ik}^5 p_{ik}^2.$$

Wir wollen ein diesem Systeme äquivalentes aufstellen, welches möglichst niedrige Grade in den λ_i aufweist. Ein solches ist etwa

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma p_{ik}^2,\ \Sigma(\lambda_i+\lambda_k)p_{ik}^2,\ \Sigma\lambda_i\lambda_k p_{ik}^2, \\ \Sigma(\lambda_i^2+\lambda_k^2)p_{ik}^2,\ \Sigma\lambda_i\lambda_k(\lambda_i+\lambda_k)p_{ik}^2,\ \Sigma\lambda_i^2\lambda_k^2 p_{ik}^2. \end{array}\right\} \quad \ldots 1)$$

Quadratische Complexe, welche Producte verschiedener Strahlencoordinaten enthalten, können kein Glied von der Form

$$p_{ik}p_{ik'}$$

enthalten, was wieder leicht aus der Betrachtung der Collineationen erster Art folgt. Es bleiben also nur die Glieder von der Form

$$p_{23}p_{14},$$

deren es drei gibt. Mit Hilfe einer kubischen Resolvente der Gleichung

$$\omega(\lambda) = 0$$

würden sich also drei neue quadratische Complexe ergeben, von denen aber einer in Folge der Identität

$$p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34} = 0$$

entfällt.

Sind L_1, L_2, L_3 die Wurzeln der erwähnten Resolvente (also etwa

$$L_1 = \lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_4),$$

so ergeben sich so die beiden quadratischen Complexe

$$\left.\begin{array}{l} L_1 p_{23}p_{14}+L_2 p_{31}p_{34}+L_3 p_{13}p_{34}, \\ L_1^2 p_{23}p_{14}+L_2^2 p_{31}p_{24}+L_3^2 p_{12}p_{34} \end{array}\right\} \quad \ldots 2)$$

Im Ganzen gibt es also acht covariante Complexe zweiten Grades. Durch die sechs Complexe 1) lassen sich die Quadrate der Strahlencoordinaten durch die beiden 2) (zusammen mit der Identität) die drei Producte $p_{23}p_{14}, p_{31}p_{24}, p_{12}p_{34}$ ganz und rational ausdrücken. Wir benützen diesen Umstand jetzt bei der Aufstellung der Complexe höherer Ordnung.

Um zunächst Complexe dritter Ordnung zu gewinnen, bilden wir Producte der Strahlencoordinaten zu dreien. Da ein solches Product aber nach dem eben Gesagten, ohne reducibel zu sein, keine der Coordinaten im Quadrat und auch keine zwei verschiedene Coordinaten ohne gemeinsamen Index enthalten kann, so ergeben sich nur die folgenden zwei Typen von Producten:

$$p_{12}p_{13}p_{14} \text{ und } p_{34}p_{42}p_{23}.$$

Von jedem Typus gibt es vier Glieder, und wir gelangen also zu den Complexen dritter Ordnung:

$$\Sigma p_{12}p_{13}p_{14}, \ \Sigma\lambda_1 p_{12}p_{13}p_{14}, \ \Sigma\lambda_1^2 p_{12}p_{13}p_{14}, \ \Sigma\lambda_1^3 p_{12}p_{13}p_{14}; \quad \ldots 3)$$
$$\Sigma p_{34}p_{42}p_{23}, \ \Sigma\lambda_1 p_{34}p_{42}p_{23}, \ \Sigma\lambda_1^2 p_{34}p_{42}p_{23}, \ \Sigma\lambda_1^3 p_{34}p_{42}p_{23}. \quad \ldots 4)$$

Es gibt also acht covariante Complexe dritter Ordnung.

Höhere Complexe können nach dem oben Gesagten sämmtlich reducirt werden. Mit den 16 aufgestellten Complexen ist also das System erschöpft.

Es muss noch ausdrücklich bemerkt werden, dass die unter 1), 2), 3) und 4) angegebenen Formen durch das eingeschlagene Verfahren in zweierlei Hinsicht unvollständig bestimmt erscheinen. Erstens ist eine jede, mit einer besonderen Ziffer bezeichnete Gruppe von Formen nur in ihrer Gesammtheit gekennzeichnet als ein lineares System, von welchem zwar eine genügende Zahl von Individuen, aber in zufälliger Auswahl herausgegriffen erscheint. Zweitens können den richtigen Formen noch überdies constante Factoren (Functionen der λ_1) anhaften, über welche das Verfahren in der obigen Gestalt keinerlei Auskunft gibt.

§. 2.

Die quadratischen Complexe in symbolischer Form.

Es seien jetzt[1]

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \ldots, \ f' = a_x'^2 = b_x'^2 = \ldots$$

die beiden Grundformen,

$$(abcu)^2 = u_\alpha^2 = u_\beta^2 = \ldots, \ (a'b'c'u)^2 = u_{\alpha'''}^2 = u_{\beta'''}^2 = \ldots,$$

[1] Vergl. wegen der folgenden Bezeichnungen und Operationen R. §§. 1—5.

beziehungsweise ihre zugehörigen Formen. Die Discriminante der Büschelform

$$\xi_1 f + \xi_2 f'$$

ist eine binäre biquadratische Form der $\xi_1 \xi_2$ und werde mit

$$A_\xi^4 = A\xi_1^4 + 4A'\xi_1^3\xi_2 + \ldots + A^{IV}\xi_2^4$$

bezeichnet. Die von dieser Form genommenen binären Invarianten und Covarianten heissen, wie üblich,

$$i,\ j,\ H_\xi^4,\ T_\xi^6.$$

Wir führen ferner die beiden quadratischen Covarianten in folgender Gestalt ein:[1]

$$\varphi = \varphi_x^2 = -a'_\alpha b'_\alpha a'_x b'_x - \frac{1}{4} A'' f + \frac{1}{2} A' f'$$

$$\varphi' = \varphi_x'^2 = -a_{\alpha'''} b_{\alpha'''} a_x b_x - \frac{1}{4} A'' f' + \frac{1}{2} A''' f.$$

Endlich benützen wir die beiden Operationen δ und ϑ.[2] Die Operation δ führt f in f', f' in Null, φ in φ', φ' in Null über u. s. w. Die Operation ϑ führt die binäre Form

$$f_\xi = f\xi_1 + f'\xi_2$$

in

$$\varphi_\xi = \varphi\xi_1 + \varphi'\xi_2$$

über, φ_ξ aber in $\frac{5}{96} i f_\xi$. Hinsichtlich der Form A_ξ^4 selbst ist die Operation identisch mit der Aronhold'schen Operation δ.[3]

Um nun covariante quadratische Complexe zu gewinnen, drücken wir die Strahlencoordinaten durch zwei Systeme von Ebenencoordinaten u_i, v_i aus. Es sind dann drei Typen von symbolischen Factoren zu berücksichtigen:

1) $a_{\alpha'''}$, a'_α; 2) $(aba'b')$; 3) $(abuv)$, $(aa'uv)$, $(a'b'uv)$.

---

[1] Von R. §. 2 im Vorzeichen abweichend.

[2] R. §§. 2 und 3. Das hier gebrauchte ϑ ist nicht völlig mit R. §. 3 in Übereinstimmung. Siehe die vorige Anmerkung.

[3] Siehe etwa Clebsch, Binäre Formen, S. 137.

Die Factoren des ersten Typus können nun offenbar vermieden werden, indem man die Symbole der beiden quadratischen Covarianten φ, φ' einführt. Es bleiben dann Factoren von der Form

$$(aba'b'),\ (aba'\varphi') \text{ etc.}$$

und solche wie

$$(abuv), \ldots, (a\varphi uv), \text{ etc.}$$

Zunächst können nun quadratische Complexe ohne coordinatenfreien Factor gebildet werden. Man erhält

$$\sigma = (abuv)^2,\ \sigma' = (aa'uv)^2,\ \sigma'' = (a'b'uv)^2, \qquad \ldots\mathrm{I})$$

wobei

$$\delta\sigma = 2\sigma',\ \delta\sigma' = \sigma'',\ \delta\sigma'' = 0;$$

ähnlich

$$\tau = (a\varphi uv)^2, \tau' = (a\varphi' uv)^2 = (a'\varphi uv)^2,^{1}\ \tau'' = (a'\varphi' uv)^2, \ldots\mathrm{II})$$

mit

$$\delta\tau = 2\tau',\ \delta\tau' = \tau'',\ \delta\tau'' = 0.$$

Mittelst binärer Veränderlicher ξ_1, ξ_2 fassen wir diese sechs Formen in folgender Weise zusammen: [2]

$$\sigma_\xi^2 = \sigma\xi_1^2 + 2\sigma'\xi_1\xi_2 + \sigma''\xi_2^2,\ \tau_\xi^2 = \tau\xi_1^2 + 2\tau'\xi_1\xi_2 + \tau''\xi_2^2.$$

Augenscheinlich ist nun

$$\vartheta\sigma_\xi^2 = 2\tau_\xi^2. \qquad \ldots 5)$$

Eine leichte symbolische Rechnung ergibt ferner:

$$\vartheta\tau_\xi^2 = -\frac{1}{2}(A\tau)^2 A_\xi^2 + \frac{1}{8}(H\sigma)^2 H_\xi^2 + \frac{1}{16} i . \sigma_\xi^2. \qquad \ldots 6)$$

In dieser letzteren Relation liegt zugleich ausgesprochen, dass weitere Bildungen, wie

$$(\varphi\psi uv)^2 \text{ etc.}$$

auf die sechs I) und II) zurückführbar sind.

---

[1] Wegen der hier auftretenden Identität vergl. R. §. 5.

[2] R. §. 3.

Die geometrische Bedeutung dieser sechs Formen wird bekanntlich leicht vermittelst des Clebsch'schen Übertragungsprincips hergeleitet. Darnach bedeutet überhaupt

$$(mnuv)^2 = 0$$

die Gesammtheit der Strahlen, welche die Flächen zweiter Ordnung

$$m_x^2 = 0,\ n_x^2 = 0$$

in harmonischen Punktepaaren schneiden. Wir wollen die Complexe desshalb kurz als „harmonische" bezeichnen. Insbesondere ergeben σ und σ'' die Strahlengleichungen der gegebenen Complexe. Geht man zur canonischen Form über, so erweist sich die Gesammtheit der Bildungen I) und II) mit der Gesammtheit der Complexe 1) §. 1 identisch. So ist zum Beispiel, wenn wir jetzt die Strahlencoordinaten durch Punktcoordinaten ausdrücken,

$$\begin{aligned}(abuv)^2 &= (a_x b_y - a_y b_x)^2\\ &= 2\begin{vmatrix} a_x^2, & a_x a_y \\ a_y a_x, & a_y^2\end{vmatrix}\\ &= 2\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1^2 + & \lambda_1 x_1 y_1 + \ldots \\ \lambda_1 y_1 x_1 + \ldots, & \lambda_1 y_1^2 + . \end{vmatrix}\\ &= 2\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \lambda_4 x_4 \\ \lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \lambda_3 y_3, \lambda_4 y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4\end{vmatrix}\\ &= 2\{\lambda_1\lambda_2 p_{12}^2 + \lambda_1\lambda_3 p_{13}^2 + \ldots\}.\end{aligned}$$ [1]

Von quadratischen Complexformen, welche einen coordinatenfreien Klammerfactor enthalten, ist die einfachste

$$\begin{aligned} s &= (aba'b')(abuv)(a'b'uv) \qquad \ldots \text{III)}\\ &= -2(aa'bb')(aa'uv)(bb'uv).\end{aligned}$$

Aus dieser Bildung entspringt eine neue durch Anwendung der Operation ϑ:

$$\vartheta s = 2(a\varphi a'b')(a\varphi uv)(a'b'uv) + 2(aba'\varphi')(abuv)(a'\varphi' uv).$$

---

[1] Die sechs harmonischen Complexformen finden sich sämmtlich bei Mertens a. a. O. in unsymbolischer Form und anderer Normirung als hier. Zum Theil sind dieselben auch bei Voss (Math. Ann., Bd. 9) und Anderen in Betracht gezogen.

Die beiden rechts auftretenden Formen sind identisch. Man hat nämlich

$$(a\varphi a'b')(a\varphi uv)(a'b'uv) = -(aa'b'c')c'_\alpha d'_\alpha (ad'uv)(a'b'uv) - \frac{1}{4}A''.s$$

$$= -\frac{1}{3}(aa'b'c')(ad'uv)d'_\alpha\{(a'b'uv)c'_\alpha - (a'c'uv)b'_\alpha + (b'c'uv)c'_\alpha\}$$

$$-\frac{1}{4}A''.s$$

$$= \frac{1}{3}a_{\alpha'''}d'_\alpha(ad'uv)\{u_\alpha v_{\alpha'''} - v_\alpha u_{\alpha'''}\} - \frac{1}{4}A''.s,$$

welcher Ausdruck sich nicht ändert bei Vertauschung der beiden Grundformen. Wir setzen also

$$\begin{aligned} t &= (a\varphi a'b')(a\varphi uv)(a'b'uv) \\ &= (aba'\varphi')(abuv)(a'\varphi'uv) \\ &= \frac{1}{3}(aa'uv)a_{\alpha'''}a'_\alpha(u_\alpha v_{\alpha'''} - v_\alpha u_{\alpha'''}) - \frac{1}{4}A''s \end{aligned} \qquad \ldots \mathrm{IV})$$

und haben sonach

$$\vartheta s = 4t. \qquad 7)$$

Die beiden Formen s und t sind Combinanten,[1] wie aus ihrer Symmetrie bezüglich der Coëfficienten der beiden Grundformen einerseits und dem Bestehen der Relationen

$$\delta s = 0,\ \delta t = 0$$

anderseits hervorgeht.

Ihre geometrische Bedeutung ergibt sich am einfachsten durch Übergang zur canonischen Darstellung, wobei sich s und t mit den Formen 2) §. 1 in Übereinstimmung erweisen. Sie sind desshalb tetraëdrale Complexe; insbesondere ist $s = 0$ die Gleichung desjenigen Complexes, welcher aus den Verbindungsgeraden solcher Punkte besteht, welche für beide Grundflächen dieselbe Polarebene liefern.[2]

---

[1] Die beiden Complexe sind sich selbst dual und folglich auch Combinanten der Flächenschaar, welcher die Grundflächen angehören.

[2] Betrachtet man die eine der beiden Grundflächen als Massfläche, so ist $s = 0$ der Reye'sche Axencomplex der anderen. („Polnormalencomplex" bei Waelsch, Acta Leop., 1888.)

Wird t der Operation ϑ unterworfen, so ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$\vartheta t = \frac{1}{24} is. \qquad \ldots 8)$$

§. 3.

Die Complexe dritten Grades in symbolischer Form.

Aus je drei Factoren lassen sich die vier folgenden Complexformen dritten Grades bilden:

$$\Gamma = (aa'uv)(a\varphi uv)(a'\varphi uv),\ \Gamma' = (aa'uv)(a\varphi'uv)(a'\varphi'uv), \quad \ldots V)$$

mit

$$\delta\Gamma = \Gamma',\ \delta\Gamma' = 0;$$

$$\Theta = (a\varphi uv)(a\varphi'uv)(\varphi\varphi'uv),\ \Theta' = (a'\varphi uv)(a'\varphi'uv)(\varphi\varphi'uv), \qquad VI)$$

mit

$$\delta\Theta = \Theta',\ \delta\Theta' = 0.$$

Bildet man wieder in der wiederholt hervorgehobenen Weise die binären Formen Γ_ξ und Θ_ξ, so kann man leicht die folgenden Relationen constatiren:

$$\vartheta\Gamma_\xi = -\Theta_\xi; \qquad \ldots 9)$$

$$\vartheta\Theta_\xi = -\frac{5}{96} i\Gamma_\xi. \qquad \ldots 10)$$

Die geometrische Bedeutung dieser vier Complexe folgt aus dem Clebsch'schen Übertragungsprincip. Nach demselben stellt überhaupt

$$(lmuv)(lnuv)(mnuv) = 0$$

den Inbegriff derjenigen Geraden dar, welche die drei Flächen zweiten Grades

$$l_x^2 = 0,\ m_x^2 = 0,\ n_x^2 = 0$$

in Punktepaaren einer Involution schneiden.[1]

Mit Hinzunahme eines coordinatenfreien Klammerfactors lassen sich vier weitere Complexe dritten Grades bilden, nämlich

$$\Lambda = (aba'\varphi)(abuv)(ca'uv)(c\varphi uv),$$

[1] Vergl. Gundelfinger bei Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, I, S. 322.

und drei andere, welche aus Λ durch die Operation δ hervorgehen. Doch ist die hiebei gewonnene Schreibweise unübersichtlich und es empfiehlt sich, den Ausdruck Λ umzugestalten. Ersetzt man darin nämlich φ durch die Symbole der Grundformen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -(aba'b')(abuv)(ca'uv)(cc'uv)\, b'_\alpha c'_\alpha \\
&= -\frac{1}{2}(aba'b')(abuv)(cc'uv)\, c'_\alpha \{(ca'uv)\, b'_\alpha - (cb'uv)\, a'_\alpha\} \\
&= -\frac{1}{2}(aba'b')(abuv)(cc'uv)\, c'_\alpha \{-c_\alpha (a'b'uv) + (ca'b'v)\, u_\alpha - (ca'b'u)\, v_\alpha\} \\
&= \frac{1}{2}(aba'b')(abuv)(cc'uv)\, c'_\alpha (u_\alpha (ca'b'v) - v_\alpha (ca'b'u)),
\end{aligned}$$

indem das dritte Glied identisch verschwindet. Man hat jetzt nur in ähnlicher Weise noch die beiden Klammerfactoren $(abuv)$, $(cc'uv)$ aufzulösen, damit u, v überall getrennt auftreten, um das gewünschte Resultat zu erhalten. Um dasselbe bequemer schreiben zu können, führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$(aba'u)^2 = u_{\alpha'}^2, \quad (aa'b'u)^2 = u_{\alpha''}.$$

So erhalten wir

$$\Lambda = \frac{1}{2}(u_\alpha v_{\alpha'} - v_\alpha u_{\alpha'})(u_\alpha v_{\alpha''} - v_\alpha u_{\alpha''})(u_{\alpha'} v_{\alpha''} - v_{\alpha'} u_{\alpha''}).$$

Endlich vertauschen wir in dem Ausdrucke der Strahlencoordinaten die Ebenencoordinaten mit den Punktcoordinaten. Die vier fraglichen Formen stellen sich dann sehr übersichtlich so dar:

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{1}{2}(\alpha\alpha' xy)(\alpha\alpha'' xy)(\alpha'\alpha'' xy) \\
\Lambda' &= \frac{1}{6}(\alpha\alpha' xy)(\alpha\alpha''' xy)(\alpha'\alpha''' xy) \\
\Lambda'' &= \frac{1}{6}(\alpha\alpha'' xy)(\alpha\alpha''' xy)(\alpha''\alpha''' xy) \\
\Lambda''' &= \frac{1}{2}(\alpha'\alpha'' xy)(\alpha'\alpha''' xy)(\alpha''\alpha''' xy),
\end{aligned}\right\} \quad \text{VII)}$$

wobei

$$\delta\Lambda = 3\Lambda', \ \delta\Lambda' = 2\Lambda'', \ \delta\Lambda'' = \Lambda''', \ \delta\Lambda''' = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser zwei Formen folgt jetzt wieder aus dem Übertragungsprincip. Denn es stellt überhaupt

$$(\lambda\mu xy)(\lambda\nu xy)(\mu\nu xy) = 0$$

die Gesammtheit der Strahlen dar, von welchen an die drei Flächen $u_\lambda^2 = 0$, $u_\mu^2 = 0$, $u_\nu^2 = 0$ Berührungsebenenpaare bestimmt sind, die in Involution liegen.[1] Man erkennt hieraus, dass diese vier involutorischen Complexe den vorhin gefundenen dualistisch gegenüberstehen. Denn die lineare Mannigfaltigkeit der Ordnungsflächen, welche von den Flächen

$$a_x^2 = 0, \ a_x'^2 = 0, \ \varphi_x^2 = 0, \ \varphi_x'^2 = 0$$

bestimmt wird, ist identisch mit der linearen Mannigfaltigkeit von Classenflächen, welche aus

$$u_\alpha^2 = 0, \ u_{\alpha'}^2 = 0, \ u_{\alpha''}^2 = 0, \ u_{\alpha'''}^2 = 0$$

hervorgeht; beide bilden die Gesammtheit der Flächen mit gemeinsamem Polartetraëder Δ.[2] Irgend drei Flächen der Mannigfaltigkeit liefern nun offenbar einen involutorischen Complex der ersten Art, welcher sich aus Γ, Γ', Θ, Θ' zusammensetzt, einen solchen der zweiten Art, welche sich aus Λ, Λ', Λ'', Λ''' zusammensetzt.

Beim Übergang zur canonischen Form erkennt man die Gesammtheit der Bildungen V) und VI) in Übereinstimmung mit 4) §. 1, jener VII) mit 3) §. 1.

Noch ist das Verhalten der Λ gegenüber der Operation ϑ zu erwähnen. Man erhält, ähnlich wie früher,

$$\vartheta\Lambda_\xi^3 = -\frac{3}{4}(A\Lambda)^2 A_\xi^2 \Lambda_\xi. \qquad 11$$

---

[1] Der Complex $\Lambda'' = o$ findet sich in canonischer Form bei Herrn Waelsch (a. a. O.) und heisst dort „Focalcomplex."

[2] R. §. 1.

§. 4.

Das Polartetraëder.

Für die canonische Form ist die Gleichung des Polartetraëders in Strahlencoordinaten:

$$p_{23}p_{31}p_{12}p_{14}p_{24}p_{34} = 0.$$

Man erhält das Product der linken Seite multiplicirt mit dem Quadrate des Differenzenproductes der λ_i offenbar als Functionaldeterminante der sechs harmonischen Complexe (1) §. 1, wodurch eine invariante Gestalt der Gleichung gewonnen ist.[1]

Es ist aber klar, dass man dasselbe Product (gleichfalls multiplicirt mit dem Quadrate des Differenzenproductes) als ganze Function dritten Grades der beiden tetraëdralen Complexformen (2) §. 1 (mit ganzen Coëfficienten in den λ_i) erhält, indem man mit Zuhilfenahme der Identität die drei Producte

$$p_{23}p_{14},\ p_{31}p_{24},\ p_{12}p_{34}$$

linear durch die beiden Complexformen ausdrückt.

Die Functionaldeterminante der sechs Formen I) und II), §. 2, ist vom 24ten Grade in den Coëfficienten der Grundformen, offenbar symmetrisch in denselben und verschwindet bei Anwendung jeder der Operationen δ und ϑ. Sie ist also jedenfalls eine Combinante, und da auch die tetraëdralen Complexe III) und IV), §. 2, Combinanten sind, so können in der gesuchten Darstellung nur Invarianten mit Combinanteneigenschaft als Coëfficienten auftreten. Mit Rücksicht auf den früher constatirten Grad in den Coëfficienten der Grundformen ergibt sich so für die linke Seite ∇ der Gleichung des Polartetraëders

$$\nabla = t^3 + \mu i t s^2 + \nu j s^3,$$

wo μ, ν noch zu bestimmende numerische Factoren bedeuten. Diese ergeben sich aus

$$\vartheta\nabla = 0,$$

[1] Vergl. Mertens a. a. O.

welche Relation die Gleichungen

$$\frac{1}{4}+8\mu=0$$

$$2\mu+12\nu=0$$

$$\frac{\mu}{12}+\frac{\nu}{2}=0$$

liefert. Man erhält somit

$$\nabla=t^3-\frac{1}{2^5}its^2+\frac{1}{2^6.3}js^3. \qquad \ldots 12)$$