

Zur Theorie der Näherungsbrüche

VON

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1891.)

Ich werde in den folgenden Zeilen eine Reihe von Relationen und Theoremen aus der Theorie der Näherungsbrüche von Kettenbruchentwicklungen ableiten und hiebei gelegentlich einige aus einer der auftretenden Formeln sich ergebende Beziehungen aus dem Gebiete der Congruenzen mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul angeben. Sodann werde ich mit Hilfe der aufgestellten Gleichungen mehrere Sätze über Interpolationsformeln und mechanische Quadraturen erschliessen und im Anschlusse an dieselben einige Bemerkungen über die wichtige und interessante Methode machen, welche Herr F. Neumann¹ zur interpolatorischen Darstellung einer Function des Ortes an der Erdoberfläche ermittelt hat, deren praktische Verwendbarkeit durch die vor wenigen Monaten von Herrn H. Seeliger² in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der

¹ „Über eine neue Eigenschaft der Laplace'schen Ypsilons und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind.“ Astronomische Nachrichten von Schumacher, 15. Bd., S. 313 ff. Dieser bemerkenswerthe Aufsatz wurde von Neuem abgedruckt im 14. Bande der „Mathematischen Annalen von F. Klein“. Eine sehr eingehende Darstellung der F. Neumann'schen Methode findet sich auch im 7. Capitel der von F. Neumann an der Universität zu Königsberg gehaltenen „Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen“, welche von Herrn C. Neumann im Jahre 1887 herausgegeben wurden.

„Über die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe.“ A. a. O., 20. Bd., S. 499—511.

k. b. Akademie der Wissenschaften zu München veröffentlichten vorzüglichen Hilfstafeln wesentlich erhöht wurde. Zum Schlusse endlich werden mehrere neue Sätze aus der Theorie der Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nebst einigen arithmetischen Identitäten bewiesen.

§. 1. Differentiirt man die ganze Function n ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad 1)$$

deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ sämmtlich verschieden sein sollen, nach x_λ , so erhält man, wenn die Ableitung der elementaren symmetrischen Function h ter Dimension dieser Wurzeln, d. i. also die elementare symmetrische Function $(h-1)$ ter Dimension der Grössen $x_1, x_2, \dots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \dots, x_n$ mit $(-1)^h a_{n-h, \lambda}$ bezeichnet wird, die Relationen

$$-a_{n-h, \lambda} = x_\lambda^{h-1} + \frac{a_{n-1}}{a_n} x_\lambda^{h-2} + \dots + \frac{a_{n-h+1}}{a_n}$$

$$a_{n-h, \lambda} = \frac{a_{n-h}}{a_n} x_\lambda^{-1} + \frac{a_{n-h-1}}{a_n} x_\lambda^{-2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} x_\lambda^{h-n-1}.$$

Da nun nach den Enler'schen Formeln für jede ganze Function

$$g_\mu(x) = g_\mu x^\mu + g_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + g_1 x + g_0$$

von nicht höherem als dem Grade $n-1$ die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{g_\mu(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)} = \frac{g_{n-1}}{a_n}$$

besteht, so ergeben sich nach den eben angeführten Beziehungen die Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h, \lambda} x_\lambda^{n-\lambda}}{f'(x_\lambda)} = \frac{-\delta_{n+h-k-1, n-1}}{a_n}$$

$$(k \geq h; \delta_{r, r} = 1, \delta_{r, s} = 0, r \geq s; n \geq \lambda > 0)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_{\lambda}^{n-x}}{f'(x_{\lambda})} = 0, \quad (h > x > 0; n \geq h > 0)$$

welche sich in die bekannte Kronecker'sche Verallgemeinerung¹ der Euler'schen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_{\lambda}^{n-x}}{f'(x_{\lambda})} = \frac{-\delta_{h,k}}{a_n} \quad (n \geq h, k > 0)$$

zusammenfassen lassen. Aus derselben folgt sofort die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} g_{\mu}(x_{\lambda})}{f'(x_{\lambda})} = \frac{-g_{n-h}}{a_n}, \quad (0 \leq \mu \leq n-1; h > 0) \quad 2)$$

da offenbar für $h > n$ beide Seiten der Gleichung den Werth 0 erhalten.

Man kann nun leicht folgende Erweiterung dieser Formel beweisen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} g_{n+v-1}(x_{\lambda})}{f'(x_{\lambda})} = \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{v+1} \begin{vmatrix} g_{n+v} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{n+v-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 \\ g_n & a_{n+1-v} & a_{n+2-v} & a_{n+3-v} & a_{n-1} & a_n \\ g_{n-h} & a_{n-v+1-h} & a_{n+2-v-h} & a_{n+3-v-h} & a_{n-h-1} & a_{n-h} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (n \geq v > -n; 3) \\ h > 0 \end{matrix}$$

¹ „Über die symmetrischen Functionen.“ Monatsber. d. k. preussischen Akad. d. Wissensch. in Berlin, 1880, S. 936–948.

k. b. Akademie der Wissenschaften zu München veröffentlichten vorzüglichen Hilfstafeln wesentlich erhöht wurde. Zum Schlusse endlich werden mehrere neue Sätze aus der Theorie der Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nebst einigen arithmetischen Identitäten bewiesen.

§. 1. Differentiirt man die ganze Function n ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad 1)$$

deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ sämmtlich verschieden sein sollen, nach x_λ , so erhält man, wenn die Ableitung der elementaren symmetrischen Function h ter Dimension dieser Wurzeln, d. i. also die elementare symmetrische Function $(h-1)$ ter Dimension der Grössen $x_1, x_2, \dots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \dots, x_n$ mit $(-1)^h a_{n-h, \lambda}$ bezeichnet wird, die Relationen

$$-a_{n-h, \lambda} = x_\lambda^{h-1} + \frac{a_{n-1}}{a_n} x_\lambda^{h-2} + \dots + \frac{a_{n-h+1}}{a_n}$$

$$a_{n-h, \lambda} = \frac{a_{n-h}}{a_n} x_\lambda^{-1} + \frac{a_{n-h-1}}{a_n} x_\lambda^{-2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} x_\lambda^{h-n-1}.$$

Da nun nach den Euler'schen Formeln für jede ganze Function

$$g_\mu(x) = g_\mu x^\mu + g_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + g_1 x + g_0$$

von nicht höherem als dem Grade $n-1$ die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{g_\mu(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)} = \frac{g_{n-1}}{a_n}$$

besteht, so ergeben sich nach den eben angeführten Beziehungen die Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h, \lambda} x_\lambda^{n-z}}{f'(x_\lambda)} = \frac{-\delta_{n+h-k-1, n-1}}{a_n}$$

$$(k \geq h; \delta_{r, r} = 1, \delta_{r, s} = 0, r \geq s; n \geq z > 0)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_{\lambda}^{n-x}}{f'(x_{\lambda})} = 0, \quad (h > x > 0; n \geq h > 0)$$

welche sich in die bekannte Kronecker'sche Verallgemeinerung¹ der Euler'schen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_{\lambda}^{n-x}}{f'(x_{\lambda})} = \frac{-\delta_{h,k}}{a_n} \quad (n \geq h, k > 0)$$

zusammenfassen lassen. Aus derselben folgt sofort die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} g_{\mu}(x_{\lambda})}{f'(x_{\lambda})} = \frac{-g_{n-h}}{a_n}, \quad (0 \leq \mu \leq n-1; h > 0) \quad 2)$$

da offenbar für $h > n$ beide Seiten der Gleichung den Werth 0 erhalten.

Man kann nun leicht folgende Erweiterung dieser Formel beweisen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} g_{n+v-1}(x_{\lambda})}{f'(x_{\lambda})} = \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{v+1} \begin{vmatrix} g_{n+v} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{n+v-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 \\ g_n & a_{n+1-v} & a_{n+2-v} & a_{n+3-v} & a_{n-1} & a_n \\ g_{n-h} & a_{n-v+1-h} & a_{n+2-v-h} & a_{n+3-v-h} & a_{n-h-1} & a_{n-h} \end{vmatrix} \quad (n \geq v > -n; \ 3) \\ h > 0)$$

¹ „Über die symmetrischen Functionen.“ Monatsber. d. k. preussischen Akad. d. Wissensch. in Berlin, 1880, S. 936–948.

Nachdem dieselbe für nicht positive ganzzahlige Werthe von ν mit 2) zusammenfällt, kann man beim Beweise voraussetzen, dass ν eine positive ganze Zahl ist. Gilt diese Relation nun für alle ganzen Functionen von nicht höherem als dem Grade $n+1-\nu$, so hat man für eine ganze Function $g_{n+\nu}(x)$ vom Grade $n+\nu$ die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h, \lambda} g_{n+\nu}(x_{\lambda})}{f'(x_{\lambda})} = g_{n+\nu} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h, \lambda} x_{\lambda}^{n+\nu}}{f'(x_{\lambda})} + \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{\nu+1} \begin{vmatrix} g_{n+\nu-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ g_{n+\nu-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0 \\ g_n, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & a_{n+3-\nu}, & a_{n-1}, & a_n \\ g_{n-h}, & a_{n+1-\nu-h}, & a_{n+2-\nu-h}, & a_{n+3-\nu-h}, & \dots, & a_{n-h-1}, a_{n-h} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Nach 1) ist nun für jedes ν

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h, \lambda} x_{\lambda}^{n+\nu}}{f'(x_{\lambda})} = \frac{-1}{a_n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h, \lambda} \{a_{n-1} x_{\lambda}^{n+\nu-1} + a_{n-2} x_{\lambda}^{n+\nu-2} + \dots + a_1 x_{\lambda}^{\nu+1} + a_0 x_{\lambda}^{\nu}\}}{f'(x_{\lambda})}$$

und demnach besteht nach 3) die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h, \lambda} x_{\lambda}^{n+\nu}}{f'(x_{\lambda})} = \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{\nu+2} \begin{vmatrix} a_{n-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0 \\ a_{n-\nu}, & a_{n-\nu+1}, & a_{n-\nu+2}, & a_{n-\nu+3}, & a_{n-1}, & a_n \\ a_{n-\nu-h}, & a_{n-\nu+1-h}, & a_{n-\nu+2-h}, & a_{n-\nu+3-h}, & a_{n-1-h}, & a_{n-h} \end{vmatrix},$$

deren Verbindung mit 4) sofort erkennen lässt, dass die Relation 3) noch für ganze Functionen vom Grade $n+\nu$ ($\nu < n$) bestehen bleibt, wenn sie für alle ganzen Functionen von nicht höherem als dem Grade $n+\nu-1$ gilt. Aus der erwiesenen Existenz der Gleichung 2) folgt demnach unmittelbar das Bestehen der Gleichung 3) für alle im angegebenen Intervalle befindlichen ganzzahligen Werthe von ν und alle positiven ganzzahligen Werthe von h . Dieselbe ist eine Erweiterung der zuerst von Herrn F. Brioschi¹ und später von mir² bewiesenen Formel

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{g_{n+\nu-1}(x_{\lambda})}{f'(x_{\lambda})} = \frac{(-1)^{\nu}}{a_n^{\nu+1}} \begin{vmatrix} g_{n+\nu-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ g_{n+\nu-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0 \\ g_n, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & a_{n+3-\nu}, & a_{n-1}, & a_n \\ g_{n-1}, & a_{n-\nu}, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & \dots, & a_{n-1}, a_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Aus der Gleichung 3) ergibt sich sofort folgendes Theorem aus der Theorie der Congruenzen:

Hat die Congruenz n ten Grades in Bezug auf den Primzahlmodul p

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p} \quad (p > n)$$

genau n unter einander verschiedenen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, so ist für jede ganze ganzzahlige Function

$$\varphi(x) = g_{n-1+\nu} x^{n-1+\nu} + g_{n-2+\nu} x^{n-2+\nu} + \dots + g_1 x + g_0 \quad (n \geq \nu > -n)$$

„Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles.“ Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 50. Band, S. 239—242.

„Über Congruenzen.“ Diese Sitzungsberichte, 95. Band, II. Abtheilung, S. 610—617.

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} \varphi(\xi_\lambda)}{f'(\xi_\lambda)} \equiv \left(\frac{-1}{a_n} \right)^{v+1} \begin{vmatrix} g_{n+v-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ g_{n+v-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & 0, & 0 \\ g_n, & a_{n+1-v}, & a_{n+2-v}, & a_{n+3-v}, & a_{n-1}, & a_n \\ g_{n-h}, & a_{n+1-v-h}, & a_{n+2-v-h}, & a_{n+3-v-h}, & a_{n-1-h}, & a_{n-h} \end{vmatrix} \pmod{p}, \quad (h > 0)$$

wo $(-1)^h a_{n-h,\lambda}$ die elementare symmetrische Function $(h-1)$ ter Dimension der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\lambda-1}, \xi_{\lambda+1}, \dots, \xi_n$ ist.

Setzt man speciell

$$f(x) = x^{p-1} - 1,$$

so wird $\xi_\lambda = \lambda$, und demnach bestehen für jede ganze ganzzahlige Function

$$g_{2p-3}(x) = g_{2p-3} x^{2p-3} + g_{2p-2} x^{2p-2} + \dots + g_1 x + g_0$$

von nicht höherem als dem Grade $2p-3$ die Congruenzen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} \frac{(\lambda)_{h-1} g_{2p-3}(\lambda)}{\lambda^{p-2}} \equiv (-1)^h g_{p-h-1} \pmod{p} \quad (2p-2 > \mu+h \text{ oder } \mu+h > 2p-2 > \mu; h > 0)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} \frac{(\lambda)_{h-1} g_{2p-3}(\lambda)}{\lambda^{p-2}} \equiv (-1)^h \{g_{p-h-1} + g_{2p-h-2}\} \pmod{p}, \quad (2p-2 = \mu+h; h > 0)$$

wo $(\lambda)_{h-1}$ die elementare symmetrische Function $(h-1)$ ter Dimension der ganzen Zahlen $1, 2, \dots, \lambda-1, \lambda+1, \dots, p-1$ und μ der Grad von $g_{2p-3}(x)$ ist.

Aus dieser Congruenz folgt das Theorem:

Die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} (\lambda)_{h-1} \lambda^{\nu}, \quad (h > 0)$$

wo p eine Primzahl und $(\lambda)_{h-1}$ die elementare symmetrische Function $(h-1)$ ter Dimension der ganzen Zahlen $1, 2, \dots, \lambda-1, \lambda+1, \dots, p-1$ vorstellt, ist nach dem Modul p entweder -1 oder 0 congruent, je nachdem ν in Bezug auf den Modul $p-1$ der ganzen Zahl $1-h$ congruent ist oder nicht.

Dasselbe bildet eine neue interessante Verallgemeinerung des bekannten Lionnet'schen Satzes.

Definirt man die ganzen Zahlen A_q durch die Gleichung

$$A_{q,n}^{(h)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} (-1)^{\lambda} (\lambda)_{h-1} \binom{n-2}{n-1-\lambda} \lambda^q \quad (h > 0)$$

und beachtet, dass bekanntlich für jede Primzahl p die Congruenz

$$\binom{p-2}{p-1-\lambda} \equiv (-1)^{\lambda+1} \lambda \pmod{p}$$

besteht, so erkennt man auf Grund des eben abgeleiteten Satzes sofort, dass $\frac{A_{q,p}^{(h)}}{p}$ eine ganze Zahl vermehrt um $\frac{1}{p}$ oder eine ganze Zahl ist, je nachdem $q+h$ durch $p-1$ theilbar ist oder nicht.

Durch zweckmässige Verbindung der Zahlen $A_{q,n}^{(h)}$ lässt sich demnach eine Zahlengruppe herstellen, welche insoferne eine Verallgemeinerung der Bernoulli'schen Zahlen darstellt, als die Glieder derselben für $h=1$ Bernoulli'sche Zahlen werden und auch bei allgemeinem h das von Staudt und Clausen für die Bernoulli'schen Zahlen aufgestellte Theorem befolgen.

§. 2. Die Theilnenner, Näherungszähler, Näherungsnenner und Restfunctionen einer Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$, deren Theilzähler sämmtlich -1 sind, mögen mit $g_\lambda(x)$, $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$, $f_\lambda(x)$ bezeichnet werden; die Grade derselben (beziehungsweise bei der Restfunction der Grad des Anfangsgliedes) sind $n_\lambda - n_{\lambda-1}$, $n_\lambda - n_1$, n_λ , $-n_\lambda$. Da nun bekanntlich die einander gleichen Determinanten

$$\begin{vmatrix} \psi_\lambda(x) & \psi_x(x) \\ \varphi_\lambda(x) & \varphi_x(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_{\lambda+1}(x) & f_{x+1}(x) \\ \psi_\lambda(x) & \psi_x(x) \end{vmatrix}$$

ganze Functionen $g_\mu(x)$ vom Grade $n_\lambda - n_{x+1}$, beziehungsweise $n_x - n_{\lambda+1}$ sind, je nachdem $\lambda > x$ oder $x > \lambda$ ist, so hat man, wenn, wie im Folgenden stets vorausgesetzt wird, $\psi_x(x)$ nur ungleiche Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_{n_x}$ besitzt, so lange

$$n_\lambda < n_x + n_{x+1}$$

ist, nach 2) die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{x-1} \frac{a_{n_x-h, \lambda}^{(x)} \psi_\lambda(x_\nu) \varphi_x(x_\nu)}{\psi'_x(x_\nu)} = - \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{a_{n_x-h, \nu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\nu) f_{x+1}(x_\nu)}{\psi'_x(x_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{a_{n_x-h, \nu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\nu)}{\psi_{x-1}(x_\nu) \psi'_x(x_\nu)} = - \frac{g_{n_x-h}}{a_{n_x}^{(x)}}, \quad (h > 0) \quad 5)$$

wo $a_\nu^{(x)}$ der Coefficient von x^ν im Näherungsnenner $\psi_x(x)$ ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich auf Grund einer von mir früher angegebenen Darstellung der Coëfficienten der Restfunctionen, dass der Coëfficient von $x^{-(n_{\lambda+1}+a)}$ in der Entwicklung von $f_{\lambda+1}(x)$ nachsteigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ durch

$$\frac{(-1)^{a+1}}{(a_{n_x}^{(x)})^a} \left| \begin{array}{cccccc} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \varphi_x(x_{\mu})}{\psi'_x(x_{\mu})}, & a_{n_x}^{(x)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-1, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \varphi_x(x_{\mu})}{\psi'_x(x_{\mu})}, & a_{n_x-1}^{(x)}, & a_{n_x}^{(x)}, & 0, & 0, & 0 \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-a+1, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \varphi_x(x_{\mu})}{\psi'_x(x_{\mu})}, & a_{n_x-a+1}^{(x)}, & a_{n_x-a+2}^{(x)}, & a_{n_x-a+3}^{(x)}, & \dots, & a_{n_x-1}^{(x)}, & a_{n_x}^{(x)} \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-a, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \varphi_x(x_{\mu})}{\psi'_x(x_{\mu})}, & a_{n_x-a}^{(x)}, & a_{n_x-a+1}^{(x)}, & a_{n_x-a+2}^{(x)}, & \dots, & a_{n_x-2}^{(x)}, & a_{n_x-1}^{(x)} \end{array} \right| \quad (x > \lambda)$$

Durch zweckmässige Verbindung der Zahlen $A_{q,n}^{(h)}$ lässt sich demnach eine Zahlengruppe herstellen, welche insoferne eine Verallgemeinerung der Bernoulli'schen Zahlen darstellt, als die Glieder derselben für $h=1$ Bernoulli'sche Zahlen werden und auch bei allgemeinem h das von Staudt und Clausen für die Bernoulli'schen Zahlen aufgestellte Theorem befolgen.

§. 2. Die Theilnenner, Näherungszähler, Näherungsnenner und Restfunctionen einer Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$, deren Theilzähler sämmtlich -1 sind, mögen mit $g_\lambda(x)$, $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$, $f_\lambda(x)$ bezeichnet werden; die Grade derselben (beziehungsweise bei der Restfunction der Grad des Anfangsgliedes) sind $n_\lambda - n_{\lambda-1}$, $n_\lambda - n_1$, n_λ , $-n_\lambda$. Da nun bekanntlich die einander gleichen Determinanten

$$\begin{vmatrix} \psi_\lambda(x) & \psi_x(x) \\ \varphi_\lambda(x) & \varphi_x(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} f_{\lambda+1}(x) & f_{x+1}(x) \\ \psi_\lambda(x) & \psi_x(x) \end{vmatrix}$$

ganze Functionen $g_\mu(x)$ vom Grade $n_\lambda - n_{x+1}$, beziehungsweise $n_x - n_{\lambda+1}$ sind, je nachdem $\lambda > x$ oder $x > \lambda$ ist, so hat man, wenn, wie im Folgenden stets vorausgesetzt wird, $\psi_x(x)$ nur ungleiche Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_{n_x}$ besitzt, so lange

$$n_\lambda < n_x + n_{x+1}$$

ist, nach 2) die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_x} \frac{a_{n_x-h, \nu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\nu) \varphi_x(x_\nu)}{\psi'_x(x_\nu)} = - \sum_{\nu=1}^{\nu=n_x} \frac{a_{n_x-h, \nu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\nu) f_{x+1}(x_\nu)}{\psi'_x(x_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n_x} \frac{a_{n_x-h, \nu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\nu)}{\psi_{x-1}(x_\nu) \psi'_x(x_\nu)} = - \frac{g_{n_x-h}}{a_{n_x}^{(x)}}, \quad (h > 0) \quad 5)$$

wo $a_p^{(x)}$ der Coefficient von x^p im Näherungsnenner $\psi_x(x)$ ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich auf Grund einer von mir früher angegebenen Darstellung der Coëfficienten der Restfunctionen, dass der Coëfficient von $x^{-(n_{\lambda+1}+\alpha)}$ in der Entwicklung von $f_{\lambda+1}(x)$ nachsteigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ durch

$$\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(a_{n_x}^{(x)})^\alpha} \left| \begin{array}{cccccc} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu) \varphi_x(x_\mu)}{\psi'_x(x_\mu)}, & a_{n_x}^{(x)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-1, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu) \varphi_x(x_\mu)}{\psi'_x(x_\mu)}, & a_{n_x-1}^{(x)}, & a_{n_x}^{(x)}, & 0, & 0, & 0 \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-\alpha+1, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu) \varphi_x(x_\mu)}{\psi'_x(x_\mu)}, & a_{n_x-\alpha+1}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+2}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+3}^{(x)}, & \dots, & a_{n_x-1}^{(x)}, & a_{n_x}^{(x)} \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-\alpha, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu) \varphi_x(x_\mu)}{\psi'_x(x_\mu)}, & a_{n_x-\alpha}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+1}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+2}^{(x)}, & & a_{n_x-2}^{(x)}, & a_{n_x-1}^{(x)} \end{array} \right| \quad (x > \lambda)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{-1}{a_{n_x}^{(x)}} \right)^{\alpha+1} a_{n_\lambda}^{(\lambda)} \left[\begin{array}{cccccc}
\sum_{\nu=1}^{\nu=n_\lambda} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}+1, \nu}^{(\lambda)} \psi_x(x_\nu) \varphi_\lambda(x_\nu)}{\psi'_\lambda(x_\nu)}, & a_{n_x}^{(x)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
\sum_{\nu=1}^{\nu=n_\lambda} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-1, \nu}^{(\lambda)} \psi_x(x_\nu) \varphi_\lambda(x_\nu)}{\psi'_\lambda(x_\nu)}, & a_{n_x-1}^{(x)}, & a_{n_x}^{(x)}, & 0, & 0, & 0 \\
\sum_{\nu=1}^{\nu=n_\lambda} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-\alpha+1, \nu}^{(\lambda)} \psi_x(x_\nu) \varphi_\lambda(x_\nu)}{\psi'_\lambda(x_\nu)}, & a_{n_x-\alpha+1}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+2}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+3}^{(x)}, & a_{n_x-1}^{(x)}, & a_{n_x}^{(x)} \\
\sum_{\nu=1}^{\nu=n_\lambda} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-\alpha, \nu}^{(\lambda)} \psi_x(x_\nu) \varphi_\lambda(x_\nu)}{\psi'_\lambda(x_\nu)}, & a_{n_x-\alpha}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+1}^{(x)}, & a_{n_x-\alpha+2}^{(x)}, & \dots, & a_{n_x-2}^{(x)}, a_{n_x-1}^{(x)}
\end{array} \right], \\
& (\kappa > \lambda; n_x < n_\lambda + n_{\lambda+1}; \psi_\lambda(x_\nu) = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots, n_\lambda)
\end{aligned}$$

wo, falls $f_1(x)$ nicht rational ist, die ganze Zahl α der Bedingung

$$0 \leq \alpha \leq n_{x+1} + n_x - n_{\lambda+1} - n_\lambda - 1.$$

genügen muss.

Als weitere aus der Gleichung 5) folgende Beziehungen führe ich noch die folgenden an:

Ist $\mathcal{S}(x)$ eine im reellen Intervalle $a \dots b$ reelle und positive Function, und bezeichnen $\alpha_x x + \beta_x$, $\psi_x(x)$ den x ten Theilnenner, beziehungsweise den x ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_a^b \frac{\mathcal{S}(x) dx}{x-z}$, ist ferner

$$\chi(x) = c_{2x-\lambda-\tau-1} x^{2x-\lambda-\tau-1} + c_{2x-\lambda-\tau-2} x^{2x-\lambda-\tau-2} + \dots + c_1 x + c_0$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $2x-\lambda-1$, so ist

$$\int_a^b \mathcal{S}(x) \chi(x) \psi_x(x) dx = \frac{(-1)^\tau}{(a_{n_x}^{(x)})^{2(x-\lambda)-\tau-1}}.$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} c_{2x-\lambda-\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\lambda-1, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}, & a_x^{(x)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ c_{2x-\lambda-\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\lambda-2, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} + c_{2x-\lambda-\tau-2} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\lambda-1, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}, & a_{x-1}^{(x)}, & a_x^{(x)}, & 0, & 0, & 0 \\ \sum_{\rho=0}^{\rho=2(x-\lambda-1)-\tau} c_{2x-\lambda-\tau-\rho-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{\lambda+\rho+\tau+1-x, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \right), & a_{2\lambda+\tau+2-x}^{(x)}, & a_{2\lambda+\tau+3-x}^{(x)}, & a_{2\lambda+\tau+4-x}^{(x)}, & \dots, & a_{x-1}^{(x)}, a_x^{(x)} \\ \sum_{\rho=0}^{\rho=2(x-\lambda)-\tau-1} c_{2x-\lambda-\tau-\rho-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{\lambda+\rho+\tau-x, \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \right), & a_{2\lambda+\tau+1-x}^{(x)}, & a_{2\lambda+\tau+2-x}^{(x)}, & a_{2\lambda+\tau+3-x}^{(x)}, & \dots, & a_{x-2}^{(x)}, a_{x-1}^{(x)} \end{array} \right| \quad (x > \lambda)$$

$$= \frac{(-1)^{\tau+1} a_{n_\lambda}^{(\lambda)}}{(a_{n_x}^{(x)})^{2(x-\lambda)-\tau}}.$$

$$c_{2x-\lambda-\tau-1} \sum_{v=1}^{v=\lambda} \frac{a_{x-\lambda-1,v}^{(\lambda)} \psi_x(x_v)}{\psi_{\lambda-1}(x_v) \psi'_\lambda(x_v)}, \quad a_x^{(x)}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

$$c_{2x-\lambda-\tau-1} \sum_{v=1}^{v=\lambda} \frac{a_{x-\lambda-2,v}^{(\lambda)} \psi_x(x_v)}{\psi_{\lambda-1}(x_v) \psi'_\lambda(x_v)} + c_{2x-\lambda-\tau-2} \sum_{v=1}^{v=\lambda} \frac{a_{x-\lambda-1,v}^{(\lambda)} \psi_x(x_v)}{\psi_{\lambda-1}(x_v) \psi'_\lambda(x_v)}, \quad a_{x-1}^{(x)}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

$$\sum_{p=0}^{p=2(x-\lambda)-\tau-2} c_{2x-\lambda-\tau-p-1} \left(\sum_{v=1}^{v=\lambda} \frac{a_{\lambda+\rho+\tau+1-x,v}^{(\lambda)} \psi_x(x_v)}{\psi_{\lambda-1}(x_v) \psi'_\lambda(x_v)} \right), \quad a_{2\lambda+\tau+2-x}^{(x)}, \quad a_{2\lambda+\tau+3-x}^{(x)}, \quad a_{2\lambda+\tau+4-x}^{(x)}, \quad \dots, \quad a_{x-1}^{(x)}, \quad a_x^{(x)}$$

$$\sum_{p=0}^{p=2(x-\lambda)-\tau-1} c_{2x-\lambda-\tau-p-1} \left(\sum_{v=0}^{v=\lambda} \frac{a_{\lambda+\rho+\tau-x,v}^{(\lambda)} \psi_x(x_v)}{\psi_{\lambda-1}(x_v) \psi'_\lambda(x_v)} \right), \quad a_{2\lambda+\tau+1-x}^{(x)}, \quad a_{2\lambda+\tau+2-x}^{(x)}, \quad a_{2\lambda+\tau+3-x}^{(x)}, \quad \dots, \quad a_{x-2}^{(x)}, \quad a_{x-1}^{(x)}$$

$$(2\lambda+1 > x > \lambda)$$

$$\int_a^b \mathcal{S}(x) \chi(x) \frac{\psi_x(x) - \psi_x(y)}{x - y} dx = \frac{(-1)^\tau}{(a_{n_x}^{(x)})^{2x-\tau-1}} \sum_{\rho=0}^{\rho=x-1} \frac{a_{\rho+1}^{(\rho+1)} (a_{n_x}^{(x)})^{2\rho}}{a_\rho^{(\rho)}} \left| \frac{\psi_\lambda(y), \psi_x(y)}{\varphi_\lambda(y), \varphi_x(y)} \right|$$

$$c_{2x-\rho-\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-1, \mu}^{(x)} \psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}, \quad a_x^{(x)}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

$$c_{2x-\rho-\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-2, \mu}^{(x)} \psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} + c_{2x-\rho-\tau-2} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-1, \mu}^{(x)} \psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}, \quad a_{x-1}^{(x)}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

$$\sum_{\rho_1=2(x-\rho)-\tau}^{\rho_1=x} c_{2x-\rho-\rho_1-\tau-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{\rho+\rho_1+\tau+1-x, \mu}^{(x)} \psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \right), \quad a_{2\rho+\tau+2-x}^{(x)}, \quad a_{2\rho+\tau+3-x}^{(x)}, \quad a_{2\rho+\tau+4-x}^{(x)}, \quad \dots, \quad a_{x-1}^{(x)}, \quad a_x^{(x)}$$

$$\sum_{\rho_1=2(x-\rho)-\tau-1}^{\rho_1=x} c_{2x-\rho-\rho_1-\tau-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{\rho+\rho_1+\tau-x, \mu}^{(x)} \psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \right), \quad a_{2\rho+\tau+1-x}^{(x)}, \quad a_{2\rho+\tau+2-x}^{(x)}, \quad a_{2\rho+\tau+3-x}^{(x)}, \quad \dots, \quad a_{x-2}^{(x)}, \quad a_{x-1}^{(x)}$$

$$\int_a^b \frac{\mathfrak{S}(x) \chi(x) |\psi_{\rho_1}(\xi_{\rho_2})| dx}{(x-\xi_1)(x-\xi_2) \dots (x-\xi_r)} = \frac{(-1)^\tau}{(a_{n_x}^{(x)})^{2x-\tau-1}} \sum_{\rho=0}^{\rho=x-r} (a_{n_x}^{(x)})^{2\rho} |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\rho-\sigma} \psi_{\rho+\sigma-1}(\xi_\tau)|.$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} c_{2x-\rho-\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-1, \mu}^{(x)} \psi_{\rho}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\rho}(x_{\mu})}, & a_x^{(x)}, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ c_{2x-\rho-\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-2, \mu}^{(x)} \psi_{\rho}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\rho}(x_{\mu})} + c_{2x-\rho-\tau-2} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-1, \mu}^{(x)} \psi_{\rho}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\rho}(x_{\mu})}, & a_{x-1}^{(x)}, & a_x^{(x)}, & 0, & & 0, & 0 \\ \sum_{\rho'=0}^{\rho'=2(x-\rho-1)-\tau} c_{2x-\rho-\rho'-\tau-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{\rho+\rho'+\tau-x+1, \mu}^{(x)} \psi_{\rho}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\rho}(x_{\mu})} \right), & a_{2\rho+\tau+2-x}^{(x)}, & a_{2\rho+\tau+3-x}^{(x)}, & a_{2\rho+\tau+4-x}^{(x)}, & \dots, & a_{x-1}^{(x)}, & a_x^{(x)} \\ \sum_{\rho'=0}^{\rho'=2(x-\rho)-\tau-1} c_{2x-\rho-\rho'-\tau-1} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{\rho+\rho'+\tau-x, \mu}^{(x)} \psi_{\rho}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\rho}(x_{\mu})} \right), & a_{2\rho+\tau+1-x}^{(x)}, & a_{2\rho+\tau+2-x}^{(x)}, & a_{2\rho+\tau+3-x}^{(x)}, & \dots, & a_{x-2}^{(x)}, & a_{x-1}^{(x)} \end{array} \right|$$

$$(\rho_1 = x, x-1, \dots, x-r); \rho_2 = 0, 1, 2, \dots, r; \xi_0 = x; \sigma = 0, 1, 2, \dots, r-2, x-\rho-1; \tau = 1, 2, 3, \dots, r)$$

Durch Verbindung der Gleichungen 3) und 5) erhält man weiter das folgende Theorem

Ist

$$\chi(x) = c_\tau x^\tau + c_{\tau-1} x^{\tau-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

eine rationale Function von x vom Grade τ , wo die ganze Zahl τ der Ungleichung

genügt, wenn ε_λ den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $x > \lambda$ oder $x < \lambda$ ist, so besteht für

$$n_{\lambda} < n_x + n_{x+1}$$

die Beziehung

$$= \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} a_{n_x-l_{\mu}}^{(x)} \chi(x_{\mu}) \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\sum_{\mu=1}^{\mu=1} \psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} = \frac{(-1)^{\tau-n_{\lambda}+1}}{(a_{n_x}^{(x)})^{\tau-n_{\lambda}+1+1}}$$

$$e_{\tau} \sum_{\mu=n_x}^{\infty} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}}^{-e(n_x+n_{x+1}-n_{\lambda+1}), \mu} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi(x_{..})'(\bar{x})}, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$$

$$+ \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=\eta_x} a_{\eta_x - \eta_{\lambda+1} - \varepsilon}(\eta_x + \eta_{\lambda+1} - \eta_{\lambda+1} - 1, \mu) \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} +$$

$$+ c_{z-1} \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} a_{n_z-n_{\lambda+1}-\varepsilon_{\lambda}(n_x+n_z+1-n_{\lambda+1})}^{(z)} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{z-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})},$$

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=n_k+1} \left(\frac{\sum_{\mu=n_x}^{\mu=n_z} a_{n_z-\mu+\rho-\varepsilon_\lambda(n_z+n_x+1-n_\lambda+1),\mu} \psi_\lambda(x_x)}{c_{x-\rho} \frac{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}} \right),$$

[illegible]

$(h \wedge 0)$

und speciell:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} a_{n_x-h, \mu}^{(x)} \frac{\psi_{\sigma}(x_{\mu}) \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} = \frac{(-1)^{n_{\sigma}-n_{\lambda}+1}}{(a_{n_x}^{(x)})^{n_{\sigma}-n_{\lambda}+1}+1}$$

$$a_{n_{\sigma}}^{(\sigma)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda}+1}^{(x)} (n_x+n_x+1-n_{\lambda}-n_{\lambda}+1)_{\mu} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})},$$

$$a_{n_x}^{(x)}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

$$a_{n_{\sigma}-1}^{(\sigma)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda}+1}^{(x)} (n_x+n_x+1-n_{\lambda}-n_{\lambda}+1)_{\mu} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} +$$

$$+ a_{n_{\sigma}}^{(\sigma)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda}+1}^{(x)} (n_x+n_x+1-n_{\lambda}-n_{\lambda}+1)_{\mu} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})},$$

$$a_{n_x}^{(x)}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=n_{\lambda}-n_{\lambda}+1} a_{n_{\sigma}-\rho}^{(\sigma)} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-\tau+\rho-e_{\lambda}}^{(x)} (n_x+n_x+1-n_{\lambda}-n_{\lambda}+1)_{\mu} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} \right),$$

$$a_{n_x+n_{\lambda}+1}^{(x)}, \quad a_{n_x+n_{\lambda}+1}^{(x)}, \quad a_{n_x+n_{\lambda}+1}^{(x)}, \quad a_{n_x}^{(x)}, \quad a_{n_x}^{(x)}$$

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=n_{\lambda}-n_{\lambda}+1} a_{n_{\sigma}-\rho}^{(\sigma)} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-\tau+\rho-e_{\lambda}}^{(x)} (n_x+n_x+1-n_{\lambda}-n_{\lambda}+1)_{\mu} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} \right),$$

$$a_{n_x+n_{\lambda}+1}^{(x)}, \quad a_{n_x+n_{\lambda}+1}^{(x)}, \quad a_{n_x+n_{\lambda}+1}^{(x)}, \quad a_{n_x}^{(x)}, \quad a_{n_x}^{(x)}$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden als besonders wichtig erwähnt werden.
Ist

$$\chi(x) = c_\tau x^\tau + c_{\tau-1} x^{\tau-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $n_{\lambda+1} - 1 + \varepsilon_\lambda (n_x + n_{x+1} - (n_\lambda + n_{\lambda+1}))$, wo ε_λ den Werth 0 oder 1 besitzt, je nachdem $n_x > n_\lambda$ oder $n_x < n_\lambda$ ist, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-h, \mu}^{(x)} \chi(x_\mu) \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} = - \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-n_{\lambda+1}+h} c_{\tau-\rho} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-\tau+\rho-h-\varepsilon_\lambda(n_x+n_{x+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}), \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \right) (h > 0; n_\lambda < n_x + n_{x+1})$$

und demnach, falls τ nicht grösser als $n_{\lambda+1} - h - 1 + \varepsilon_\lambda (n_x + n_{x+1} - n_\lambda - n_{\lambda+1})$ ist,

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-h, \mu}^{(x)} \chi(x_\mu) \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} = 0, \quad (h > 0; n_\lambda < n_x + n_{x+1})$$

wo der Näherungsnenner $\psi_x(x)$ keine mehrfache Wurzel besitzt.

Hat der x te Näherungsnenner

$$\psi_x(x) = a_{n_x}^{(x)} x^{n_x} + a_{n_x-1}^{(x)} x^{n_x-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

einer Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, deren Theilzähler sämmtlich den Werth -1 besitzen, keine mehrfache Wurzel, genügen ferner die Grade n_λ und n , der Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$, $\psi_v(x)$ der Bedingung

$$n_{\lambda} + n_{\nu} < n_x + n_{x+1} - h,$$

so ist, falls mindestens eine der zwei Ungleichungen

$$n_{\nu} < n_{\lambda+1} - h + \varepsilon_{\lambda} (n_x + n_{x+1} - n_{\lambda} - n_{\lambda+1})$$

$$n_{\lambda} < n_{\nu+1} - h + \varepsilon_{\nu} (n_x + n_{x+1} - n_{\lambda} - n_{\lambda+1})$$

stattfindet,

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-h, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \psi_{\nu}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} = 0,$$

ist aber

$$n_{\lambda} = n_{\nu+1} - h + \varepsilon_{\nu} (n_x + n_{x+1} - n_{\nu} - n_{\nu+1}),$$

so wird

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-h, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \psi_{\nu}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} = -a_{n_{\lambda}}^{(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\nu+1}-\varepsilon_{\nu}(n_x+n_{x+1}-n_{\nu}-n_{\nu+1}), \mu}^{(x)} \psi_{\nu}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} \cong 0,$$

während für

$$n_{\nu} = n_{\lambda+1} - h + \varepsilon_{\lambda} (n_x + n_{x+1} - (n_{\lambda} + n_{\lambda+1}))$$

die Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-h, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \psi_{\nu}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\lambda}(x_{\mu})} = -a_{n_{\nu}}^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_x} \frac{a_{n_x-n_{\lambda+1}-\varepsilon_{\lambda}(n_x+n_{x+1}-n_{\lambda}-n_{\lambda+1}), \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_{\nu}(x_{\mu})} \cong 0$$

besteht.

Sind die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_x$ des x^{ten} Näherungsnenners

$$\psi_x(x) = a_x^{(x)} x^x + a_{x-1}^{(x)} x^{x-1} + \dots + a_1^{(x)} x + a_0^{(x)}$$

der mindestens bis einschliesslich zum x^{ten} Theilnenner regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function sämmtlich von einander verschieden, bezeichnen ferner λ und ν irgend zwei nicht negative ganze Zahlen, deren Summe kleiner als $2x+1-h$ ist, so hat die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-h, \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu}) \psi_{\nu}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_x(x_{\mu})}$$

den Werth 0 oder

$$-a_{\lambda}^{(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\lambda-1-2\varepsilon_{\lambda}(x-\lambda), \mu}^{(x)} \psi_{\lambda}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_x(x_{\mu})} = -a_{\nu}^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\nu-1-2\varepsilon_{\nu}(x-\nu), \mu}^{(x)} \psi_{\nu}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_x(x_{\mu})} \geq 0,$$

je nachdem $|\lambda-\nu| > h-1$ oder $= h-1$ ist.

Lässt eine nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitende Function wenigstens bis zum x^{ten} Theilnenner inclusive eine reguläre Kettenbruchentwicklung zu, sind ferner die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_x$ des x^{ten} Näherungsnenners derselben

$$\psi_x(x) = a_x^{(x)} x^x + a_{x-1}^{(x)} x^{x-1} + \dots + a_1^{(x)} x + a_0^{(x)}$$

sämmtlich von einander verschieden, bezeichnen endlich λ und ν zwei nicht negative ganze Zahlen, deren Summe kleiner als $2x$ ist, so ist die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{\psi_{\lambda}(x_{\mu}) \psi_{\nu}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_x(x_{\mu})}$$

gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\lambda \geq \nu$ oder $\lambda = \nu$ ist.

Sind λ und ν zwei ganze nicht negative Zahlen, deren Summe einen der Werthe $0, 1, 2, \dots, 2x-1$ besitzt, bezeichnen ferner $x_1, x_2, \dots, x_x$ die Wurzeln der ganzen Function des x ten Grades

$$T_x^m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=x} (-1)^{\lambda} \frac{x^{x-\lambda}}{\Pi(\lambda) \Pi(x-\lambda) \Pi(m+x-\lambda)} \quad (m > -1)$$

und ist

$$S_x^m(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^m \{T_x^m(x) - T_x^m(y)\}}{x-y} dy,$$

so hat die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{T_{\lambda}^m(x_{\mu}) T_{\nu}^m(x_{\mu}) S_x^m(x_{\mu})}{T_{x-1}^{m+1}(x_{\mu})}$$

den Werth $\frac{[\Pi(m)]^2}{\Pi(\lambda) \Pi(\lambda+m)}$ oder 0, je nachdem $\lambda = \nu$ oder λ von ν verschieden ist.

Sind λ und ν zwei ganze nicht negative Zahlen, deren Summe einen der Werthe $0, 1, 2, \dots, 2x-1$ besitzt, bezeichnen ferner $x_1, x_2, \dots, x_x$ die Wurzeln des Jacobi'schen Polynoms $T_{n, \alpha, \beta}(x)$ und ist

so hat die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{T_{\lambda, \alpha, \beta}(x_{\mu}) T_{\nu, \alpha, \beta}(x_{\mu}) S_{\alpha, \beta}(x_{\mu})}{T_{x-1, \alpha+1, \beta+1}(x_{\mu})}$$

den Werth $\frac{4^{\lambda} \Gamma(\lambda+1) \Gamma(\alpha+\lambda) \Gamma(\beta+\lambda) \Gamma(\alpha+\beta-1) \Gamma(\alpha+\beta+\lambda-1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha+\beta+2\lambda-1) \Gamma(\alpha+\beta+2\lambda)}$ oder 0, je nachdem $\lambda = \nu$ oder $\lambda \neq 0$ ist.

Von den besonders interessanten speciellen Relationen, welche in diesem Satze enthalten sind, mögen die folgenden hervorgehoben werden:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \cos \frac{(2\mu-1)\lambda\pi}{2x} \cos \frac{(2\mu-1)\nu\pi}{2x} = \delta_{\lambda, \nu} \frac{x}{2} \quad (\lambda, \nu \geq 0; 2x > \lambda + \nu > 0)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \cos \frac{(2\mu-1)\lambda\pi}{2x} \cos \frac{(2\mu-1)\nu\pi}{2x} = \delta_{\lambda, \nu} x \quad (\lambda, \nu \geq 0, \lambda + \nu = 0, \lambda + \nu = 2x)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \sin \frac{(\lambda+1)\mu\pi}{x+1} \sin \frac{(\nu+1)\mu\pi}{x+1} = \frac{\delta_{\lambda, \nu}(x+1)}{2} \quad (2x > \lambda + \nu \geq 0; \lambda, \nu \geq 0)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \sin \frac{(2\lambda+1)\mu\pi}{2x+1} \sin \frac{(2\nu+1)\mu\pi}{2x+1} = \delta_{\lambda,\nu}(2x+1) \quad (2x > \lambda + \nu \geq 0; \lambda, \nu \geq 0)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} a_{\mu} P_{\lambda}(x_{\mu}) P_{\nu}(x_{\mu}) = \frac{2\delta_{\lambda,\nu}}{2\lambda+1} \quad (2x > \lambda + \nu \geq 0; \lambda, \nu \geq 0; P_x(x_{\mu}) = 0)$$

wo die Zahlen a_{μ} die Coëfficienten der Gauss'schen Formel für die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrales sind. Die letzte Gleichung hat bekanntlich zuerst Herr F. Neumann a. a. O. aufgestellt.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern einer regulären Kettenbruchentwicklung bis zum x ten incl. positiv, so sind bekanntlich¹ die Wurzeln der Functionen $\psi_{x-1}(x)$, $\psi_x(x)$, $\varphi_x(x)$ reell und ungleich, und es trennen die Wurzeln von $\psi_x(x)$, $\psi_{x-1}(x)$, sowie die von $\psi_x(x)$ und $\varphi_x(x)$ sich gegenseitig von einander, so dass also in diesem Falle

$$\text{sign.}(\varphi_x(x_{\mu})\psi'_x(x_{\mu})) = \text{sign.}(\psi_{x-1}(x_{\mu})\psi'_x(x_{\mu})) = +1$$

ist. Man leitet daher aus den aufgestellten Theoremen unmittelbar das folgende neue her:

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern einer regulären Kettenbruchentwicklung wenigstens bis zum x ten incl. positiv, sind ferner die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_x$ des x ten Näherungsnenners dieser Entwicklung

$$\psi_x(x) = a_x^{(x)} x^x + a_{x-1}^{(x)} x^{x-1} + \dots + a_1^{(x)} x + a_0^{(x)}$$

¹ „Über algebraische Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen.“ Von Leopold Gegenbauer. Diese Sitzungsber., 84. Bd., II. Abth., S. 1102—1107.

sämmtlich positiv, ist endlich

$$\chi(x) = c_\tau x^\tau + c_{\tau-1} x^{\tau-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $x + \lambda + 2\varepsilon_\lambda(x - \lambda)$ ($\varepsilon_\lambda = 0, x > \lambda$; $\varepsilon_\lambda = 1, x < \lambda$), welche an den Nullstellen von $\psi_x(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $\psi_\lambda(x)$ besitzt, so ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_\tau \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\lambda-1-2\varepsilon_\lambda(x-\lambda), \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}, & a_x^{(x)}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ c_\tau \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\lambda-2-2\varepsilon_\lambda(x-\lambda), \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} + \\ + c_{\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\lambda-1-2\varepsilon_\lambda(x-\lambda), \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}, & a_{x-1}^{(x)}, & a_x^{(x)}, & 0, & 0, & 0 \\ \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-\lambda-1} c_{\tau-\rho} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\tau+\rho-2\varepsilon_\lambda(x-\lambda), \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \right), & a_{x+\lambda+1-\tau}^{(x)}, & a_{x+\lambda+2-\tau}^{(x)}, & a_{x+\lambda+3-\tau}^{(x)}, & a_{x-1}^{(x)}, & a_x^{(x)} \\ \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau+h-\lambda-1} c_{\tau-\rho} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\tau+\rho-h-2\varepsilon_\lambda(x-\lambda), \mu}^{(x)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \right), & a_{x+\lambda+1-\tau-h}^{(x)}, & a_{x+\lambda+2-\tau-h}^{(x)}, & a_{x+\lambda+3-\tau-h}^{(x)}, & \dots, & a_{x-1-h}^{(x)}, a_{x-h}^{(x)} \end{vmatrix}$$

positiv oder negativ, je nachdem $\tau - \lambda - 1 + h$ gerade oder ungerade ist.

§. 3. Der ρ^{te} Näherungsnenner

$$\bar{\psi}_{\rho}(x) = \bar{a}_{\rho}^{(\rho)} x^{\rho} + \bar{a}_{\rho-1}^{(\rho)} x^{\rho-1} + \dots + \bar{a}_1^{(\rho)} x + \bar{a}_0^{(\rho)}$$

der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes

$$(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} f_1(x) \quad (\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m)$$

wird, wie ich unlängst gezeigt habe,¹ falls die Kettenbruchentwicklung von $f_1(x)$ regulär ist, durch folgende Gleichung gegeben

$$(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \bar{\psi}_{\rho}(x) = \frac{\bar{a}_{\rho}^{(\rho)}}{\bar{a}_{\rho+m}^{(\rho+m)} |\psi_{\rho+m-\sigma}^{(\tau_{\lambda})}(y_{\lambda})|}$$

$$\left| \begin{array}{llll} \psi_{\rho+m}(x), & \psi_{\rho+m-1}(x), & \psi_{\rho+1}(x), & \psi_{\rho}(x) \\ \psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_{\rho}(y_1) \\ \psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_{\rho}(y_1) \\ \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho}^{(\nu_1-1)}(y_1) \\ \psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_{\rho}(y_2) \\ \psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_{\rho}(y_2) \\ \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho}^{(\nu_2-1)}(y_2) \end{array} \right|$$

6)

L. Gegenbauer,

$$\begin{array}{cccc} \psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_{\rho}(y_r) \\ \psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_{\rho}(y_r) \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho}^{(\nu_r-1)}(y_r) \end{array}$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, r; \tau_{\lambda} = 0, 1, 2, \dots, \nu_{\lambda} - 1; \sigma = 1, 2, \dots, m)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$\frac{a_{x-h, \mu}^{(x)} \chi(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_x(x_{\mu})}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{a_{x-h, \mu}^{(x)} \bar{\psi}_{\sigma}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_x(x_{\mu})}$$

und summirt bezüglich μ von 1 bis x , so erhält man unter Berücksichtigung der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Formeln die Theoreme.

Hat der x te Näherungsnenner

$$\psi_x(x) = a_x^{(x)} x^x + a_{x-1}^{(x)} x^{x-1} + \dots + a_1^{(x)} x + a_0^{(x)}$$

der regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ keine mehrfache Wurzel, ist ferner der Grad der ganzen Function

$$\chi(x) = c_{\tau} x^{\tau} + c_{\tau-1} x^{\tau-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

nicht grösser als die kleinste der Zahlen $\rho + \sigma - h + 2\varepsilon_{\rho+\sigma}(x - \rho - \sigma)$ ($\sigma = 0, 1, 2, \dots, m$; $\varepsilon_\lambda = 0, x > \lambda$; $\varepsilon_\lambda = 1, x < \lambda$) und bezeichnet $\bar{\psi}_\rho(x)$ den ρ ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x - y_1)^{\nu_1} (x - y_2)^{\nu_2} \dots (x - y_r)^{\nu_r} f_1(x)$ ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$), so ist für $2x + 1 > \rho + m$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-h, \mu}^{(x)} (x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \chi(x_\mu) \bar{\psi}_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} = 0.$$

Hat der x te Näherungsnenner

$$\psi_x(x) = a_x^{(x)} x^x + a_{x-1}^{(x)} x^{x-1} + \dots + a_1^{(x)} x + a_0^{(x)}$$

der regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ keine mehrfache Wurzel, ist ferner

$$\chi(x) = c_\tau x^\tau + c_{\tau-1} x^{\tau-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

eine ganze Function von nicht höherem als dem Grade $\rho - h$ und bezeichnet $\bar{\psi}_\rho(x)$ den ρ ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x - y_1)^{\nu_1} (x - y_2)^{\nu_2} \dots (x - y_r)^{\nu_r} f_1(x)$ ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$), so ist für $x \geq \rho + m$ die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-h, \mu}^{(x)} (x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \chi(x_\mu) \bar{\psi}_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}$$

gleich Null, ist aber

$$\tau = \rho + 1 - h,$$

so hat dieselbe den Werth

$$(-1)^{m+1} \frac{\bar{a}_\rho^{(\rho)} |\psi_{\rho+m+1-\sigma}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|}{\bar{a}_{\rho+m}^{(\rho+m)} |\psi_{\rho+m-\sigma}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|} c_{\rho-h+1} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-1, \mu}^{(x)} \psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \geq 0.$$

Sind die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_x$ des x ten Näherungsnenners

$$\psi_x(x) = a_x^{(x)} x^x + a_{x-1}^{(x)} x^{x-1} + \dots + a_1^{(x)} x + a_0^{(x)}$$

der wenigstens bis zum x ten Theilnenner einschliesslich regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ sämmtlich von einander verschieden, bezeichnet ferner $\bar{\psi}_\rho(x)$ den ρ ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} f_1(x)$ ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$), und sind ρ und σ zwei nicht negative ganzen Zahlen, deren Summe kleiner als $2x+1-h-m$ ist, so hat, falls x nicht kleiner als die grössere der beiden Zahlen $\rho+m, \sigma+m$ ist, die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-h, \mu}^{(x)} (x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \bar{\psi}_\rho(x_\mu) \bar{\psi}_\sigma(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}$$

den Werth 0 oder

$$45 \quad (-1)^{m+1} \frac{\bar{a}_\rho^{(\rho)} |\psi_{\rho+m+1-\alpha}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|}{\bar{a}_{\rho+m}^{(\rho+m)} |\psi_{\rho+m-\alpha}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|} \bar{a}_\sigma^{(\sigma)} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\rho-1, \mu}^{(x)} \psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} = (-1)^{m+1} \frac{\bar{a}_\sigma^{(\sigma)} |\psi_{\sigma+m-\alpha+1}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|}{\bar{a}_{\sigma+m}^{(\sigma+m)} |\psi_{\sigma+m-\alpha}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|} \bar{a}_\rho^{(\rho)} \sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{a_{x-\sigma-1, \mu}^{(x)} \psi_\sigma(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)} \geq 0,$$

je nachdem $|\rho-\sigma| > h-1$ oder gleich $h-1$ ist. $(\lambda = 1, 2, \dots, r; \tau_\lambda = 0, 1, 2, \dots, \nu_\lambda-1; \alpha = 1, 2, \dots, m)$

Sind die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_x$ des x^{ten} Näherungsnenners

$$\psi_x(x) = a_x^{(x)} x^x + a_{x-1}^{(x)} x^{x-1} + \dots + a_1^{(x)} x + a_0^{(x)}$$

der regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ sämmtlich von einander verschieden, bezeichnet ferner $\bar{\psi}_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} f_1(x)$, und sind ρ und σ zwei nicht negative ganze Zahlen, deren Summe kleiner als $2x-m$ ist, so ist, falls x nicht kleiner als die grössere der beiden Zahlen $\rho+m$, $\sigma+m$ ist, die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \bar{\psi}_\rho(x_\mu) \bar{\psi}_\sigma(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu) \psi'_x(x_\mu)}$$

gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\rho \geq \sigma$ oder $\rho = \sigma$ ist.

Ist $\mathfrak{S}(x)$ eine im reellen Intervalle $a \dots b$ reelle und positive Function ebenso wie $(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$), bezeichnet ferner $\psi_x(x)$, beziehungsweise $\bar{\psi}_x(x)$, den x^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{\mathfrak{S}(z) dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_a^b \frac{(z-y_1)^{\nu_1} (z-y_2)^{\nu_2} \dots (z-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(z) dz}{x-z},$$

so sind die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_x$ der Gleichung $\psi_x(x) = 0$ sämmtlich von einander verschieden, und es ist, falls ρ und σ zwei nicht negative ganze Zahlen vorstellen, deren Summe kleiner als $2x-m$ ist, für alle x , welche nicht kleiner als die grössere der beiden Zahlen $\rho+m$, $\sigma+m$ sind, die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{(x_{\mu}-y_1)^{y_1} (x_{\mu}-y_2)^{y_2} \dots (x_{\mu}-y_r)^{y_r} \bar{\psi}_{\rho}(x_{\mu}) \bar{\psi}_{\sigma}(x_{\mu})}{\psi_{x-1}(x_{\mu}) \psi'_x(x_{\mu})}$$

gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\rho \geq \sigma$ oder $\rho = \sigma$ ist.

Von den speciellen Relationen, welche in diesen Theoremen enthalten sind, mögen die folgenden besonders angeführt werden.

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sin^{2r} \frac{(2\mu-1)\pi}{4n} \cos^{2s} \frac{(2\mu-1)\pi}{4n} T_{\lambda, r+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{(2\mu-1)\pi}{2n} \right) T_{\nu, r+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{(2\mu-1)\pi}{2n} \right) = \\ = \frac{\delta_{\lambda, \nu} 2^{2\lambda-1} n \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(r+\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s+\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma(r+s+\lambda)}{\Gamma(r+s+2\lambda) \Gamma(r+s+2\lambda+1) \pi} \quad (\lambda+\nu < 2n-r-s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sin^{2r+2} \frac{\mu\pi}{2n+2} \cos^{2s+2} \frac{\mu\pi}{2n+2} T_{\lambda, r+\frac{3}{2}, s+\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\mu\pi}{n+1} \right) T_{\nu, r+\frac{3}{2}, s+\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\mu\pi}{n+1} \right) = \\ = \frac{\delta_{\lambda, \nu} 2^{2\lambda-1} (n+1) \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(r+\lambda+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s+\lambda+\frac{3}{2}\right) \Gamma(r+s+\lambda+2)}{\Gamma(r+s+2\lambda+2) \Gamma(r+s+2\lambda+3) \pi} \quad (\lambda+\nu < 2n-r-s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45^* \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sin^{2r+2} \frac{\mu\pi}{2n+1} \cos^{2s} \frac{\mu\pi}{2n+1} T_{\lambda, r+\frac{3}{2}, s+\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{2\mu\pi}{2n+1} \right) T_{\nu, r+\frac{3}{2}, s+\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{2\mu\pi}{2n+1} \right) = \\ = \frac{2^{2\lambda-2} \delta_{\lambda, \nu} (2n+1) \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(r+\lambda+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s+\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma(r+s+\lambda+1)}{\Gamma(s+r+2\lambda+1) \Gamma(r+s+2\lambda+2) \pi} \quad (\lambda+\nu < 2n-r-s) \end{aligned}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{E_n^\alpha(x_\mu) C_{\lambda, \rho}^{\alpha, \rho}(x_\mu) C_{\nu, \rho}^{\alpha, \rho}(x_\mu)}{C_{n-1}^{\alpha+1}(x_\mu)} = (-1)^\rho \frac{\delta_{\lambda, \nu} \Pi(\lambda - \rho) \Pi(\lambda + \rho + 2\alpha - 1) \alpha \Pi(2\alpha)}{\lambda + \alpha}.$$

$$\left[\frac{2^{2\rho - \lambda + 1} \Pi(\alpha + \rho - 1) \Pi\left(\alpha + \rho - \frac{1}{2}\right)}{\Pi(\lambda + \alpha - 1) \Pi(2\alpha + 2\rho - 1) \Pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} \right]^2, \quad (\lambda + \nu < 2n; C_n^\alpha(x_\mu) = 0)$$

wo

$$E_n^\alpha(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \{C_n^\alpha(x) - C_n^\alpha(y)\} dy}{x-y}$$

ist. Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar die specielle F. Neumann'sche Relation

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_\mu P_{\lambda, \rho}(x_\mu) P_{\nu, \rho}(x_\mu) = \frac{2\delta_{\lambda, \nu}}{2\lambda + 1} \frac{\Pi(\lambda + \rho)}{\Pi(\lambda - \rho)} \quad (\lambda + \nu < 2n)$$

wo, wie oben, die Grössen a_μ die Coëfficienten der Gauss'schen Formel für die mechanische Quadratur und $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Kugelfunction $P_n(x)$ sind.

Bekanntlich lassen sich alle Näherungsnenner einer regulären Kettenbruchentwicklung durch zwei unmittelbar aufeinander folgende von ihnen $\psi_{x-1}(x), \psi_x(x)$ in folgender Weise darstellen:

$$\psi_{x+\mu}(x) = \tilde{\Psi}_\mu(x) \psi_x(x) - \tilde{\Phi}_\mu(x) \psi_{x-1}(x) \quad (\mu \geq 0)$$

$$\psi_{x-\mu-1}(x) = \tilde{\Psi}_\mu^*(x) \psi_{x-1}(x) - \tilde{\Phi}_\mu^*(x) \psi_x(x)$$

wo die ganzen Functionen $\tilde{\Psi}_\mu(x), \tilde{\Psi}_\mu^*(x)$ und $\tilde{\Phi}_\mu(x), \tilde{\Phi}_\mu^*(x)$ von dem Grade μ , beziehungsweise $\mu-1$, wieder Näherungsnenner, beziehungsweise Näherungszähler, von regulären Kettenbrüchen sind, welche einen bestimmten Theil der vorliegenden Kettenbruchentwicklung bilden, und demnach bestehen für jede Wurzel x_λ des Näherungsnenners $\psi_\lambda(x)$ die Relationen

$$\psi_{x+}(x_\lambda) = -\tilde{\varphi}_\mu(x_\lambda) \psi_{x-1}(x_\lambda)$$

$$\psi_{x-\mu-1}(x_\lambda) = \tilde{\psi}_\mu(x_\lambda) \psi_{x-1}(x_\lambda).$$

Setzt man nun in der Gleichung 6) für $\rho + m \geq x \geq \rho$ $x = x_\lambda$, so ergibt sich die Formel

$$(x_\lambda - y_1)^{v_1} (x_\lambda - y_2)^{v_2} \dots (x_\lambda - y_r)^{v_r} \bar{\psi}_\rho(x_\lambda) = \frac{\bar{a}_\rho^{(p)} \psi_{x-1}(x_\lambda)}{\bar{a}_{\rho+m}^{(p+m)} |\psi(\tau_{\lambda_i})| \psi_{\rho+m-\sigma}(y_{\lambda_i})}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} -\tilde{\varphi}_{\rho+m-z}(x_\lambda), & -\tilde{\varphi}_{\rho+m-z-1}(x_\lambda), & \dots, & -1, & 0, & 1, & \star \psi_1(x_\lambda), \dots, \star \psi_{x-\rho}(x_\lambda), \star \psi_{x-\rho-1}(x_\lambda) \\ \psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi_{x+1}(y_1), & \psi_x(y_1), & \psi_{x-1}(y_1), & \psi_{x-2}(y_1), \dots, \psi_{\rho+1}(y_1), \psi_\rho(y_1) \\ \psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi'_{x+1}(y_1), & \psi'_x(y_1), & \psi'_{x-1}(y_1), & \psi'_{x-2}(y_1), \dots, \psi'_{\rho+1}(y_1), \psi'_\rho(y_1) \\ \psi_{\rho+m}^{(v_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}^{(v_1-1)}(y_1), & \dots, & \psi_{x+1}^{(v_1-1)}(y_1), & \psi_x^{(v_1-1)}(y_1), & \psi_{x-1}^{(v_1-1)}(y_1), & \psi_{x-2}^{(v_1-1)}(y_1), \dots, \psi_{\rho+1}^{(v_1-1)}(y_1), \psi_\rho^{(v_1-1)}(y_1) \\ \psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi_{x+1}(y_2), & \psi_x(y_2), & \psi_{x-1}(y_2), & \psi_{x-2}(y_2), \dots, \psi_{\rho+1}(y_2), \psi_\rho(y_2) \\ \psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi'_{x+1}(y_2), & \psi'_x(y_2), & \psi'_{x-1}(y_2), & \psi'_{x-2}(y_2), \dots, \psi'_{\rho+1}(y_2), \psi'_\rho(y_2) \\ \psi_{\rho+m}^{(v_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(v_2-1)}(y_2), & \dots, & \psi_{x+1}^{(v_2-1)}(y_2), & \psi_x^{(v_2-1)}(y_2), & \psi_{x-1}^{(v_2-1)}(y_2), & \psi_{x-2}^{(v_2-1)}(y_2), \dots, \psi_{\rho+1}^{(v_2-1)}(y_2), \psi_\rho^{(v_2-1)}(y_2) \\ \psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi_{x+1}(y_r), & \psi_x(y_r), & \psi_{x-1}(y_r), & \psi_{x-2}(y_r), \dots, \psi_{\rho+1}(y_r), \psi_\rho(y_r) \\ \psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi'_{x+1}(y_r), & \psi'_x(y_r), & \psi'_{x-1}(y_r), & \psi'_{x-2}(y_r), \dots, \psi'_{\rho+1}(y_r), \psi'_\rho(y_r) \\ \psi_{\rho+m}^{(v_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}^{(v_r-1)}(y_r), & \dots, & \psi_{x+1}^{(v_r-1)}(y_r), & \psi_x^{(v_r-1)}(y_r), & \psi_{x-1}^{(v_r-1)}(y_r), & \psi_{x-2}^{(v_r-1)}(y_r), \dots, \psi_{\rho+1}^{(v_r-1)}(y_r), \psi_\rho^{(v_r-1)}(y_r) \end{array}$$

($\lambda_i = 1, 2, \dots, r$; $\tau_{\lambda_i} = 0, 1, 2, \dots, v_{\lambda_i} - 1$; $\sigma = 1, 2, \dots, m$)

Aus derselben ergeben sich folgende Theoreme:

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum ρ^{ten} inclusive sämtlich positiv, bezeichnet ferner $\psi_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner dieser Entwicklung und ist

$$\begin{aligned}\psi_{\rho+\mu}(x) &= \tilde{\psi}_\mu(x) \psi_\rho(x) - \tilde{\varphi}_\mu(x) \psi_{\rho-1}(x) \\ \psi_{\rho-\mu-1}(x) &= \psi_\mu(x) \psi_{\rho-1}^*(x) - \tilde{\varphi}_\mu^*(x) \psi_\rho(x)\end{aligned}$$

verschwindet endlich keine der beiden ganzen Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$) und

$\tilde{\varphi}_m(x),$	$\tilde{\varphi}_{m-1}(x),$	$\tilde{\varphi}_2(x),$	1,	0
$\psi_{\rho+m}(y_1),$	$\psi_{\rho+m-1}(y_1),$	$\psi_{\rho+2}(y_1),$	$\psi_{\rho+1}(y_1),$	$\psi_\rho(y_1)$
$\psi'_{\rho+m}(y_1),$	$\psi'_{\rho+m-1}(y_1),$	$\psi'_{\rho+2}(y_1),$	$\psi'_{\rho+1}(y_1),$	$\psi'_\rho(y_1)$
$\psi_{\rho+m}^{(\nu_1-1)}(y_1),$	$\psi_{\rho+m-1}^{(\nu_1-1)}(y_1),$	$\psi_{\rho+2}^{(\nu_1-1)}(y_1),$	$\psi_{\rho+1}^{(\nu_1-1)}(y_1),$	$\psi_\rho^{(\nu_1-1)}(y_1)$
$\psi_{\rho+m}(y_2),$	$\psi_{\rho+m-1}(y_2),$	$\psi_{\rho+2}(y_2),$	$\psi_{\rho+1}(y_2),$	$\psi_\rho(y_2)$
$\psi'_{\rho+m}(y_2),$	$\psi'_{\rho+m-1}(y_2),$	$\psi'_{\rho+2}(y_2),$	$\psi'_{\rho+1}(y_2),$	$\psi'_\rho(y_2)$
$\psi_{\rho+m}^{(\nu_2-1)}(y_2),$	$\psi_{\rho+m-1}^{(\nu_2-1)}(y_2),$	$\psi_{\rho+2}^{(\nu_2-1)}(y_2),$	$\psi_{\rho+1}^{(\nu_2-1)}(y_2),$	$\psi_\rho^{(\nu_2-1)}(y_2)$
$\psi_{\rho+m}(y_r),$	$\psi_{\rho+m-1}(y_r),$	$\psi_{\rho+2}(y_r),$	$\psi_{\rho+1}(y_r),$	$\psi_\rho(y_r)$
$\psi'_{\rho+m}(y_r),$	$\psi'_{\rho+m-1}(y_r),$	$\psi'_{\rho+2}(y_r),$	$\psi'_{\rho+1}(y_r),$	$\psi'_\rho(y_r)$
$\psi_{\rho+m}^{(\nu_r-1)}(y_r),$	$\psi_{\rho+m-1}^{(\nu_r-1)}(y_r),$	$\psi_{\rho+2}^{(\nu_r-1)}(y_r),$	$\psi_{\rho+1}^{(\nu_r-1)}(y_r),$	$\psi_\rho^{(\nu_r-1)}(y_r)$

in dem Intervalle, innerhalb dessen die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ liegen, so sind sämtliche Wurzeln des ρ ten Näherungsnenners der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}f_1(x)$ reell und ungleich und werden durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ von einander getrennt.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum $(\rho+1)$ ten inclusive sämtlich positiv, bezeichnet ferner $\psi_{\rho+1}(x)$ den $(\rho+1)$ ten Näherungsnenner dieser Entwicklung und ist

$$\psi_{\rho+\mu+1}(x) = \tilde{\varphi}_\mu(x) \psi_{\rho+1}(x) - \tilde{\varphi}_{\mu-1}(x) \psi_\rho(x)$$

verschwindet endlich keine der beiden ganzen Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ ($\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m$) und

$$\left| \begin{array}{cccccc} \tilde{\varphi}_{m-1}(x), & \tilde{\varphi}_{m-2}(x), & \tilde{\varphi}_2(x), & 1, & 0, & -1 \\ \psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \psi_{\rho+3}(y_1), & \psi_{\rho+2}(y_1), & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\ \psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \psi'_{\rho+3}(y_1), & \psi'_{\rho+2}(y_1), & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+3}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+2}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_\rho^{(\nu_1-1)}(y_1) \\ \psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \psi_{\rho+3}(y_2), & \psi_{\rho+2}(y_2), & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\ \psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \psi'_{\rho+3}(y_2), & \psi'_{\rho+2}(y_2), & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+3}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+2}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_\rho^{(\nu_2-1)}(y_2) \\ \\ \psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \psi_{\rho+3}(y_r), & \psi_{\rho+2}(y_r), & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_\rho(y_r) \\ \psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \psi'_{\rho+3}(y_r), & \psi'_{\rho+2}(y_r), & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_\rho(y_r) \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+3}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+2}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_\rho^{(\nu_r-1)}(y_r) \end{array} \right|$$

in dem Intervalle, innerhalb dessen die Wurzeln von $\psi_{\rho+1}(x)$ liegen, so sind sämtliche Wurzeln des ρ^{ten} Näherungsnenners der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}f_1(x)$ reell und ungleich, und es liegt zwischen je zwei Wurzeln von $\psi_{\rho+1}(x)$ eine der eben genannten.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum ρ^{ten} inclusive sämtlich positiv, bezeichnet ferner $\psi_x(x)$ ($\rho+m \geq x > \rho+1$) den x^{ten} Näherungsnenner dieser Entwicklung, und ist

$$\begin{aligned}\psi_{x+\mu}(x) &= \tilde{\varphi}_\mu(x) \psi_x(x) - \tilde{\varphi}_\mu(x) \psi_{x-1}(x) \\ \psi_{x-\mu-1}(x) &= \tilde{\varphi}_\mu^*(x) \psi_{x-1}(x) - \tilde{\varphi}_\mu^*(x) \psi_x(x)\end{aligned}$$

verschwindet endlich die ganze Function $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ ($\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m$) in dem Intervalle, innerhalb dessen die Wurzeln von $\psi_x(x)$ liegen, nicht, so gibt es mindestens $x-\rho-1$ Paare von aufeinander folgenden Wurzeln von $\psi_x(x)$, zwischen deren Gliedern je eine ungerade Anzahl von Wurzeln der ganzen Function

$$\left(\begin{array}{cccccccc} -\tilde{\varphi}_{\rho+m-x}(x), & -\tilde{\varphi}_{\rho+m-x-1}(x), & -1, & 0, & 1, & \tilde{\varphi}_1^*(x), & \tilde{\varphi}_{x-\rho}^*(x), & \tilde{\varphi}_{x-\rho-1}^*(x) \\ \psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \psi_{x+1}(y_1), & \psi_x(y_1), & \psi_{x-1}(y_1), & \psi_{x-2}(y_1), & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\ \psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \psi'_{x+1}(y_1), & \psi'_x(y_1), & \psi'_{x-1}(y_1), & \psi'_{x-2}(y_1), & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\ \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{x+1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_x^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{x-1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{x-2}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_\rho^{(\nu_1-1)}(y_1) \\ \psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \psi_{x+1}(y_2), & \psi_x(y_2), & \psi_{x-1}(y_2), & \psi_{x-2}(y_2), & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\ \psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \psi'_{x+1}(y_2), & \psi'_x(y_2), & \psi'_{x-1}(y_2), & \psi'_{x-2}(y_2), & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 \psi_{\rho+m}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{x+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_x^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{x-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{x-2}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho}^{(\nu_2-1)}(y_2) \\
 \psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \psi_{x+1}(y_r), & \psi_x(y_r), & \psi_{x-1}(y_r), & \psi_{x-2}(y_r), & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_{\rho}(y_r) \\
 \psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \psi'_{x+1}(y_r), & \psi'_x(y_r), & \psi'_{x-1}(y_r), & \psi'_{x-2}(y_r), & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_{\rho}(y_r) \\
 \psi_{\rho+m}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \dots, & \psi_{x+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_x^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{x-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{x-2}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho}^{(\nu_r-1)}(y_r)
 \end{array}$$

sich befinden.

Von den speciellen Fällen dieser Theoreme mögen die folgenden erwähnt werden:

$$\text{Das Intervall } \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2n+1} \quad \cos \frac{2\lambda\pi}{2n+1} \text{ kann höchstens zwei, das Intervall } \cos \frac{2\lambda\pi}{2n+1} \quad \cos \frac{(2\lambda+1)\pi}{2n+1}$$

aber höchstens eine Wurzel der ersten Ableitung der Kugelfunction n ter Ordnung enthalten.

$$\text{Das Intervall } \cos \frac{\lambda\pi}{n+1} \dots \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2n} \text{ kann höchstens zwei, das Intervall } \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2n} \quad \cos \frac{(\lambda+1)\pi}{n+1}$$

aber höchstens eine Wurzel der ersten Ableitung der Kugelfunction n ter Ordnung enthalten.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum ρ ten inclusive sämmtlich positiv, liegen ferner die Wurzeln des ρ ten Näherungsnenners $\psi_{\rho}(x)$ derselben innerhalb der Grenzen a und b und bezeichnen $\bar{\psi}_{\rho}(x)$, $\tilde{\psi}_{\rho}(x)$, $\check{\psi}_{\rho}(x)$ beziehungsweise den ρ ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-a)f_1(x)$, $(x-b)f_1(x)$, $(x-a)(x-b)f_1(x)$, so sind die Wurzeln der eben genannten drei ganzen Functionen sämmtlich reell und ungleich, und es werden die Wurzeln

$\bar{\psi}_\rho(x)$ sowohl durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ als auch durch die Wurzeln von $(x-b)\bar{\psi}_\rho(x)$,
 $\bar{\psi}_\rho(x)$ sowohl durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ als auch durch die Wurzeln von $(x-a)\bar{\psi}_\rho(x)$,
 $\psi_\rho(x)$ durch die Wurzeln von $(x-a)(x-b)\bar{\psi}_{\rho-1}(x)$, endlich die Wurzeln von
 $\bar{\psi}_{\rho-1}(x)$ durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$

von einander getrennt.

Das letzte Theorem enthält als ganz specielle Fälle die folgenden zwei, von Herrn Possé in seinem interessanten Werke „Sur quelques applications des fractions continues algébriques“ aufgestellten Sätze:

Bleibt die Function $f(x)$ innerhalb der reellen Grenzen $a \dots b$ ($a < b$) reell und positiv und sind $U_n(x)$, $V_n(x)$ die n ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklungen der Integrale $\int_a^b \frac{(y-a)f(y)dy}{x-y}$, $\int_a^b \frac{(b-y)f(y)dy}{x-y}$, so werden die Wurzeln der Gleichung $U_n(x) = 0$ durch die Wurzeln der Gleichung $(x-b)V_n(x) = 0$, und umgekehrt die Wurzeln der Gleichung $V_n(x) = 0$ durch die Wurzeln der Gleichung $(x-a)U_n(x) = 0$ von einander getrennt.

Bleibt die Function $f(x)$ innerhalb des reellen Intervalles $a \dots b$ ($a < b$) reell und positiv und sind $\varphi_n(x)$, $W_n(x)$ die n ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der Integrale $\int_a^b \frac{f(y)dy}{x-y}$, $\int_a^b \frac{(y-a)(b-y)f(y)dy}{x-y}$, so werden die Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(x) = 0$ durch die Wurzeln der Gleichung $(x-a)(x-b)W_{n-1}(x) = 0$ und umgekehrt die Wurzeln der Gleichung $W_{n-1}(x) = 0$ durch die Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(x) = 0$ von einander getrennt.

§. 4. Die in den vorigen Paragraphen entwickelten Formeln gestatten auch die Aufstellung von neuen Interpolationsformeln und Ausdrücken für die näherungsweise Berechnung von bestimmten Integralen, von denen einige in diesem Abschnitte angegeben werden mögen.

Sind die Grössen $y_1, y_2, \dots, y_r$ so beschaffen, dass Näherungsnenner $\bar{\psi}_p(x)$ von allen Graden existiren und die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_\tau$ des τ ten von ihnen unter einander verschieden sind, so hat man bekanntlich für jede ganze Function $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $\tau-1$ folgende Entwicklung nach den Functionen $\bar{\psi}_p(x)$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\tau-1} b_\lambda x^\lambda = \varphi(x) = \sum_{p=0}^{p=\tau-1} \bar{a}_p \bar{\psi}_p(x),$$

wo die Constanten $\bar{a}_p$ mit Hilfe der Werthe, welche die Function $\varphi(x)$ an den Nullstellen von $\bar{\psi}_\tau(x)$ annimmt, sich in folgender Weise darstellen lassen:

$$\bar{a}_p = \bar{a}_{p+1} \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau} \frac{\varphi(x_\mu) \bar{\psi}_p(x_\mu)}{\bar{\psi}_{\tau-1}(x_\mu) \bar{\psi}'_\tau(x_\mu)}.$$

Sind die Werthe der darzustellenden Function aber nicht für die Nullstellen von $\bar{\psi}_\tau(x)$, sondern für die Wurzeln $x'_1, x'_2, \dots, x'_x$ des Näherungsnenners $\psi_x(x)$ ($\tau+m \leq x$) gegeben, so ergibt sich mit Hilfe der obigen Entwicklungen, wie man sofort sieht, die folgende neue interpolatorische Darstellung von $\bar{a}_p$:

$$\bar{a}_p = \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{(x'_\mu - y_1)^{v_1} (x'_\mu - y_2)^{v_2} \dots (x'_\mu - y_r)^{v_r} \varphi(x'_\mu) \bar{\psi}_p(x'_\mu)}{\psi_{x-1}(x'_\mu) \psi'_x(x'_\mu)}}{\sum_{u=1}^{\mu=x} \frac{(x'_\mu - y_1)^{v_1} (x'_\mu - y_2)^{v_2} \dots (x'_\mu - y_r)^{v_r} \bar{\psi}_p^2(x'_\mu)}{\psi_{x-1}(x'_\mu) \psi'_x(x'_\mu)}},$$

welche allerdings die Kenntniss von mindestens $\tau+m$ Werthen von $\varphi(x)$ erfordert, dennoch aber der früheren vorzuziehen sein wird, wenn für die auf die Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ bezügliche interpolatorische Darstellung Hilfstabellen berechnet sind, während für die auf die Functionen $\psi_\rho(x)$ bezügliche keine solchen existiren. Für diese Darstellung der Constanten $\bar{a}_\rho$ lässt sich sofort folgende bemerkenswerthe Eigenschaft erweisen:

Verfährt man bei der Bildung der Grössen $\bar{a}_\rho$ so, als wenn $\varphi(x)$ eine ganze Function vom Grade $\tau-\sigma$ wäre, d. i. interpolirt man dieselben mit Hilfe der letzten Formel nicht aus den Functionswerthen an den Nullstellen von $\psi_{\tau+m}(x)$, sondern aus jenen Werthen, welche sie für die Wurzeln von $\psi_{\tau-\sigma+m}(x)$ annimmt, so ist der bei dieser Bestimmung des Coëfficienten $\bar{a}_\rho$ gemachte Fehler nur von den Grössen $b_{2\tau-2\sigma+m-\rho}$, $b_{2\tau-2\sigma+m-\rho+1}$, ..., $b_{\tau-1}$ abhängig, und demnach gleich Null, wenn $\tau+m \geq 2\sigma+\rho$ ist.

Von den speciellen Interpolationsformeln, welche in der eben aufgestellten allgemeinen enthalten sind, mögen die folgenden besonders angeführt werden:

Ist die ganze Function $(x-y_1)^{v_1}(x-y_2)^{v_2}(x-y_r)^{v_r}$ innerhalb der Grenzen $-1 \dots +1$ reell und positiv, so bestehen für jede ganze Function $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $\tau-1$ die interpolatorischen Darstellungen

$$\varphi(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-1} \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m} \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} - y_1 \right)^{v_1} \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} - y_2 \right)^{v_2} \dots \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} - y_r \right)^{v_r} \varphi \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} \right) \psi_\rho \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} \right)}{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m} \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} - y_1 \right)^{v_1} \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} - y_2 \right)^{v_2} \dots \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} - y_r \right)^{v_r} \psi_\rho^2 \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m} \right)} \psi_\rho(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-1} \sum_{\lambda=\tau+m}^{\lambda=\tau+m} \frac{\left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} - y_1 \right)^{v_1} \left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} - y_2 \right)^{v_2}}{\left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} - y_1 \right)^{v_1} \left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} - y_2 \right)^{v_2}} \cdot$$

$$\frac{\dots \left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} - y_r \right)^{v_r} \varphi \left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} \right) \bar{\psi}_\rho \left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} \right) \sin^2 \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}}{\left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} - y_r \right)^{v_r} \bar{\psi}_\rho^2 \left(\cos \frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} \right) \sin^2 \left(\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1} \right)} \bar{\psi}_\rho(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m} \frac{\left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} - y_1 \right)^{v_1} \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} - y_2 \right)^{v_2}}{\left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} - y_1 \right)^{v_1} \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} - y_2 \right)^{v_2}} \cdot$$

$$\frac{\left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} - y_r \right)^{v_r} \varphi \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} \right) \Psi_\rho \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} \right) \sin^2 \left(\frac{\lambda\pi}{2\tau+2m+1} \right)}{\left(\cos \frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} - y_r \right)^{v_r} \sin^2 \left(\frac{\lambda\pi}{2\tau+2m+1} \right) \Psi_\rho^2 \left(\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1} \right)} \Psi_\rho(x),$$

wo die ganzen Functionen ρ^{ten} Grades $\psi_\rho(x)$, $\bar{\psi}_\rho(x)$, $\Psi_\rho(x)$ der Reihe nach die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklungen der Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-y_1)^{\nu_1} (z-y_2)^{\nu_2} \dots (z-y_r)^{\nu_r} dz}{(x-z) \sqrt{1-z^2}}, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{(z-y_1)^{\nu_1} (z-y_2)^{\nu_2} \dots (z-y_r)^{\nu_r} \sqrt{1-z^2} dz}{x-z},$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \frac{(z-y_1)^{\nu_1} (z-y_2)^{\nu_2} \dots (z-y_r)^{\nu_r} dz}{x-z}$$

vorstellen.

Aus der obigen allgemeinen Interpolationsformel folgen ferner folgende Theoreme über die Vertheilung der Wurzeln einer ganzen Function sowie der negativen Vorzeichen in der Reihe der Entwicklungscoefficienten von zwei in gewissem Zusammenhange stehenden, nach bestimmten ganzen Functionen entwickelten ganzen Functionen:

Sind $\mathfrak{S}(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$) im reellen Intervalle $-a \dots b$ ($b, a > 0$) reell, positiv und so beschaffen, dass die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) y_n']' = c_n (x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) y_n$$

$$(c_n > c_m > 0; n > m)$$

für jedes ganzzahlige, nicht negative n eine ganze Function n^{ten} Grades $\psi_n(x)$, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x positiv genommen werden soll, als particuläres Integral besitzt, sind ferner in der Entwicklung der ganzen Function $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ nach den ganzen Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit

den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_1}$ wirklich vorhanden, so ist die Anzahl der ausserhalb des Intervalles $-a \dots b$ liegenden Wurzeln dieser Function nach dem Modul 2 congruent dem Ausdrucke

$$\sum_{x=1}^{x=r_1-1} \text{sign.} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right) \pm r_1 - 1,$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von x zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_x + \lambda_{x+1}$ gerade ist und die Grössen x_μ die Wurzeln des einen positiven Coëfficienten von $x^{\tau+m}$ besitzenden $(\tau+m)$ ten Näherungsnenners $\Psi_{\tau+m}(x)$ der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^{+b} \frac{\mathfrak{P}(z) dz}{x-z}$$

sind, während die Anzahl der im Intervalle $-a \dots b$ (mit Ausschluss der Grenzen) befindlichen Wurzeln mit der Summe

$$\tau \pm r_1 \pm \sum_{x=1}^{x=r_1-1} \text{sign.} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right)$$

denselben Charakter in Bezug auf den Modul 2 besitzt.

Ist a eine reelle, endliche, nicht negative Zahl, sind ferner $\mathfrak{S}(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x)$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$) im Intervalle $-a \dots \infty$ reell, endlich positiv und so beschaffen, dass der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[(x+a)^{x+1}(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) y_n']' = c_n(x+a)^x(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) y_n$$

$$(c_n > c_m > 0; n > m)$$

für jedes ganzzahlige, nicht negative n eine ganze Function n ten Grades $\psi_n(x)$, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x positiv genommen werden soll, als particuläres Integral genügt, ist weiter $(-a-y_1)^{\nu_1}$

$\cdot (-a-y_2)^{\nu_2} \dots (-a-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(-a)$ von Null verschieden und $\lim_{x=\infty} \frac{1}{(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x)}$

stärker unendlich als jede Potenz, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)$ ten Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_1}$ wirklich vorhanden, so ist die Anzahl derjenigen negativen Wurzeln von $\varphi(x)$, deren absoluter Betrag nicht kleiner als a ist, nach dem Modul 2 congruent dem Ausdrücke

$$\frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=r_1-1} \left\{ 1 + (-1)^{\lambda_x + \lambda_{x+1} - 1} \text{sign} \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right. \right.$$

$$\left. \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right\},$$

wo die Grössen x_μ die Wurzeln des, ebenso wie $\Psi_{\tau+m-1}(x)$ einen positiven Coëfficienten der höchsten Potenz von x besitzenden $(\tau+m)$ ten Näherungsenners $\Psi_{\tau+m}(x)$ der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^{\infty} \frac{\mathfrak{S}(z) dz}{x-z}$$

vorstellen, während die Anzahl der dem Intervalle $-a \dots \infty$ (mit Ausschluss der Grenzen) angehörigen Wurzeln mit der Differenz

$$-1 + \tau - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r_1-1} \left\{ 1 + (-1)^{\lambda_{\lambda} + \lambda_{\lambda+1}-1} \operatorname{sign} \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{\lambda}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r) \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{\lambda+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right) \right\}$$

gleichen Charakter in Bezug auf den Modul 2 besitzt.

Sind a, b, c, d endliche reelle nicht negative Grössen, sind ferner die Functionen $\mathfrak{S}(x)$ und $(x-y)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ im Intervalle $-a \dots b$, die Functionen $\mathfrak{S}_1(x)$ und $(x-z_1)^{\mu_1} (x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s}$ (ν_λ und μ_λ ganzzahlig, nicht negativ, $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = m$) im Intervalle $-c \dots d$ reell, endlich, positiv und so beschaffen, dass die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) y'_n]' = c_n (x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) y_n \\ (c_n > c_m > 0; n > m)$$

$$[(x+c)(x-d)(x-z_1)^{\mu_1} (x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s} \mathfrak{S}_1(x) y'_n]' = d_n (x-z_1)^{\mu_1} (x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s} \mathfrak{S}_1(x) z_n \\ (d_n > d_m > 0; n > m)$$

für jedes ganzzahlige, nicht negative n ganze Functionen n ten Grades $\psi_n(x)$, $\chi_n(x)$, in welchen der Coëfficient der höchsten Potenz von x positiv genommen werden soll, zu particulären Integralen haben, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)$ ten Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den

Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_1}$, in der Entwicklung von $\varphi\left(\frac{(a+b)x+ac-bd}{c+d}\right)$ nach den Functionen $\chi_n(x)$ genau s_1 Glieder mit den Indices $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{s_1}$ wirklich vorhanden, so ist

$$\sum_{x=1}^{x=r_1-1} \text{sign} \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} + r_1 \equiv \sum_{x=1}^{x=s_1-1} \text{sign} \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s}}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{\tau+m}(x'_\mu)} \right) \cdot \varphi\left(\frac{(a+b)x'_\mu+ac-bd}{c+d}\right) \chi_{\lambda'_x}(x'_\mu) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s}}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{\tau+m}(x'_\mu)} \varphi\left(\frac{(a+b)x'_\mu+ac-bd}{c+d}\right) \chi_{\lambda'_{x+1}}(x'_\mu), \pmod{2}$$

wo die Marken an den Summenzeichen andeuten, dass nur jene Indices λ , beziehungsweise λ' , zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_x + \lambda_{x+1}$, beziehungsweise $\lambda'_x + \lambda'_{x+1}$, gerade ist und die Grössen x_μ , beziehungsweise x'_μ , die Wurzeln des, wie alle vorhergehenden, mit positivem Coëfficienten der höchsten Potenz von x genommenen $(\tau+m)$ ten Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^b \frac{\mathfrak{S}(z) dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_{-c}^d \frac{\mathfrak{S}_1(z) dz}{x-z},$$

vorstellen.

Sind a, b endliche reelle, nicht negative Zahlen, sind ferner die Functionen $\mathfrak{S}(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ im Intervalle $-a \dots b$, die Functionen $(x-z_1)^{\mu_1} (x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s}$ $\mathfrak{S}_1(x)$ (ν_λ und μ_λ ganzzahlig nicht negativ; $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = m$) und $\mathfrak{S}_1(x)$ für alle nicht negativen x endlich und positiv und so beschaffen, dass $\lim_{x=\infty} \frac{1}{\mathfrak{S}_1(x)}$ stärker unendlich wird als jede Potenz, und für jedes ganzzahlige

$$[(x+a)(x-b)(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{D}(x) y'_n]' = c_n (x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{D}(x) y_n$$

$$(c_n > c_m > 0; n > m)$$

$$[x^{s+1} \mathfrak{D}_1(x)(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s} z'_n]' = d_n (x-z_1)^{\mu_1} (x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s} \mathfrak{D}_1(x) z_n$$

$$(d_n > d_m > 0; n > m)$$

ganze Functionen vom Grade n $\psi_n(x)$ und $\chi_n(x)$, in denen der Coefficient von x^n positiv genommen werden soll, zu particulären Integralen haben, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function ($\tau-1$)ten Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, in der Entwicklung von $(1+x)^{\tau-1} \varphi\left(\frac{b-ax}{1+x}\right)$ nach den Functionen $\chi_n(x)$ genau s_1 Glieder mit den Indices $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{s_1}$ wirklich vorhanden, so ist

$$r-1 + \sum_{x=1}^{x=r_1-1} \text{sign.} \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right.$$

$$\left. \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=s_1-1} \left\{ 1 + (-1)^{\lambda'_x + \lambda'_{x+1} - 1} \right.$$

$$\cdot \text{sign.} \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s} (1+x'_\mu)^{\tau-1} \varphi\left(\frac{b-ax'_\mu}{1+x'_\mu}\right) \chi_{\lambda'_x}(x'_\mu)}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{\tau+m}(x'_\mu)} \right.$$

$$\left. \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s} (1+x'_\mu)^{\tau-1} \varphi\left(\frac{b-ax'_\mu}{1+x'_\mu}\right) \chi_{\lambda'_{x+1}}(x'_\mu)}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{\tau+m}(x'_\mu)} \right\} \pmod{2},$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Indices λ zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_x + \lambda_{x+1}$ gerade ist und die Grössen x_μ , beziehungsweise x'_μ , die Wurzeln des, wie alle vorhergehenden, mit positivem Coëfficienten der höchsten Potenz von x genommenen $(\tau+m)$ ten Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^b \frac{\mathfrak{S}(z) dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_0^\infty \frac{z^\kappa \mathfrak{S}_1(z) dz}{x-z},$$

vorstellen.

Sind a, b endliche, reelle, nicht negative Zahlen, sind ferner die Functionen $\mathfrak{S}(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$) im Intervalle $-a \dots b$, die Functionen $\mathfrak{S}_1(x)$ und $(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s}$ (μ_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = m$) für alle nicht negativen x endlich positiv und so beschaffen, dass $\lim_{x=\infty} \frac{1}{\mathfrak{S}_1(x)}$ stärker unendlich wird als jede Potenz und für jedes ganzzahlige, nicht negative n die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} (x+a)(x-b) \mathfrak{S}(x) y'_n]' = c_n (x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) y_n \quad (c_n > c_m > 0; n > m)$$

$$[x^{\kappa+1}(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s} \mathfrak{S}_1(x) y'_n]' = d_n (x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2} \dots (x-z_s)^{\mu_s} x^\kappa \mathfrak{S}_1(x) z_n \quad (d_n > d_m > 0; n > m)$$

ganze Functionen n ten Grades $\psi_n(x)$ und $\chi_n(x)$, in denen der Coëfficient von x^n positiv genommen werden soll, zu particulären Integralen haben, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)$ ten Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_1}$, in der Entwicklung von $\varphi(-a+x^2)$, beziehungsweise $\varphi(b+x^2)$, nach den Functionen $\chi_n(x)$ genau s_1 , beziehungsweise t_1 , Glieder mit den Indices $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{s_1}$, beziehungsweise $\lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_{t_1}$, wirklich vorhanden, so ist

$$\begin{aligned}
& (r-1) + \sum_{x=1}^{x=r_1-1} \text{sign.} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right. \\
& \quad \left. \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1} (x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\mu) \psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu) \Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=s_1-1} \left\{ 1 + (-1)^{\lambda'_x + \lambda'_{x+1} - 1} \right. \\
& \quad \cdot \text{sign.} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s} \varphi(-a + x'^2_\mu) \chi_{\lambda'_x}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{2\tau+m}(x'_\mu)} \right. \\
& \quad \left. \sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s} \varphi(-a + x'^2_\mu) \chi_{\lambda'_{x+1}}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{2\tau+m}(x'_\mu)} \right\} \pm \\
& \quad \pm \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=t_1-1} \left\{ 1 + (-1)^{\lambda''_x + \lambda''_{x+1} - 1} \text{sign.} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s} \varphi(b + x'^2_\mu) \chi_{\lambda''_x}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{2\tau+m}(x'_\mu)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m} \frac{(x'_\mu - z_1)^{\mu_1} (x'_\mu - z_2)^{\mu_2} \dots (x'_\mu - z_s)^{\mu_s} \varphi(b + x'^2_\mu) \chi_{\lambda''_{x+1}}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu) X'_{2\tau+m}(x'_\mu)} \right\} \pmod{2},
\end{aligned}$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Indices λ zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_x + \lambda_{x+1}$ gerade ist, und die Grössen x_μ , beziehungsweise x'_μ , die Wurzeln des, wie alle vorhergehenden, mit positivem Coëfficienten der höchsten Potenz von x genommenen $(\tau+m)$ ten, beziehungsweise $(2\tau+m)$ ten Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^b \frac{\mathfrak{S}(z) dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_0^\infty \frac{z^\kappa \mathfrak{S}_1(z) dz}{x-z},$$

vorstellen.

Aus der aufgestellten Interpolationsformel folgt ferner das auch aus meinen früheren einschlägigen Untersuchungen leicht sich ergebende Theorem aus der Theorie der mechanischen Quadraturen.

Sind $\mathfrak{S}(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = m$) im reellen Intervalle $a \dots b$ reell und positiv, bezeichnet ferner $\psi_\kappa(x)$, beziehungsweise $\bar{\psi}_\kappa(x)$, den κ ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{\mathfrak{S}(z) dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_a^b \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2} \dots (z-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(z) dz}{x-z},$$

so ist

$$\int_a^b (x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \varphi(x) \mathfrak{S}(x) \bar{\psi}_\rho(x) dx = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\kappa} \frac{(x_\lambda - y_1)^{\nu_1}(x_\lambda - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\lambda - y_r)^{\nu_r} \varphi(x_\lambda) \bar{\psi}_\rho(x_\lambda)}{\psi_{\kappa-1}(x_\lambda) \psi'_\kappa(x_\lambda)} + \Delta,$$

wo die Grössen $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ die Wurzeln des Näherungsnenners $\psi_\kappa(x)$ sind und der Rest Δ für alle ganzen Functionen $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $2\kappa - m - \rho - 1$ verschwindet.

Von den speciellen Fällen, welche in diesem Satze enthalten sind, mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Ist die ganze Function $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ innerhalb der Grenzen $-1 \dots +1$ reell und positiv und bezeichnet $\psi_\rho(x)$ den ρ ten Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-y_1)^{\nu_1} (z-y_2)^{\nu_2} \dots (z-y_r)^{\nu_r} dz}{(x-z) \sqrt{1-z^2}},$$

so ist

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \frac{(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \varphi(x) \psi_\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ & = \frac{\pi}{x} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=x} \left\{ \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2x} - y_1 \right\}^{\nu_1} \left\{ \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2x} - y_2 \right\}^{\nu_2} \dots \left\{ \cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2x} - y_r \right\}^{\nu_r} \varphi \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2x} \right) \psi_\rho \left(\cos \frac{(2\lambda-1)\pi}{2x} \right), \end{aligned}$$

wo Δ für alle ganzen Functionen $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $2x - \nu_1 - \nu_2 - \dots - \nu_r - \rho - 1$ verschwindet.

Sind $x_1, x_2, \dots, x_x$ die Wurzeln der Kugelfunction x^{ter} Ordnung, $a_1, a_2, \dots, a_x$ die Coëfficienten der derselben entsprechenden Gauss'schen Formel für die mechanische Quadratur, und bezeichnet $P_{\rho, i}(x)$ die i^{te} Zugeordnete der ρ^{ten} Kugelfunction (nach der F. Neumann'schen Terminologie), so ist

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) (1-x^2)^{\frac{i}{2}} P_{\rho, i}(x) dx = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=x} a_\lambda (1-x_\lambda^2)^{\frac{i}{2}} \varphi(x_\lambda) P_{\rho, i}(x_\lambda) + \Delta,$$

wo Δ für alle ganzen Functionen $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $2x - i - \rho - 1$ verschwindet.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass man auf Grund der früheren Auseinandersetzungen die Coëfficienten $\bar{a}_\rho$ der oft erwähnten allgemeinen Interpolationsformel mit Hilfe der Coëfficienten A_ρ der Entwicklung von $\varphi(x)$ nach den Näherungsnennern $\psi_\rho(x)$ in folgender Weise darstellen kann:

$$\bar{a}_\rho = \frac{(-1)^m |\psi_{\rho+m+1-\sigma}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|}{|\psi_{\rho+m-\sigma}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)|} \left| \begin{array}{cccc} \alpha_{\rho+m+1} A_{\rho+m}, & \alpha_{\rho+m} A_{\rho+m-1}, & \alpha_{\rho+2} A_{\rho+1}, & \alpha_{\rho+1} A_\rho \\ \psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\ \psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\ \\ \psi_{\rho+m}^{(v_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}^{(v_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+1}^{(v_1-1)}(y_1), & \psi_\rho^{(v_1-1)}(y_1) \\ \psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\ \psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \\ \\ \psi_{\rho+m}^{(v_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(v_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+1}^{(v_2-1)}(y_2), & \psi_\rho^{(v_2-1)}(y_2) \\ \\ \psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_\rho(y_r) \\ \psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_\rho(y_r) \\ \\ \psi_{\rho+m}^{(v_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}^{(v_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+1}^{(v_r-1)}(y_r), & \psi_\rho^{(v_r-1)}(y_r) \end{array} \right|$$

Es soll nun eine Relation abgeleitet werden, in welcher eine gewisse Specialisirung der von mir¹ abgeleiteten Verallgemeinerung der von Herrn Christoffel in seiner wichtigen Abhandlung²: „Über die Gauss'sche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben“ aufgestellten Formel zur möglichst vortheilhaften näherungs-

¹ „Zur Theorie der mechanischen Quadraturen.“ Diese Sitzungsberichte, 78. Bd., II. Abth., S. 768—778.

² Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 55. Bd.

weisen Berechnung eines bestimmten Integrales, falls ein Theil der Werthe des Argumentes, für welche die zu integrierende Function gegeben ist, nicht willkürlich gewählt werden kann, sondern im Vorhinein bestimmt ist, als specieller Fall enthalten ist.

Kennt man die Werthe, welche eine Function $\varphi(x)$ nebst $(\nu_\lambda - 1)$ aufeinanderfolgenden Ableitungen an den vollkommen willkürlich nur im Endlichen gewählten Stellen y_λ annimmt, für $\lambda = 1, 2, \dots, r+x$, so hat man bekanntlich nach der verallgemeinerten Lagrange'schen Interpolationsformel die Relation

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \sum_{\lambda=1, \rho=0}^{\lambda=r+x, \rho=\nu_\lambda-1} \frac{A_{\lambda, \rho} (x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}} (x-y_\lambda)^\rho (x-y_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}} (x-y_{\lambda+2})^{\nu_{\lambda+2}} \dots (x-y_{r+x})^{\nu_{r+x}}}{\Pi(\rho) (y_\lambda - y_1)^{\nu_1} (y_\lambda - y_2)^{\nu_2} \dots (y_\lambda - y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}} (y_\lambda - y_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}} (y_\lambda - y_{\lambda+2})^{\nu_{\lambda+2}} \dots (y_\lambda - y_{r+x})^{\nu_{r+x}}} + \\ & + \frac{(x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_{r+x})^{\nu_{r+x}}}{\Pi(\nu_1-1) \Pi(\nu_2-1) \dots \Pi(\nu_{r+x}-1)} \int_0^1 dz_{r+x} \int_0^{z_{r+x}} dz_{r+x-1} \int_0^{z_{r+x-1}} dz_{r+x-2} \dots \int_0^{z_2} \varphi^{(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{r+x})} \{ (x-y_1) z_1 + (y_1-y_2) \cdot \\ & \cdot z_2 + \dots + (y_{r+x-1}-y_{r+x}) z_{r+x} + y_{r+x} \} (z_2-z_1)^{\nu_1-1} (z_3-z_2)^{\nu_2-1} \dots (z_{r+x}-z_{r+x-1})^{\nu_{r+x}-1} (1-z_{r+x})^{\nu_{r+x}-1} dz_1, \end{aligned}$$

wo die Constanten $A_{\lambda, \rho}$ durch die Gleichungen

$$\varphi^{(\sigma)}(y_\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\tau=\nu_\lambda-1} (\nu_\lambda - 1) \varphi_{\lambda, \tau}^{(\sigma-\tau)}(y_\lambda) A_{\lambda, \tau} \quad (\sigma = 0, 1, 2, \dots, \nu_\lambda - 1; \lambda = 1, 2, \dots, r+x)$$

bestimmt werden, wenn $\varphi_{\lambda, \tau}(x)$ der Coefficient von $A_{\lambda, \tau}$ in der auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden ganzen Function von x ist.

Es seien nun die Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ und $\mathfrak{S}(x)$ innerhalb des reellen Intervalles $a \dots b$ reell und stets positiv oder negativ, ferner $y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{r+x}$ die Wurzeln des x^{ten} Näherungsnenners $\bar{\psi}_x(x)$ der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2} \dots (z-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(z) dz}{x-z} \quad (\nu_\lambda \text{ ganzzahlig, nicht negativ}).$$

Beachtet man, dass das Integral

$$\int_a^b \frac{(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) \bar{\psi}_x(x) dx}{(z-x)^\tau}$$

die mit $\frac{(-1)^{\tau-1}}{\Pi(\tau-1)}$ multiplicirte $(\tau-1)^{\text{te}}$ Ableitung der $(x+1)^{\text{ten}}$ Restfunction $\bar{f}_{x+1}(z)$ dieser Kettenbruchentwicklung ist, sowie dass für jede ganze Function $\chi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $x-1$

$$\int_a^b (x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) \chi(x) \bar{\psi}_x(x) dx = 0$$

ist, so leitet man aus der angeführten Relation sofort die Formel

$$\begin{aligned} & \int_a^b \varphi(x) \mathfrak{S}(x) dx = \\ & = - \sum_{\lambda=1, \rho=0}^{\lambda=r+x, \rho=\nu_\lambda-1} \frac{A_{\lambda, \rho} \bar{f}_{x+1}^{(\nu_\lambda-\rho-1)}(y_\lambda)}{\Pi(\rho) \Pi(\nu_\lambda-\rho-1) (y_\lambda-y_1)^{\nu_1} (y_\lambda-y_2)^{\nu_2} \dots (y_\lambda-y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}} (y_\lambda-y_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}} (y_\lambda-y_{\lambda+2})^{\nu_{\lambda+2}} \dots (y_\lambda-y_{r+x})^{\nu_{r+x}}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\varphi^{(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r + 2x)}(\xi)}{\Pi(\nu_1 - 1) \Pi(\nu_2 - 1) \dots \Pi(\nu_r - 1) \Pi(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r + 2x - 1) \{[\bar{\psi}_x(x)]_{xx}\}^2} \\ \int_a^b \bar{\psi}_x^2(x) (x - y_1)^{\nu_1} (x - y_2)^{\nu_2} \dots (x - y_r)^{\nu_r} \mathfrak{S}(x) dx \quad (\nu_{r+1} = \nu_{r+2} = \dots = \nu_{r+x} = 1)$$

ab, welche die möglichst vortheilhafte angenäherte Ermittlung eines bestimmten Integrales aus den Werthen, welche die zu integrirenden Functionen nebst einer Reihe von aufeinanderfolgenden Ableitungen derselben an vorgeschriebenen und die Function an passend gewählten Stellen annimmt, gestattet. In derselben bedeutet ξ eine zwischen a und b liegende Zahl.

Setzt man in dieser Formel

$$\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_r = 1,$$

so erhält man meine oben erwähnte Relation in dem speciellen Falle, dass die Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{\mathfrak{S}(z) dz}{x - z}$$

regulär ist, wenn man berücksichtigt, dass

$$\bar{f}_{x+1}(x_\lambda) = -\bar{\varphi}_x(x_\lambda)$$

ist.

Die eben abgeleitete Formel, welche, wie ich demnächst zu zeigen gedenke, zu einer bedeutenden Verallgemeinerung der berühmten Tchebycheff'schen Ungleichungen führt, liefert sofort folgenden Satz, aus welchem sich durch Specialisirung einige speciellere Theoreme des Herrn Markof ergeben.

Andern die Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ) $\varphi^{(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r+2x)}(x)$ und $\mathfrak{S}(x)$ in dem reellen Intervalle $a \dots b$ ihr Zeichen nicht, so ist:

$$\int_a^b \varphi(x) \mathfrak{S}(x) dx \geqslant - \sum_{\lambda=1, \rho=0}^{\lambda=r+x, \rho=\nu_\lambda-1} \frac{A_{\lambda, \rho} \bar{f}_{x+1}^{(\nu_\lambda-1)}(y_\lambda)}{\Pi(\rho) \Pi(\nu_\lambda-\rho-1) (y_\lambda-y_1)^{\nu_1} (y_\lambda-y_2)^{\nu_2} \dots (y_\lambda-y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}} (y_\lambda-y_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}} (y_\lambda-y_{\lambda+2})^{\nu_{\lambda+2}} \dots (y_\lambda-y_{r+x})^{\nu_{r+x}}},$$

je nachdem das Product $-\varphi^{(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r+2x)}(x) \mathfrak{S}(x) (x-y_1)^{\nu_1} (x-y_2)^{\nu_2} \dots (x-y_r)^{\nu_r}$ für alle im Intervalle $a \dots b$ befindlichen Werthe von x das positive oder das negative Vorzeichen besitzt.

In der Physik, Astronomie, Meteorologie, Mineralogie u. s. f. handelt es sich häufig darum, eine über eine Oberfläche sich ausdehnende unbekannte Function wenigstens annäherungsweise auf Grund einer Reihe von Beobachtungen zu bestimmen. Solche für die ganze Erdoberfläche existirende Functionen sind beispielsweise die Constanten des Erdmagnetismus, die Temperatur der Erde u. s. f., für die Oberfläche eines Krystalles die Ätzfiguren u. s. w. Da sich bekanntlich jede endliche eindeutige Function $f(\mathfrak{S}, \psi)$ des Ortes auf der Oberfläche einer Kugel nach Kugelfunctionen in eine gleichmässig convergirende Reihe von folgender Gestalt entwickeln lässt

$$f(\mathfrak{S}, \psi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n(\mathfrak{S}, \varphi), \quad (0 \leqslant \mathfrak{S} \leqslant \pi; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$$

wo

$$Y_n(\mathfrak{S}, \psi) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (A'_{n, \lambda} \cos \lambda \varphi + B'_{n, \lambda} \sin \lambda \varphi) P_{n, \lambda}(\cos \mathfrak{S})$$

ist, so ist in einem solchen Falle die Aufgabe zu lösen, möglichst viele aufeinanderfolgende Constanten $A'_{n,\lambda}$, $B'_{n,\lambda}$ dieser Entwicklung, welche bekanntlich durch die Gleichungen

$$A'_{n,\lambda} = \frac{(2n+1)\varepsilon_r}{2\pi} \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi(n+\lambda)} \int_0^\pi \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) P_{n,\lambda}(\cos \vartheta) \cos n\varphi d\vartheta d\varphi \quad (\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_r = 2; r > 0)$$

$$B'_{n,\lambda} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi(n+\lambda)} \int_0^\pi \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) P_{n,\lambda}(\cos \vartheta) \sin n\varphi d\vartheta d\varphi$$

bestimmt sind, mit Hilfe der gegebenen, beziehungsweise beobachteten Functionswerthe zu berechnen. Die für die Praxis geeignetste Methode wird demnach offenbar diejenige sein, bei welcher einerseits bei verlangter Genauigkeit dieser Ermittlung die Anzahl der zur Bestimmung einer vorgeschriebenen Anzahl von Constanten erforderlichen Beobachtungen möglichst klein, und andererseits, da es sich bei praktischen Zwecken um Zeitersparniss handelt, die nothwendige Rechenarbeit ein Minimum ist. Hiebei wird oft zu beachten sein, dass es aus in der Natur der Untersuchung liegenden Gründen sich empfehlen wird, das Verfahren so einzurichten, dass durch dasselbe nicht alle Constanten mit derselben Genauigkeit bestimmt werden, sondern dass die Genauigkeit für die das Schlussresultat am meisten beeinflussenden Constanten dadurch vergrößert wird, dass man bei den übrigen grössere Fehler zulässt, als eine gleichmässige Berücksichtigung aller erfordern würde. Schon im Jahre 1838 hat, wie in der Einleitung erwähnt wurde, Herr F. Neumann eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Constanten bis zu jeder beliebig vorgeschriebenen Ordnung der Kugelfunctionen, bei der die Genauigkeit der Bestimmung mit wachsendem Index der Coëfficienten abnimmt, angegeben, welche voraussetzt, dass die $2n(n+1)$ Beobachtungsorte an denjenigen Punkten der Erdoberfläche liegen, in welchen $2n$ gleich weit von einander abstehende Meridiane von $n+1$ durch die Wurzeln der Kugelfunction $P_{n+1}(x)$ bestimmten Parallelkreisen

geschnitten werden. Es hat übrigens schon Herr C. Neumann hervorgehoben, „dass es nicht einmal nothwendig ist, dass die Beobachtungsorte genau nach diesem Gesetze auf der Erdoberfläche vertheilt sind, da man die an den eigentlich verlangten Orten vorhandenen Werthe durch gewöhnliche Interpolation aus den an den benachbarten Orten angestellten Beobachtungen ableiten kann“. Die in der vorliegenden Mittheilung enthaltenen Auseinandersetzungen zeigen nun, dass man einerseits unter Verringerung der Genauigkeit in der Bestimmung der anfänglichen Coëfficienten eine erheblich präcisere Ermittlung der späteren erreichen kann, wenn man für die Breiten der Beobachtungsorte nicht die Wurzeln der Kugelfunction $P_{n+1}(x)$, sondern einer Ableitung einer solchen Function von höherer Ordnung nimmt, andererseits, dass auch unter Beibehaltung des F. Neumann'schen Genauigkeitsgesetzes und demnach der von dieser Methode geforderten Breiten die Rechenarbeit durch eine passende Wahl der Längen der Beobachtungsorte wesentlich reducirt werden kann. Nur die letztere Behauptung soll hier kurz erhärtet werden.

Die eigentlich gesuchten Constanten werden bei der F. Neumann'schen Methode aus gewissen intermediären Constanten C_λ , S_λ berechnet, welche durch folgende Integrale gegeben sind:

$$C_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) \cos \lambda \varphi d\varphi$$

$$S_\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) \sin \lambda \varphi d\varphi.$$

Nun bestehen aber nach den in diesem und dem Paragraphen 2) enthaltenen Entwicklungen die Relationen

$$\int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) \cos \lambda \varphi d\varphi = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} f\left(\vartheta, \frac{(2\mu-1)\pi}{2n}\right) \cos \frac{(2\mu-1)\lambda\pi}{2n} + \Delta$$

$$\int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) \sin d\varphi d\varphi = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} f\left(\vartheta, \frac{\mu\pi}{n+1}\right) \sin \frac{\lambda \mu \pi}{n+1} + \Delta_1,$$

wo Δ und Δ_1 für ganze Functionen von $\cos \varphi$, beziehungsweise $\sin \varphi$, von nicht höherem als dem Grade $2n - \lambda - 1$ verschwindet. Sind also die geographischen Längen der gewählten Beobachtungsorte $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$; $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \frac{3\pi}{n+1}, \dots, \frac{n\pi}{n+1}$ und verwendet man nur die Beobachtungen an den ersten n Orten bei der Ermittlung der intermediären Constanten C_λ , die Beobachtungen an den anderen für die Bestimmung der S_λ , so erreicht man bei halber Rechenarbeit dieselbe Genauigkeit, wie bei der F. Neumann'schen Methode.

§. 5. Aus der von mir für jede reguläre Kettenbruchentwicklung abgeleiteten Relation

$$\frac{1}{x-y} \begin{vmatrix} \psi_\sigma(x) & \psi_\sigma(y) \\ \psi_{\sigma-1}(x) & \psi_{\sigma-1}(y) \end{vmatrix} = \sum_{r=0}^{\sigma-1} \alpha_{r+1} \psi_r(x) \psi_r(y)$$

folgt, da die Functionen $C_\sigma^\nu(x)$ sich von den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1} F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nur durch multiplicative Constanten unterscheiden, die Gleichung

$$\frac{1}{x-y} \begin{vmatrix} C_\sigma^\nu(x) & C_\sigma^\nu(y) \\ C_{\sigma-1}^\nu(x) & C_{\sigma-1}^\nu(y) \end{vmatrix} = \sum_{r=0}^{\sigma-1} a_r C_r^\nu(x) C_r^\nu(y).$$

Um die Coëfficienten a_r zu ermitteln, multiplicirt man dieselbe zunächst mit $x-y$, wodurch sie wegen der Relation

$$r C_r^{\nu}(x) - 2(r + \nu - 1) C_{r-1}^{\nu}(x) + (r + 2\nu - 2) C_{r-2}^{\nu}(x) = 0$$

in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned} C_{\sigma}^{\nu}(x) C_{\sigma-1}^{\nu}(y) - C_{\sigma-1}^{\nu}(x) C_{\sigma}^{\nu}(y) = \\ = \sum_{r=0}^{r=\sigma} \left\{ -a_r \frac{(r+1) C_{r+1}^{\nu}(y) + (r+2\nu-1) C_{r-1}^{\nu}(y)}{2(r+\nu)} + \frac{r a_{r-1} C_{r-1}^{\nu}(y)}{2(r+\nu-1)} + \frac{(r+2\nu) a_{r+1} C_{r+1}^{\nu}(y)}{2(r+\nu+1)} \right\} C_r^{\nu}(x) \\ (a_{-1} = a_{\sigma} = a_{\sigma+1} = 0) \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_{\mu}^{\nu}(x) dx$ und integriert bezüglich x von -1 bis $+1$, so entstehen die Relationen

$$a_{\sigma-1} = \frac{2(\sigma+\nu-1)}{\sigma}$$

$$a_{\sigma-2} = \frac{2(\sigma+\nu-2)(\sigma+2\nu-2)}{\sigma(\sigma-1)}$$

$$a_{r+1} \frac{(r+2\nu) C_{r+1}^{\nu}(y)}{2(r+\nu+1)} + a_{r-1} \frac{r C_{r-1}^{\nu}(y)}{2(r+\nu-1)} = a_r \frac{(r+1) C_{r+1}^{\nu}(y) + (r+2\nu-1) C_{r-1}^{\nu}(y)}{2(r+\nu)}, \quad (r \leq \sigma-2)$$

welche die Formel

$$a_{\sigma-\lambda} = \frac{2(\sigma+\nu-\lambda) \Pi(\sigma-\lambda) \Pi(\sigma+2\nu-2)}{\Pi(\sigma) \Pi(\sigma+2\nu-\lambda-1)} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \sigma)$$

liefern, so dass man also die Gleichung

$$\frac{1}{x-y} \left| \begin{array}{cc} C_{\sigma}^{\nu}(x), & C_{\sigma}^{\nu}(y) \\ C_{\sigma-1}^{\nu}(x), & C_{\sigma-1}^{\nu}(y) \end{array} \right| = \frac{2\Pi(\sigma+2\nu-2)}{\Pi(\sigma)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{\Pi(\lambda)(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)} C_{\lambda}^{\nu}(x) C_{\lambda}^{\nu}(y)$$

hat, aus welcher für $x=y$ die neue Relation

$$C_{\sigma-1}^{\nu+1}(x) C_{\sigma-1}^{\nu}(x) - C_{\sigma-2}^{\nu+1}(x) C_{\sigma}^{\nu}(x) = \frac{\Pi(\sigma+2\nu-2)}{\nu \Pi(\sigma)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{\Pi(\lambda)(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)} \{C_{\lambda}^{\nu}(x)\}^2$$

folgt.

Die eben abgeleitete Gleichung zeigt zunächst, dass für jede ganze Function $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $\sigma-1$ die Formel

$$\varphi(x) = \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\sigma+2\nu-2)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{\nu} \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y) \{C_{\sigma}^{\nu}(y) C_{\sigma-1}^{\nu}(x) - C_{\sigma}^{\nu}(x) C_{\sigma-1}^{\nu}(y)\} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dy}{x-y}$$

besteht, und es ergibt sich aus ihr für die Summe aller jener Glieder der Entwicklung einer beliebigen Function $\psi(x)$ nach den Functionen $C_n^{\nu}(x)$, welche auf das σ te folgen, der für $\nu = \frac{1}{2}$ schon von Herrn G. Bauer aufgestellte elegante Ausdruck

$$\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{\nu} \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]^2 \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\sigma+2\nu-2)} \left| \begin{array}{cc} C_{\sigma}^{\nu}(x), & C_{\sigma-1}^{\nu}(x) \\ A_{\sigma}^{\nu}(\sigma), & A_{\sigma-1}^{\nu}(x) \end{array} \right|,$$

wo

$$A_{\lambda}^{\nu}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x-y} C_{\lambda}^{\nu}(y) (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dy$$

ist. Von anderen Relationen, welche sich aus den eben aufgestellten Gleichungen ergeben, mögen die folgenden erwähnt werden:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} (-1)^{\lambda} \frac{(\lambda+\nu) \Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)} = (-1)^{\sigma-1} \frac{\Pi(\sigma+2\nu-1)}{2\Pi(\sigma-1)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]} (-1)^{\lambda} \frac{\Pi(\lambda+\nu-1) (2\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda)} = (-1)^{\sigma-1+\left[\frac{\sigma}{2}\right]} \frac{\Pi\left(\left[\frac{\sigma}{2}\right]+\nu-1\right) \Pi(\sigma) \Pi\left(2\left[\frac{\sigma+1}{2}\right]+2\nu-2\right)}{2\Pi\left(\left[\frac{\sigma}{2}\right]\right) \Pi(\sigma+2\nu-2) \Pi\left(2\left[\frac{\sigma+1}{2}\right]-1\right)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{(\lambda+\nu) \Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)} = \frac{(2\sigma+2\nu-1) \Pi(\sigma+2\nu-1)}{\Pi(\sigma-1)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{(2\lambda+\nu) \Pi(2\lambda) [\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}{\Pi(2\lambda+2\nu-1) [\Pi(\lambda)]^2} = \frac{\Pi(2\sigma+1) \Pi(\sigma+\nu-1) \Pi(\sigma+\nu)}{\Pi(2\sigma+2\nu-1) [\Pi(\sigma)]^2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\{C_{\sigma}^{\nu}(x) C_{\sigma-1}^{\nu}(y) - C_{\sigma}^{\nu}(y) C_{\sigma-1}^{\nu}(x)\} [(1-x^2)(1-y^2)]^{\frac{2\nu-1}{2}} dx dy}{(x-y) (1-ax)^{\nu} (1-bx)^{\rho}} = \left[\frac{2^{\nu} \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right]^4 \frac{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\sigma+2\nu-2)}{\Pi(\mu-1) \Pi(\rho-1) \Pi(\sigma)}.$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{\Pi(\mu+\lambda-1)\Pi(\rho+\lambda-1)\Pi(\lambda+2\nu-1)}{2^{4\lambda+1}(\lambda+\nu)\Pi(\lambda)[\Pi(\lambda+\nu-1)]^2} (ab)^\lambda F\left(\frac{\mu+\lambda}{2}, \frac{\mu+\lambda+1}{2}, \lambda+\nu+1, a^2\right) F\left(\frac{\rho+\lambda}{2}, \frac{\rho+\lambda+1}{2}, \lambda+\nu+1, b^2\right) \\
 & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\{C_{2\sigma}''(x)C_{2\sigma+1}''(y) - C_{2\sigma}''(y)C_{2\sigma+1}''(x)\} \log(1+y)(1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx dy}{x-y} = \\
 & = \left[\frac{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)^4}{\Pi(2\nu-1)} \right] \frac{\Pi(2\sigma+2\nu-1)\Pi(2\nu-2)}{\Pi(2\sigma+1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma} \frac{(2\lambda+\nu)\Pi(2\lambda)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\lambda(\lambda+\nu)} \\
 & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\{C_{2\sigma}''(x)C_{2\sigma+1}''(y) - C_{2\sigma}''(y)C_{2\sigma+1}''(x)\} \log(1+y)(1-x^2)^{\nu-1} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx dy}{x-y} = \\
 & = \left[\frac{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)^3}{\Pi(2\nu-1)} \right] \frac{\Pi(2\sigma+2\nu-1)\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\sigma+1)\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma} \frac{\Pi(2\lambda-1)\Pi(\lambda+\nu-1)\Pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(2\lambda+\nu)}{(\lambda+2\nu)\Pi(\lambda)\Pi\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)} \\
 & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\{C_{2\sigma}''(x)C_{2\sigma+1}''(y) - C_{2\sigma}''(y)C_{2\sigma+1}''(x)\} [(1-x^2)(1-y^2)]^{\frac{2\nu-3}{2}} dx dy}{x-y} = \\
 & = \frac{2^{4\nu-4} \Pi(2\sigma+2\nu-1) \left[\Pi\left(\frac{2\sigma-3}{2}\right) \right]^4}{[\Pi(2\nu-2)]^2 \Pi(2\sigma+1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma} \frac{(2\lambda+\nu)\Pi(2\lambda)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\{C_\sigma^\nu(\cos \varphi) C_{\sigma-1}^\nu(\cos \vartheta) - C_{\sigma-1}^\nu(\cos \varphi) C_\sigma^\nu(\cos \vartheta)\} e^{ai \cos \varphi \cos \psi} J_{(\alpha \sin \varphi \sin \psi)}^{\frac{2\nu-1}{2}} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \vartheta)^{-\frac{\nu}{2}}}{\sin \frac{\vartheta+\varphi}{2} \sin \frac{\vartheta-\varphi}{2}} \\
& \cdot \frac{J^\nu(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \vartheta}) \sin^{\frac{2\nu+1}{2}} \varphi \sin^{2\nu} \vartheta d\varphi d\vartheta}{\sin \frac{\vartheta+\varphi}{2} \sin \frac{\vartheta-\varphi}{2}} = \\
& = \frac{2^{7\nu-1} \Pi(\sigma+2\nu-2) \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} \psi}{\Pi(\sigma) (\rho_1 \rho_2)^\nu} \psi \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right]^4 [\Pi(\nu-1)]^3 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} i^\lambda (\lambda+\nu) J^{\lambda+\nu}(\alpha) J^{\lambda+\nu}(\rho_1) J^{\lambda+\nu}(\rho_2) C_\lambda^\nu(\cos \psi).
\end{aligned}$$

Ich habe vor Kurzem im 58. Bande der Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften¹ Integralausdrücke für die Functionen $C_n^\nu(\cos x)$ mitgetheilt, welche eine Verallgemeinerung der Mehler'schen und Dirichlet'schen Integrale für die Kugelfunctionen erster Art bilden. Dieselben lassen sich auf einem von dem damals gewählten verschiedenen Wege aus den daselbst aufgestellten Formeln

$$C_n^\nu(\cos x) = \frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \Pi(2\nu-1) \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} \frac{x}{2}} \int_0^\infty J^{2(n+\nu)}(y) J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y \sin \frac{x}{2}\right) y^{\frac{2\nu-1}{2}} dy$$

¹ „Einige Sätze über die Functionen $C_n^\nu(x)$ “.

$$C_n^{\nu}(\cos x) = \frac{(-1)^n \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \Pi(2\nu-1) \cos^{\frac{2\nu-1}{2}} \frac{x}{2}} \int_0^{\infty} J^{2(n+\nu)}(y) J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y \cos \frac{x}{2}\right) y^{\frac{2\nu-1}{2}} dy$$

ableiten. Führt man in dieselben nämlich den durch die Gleichung

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha y) = \frac{(\alpha y)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \sqrt{\pi} \Pi(\nu-1)} \int_{-1}^{+1} \cos(\alpha y z) (1-z^2)^{\nu-1} dz$$

angegebenen Werth von $J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y \sin \frac{x}{2}\right)$, beziehungsweise $J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y \cos \frac{x}{2}\right)$, ein, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung die Relationen

$$C_n^{\nu}(\cos x) = \frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{2\nu-1} \Pi(2\nu-1) \Pi(\nu-1) \sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{\nu-1} dz \int_0^{\infty} J^{2(n+\nu)}(y) \cos\left(yz \sin \frac{x}{2}\right) y^{2\nu-1} dy$$

$$C_n^{\nu}(\cos x) = \frac{(-1)^n \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{2\nu-1} \Pi(2\nu-1) \Pi(\nu-1) \sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{\nu-1} dz \int_0^{\infty} J^{2(n+\nu)}(y) \cos\left(yz \cos \frac{x}{2}\right) y^{2\nu-1} dy.$$

Nun ist aber, wie ich a. a. O. gezeigt habe, für $|x| < 1$

$$C_{2r}^{\nu}(x) = \frac{(-1)^r}{2^{\nu-1} \Pi(\nu-1)} \int_0^{\infty} J^{2r+\nu}(y) \cos(xy) y^{\nu-1} dy$$

und demnach kann man die letzten zwei Formeln, wenn man beachtet, dass die nach z zu integrierende Function gerade ist, in folgender Weise schreiben:

$$C_n^{\nu}(\cos x) = (-1)^n \frac{2\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(\nu-1)\sqrt{\pi}} \int_0^1 C_{2n}^{2\nu}\left(z \sin \frac{x}{2}\right) (1-z^2)^{\nu-1} dz$$

$$C_n^{\nu}(\cos x) = \frac{2\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(\nu-1)\sqrt{\pi}} \int_0^1 C_{2n}^{2\nu}\left(z \cos \frac{x}{2}\right) (1-z^2)^{\nu-1} dz$$

Setzt man in dieser Gleichung für ν : $\nu + \frac{1}{2}$, so kann man sie wegen der Relation

$$C_{r+1}^{2\nu+1}(x) = \frac{1}{4\nu} [C_r^{2\nu}(x)]'$$

durch partielle Integration in die folgenden verwandeln

$$C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos x) = \frac{(-1)^n \Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi} \Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right) \sin \frac{x}{2}} \int_0^1 C_{2n+1}^{2\nu}\left(z \sin \frac{x}{2}\right) z (1-z^2)^{\nu-\frac{3}{2}} dz$$

$$C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos x) = \frac{\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi} \Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right) \cos \frac{x}{2}} \int_0^1 C_{2n+1}^{2\nu} \left(z \cos \frac{x}{2}\right) z (1-z^2)^{\nu-\frac{3}{2}} dx.$$

Die eben abgeleiteten Gleichungen führen nun, wie a. a. O. gezeigt ist, unmittelbar zu den dort aufgestellten Erweiterungen der Mehler'schen und der Dirichlet'schen Kugelfunctionenintegrale.

Es mag bei dieser Gelegenheit auf eine andere Verallgemeinerung dieser Formeln, welche sich auf eine allgemeine Functionenklasse bezieht, von der die Kugelfunctionen ein ganz specieller Fall sind, aufmerksam gemacht werden. Dieselbe lautet:

Hat die reciproke Gleichung geraden Grades

$$f(\alpha) = a_0 \alpha^{2n} + a_1 \alpha^{2n-1} + \dots + a_{n+1} \alpha^{n+1} + a_n \alpha^n + a_{n+1} \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

in den ersten zwei Quadranten nur eine Wurzel $\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$ ($0 < \varphi_1 < \pi$) mit dem absoluten Betrage 1, ist ferner $f(\alpha)$ im Intervalle $0 \dots \varphi_1$ positiv und besteht, wenn die Coëfficienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ bestimmte Functionen einer Veränderlichen x sind, für alle einem gewissen Bereiche angehörigen x und wenigstens für alle α , deren absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, die im gleichen Grade convergirende Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{a_0 \alpha^{2n} + a_1 \alpha^{2n-1} + \dots + a_{n+1} \alpha^{n+1} + a_n \alpha^n + a_{n+1} \alpha^{n-1} + \dots + a_n}} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} B_\mu(x) \alpha^\mu$$

so bestehen für die Functionen $B_\mu(x)$ folgende Relationen

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_\mu(x) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos \frac{n\varphi}{2} \cos \mu\varphi d\varphi}{\sqrt{a_0 \cos n\varphi + a_1 \cos (n-1)\varphi + \dots + a_n}} + \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \mu\varphi d\varphi}{\sqrt{-a_0 \cos n\varphi - a_1 \cos (n-1)\varphi - \dots - a_n}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_{\mu}(x) = - \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \sin \mu\varphi d\varphi}{\sqrt{a_0 \cos n\varphi + a_1 \cos (n-1)\varphi + \dots + a_n}} + \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \sin \mu\varphi d\varphi}{\sqrt{-a_0 \cos n\varphi - a_1 \cos (n-1)\varphi - \dots - a_n}}$$

$$\pi \sqrt{2} B_{\mu}(x) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos \left(\mu + \frac{n}{2} \right) \varphi d\varphi}{\sqrt{a_0 \cos n\varphi + a_1 \cos (n-1)\varphi + \dots + a_n}} + \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin \left(\mu + \frac{n}{2} \right) \varphi d\varphi}{\sqrt{-a_0 \cos n\varphi - a_1 \cos (n-1)\varphi - \dots - a_n}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_{\mu}(x) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos \left(\mu + \frac{n}{2} \right) \varphi d\varphi}{\sqrt{a_0 \cos n\varphi + a_1 \cos (n-1)\varphi + \dots + a_n}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_{\mu}(x) = \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin \left(\mu + \frac{n}{2} \right) \varphi d\varphi}{\sqrt{-a_0 \cos n\varphi - a_1 \cos (n-1)\varphi - \dots - a_n}}.$$

Integriert man die von mir aufgestellte Relation¹

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right]^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+\nu) \Pi(2n) \Pi\left(n-\frac{1}{2}\right) \Pi(n+\nu-1)}{\Pi(2n+2\nu-1) \Pi(n) \Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} C_{2n}^{\nu}(x)$$

¹ „Zur Theorie der Functionen $C_n^{\nu}(x)$.“ Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 48. Band,

nach x innerhalb der Grenzen $0 \dots x$ und berücksichtigt die Formeln

$$C_n^v(x) = \frac{v}{n+v} \{C_n^{v+1}(x) - C_{n-2}^{v+1}(x)\}$$

$$C_{2n+1}^v(0) = 0$$

so erhält man die Entwicklung

$$\arcsin x = \frac{8 \Pi(v)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2v-1}{2}\right)}{\Pi(2v-1)} \right]^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+v+1) \Pi(2n) \Pi\left(n - \frac{1}{2}\right) \Pi(n+v)}{\Pi(2n+2v+1) \Pi(n) \Pi\left(n+v - \frac{1}{2}\right) (2n+2v+1)} C_{2n+1}^v(x),$$

während sich durch Multiplication mit x auf Grund von bekannten Beziehungen die Relation

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \Pi(v-1)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2v-1}{2}\right)}{\Pi(2v-1)} \right]^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi(2n) \Pi\left(n - \frac{1}{2}\right) \Pi(n+v) (2n+1) (2n+v+1)}{\Pi(2n+2v) \Pi(n) \Pi\left(n+v - \frac{1}{2}\right)} C_{2n+1}^v(x)$$

ergibt. Aus der angeführten und der letzten Gleichung folgen die Relationen

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2v-1} \varphi d\varphi}{(1-2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^v} = \frac{2^{2v-1} \Pi(v-1)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2v-1}{2}\right)}{\Pi(2v-1)} \right]^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi\left(n - \frac{1}{2}\right) \Pi(n+v-1)}{\Pi(n) \Pi\left(n+v - \frac{1}{2}\right)} \alpha^n$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi \sin^{2\nu-1} \varphi d\varphi}{(1-2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^\nu} = \frac{2^{2\nu} \Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right]^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right) \Pi(n+\nu)}{\Pi(n) \Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} \alpha^n.$$

Mit Hilfe von Formeln, welche ich früher aufgestellt habe, kann man endlich leicht die folgenden Formeln beweisen:

$$\int_0^\pi \arctang\left(\frac{p \sin 2x}{1-p \cos 2x}\right) \sin x C_{2n}^\nu(\cos x) dx = 0$$

$$\int_0^\pi \arctang\left(\frac{p \sin 2x}{1-p \cos 2x}\right) \sin x C_{2n-1}^\nu(\cos x) dx = \frac{\pi}{4} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu-\lambda+2n-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(2n-\lambda-1)} \left\{ \frac{p^{2n-2\lambda-1}}{2n-2\lambda-1} - \frac{p^{2n-2\lambda-2}}{2n-2\lambda-2} \right\}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x C_{2n+1}^\nu(\cos x) dx = 0$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x C_{2n}^\nu(\cos x) dx = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu-\lambda+2n-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(2n-\lambda)} \left\{ \frac{1}{(2n-2\lambda+1)^2} + \frac{1}{(2n-2\lambda-1)^2} \right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{J^r(ax)}{x^r} C_n^\nu(\cos x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^r \Pi\left(r-\frac{1}{2}\right)} \sum_{\lambda=\varepsilon}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu-\lambda+n-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(n-\lambda)} (a^2 - n^2 - 4\lambda^2 + 4n\lambda)^{r-\frac{1}{2}}$$

$$(\varepsilon = 0 \text{ für } a > n; \varepsilon = \left[\frac{n-a}{2}\right] + 1 \text{ für } a < n)$$

$$\int_0^\pi \frac{C_n^y(\cos x) dx}{\prod_{\lambda=1}^r (1-2b_\lambda \cos x + b_\lambda^2)^{\mu_\lambda}} = \frac{\pi}{\Pi(\mu_1-1)\Pi(\mu_2-1)\dots(\mu_r-1)} \frac{d^{\mu_1-1}}{dy_1^{\mu_1-1}} \frac{d^{\mu_2-1}}{dy_2^{\mu_2-1}} \dots \frac{d^{\mu_r-1}}{dy_r^{\mu_r-1}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} \dots y_r^{\mu_r-1}}{(1-y_1)^{\mu_1} (1-y_2)^{\mu_2} \dots (1-y_r)^{\mu_r}} \left(1 - \frac{y_1}{b_1}\right)^2 \left(1 - \frac{y_2}{b_2}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{y_r}{b_r}\right)^2 \right.$$

$$\left. \sum_{\lambda=0, \rho=1}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right], \rho=r} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu+n-\lambda-1) y_\rho^{r+n-2\lambda-1}}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(n-\lambda) b_\rho^{r+n-2\lambda-1} \left(1 - \frac{y_\rho}{b_\rho}\right)^2 \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_1}{b_1}\right) \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_2}{b_2}\right) \dots \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_{\rho-1}}{b_{\rho-1}}\right) \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_{\rho+1}}{b_{\rho+1}}\right) \dots \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_r}{b_r}\right)} \right\},$$

wo nach vollzogener Differentiation y_ρ durch b_ρ^2 zu ersetzen ist.

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi \sin^{2\nu-1} \varphi d\varphi}{(1-2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^\nu} = \frac{2^{2\nu} \Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right]^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right) \Pi(n+\nu)}{\Pi(n) \Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} \alpha^n.$$

Mit Hilfe von Formeln, welche ich früher aufgestellt habe, kann man endlich leicht die folgenden Formeln beweisen:

$$\int_0^\pi \arctang\left(\frac{p \sin 2x}{1-p \cos 2x}\right) \sin x C_{2n}^\nu(\cos x) dx = 0$$

$$\int_0^\pi \arctang\left(\frac{p \sin 2x}{1-p \cos 2x}\right) \sin x C_{2n-1}^\nu(\cos x) dx = \frac{\pi}{4} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu-\lambda+2n-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(2n-\lambda-1)} \left\{ \frac{p^{2n-2\lambda-1}}{2n-2\lambda-1} - \frac{p^{2n-2\lambda-2}}{2n-2\lambda-2} \right\}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x C_{2n+1}^\nu(\cos x) dx = 0$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x C_{2n}^\nu(\cos x) dx = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu-\lambda+2n-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(2n-\lambda)} \left\{ \frac{1}{(2n-2\lambda+1)^2} + \frac{1}{(2n-2\lambda-1)^2} \right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{J^r(ax)}{x^r} C_n^\nu(\cos x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^r \Pi\left(r-\frac{1}{2}\right)} \sum_{\lambda=\varepsilon}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu-\lambda+n-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(n-\lambda)} (a^2 - n^2 - 4\lambda^2 + 4n\lambda)^{r-\frac{1}{2}}$$

$$(\varepsilon = 0 \text{ für } a > n; \varepsilon = \left[\frac{n-a}{2}\right] + 1 \text{ für } a < n)$$

$$\int_0^\pi \frac{C_n^\nu(\cos x) dx}{\prod_{\lambda=1}^r (1-2b_\lambda \cos x + b_\lambda^2)^{\mu_\lambda}} = \frac{\pi}{\Pi(\mu_1-1)\Pi(\mu_2-1)\dots(\mu_r-1)} \frac{d^{\mu_1-1}}{dy_1^{\mu_1-1}} \frac{d^{\mu_2-1}}{dy_2^{\mu_2-1}} \dots \frac{d^{\mu_r-1}}{dy_r^{\mu_r-1}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} \dots y_r^{\mu_r-1}}{(1-y_1)^{\mu_1} (1-y_2)^{\mu_2} \dots (1-y_r)^{\mu_r}} \left(1 - \frac{y_1}{b_1}\right)^2 \left(1 - \frac{y_2}{b_2}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{y_r}{b_r}\right)^2 \right.$$

$$\left. \sum_{\lambda=0, \rho=1}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right], \rho=r} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1) \Pi(\nu+n-\lambda-1) y_\rho^{r+n-2\lambda-1}}{[\Pi(\nu-1)]^2 \Pi(\lambda) \Pi(n-\lambda) b_\rho^{r+n-2\lambda-1} \left(1 - \frac{y_\rho}{b_\rho}\right)^2 \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_1}{b_1}\right) \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_2}{b_2}\right) \dots \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_{\rho-1}}{b_{\rho-1}}\right) \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_{\rho+1}}{b_{\rho+1}}\right) \dots \left(\frac{y_\rho}{b_\rho} - \frac{y_r}{b_r}\right)} \right\},$$

wo nach vollzogener Differentiation y_ρ durch b_ρ^2 zu ersetzen ist.