

Über eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. April 1891.)

Die Covarianten von n Punkten eines Raumes von $n-2$ Dimensionen hat Herr Klein[1] mit der Theorie der Resolventen einer Gleichung n^{ter} Ordnung in Beziehung gesetzt. Man kann diese Covarianten auch, wie dies in der vorliegenden Mittheilung geschehen soll, mit der binären Invariantentheorie in Zusammenhang bringen. Hiezu lege man durch die Punkte eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die man, da sie rational ist, als binären Träger betrachten kann. Construirt man dann auf der Curve für die n Punkte eine Covariante, so beschreiben die Punkte dieser Covariante eine covariante Fläche der n Punkte, wenn die Curve, durch die n Punkte gehend, variirt.[2]

1. $\mathfrak{C}_{n-2}$ durch n Punkte des R_{n-2}. Es sei im Raume R_{n-2} von $n-2$ Dimensionen ein n-Eck (p) von n Punkten p_i $(i=1,\ldots,n)$ gegeben. Durch diese Punkte gehen ∞^{n-3} Curven $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche als in R_{n-2} liegend rational sind und mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden sollen. Durch jeden weiteren Punkt des Raumes ist eine einzige Curve $\mathfrak{C}$ bestimmt.

Lässt man in (p) den Punkt p_i weg, so bleibt ein $(n-1)$-Eck $[p]_i$; $n-2$ Punkte des letzteren bestimmen eine Ebene des R_{n-2}[3] und die $n-2$ Seitenebenen von $[p]_i$ bilden eine Fläche

[1] Siehe F. Klein, Über eine geometr. Repräsentation der Resolventen algebr. Gleichungen, Math. Ann., Bd. IV, S. 346.

[2] Vergl: Construct. d. Polargruppen, diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 326.

[3] Wir bezeichnen als „Fläche" des R_{n-2} jedes seiner Gebilde von $n-3$ Dimensionen, speciell als „Ebene" das lineare Gebilde.

$n-2^{\text{ter}}$ Ordnung. Es wurde nun l. c. gezeigt, dass die erste Polargruppe des Punktes p_i bezüglich der Punktgruppe $[p]_i$ in der Polarebene P_i von p_i bezüglich dieser Fläche liegt, also in einer Ebene, welche unabhängig von der durch die Punkte gelegten Curve $\mathfrak{C}$ ist. Diese Ebene P_i soll die „Gegenebene" des Punktes p_i heissen; man erhält so n Gegenebenen, welche ein n-Flach (P) bilden. Dasselbe soll das „Gegenflach" des n-Ecks (p) heissen; (p) ist dann das „Gegeneck" von (P).

Ist $x_i = 0$ die Gleichung der Ebene P_i, so kann man setzen: $\Sigma x_i = 0$ und kann die x_i als Coordinaten eines Punktes des R_{n-2} verwenden. Dann ist es leicht, eine Parameterdarstellung der Curve $\mathfrak{C}$ aufzustellen.

Es sei hiezu $(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2)^n = a_\alpha^n$ eine binäre Form, deren wirkliche Coëfficienten $\bar{a}_i$ wären, und es sei gesetzt:

$$f = \frac{a_\alpha^n}{a_1^n} = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \quad (\alpha - \alpha_n),$$

so dass $f = 0$ n Punkte einer Geraden gibt. Dann ist die erste Polargruppe des Punktes α_i bezüglich der $n-1$ übrigen Punkte von f gegeben durch die Gleichung:

$$0 = f \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\alpha_i - \alpha_\varkappa}{\alpha - \alpha_i \,.\, \alpha - \alpha_\varkappa} = f \cdot \left(\frac{n}{\alpha - \alpha_i} - \sum_{\varkappa-1}^{n} \frac{1}{\alpha - \alpha_i} \right).$$

Setzt man nun:

$$x_i = \frac{n}{\alpha - \alpha_i} - \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{1}{\alpha - \alpha_i}, \tag{1}$$

so folgt zunächst, dass $\Sigma x_i = 0$ ist. Es wird daher jedem Punkte der Geraden ein Punkt eines Raumes von $n-2$ Dimensionen entsprechen, dessen Coordinaten x_i sind, und diese Punkte werden auf einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung liegen; die Coordinaten der Punkte dieser Curve sind in 1) rational durch den Parameter α dargestellt.

Den Parameterwerthen $\alpha = \alpha_i$ entsprechen n Punkte p_i der Curve. Die Ebene $x_i = 0$ wird vermöge der Gleichung 1) aus dieser Curve die 1^{te} Polargruppe des Poles p_i bezüglich der $n-1$

übrigen Punkte von (p) ausschneiden, daher sind $x_i = 0$ die Gleichungen der Gegenebenen P_i des n-Ecks (p). Es ergibt sich demnach, dass die Gleichungen 1) die Parameterdarstellung einer die Punkte (p) enthaltenden Curve $\mathfrak{C}$ geben.

Multiplicirt man in den Gleichungen 1) auf den rechten Seiten mit dem Factor $\alpha - \alpha_1$, so erhält man dann für $\alpha = \alpha_1$ die Coordinatenwerthe:

$$x_1 = 1 - n\,,$$

während die $n-1$ übrigen Coordinaten alle den Werth 1 haben. Daher hat man für die Coordinaten des Punktes p_i:

$$x_i = 1 - n \quad \text{und} \quad x_k = 1,$$

wenn $k \neq i$ ist.

Wenn man demnach in den Gleichungen 1) statt der α_i ein anderes Werthsystem β_i substituirt, so erhält man die Parameterdarstellung einer anderen Curve $\mathfrak{C}$, welche durch die Punkte (p) geht.

Ein Punkt der Geraden $p_1 p_2$ hat, wenn λ ein beliebiger Parameter ist, die Coordinaten:

$$x_1 = \lambda - (n-1),\; x_2 = 1 - (n-1)\lambda;\; x_3, x_4 \ldots x_n = 1 + \lambda\,;$$

soll der Punkt in der Ebene P_1 liegen, so muss $x_1 = 0$ sein, daher $\lambda = n-1$, und es ergibt sich für seine übrigen Coordinaten:

$$x_2 = 2 - n;\; x_3, x_4, \ldots, x_n = 1.$$

Es folgt demnach, dass sich das $(n-1)$-Eck $[p]_i$ aus dem Punkte p_i auf dessen Gegenebene P_i in ein $(n-1)$-Eck projicirt, dessen Gegenflach gebildet wird von den Schnitträumen von P_i mit den Ebenen des $(n-1)$-Flachs $[P]_i$. Ähnlich folgt weiter: Projicirt man aus den k Punkten $p_1 \ldots p_k$ die übrigen $n-k$ Punkte von (p) auf den gemeinsamen Raum R_{n-2-k} der k Ebenen $P_1 \ldots P_k$, so erhält man $n-k$ Punkte, deren $n-2-k$ Gegenebenen in R_{n-2-k} von den Ebenen $P_{k+1}, \ldots, P_n$ ausgeschnitten werden.

2. Covarianten- und Invariantenflächen. Wir denken uns nun auf der Curve $\mathfrak{C}$ für die Punkte (p) die ν Punkte (q) einer Covariante ν^{ter} Ordnung construirt. Variirt $\mathfrak{C}$, durch die Punkte (p) gehend, so beschreiben die Punkte (q) eine Fläche, welche

die „Covariantenfläche" der gewählten Covariante heissen möge. Diese Fläche hängt vermöge ihrer Construction nur von den Punkten (p) ab, ist demnach eine Covariante des n-Ecks (p). Jede Covariante von (p) ist aber auch eine Covariante seines Gegenflachs (P): Die Covariantenfläche ist dem Gegenflache covariant.

Nun hat Herr Klein l. c. bewiesen, dass jede Covariante eines n-Flachs im Raume von $n-2$ Dimensionen, dessen Seitenflächen die Gleichungen $x_i = 0$ haben und wobei $\Sigma x_i = 0$ ist, eine symmetrische Function der x_i ist. Es ergibt sich demnach, dass jeder Covariante von f eine symmetrische Function der x_i entspricht, die, gleich Null gesetzt, die Gleichung der zugehörigen Covariantenfläche liefert.

Aber auch umgekehrt: Jede covariante Fläche F des n-Ecks (p) schneidet aus $\mathfrak{C}$ eine Covariante der Gruppe (p) auf $\mathfrak{C}$ aus; denn jede lineare Transformation der Curve $\mathfrak{C}$ in sich ist eine Collineation des R_{n-2}; geht bei dieser Transformation der Curve die Gruppe (p) in die Gruppe (p') über, so die covariante Fläche F in F'; also übergeht die Gruppe, welche F aus $\mathfrak{C}$ ausschneidet, in die Schnittgruppe, welche auf F' liegt.

Die Covariantenfläche geht nothwendig im Allgemeinen eine Anzahl Male durch die Punkte p_i hindurch. Diese Anzahl nennen wir die „Potenz $\mathfrak{p}$ der Covariante"; denn die Covariantenfläche schneidet aus $\mathfrak{C}$ die Covariante aus und die Gruppe (p) so oftmal, als diese Potenz der Covariante beträgt. Den Kegel, welcher der Fläche im Punkte p_i umschrieben ist, nennen wir den „Potenzkegel" der Covariante für den Punkt p_i. Man erhält sein Gleichungspolynom als niedrigste Entwickelungsglieder der Covariantenfläche an der Stelle $x_1 = 1-n$; $x_2, x_3 \ldots = 1$.

Es gibt Covariantenflächen mit der Potenz Null, welche nicht durch die Punkte (p) gehen. Solche sind z. B. durch die elementaren symmetrischen Functionen der x_i gegeben und durch die Potenzsummen der x_i; denn diese Functionen werden nicht durch das Werthsystem $x_1 = 1-n$; $x_2, x_3 \quad = 1$ befriedigt.

Der Schnitt der Covariantenfläche mit der Ebene P_i ist eine Covariantenfläche desjenigen $(n-1)$-Ecks $[p]'_i$, welches die Projection von $[p]_i$ aus dem Centrum p_i auf die Ebene P_i ist. Allgemeiner schneidet eine Covariantenfläche den gemeinsamen Raum

R_{n-2-k} von k Ebenen $P_1 \ldots P_k$ des Gegenflachs (P) in einer Covariantenfläche des $(n-k)$-Ecks $[a]^{(k)}$, welches man erhält, indem man aus den Punkten $a_1 \ldots a_k$ die übrigen Punkte (a) auf diesen gemeinsamen Raum projicirt. Dies ergibt sich, wenn man in der symmetrischen Function der x_i die $x_1, \ldots, x_k$ gleich Null setzt; dann bleibt eine symmetrische Function der übrigen x, welche wieder eine Covariantenfläche des $(n-k)$-Ecks ist, weil auch die Summe der übrigen x verschwindet.

Aus einer Seitenebene des n-Ecks (p), welche $n-2$ dieser Punkte verbindet, schneidet eine Covariantenfläche ebenfalls eine Covariante des $(n-1)$-Ecks aus, welches aus den $n-2$ Punkten besteht und aus dem Punkte, welcher auf der Verbindungslinie der übrigen beiden Punkte von (p) liegt.

Auch der Potenzkegel K_i von p_i schneidet aus der Gegenebene seines Scheitels eine covariante Fläche des $(n-1)$-Ecks $[p]_i'$ aus; denn wäre $[P]_i'$ ein $(n-1)$-Flach, dessen Ebenen die Ebene P_i in denselben Räumen schneiden, wie die Ebenen $[P]_i'$, so kann man eine centrale Collineation des R_{n-2} construiren, in welcher der Ebene P_k die Ebene P_k' entspricht und in welcher die Ebene P_i Collineationsebene ist. Dann entspricht auch dem Gegeneck (p) von (P) das Gegeneck (p') von (P') und der Covariantenfläche F von (p) die Covariantenfläche F' von (p'); daher auch der Potenzkegel K_i dem Potenzkegel K_i' von p_i'. Diese Potenzkegel müssen sich demnach auf P_i schneiden und dieser Schnitt muss eine covariante Fläche von $[p]_i'$ sein, da er, wie gezeigt wurde, unabhängig von (P) ist und nur durch $[P]_i'$ bestimmt erscheint.

Ebenso sieht man, dass der Kegel K_i den Raum R_{n-2-k} in einer Covariantenfläche des $(n-k)$-Ecks $[a]^{(k)}$ schneidet.

Jeder Invariante von f entspricht eine Fläche, welche auf folgende Weise erzeugt werden kann. Man bestimme alle Curven $\mathfrak{C}$, auf welchen die Punkte (p) eine binäre Form bilden, für welche immer dieselbe Invariante verschwindet; dann erfüllen diese Curven eine Fläche, welche die „Invariantenfläche der Invariante“ heissen möge. Auch diese Fläche ist covariant zu dem n-Eck (p); daher ist ihr Gleichungspolynom eine symmetrische Function der x. Umgekehrt ist jede covariante Fläche von (p), welche durch Curven $\mathfrak{C}$ erzeugt werden kann, eine Invariantenfläche der binären Form.

3. Covarianten und symmetrische Functionen. Wenn eine ganze rationale Function mehrerer Flächenpolynome identisch verschwindet, so wird auch zwischen den Punktsystemen, welche die Flächen auf einer rationalen Curve ausschneiden, eine entsprechende Relation bestehen. Wenn demnach eine Relation zwischen Invarianten- und Covariantenflächen vorliegt, d. h. also eine Relation zwischen den ihnen entsprechenden symmetrischen Functionen, so werden diese Flächen auf einer Curve $\mathfrak{C}$ Covarianten ausschneiden, zwischen welchen eine Relation besteht. Diese Relation wird sich von der, welche zwischen den Covariantenflächen besteht, dadurch unterscheiden, dass in sie noch f eintreten kann.

Ist C eine beliebige Covariante und sind $c_1, c_2 \dots c_n$ (wobei $c_1 = 0$) die elementaren symmetrischen Functionen der x, so lässt sich die symmetrische Function, welche zu C gehört, ganz und rational durch die $c_2 \dots c_n$ ausdrücken. Daher ist die Schnittgruppe S der Fläche C mit der Curve $\mathfrak{C}$ ganz und rational ausdrückbar durch die Schnittgruppen mit den Covariantenflächen $c_2 \quad c_n$. Die Schnittgruppe S besteht aber aus der Covariante C und der Gruppe (p), diese letztere so oftmal genommen, als die Potenz $\mathfrak{p}$ der Covariante beträgt; daher besteht die Gleichung:

$$f^{\mathfrak{p}} \quad C = G(c_2 \dots c_n).$$

Es sind daher die Covarianten, welche die elementaren symmetrischen Functionen liefern, ein System von associirten Formen oder Schwesterformen der gegebenen Form f; im nächsten Artikel wird sich ergeben, dass sie mit den Hermite'schen Schwesterformen identisch sind.

Auch jedes andere System von $n-1$ Covarianten, durch deren zugehörige symmetrische Functionen sich alle anderen symmetrischen Functionen ganz und rational ausdrücken lassen, wird ein System von Schwesterformen bilden, so z. B. die Covarianten, welchen die Potenzsummen $s_2 \dots s_n$ zugehören. Da diese Potenzsummenflächen wieder nicht durch die Punkte (p) gehen, werden wir wieder die Gleichung haben:

$$f^{\mathfrak{p}} . C = \Gamma(s_2 \quad s_n).$$

Es können aber auch $n-1$ Covarianten, zu welchen symmetrische Functionen (durch welche sich die anderen symmetrischen Functionen rational und ganz ausdrücken lassen) gehören, und die eine gewisse Potenz in den Punkten (p) haben, als Schwesterformen auftreten; dann wird aber in den Ausdrücken der Covarianten durch diese Schwesterformen auch noch f eintreten, wie dies bei den Schwesterformen von Clebsch der Fall ist.

Um aus der Gleichung einer Covariantenfläche von (P), der annullirten symmetrischen Function der x, die zugehörige Covariante zu erhalten, hat man in dem Gleichungspolynom die Substitution 1) zu machen und erhält den Satz:

Jede Covariante von f ist mit einer Potenz von f multiplicirt eine symmetrische Function der n Grössen:

$$\frac{n}{\alpha-\alpha_i}-\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{1}{\alpha-\alpha_\varkappa}.$$

Man kann daher sagen: Die n Formen $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche erste Polaren der Punkte von f bezüglich der $n-1$ übrigen Punkte von f sind (zwischen welchen n Formen eine lineare Relation besteht), bilden ein symmetrisches System irrationaler Schwesterformen von f.

Symmetrische Functionen der letzten Ausdrücke sind aber symmetrische Functionen der Quotienten $\dfrac{1}{\alpha-\alpha_i}$, aus welchen man die elementaren symmetrischen Functionen bilden kann, durch welche sich dann alle anderen symmetrischen Functionen ganz und rational ausdrücken lassen. Diese elementaren Functionen sind aber die Ableitungen von f nach α, multiplicirt mit Potenzen von f; daher ergibt sich die bekannte Darstellung durch die einseitigen Derivirten der Form.[1] Die Bedingung der Symmetrie in den Ausdrücken 1) ersetzt demnach die Differentialgleichung, welcher die Covariante als Function der Derivirten genügen muss.

Da die Ausdrücke 1) auch geschrieben werden können:

$$x=\sum\frac{\alpha_i-\alpha_\varkappa}{\alpha-\alpha_i\,.\,\alpha-\alpha_\varkappa},$$

[1] Siehe D. Hilbert, Über eine Darstellungsweise der inv. Gebilde im binären Gebiete, Math. Ann., Bd. 30, S. 15.

so ist auch jede Covariante, multiplicirt mit Potenzen von f eine symmetrische Function dieser letzten Ausdrücke. Um das Leitglied dieser Covariante zu erhalten, hat man in diesen Ausdrücken $\alpha = \infty$ zu setzen, und es ergibt sich: Das Leitglied einer jeden Covariante ist eine symmetrische Function der Ausdrücke;

$$n\alpha_i - \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_\varkappa$$

oder, wenn $\bar{a}_1$ der Coëfficient der binären Form ist: der Ausdrücke $n(\alpha_i + \bar{a}_1)$; daher: Das Leitglied einer jeden Covariante ist eine symmetrische Function der Ausdrücke $\bar{a}_1 + \alpha_i$, und umgekehrt ist jede solche Function das Leitglied einer Covariante von f. Ist $\bar{a}_1 = 0$, was durch lineare Transformation immer erreicht werden kann, so ist dann jede symmetrische Function der α_i eine Covariantenfläche von f und umgekehrt.

Man erhält die symmetrische Function, welche die Gleichung der Covariantenfläche einer vorgelegten Covariante gibt, indem man in dem Leitgliede der Covariante $\bar{a}_0 = 1$ und $\bar{a}_1 = 0$ setzt; dann ergibt sich eine symmetrische Function der α_i und aus dieser die gesuchte Function, indem man $\alpha_i = x_i$ setzt. Umgekehrt erhält man aus der symmetrischen Function der x_i das Leitglied der Covariante, indem man für x_i substituirt: $\alpha_i + \bar{a}_1$ oder, wenn man homogen werden will, indem man dafür setzt: $a_0 + \alpha_i \bar{a}_1$.

Da eine jede Invariante eine symmetrische Function der Wurzeldifferenzen ist, so erhält man daher die Gleichung der Invariantenfläche, indem man für die Wurzeln α_i setzt: x_i. Z. B.: Die Discriminantenfläche (die Invariantenfläche der Discriminante) ist das Quadrat der Wurzeldifferenzen; da aber $x_i - x_\varkappa = 0$ eine Seitenfläche des n-Ecks (p) darstellt, so besteht die Discriminantenfläche aus dem Quadrate des $\frac{1}{2} n(n-1)$-Flachs der Seitenebenen von (p). Die Discriminantenfläche muss aus allen zerfallenden Curven $\mathfrak{C}$, welche (p) enthalten, bestehen, da auf jeder nicht zerfallenden Curve $\mathfrak{C}$ die Punkte (p) von einander getrennt sind.

Es können aber auch $n-1$ Covarianten, zu welchen symmetrische Functionen (durch welche sich die anderen symmetrischen Functionen rational und ganz ausdrücken lassen) gehören, und die eine gewisse Potenz in den Punkten (p) haben, als Schwesterformen auftreten; dann wird aber in den Ausdrücken der Covarianten durch diese Schwesterformen auch noch f eintreten, wie dies bei den Schwesterformen von Clebsch der Fall ist.

Um aus der Gleichung einer Covariantenfläche von (P), der annullirten symmetrischen Function der x, die zugehörige Covariante zu erhalten, hat man in dem Gleichungspolynom die Substitution 1) zu machen und erhält den Satz:

Jede Covariante von f ist mit einer Potenz von f multiplicirt eine symmetrische Function der n Grössen:

$$\frac{n}{\alpha-\alpha_i}-\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{1}{\alpha-\alpha_\varkappa}.$$

Man kann daher sagen: Die n Formen $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche erste Polaren der Punkte von f bezüglich der $n-1$ übrigen Punkte von f sind (zwischen welchen n Formen eine lineare Relation besteht), bilden ein symmetrisches System irrationaler Schwesterformen von f.

Symmetrische Functionen der letzten Ausdrücke sind aber symmetrische Functionen der Quotienten $\dfrac{1}{\alpha-\alpha_i}$, aus welchen man die elementaren symmetrischen Functionen bilden kann, durch welche sich dann alle anderen symmetrischen Functionen ganz und rational ausdrücken lassen. Diese elementaren Functionen sind aber die Ableitungen von f nach α, multiplicirt mit Potenzen von f; daher ergibt sich die bekannte Darstellung durch die einseitigen Derivirten der Form.[1] Die Bedingung der Symmetrie in den Ausdrücken 1) ersetzt demnach die Differentialgleichung, welcher die Covariante als Function der Derivirten genügen muss.

Da die Ausdrücke 1) auch geschrieben werden können:

$$x=\sum\frac{\alpha_i-\alpha_\varkappa}{\alpha-\alpha_i\,.\,\alpha-\alpha_\varkappa},$$

[1] Siehe D. Hilbert, Über eine Darstellungsweise der inv. Gebilde im binären Gebiete, Math. Ann., Bd. 30, S. 15.

so ist auch jede Covariante, multiplicirt mit Potenzen von f eine symmetrische Function dieser letzten Ausdrücke. Um das Leitglied dieser Covariante zu erhalten, hat man in diesen Ausdrücken $\alpha = \infty$ zu setzen, und es ergibt sich: Das Leitglied einer jeden Covariante ist eine symmetrische Function der Ausdrücke;

$$n\alpha_i - \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_\varkappa$$

oder, wenn $\bar{a}_1$ der Coëfficient der binären Form ist: der Ausdrücke $n(\alpha_i + \bar{a}_1)$; daher: Das Leitglied einer jeden Covariante ist eine symmetrische Function der Ausdrücke $\bar{a}_1 + \alpha_i$, und umgekehrt ist jede solche Function das Leitglied einer Covariante von f. Ist $\bar{a}_1 = 0$, was durch lineare Transformation immer erreicht werden kann, so ist dann jede symmetrische Function der α_i eine Covariantenfläche von f und umgekehrt.

Man erhält die symmetrische Function, welche die Gleichung der Covariantenfläche einer vorgelegten Covariante gibt, indem man in dem Leitgliede der Covariante $\bar{a}_0 = 1$ und $\bar{a}_1 = 0$ setzt; dann ergibt sich eine symmetrische Function der α_i und aus dieser die gesuchte Function, indem man $\alpha_i = x_i$ setzt. Umgekehrt erhält man aus der symmetrischen Function der x_i das Leitglied der Covariante, indem man für x_i substituirt: $\alpha_i + \bar{a}_1$ oder, wenn man homogen werden will, indem man dafür setzt: $a_0 + \alpha_i \bar{a}_1$.

Da eine jede Invariante eine symmetrische Function der Wurzeldifferenzen ist, so erhält man daher die Gleichung der Invariantenfläche, indem man für die Wurzeln α_i setzt: x_i. Z. B.: Die Discriminantenfläche (die Invariantenfläche der Discriminante) ist das Quadrat der Wurzeldifferenzen; da aber $x_i - x_\varkappa = 0$ eine Seitenfläche des n-Ecks (p) darstellt, so besteht die Discriminantenfläche aus dem Quadrate des $\frac{1}{2}n(n-1)$-Flachs der Seitenebenen von (p). Die Discriminantenfläche muss aus allen zerfallenden Curven $\mathfrak{C}$, welche (p) enthalten, bestehen, da auf jeder nicht zerfallenden Curve $\mathfrak{C}$ die Punkte (p) von einander getrennt sind.

4. Schwesterformen. Setzt man nach dem letzten Satze des vorigen Artikels in dem Leitgliede der Covariante, welcher die elementare symmetrische Function c_i entspricht, $\bar{a}_0 = 1, \bar{a}_1 = 0$, so wird man dieselbe symmetrische Function der α_i erhalten, also den Coëfficienten $\bar{a}_i$. Nun ergeben sich die Hermite'schen Schwesterformen[1] C_r, indem man aus

$$f_1\beta_1 + f_2\beta_2 \qquad \text{und} \qquad a_\beta^r a_\alpha^{n-r},$$

die α eliminirt; dann ist:

$$f.C_r = (af)^r a_\alpha^{n-r}$$

Um das Leitglied dieser Covariante C_r für $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$ zu erhalten, setzen wir zunächst in a_α^{n-r} ein: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ und erhalten:

$$a_1^{n-r}\,\Sigma\,(-1)^\varkappa \binom{r}{\varkappa} a_1^{n-\varkappa} f_2^{r-\varkappa} a_2^\varkappa f_1^\varkappa;$$

da ferner für $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$ sich ergibt: $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, so übergeht der letzte Ausdruck in $a_1^{n-r} a_2^r = \bar{a}_r$.

Das Leitglied der Covariante C_r ist demnach $\bar{a}_r$ für $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$. Daher sind die Covariantenflächen, welche diesen Covarianten zugehören, dargestellt durch die elementaren symmetrischen Functionen der x; sie sind:

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = 0.$$

Die Covariante C_2 ist mit der Hesse'schen Covariante identisch; daher ist $\Sigma x_1 x_2 = 0$ oder, da $\Sigma x_\varkappa = 0$ ist, auch $\Sigma x_\varkappa^2 = 0$ die Gleichung der Covariantenfläche der Hesse'schen Covariante, wir erhalten demnach wieder den Satz: Die Hesse'sche Covariante der Gruppe (p) wird aus $\mathfrak{C}$ von der Hauptfläche von (p) ausgeschnitten.

Wenn nun eine beliebige Covariante vorliegt, so erhält man nach dem letzten Satze des vorigen Artikels die zugehörige symmetrische Function, indem man im Leitgliede $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$ setzt. Diese symmetrische Function hat nun in den α_i einen Grad, welcher gleich dem Gewichte i des Leitgliedes ist; daher ist i die Ordnung der zugehörigen Covariantenfläche:

---

[1] Siehe z. B. Gordan's Vorlesungen, herausgeg. von Kerschensteiner, II, S. 356.

Die Ordnung der Covariantenfläche einer Covariante ist gleich dem Gewichte i ihres Leitgliedes.

Der Schnitt S der Covariantenfläche mit C besteht nun nach Obigem aus dem $\mathfrak{p}$-mal gezählten Schnitte f und aus der Covariante C, deren Ordnung ν und deren Grad g sein möge. Da die Ordnung der Covariantenfläche gleich i ist, folgt daher

$$(n-2)\,i = n.\mathfrak{p}+\nu;$$

nun ist ferner $2i = n.g-\nu$, so dass sich ergibt: $i = \mathfrak{p}+g$ oder:

Die Potenz einer Covariante ist gleich dem Gewichte weniger dem Grade derselben.

Die Ordnung der Invariantenfläche einer Invariante vom Grade g ist: $\frac{1}{2}ng$, ihre Potenz: $\frac{1}{2}(n-2)g$.

Die Hermite'schen Schwesterformen haben alle die Potenz 0, ihr Gewicht ist gleich ihrem Grade. Bei den Schwesterformen von Clebsch:

$$\sigma_\varkappa = (f, f)^{2\varkappa}, \quad \tau_\varkappa = ((f, f)^{2\varkappa}, f)$$

haben die $\sigma_\varkappa$, $\tau_\varkappa$ die Potenz $2(\varkappa-1)$.

Die Covarianten σ_1, τ_1 sind respective identisch mit den Covarianten C_2 und C_3; daher hat die Covariantenfläche der Functionaldeterminante zwischen der Hesse'schen und der Grundform die Gleichung $\Sigma x_i^3 = 0$. Speciell:

Die Diagonalfläche des Pentaëders (P) schneidet aus $\mathfrak{C}_3$ die Form (H, f) der Gruppe (p) aus.

5. Beispiele. Die Invarianten- und Covariantencurven einer Form 4ter Ordnung sind die Combinanten des Kegelschnittbüschels, welches die 4 Punkte (p) zu Basispunkten hat. Das System dieser Combinanten besteht demnach aus den 3 Curven, welche den elementaren symmetrischen Functionen der x_i entsprechen, nämlich dem Hauptkegelschnitte, dem Diagonaldreiseit und dem Gegenvierseit (P) von (p).

Die Invariantencurven zerfallen in Kegelschnitte des Büschels, und zwar die g_2 entsprechende Curve in 2 Kegelschnitte E, die g_3 entsprechende Curve in 3 Kegelschnitte H. Die Seite A_i wird von den drei übrigen Seiten (P) in 3 Punkten (r) geschnitten. Nach Artikel 1 müssen die Kegelschnitte E eine

Covariante der Gruppe (r) aus P_i ausschneiden; da aber eine Covariante 4ten Grades von (r) das Quadrat der Hesse'schen Covariante sein muss, so berühren die Kegelschnitte E die Gerade A_i in den Punkten dieser Covariante. Die Kegelschnitte H schneiden eine Covariante 6ter Ordnung der Gruppe (r) aus; werden die Punkte (r) als Ecken eines gleichseitigen Dreiecks auf einem Kreise gedacht, so sind die Punkte dieser Covariante die übrigen Ecken des regulären Neunecks, zu welchem dieses Dreieck gehört.

Um auch ein Beispiel für eine Invariantenfläche der Form 5ter Ordnung zu geben, suchen wir diese Fläche für die Hermite'sche Invariante 18ten Grades J_{18}. Die Ordnung dieser Fläche ist 45.

Die Ebene P_i werde von den anderen Seitenebenen des Pentaeders (P) in den Seiten eines Vierseits V geschnitten, dessen Diagonaldreiseit die Seiten δ_e^i mit den gegenüber liegenden Eckpunkten d_e^i $(i = 1, \ldots, 5;\ e = 1, 2, 3)$ habe. Es sei ferner $[p]_i$ das Tetraëder, welches alle Punkte (p) ausser den Gegenpunkt p_i von P_i enthält. Dann ist die erste Polarfläche F_e^i des Poles d_e^i bezüglich des Tetraëders $[p]_i$ eine Fläche dritter Ordnung, welche Theil der Invariantenfläche von J_{18} ist. Denn die 15 Flächen F_e^i, welche von $\mathfrak{C}_3$ beschrieben werden können, geben eine Invariantenfläche von der Ordnung 45; diese Fläche gehört daher zu einer Invariante 18ten Grades, also zu der einzigen J_{18}.

Die Fläche F_e^i hat die Punkte $[p]_i$ zu Doppelpunkten und berührt im Punkte p_l die Ebene, welche δ_e^i enthält, so dass die 3 Ebenen $p_i \delta_e^i$ dem Potenzkegel des Punktes p_i angehören; in dieser Tangentialebene liegen ausser δ_e^i noch zwei Gerade der F_e^i, nämlich die Tangenten, welche von p_i an die Hauptfläche des Pentaëders (P) gezogen werden können. Die Fläche F_e^i schneidet die Ebene P_i in der Geraden δ_e^i und in einem Kegelschnitte K_e^i; die 3 Kegelschnitte K_e^1, K_e^2, K_e^3 gehören zu dem Systeme harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte des Vierseits V.

Da F_e^i die Geraden δ_e^i enthält und von $\mathfrak{C}_3$ beschrieben wird, kann man auch sagen: Die Invariantenfläche von J_{18} ist der Ort der $\mathfrak{C}_3$, welche die Diagonalfläche des Pentaëders (P) in einem Punkte der 15 Geraden schneiden, welche diese Fläche in den Pentaëderebenen besitzt.

Der Punkt d_1^1 hat als Eckpunkt des Diagonaldreiecks des Vierseits, welches die Ebenen $x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$ aus der Ebene $x_1 = 0$ ausschneiden, die Coordinaten:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = -1;$$

die Seitenflächen des Tetraëders $[p]_1$ haben die Gleichungen:

$$x_1 - x_2, \quad x_1 - x_3, \quad x_1 - x_4, \quad x_1 - x_5 = 0.$$

Daher ist die Gleichung der Polarfläche des Punktes d_1^1 bezüglich dieses Tetraëders:

$$0 = x_1 - x_2 \,.\, x_1 - x_3 \,.\, x_1 - x_4 \,.\, x_1 - x_5 \,.$$

$$\cdot \left(\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_3} - \frac{1}{x_1 - x_4} - \frac{1}{x_1 - x_5}\right) =$$

$$= x_1 - x_3 \,.\, x_1 - x_5 \,.\, x_2 - x_4 + x_1 - x_2 \,.\, x_1 - x_4 \,.\, x_3 - x_5;$$

der letzte Ausdruck ist in der That einer der Factoren 3ten Grades, in welche Hermite die Invariante J_{18} zerlegt hat.