Über Formen fünfter Ordnung auf der cubischen Raumcurve

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juni 1891.)

Die Theorie der binären Formen auf rationalen Curven ist bisher in einigen Arbeiten von Lindemann, Meyer, Sturm u. A. behandelt worden. In der Abhandlung von Sturm¹ und in dem Buche von Meyer² findet man die Covarianten binärer Formen dritter und vierter Ordnung construirt, einfache Polaren-constructionen dieser Formen abgeleitet und auch einige Covarianten für höhere Formen in Betracht gezogen. Die Lösung der Aufgabe: „Für Formen höherer Ordnung, welche durch eine Anzahl von Punkten auf einer rationalen Curve repräsentirt sind, Covarianten zu construiren“, soll im Folgenden für Formen fünfter Ordnung versucht werden.

Für diese Formen gilt noch die Curve dritter Ordnung des dreidimensionalen Raumes als typischer Träger. Denn die niedrigen Covarianten sind hier durch Elementargebilde des Raumes fixirt: die cubischen Covarianten durch Ebenen, die quadratischen durch Biseccanten, und die biquadratischen Covarianten dadurch, dass eine Gerade angegeben wird, welche die vier Tangenten der Punkte der Covariante schneidet. Ausserdem liegen hier die beiden wichtigen Covarianten H und T auf einfachen covarianten Flächen der fünf Formenpunkte allein.³

¹ Siehe R. Sturm, Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journal, Bd. 86, S. 116.

² Siehe F. Meyer, Apolarität und rationale Curven. Tübingen 1883.

³ Siehe „Über eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen“. Diese Sitzungsber., S. 574, Art. 4.

Um aber die Aufgabe zu begrenzen, werden im Folgenden die Covarianten eines vollständigen Systems der Form fünfter Ordnung construirt. Die Invarianten anlangend, werden diejenigen Flächen angegeben, welche die Curven dritter Ordnung enthalten, die durch fünf feste Punkte gehen und auf welchen diese Punkte eine dem System angehörende verschwindende Invariante haben. Hierbei schien es zum Zwecke besonders einfacher Construction nothwendig, ein System anzunehmen, welches von den üblichen in zwei Formen abweicht, so zwar, dass die behandelten 23 Formen die folgenden sind:

$$\begin{aligned}
 f, H &= (f, f)^2, T = (f, H), i = (f, f)^4, j = -(f, i)^2 \\
 \tau &= (j, j)^2, \mathfrak{A} = (i, \tau), l = (j, \tau), \\
 \alpha &= -(j, i)^2, \beta = (i, \alpha), \gamma = (\tau, \alpha), \delta = (\mathfrak{A}, \alpha), \\
 k &= (j, i), g = (i, f), h = (\tau, f), \sigma = (j, H), \\
 v &= (i, H)^2 - \frac{1}{5} i^2, w = (v, i), s = (i, H), \\
 A &= (i, i)^2, B = (i, \tau)^2, C = (\tau, \tau)^2, R = (\beta\gamma) = (\delta\alpha).
 \end{aligned}$$

Die eine abweichende Form ist v , welche sonst (bei Clebsch und Gordan) bloss $(i, H)^2$ ist; die andere Form h kommt nur in dem bei Salmon angegebenen System vor.

§. 1. Die Polargruppen der Form fünfter Ordnung auf $\mathfrak{C}_3$.

1. Es mögen in diesem Artikel einige bekannte Hilfssätze angegeben werden, welche sich in den angeführten Arbeiten von Sturm und Meyer finden.

Das Hyperboloid, welches die beiden Tangenten t_φ der $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten eines Punktepaars φ enthält, soll mit $\mathfrak{H}_\varphi$ bezeichnet werden. Legt man von einem Punkte o der $\mathfrak{C}_3$ aus die Transversale über die Tangenten t_φ , so liegt diese in einer Tangentialebene der $\mathfrak{C}_3$, welche in o berührt und $\mathfrak{C}_3$ in dem vierten harmonischen Punkt von o , bezüglich φ schneidet.

Die Punkte $(\psi)_1^o$ der ersten Polargruppe des Poles o für ein Tripel ψ der Curve sind die Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen von $\mathfrak{C}_3$, welche durch o gehen und den Nullpunkt ψ' der Ebene des Tripels bezüglich des Complexes $\mathcal{C}$, der zu $\mathfrak{C}_3$ gehört, enthalten. Der Punkt der gemischten Polare $(\psi)_{11}^{oo'}$ liegt

in der Ebene, welche o, o', ψ' verbindet; die lineare Polare $(\psi)_2^o$ ist daher der dritte Schnittpunkt der Ebene, welche ψ' enthält und $\mathfrak{C}_3$ in o berührt. Die Bisecante der $\mathfrak{C}_3$, welche den Punkt ψ' enthält, schneidet $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten der Hesse'schen Covariante η von ψ ; die Bisecanten $(\psi)_1^o$ liegen auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_7$. Die Ebene der cubischen Covariante von ψ enthält die conjugirte Gerade der Bisecante bezüglich des Complexes $\mathcal{C}$ und trennt die Ebene ψ von den Punkten von η harmonisch.

Es gibt zwei Transversalen über die vier Tangenten, welche in den Punkten eines Quadrupels (q) die $\mathfrak{C}_3$ berühren; man kann sie „die Begleitgeraden“ des Quadrupels nennen. Dieselben sind conjugirt bezüglich des Complexes $\mathcal{C}$, da die vier Tangenten Complexstrahlen sind. Das Quadrupel ist äquianharmonisch, wenn dessen Begleitgeraden zusammenfallen; sie fallen dann in einen Complexstrahl.

Die Begleitgeraden der Quadrupel einer Involution liegen auf einem Hyperboloid, welches „das Begleithyperboloid“ der Involution genannt werden soll. Hat ein Quadrupel einen Doppelpunkt, so geht eine der Begleitgeraden durch diesen, daher schneidet das Begleithyperboloid aus $\mathfrak{C}_3$ die Jacobi'sche Covariante der Involution aus.

Die ersten Polargruppen $(q)_1^o$ des Quadrupels werden von den Polarebenen des Punktes o bezüglich des Tetraëders (q) ausgeschnitten;¹ die sämtlichen Polartripel bilden eine Involution, daher werden sie aus $\mathfrak{C}_3$ von den Ebenen eines Büschels ausgeschnitten. In diesem Büschel gibt es vier Ebenen, welche die $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten der Hesse'schen Covariante von (q) berühren. Daher ist die Axe des Büschels eine der Begleitgeraden dieses Hesse'schen Quadrupels und soll „die Hesse'sche Gerade“ des Quadrupels (q) genannt werden.

2. Auf der cubischen Raumcurve sei ein Quintupel (a) gegeben, zu einer Form $f = a_\alpha^5$ gehörend; das Polarquadrupel des Poles o bezüglich (a) sei mit $(a)_1^o$ bezeichnet. Die Polarquadrupel sämtlicher Punkte von $\mathfrak{C}_3$ bilden eine biquadratische Involution J_4 . Zu J_4 gehört ein Begleithyperboloid, welches „das Begleit-

¹ Siehe: „Zur Construction der Polargruppen“. Diese Berichte, S. 315.

hyperboloid B der Form fünfter Ordnung“ heissen möge; es schneidet $\mathfrak{C}_3$ in der Hesse'schen Covariante H des Quintupels.

Die ersten Polartripel der Quadrupel einer Involution bilden eine zweifach unendliche quadratische Mannigfaltigkeit; daher umhüllen die Ebenen, welche diese Tripel ausschneiden, eine Fläche zweiter Classe. Die Hesse'schen Geraden der Quadrupel, durch welche die Ebenen ihrer Polartripel gehen, liegen auf dieser Fläche, welche die Jacobi'sche Covariante der Involution ausschneiden muss, da die Hesse'sche Gerade eines Quadrupels mit Doppelpunkt diesen enthält.

Liegt aber die Polarinvolution J_4 vor, so haben zwei ihrer Quadrupel ein gemeinsames Polartripel, nämlich die gemischte cubische Polare $(a)_{11}^{o'o'}$. Daher schneiden sich die Hesse'schen Geraden $g^o, g^{o'}$ dieser Quadrupel, wesshalb die Hesse'schen Geraden aller Quadrupel durch einen Punkt gehen müssen; denn in einer Ebene können sie nicht liegen, weil die Fläche, welche sie bilden, die Covariante H ausschneiden muss. Es ergibt sich demnach: Die Hesse'schen Geraden der Polarquadrupel von (a) erfüllen einen Kegel zweiter Ordnung, welcher auf $\mathfrak{C}_3$ die Hesse'sche Covariante H ausschneidet. Dieser Kegel soll „der Hauptkegel“ und sein Scheitel „der Hauptpunkt der Form f “ genannt werden.

Durch diesen Hauptpunkt gehen also die Ebenen der gemischten Polartripel $(a)_{11}^{o'o'}$ und diese Ebenen schneiden aus dem Hauptkegel die Hesse'schen Geraden $g^o, g^{o'}$ aus. Rücken die Punkte o, o' zusammen, so folgt: Die Ebene, welche die zweite Polargruppe $(a)_2^o$ auf $\mathfrak{C}_3$ ausschneidet, berührt in g^o den Hauptkegel.

Die Ebene $(a)_2^o$ wird, wie sich zeigen lässt,¹ gefunden als Polarebene des Poles o bezüglich des Seitenflachs des Fünfeckes (a) .

3. Die Polartripel t_1, t_2 eines Quadrupels (g) haben ein Polarpaar t gemeinsam, das Hyperboloid $\mathfrak{H}$, enthält die Bisecanten der Nullpunkte t'_1, t'_2 der Ebenen t_1, t_2 ; legt man daher von t_1

¹ Allgemein gilt: Die Polargruppe r ter Ordnung eines Punktes o der $\mathfrak{C}_r$ des R_r bezüglich einer Gruppe von m -Punkten dieser Curve wird von der Polarebene von o bezüglich des Seitenflachs des m -Eckes dieser Punkt ausgeschnitten.

über die Tangenten von t die Transversale, so schneidet diese $\mathfrak{C}_3$ in dem Pole o . Folglich: Man bestimme die conjugirte Gerade bezüglich des Complexes C der Schnittlinie der Ebenen t_1 und t_2 ; diese Gerade liegt mit der Bisecante, die man von dem Nullpunkte t'_1 über $\mathfrak{C}_3$ legen kann, in einer Ebene, welche $\mathfrak{C}_3$ noch in dem Pole o des Tripels t_1 schneidet.

Wenn daher von einem Quadrupel die Hesse'sche Gerade gegeben ist, so findet man den Pol des Polartripels, welches eine Ebene dieser Geraden ausschneidet, auch in folgender Weise: Man suche die Axe der $\mathfrak{C}_3$, welche in diese Ebene fällt; diese schneidet die Hesse'sche Gerade in einem Punkt, durch welchen ausser den Schmiegungebenen, die sich in der Axe schneiden, noch die Schmiegungeebene des gesuchten Poles geht.

Ist nun h die Hesse'sche Gerade eines Polarquadrupels $(a)_1^2$, so liegt sie auf dem Hauptkegel und die Tangentialebene T dieses Kegels für h enthält die Polare $((a)_1^2)$; daher geht die Schmiegungeebene des Poles o durch den Punkt, in welchem h die Axe der $\mathfrak{C}_3$ schneidet, die in die Ebene T fällt. Für diese Constructionen ist es einfacher, von dem Hauptkegel den Polarkegelschnitt k'_2 bezüglich des Complexes C zu suchen; die Ebene desselben ist die Nullebene s' des Hauptpunktes s . Dann schneidet die Nullebene eines Punktes p von k'_2 drei Punkte einer zweiten Polargruppe aus; der zugehörige Pol dieser Gruppe ist der dritte Schnittpunkt der Ebene, welche die Tangente von k'_2 in p verbindet mit der Bisecante der $\mathfrak{C}_3$, welche p enthält.

Jede Ebene durch den Hauptpunkt s schneidet eine gemischte Polare von (a) aus; die zugehörigen Pole sind diejenigen Punkte, welche den Hesse'schen Geraden entsprechen, die in diese Ebene fallen. Sie werden nach den letzten Constructionen gefunden, oder auch so: Man ziehe von dem Nullpunkte der Ebene die Tangenten an k'_2 ; die Ebene, welche diese Tangenten mit den Bisecanten ihrer Berührungspunkte verbindet, schneiden die Pole aus.

§. 2. Die Überschiebungsfläche dritter Ordnung der Überschiebungen $(f, \varphi_a^2)^2$.

4. Die gemischte cubische Polare eines Punktepaares auf $\mathfrak{C}_3$, welches einer quadratischen Form φ_a^2 entspricht, wird durch eine

Ebene Φ ausgeschnitten, die durch den Hauptpunkt s geht. Die Beziehung von φ und Φ ist ein-eindeutig. Bleibt ein Punkt von φ fest, während der andere variirt, so beschreibt die gemischte Polare eine Involution; daher dreht sich die Ebene Φ um eine Gerade. Die Beziehung zwischen φ und Φ ist daher der Art, dass Φ ein Büschel beschreibt, wenn φ einen Kegel erzeugt. Hieraus folgt, dass das Bündel der Ebenen Φ collinear ist zu den Ebenenbündeln, welche die Bisecanten φ aus zwei Punkten der $\mathfrak{C}_3$ projiciren. Ferner ergibt sich: Der Ort des Schnittpunktes der Bisecanten mit ihren entsprechenden Ebenen Φ ist eine Fläche dritter Ordnung F_3 , welche $\mathfrak{C}_3$ und den Hauptpunkt enthält.

Wird $\varphi_\alpha^2 = p_\alpha \cdot q_\alpha$ gesetzt, so ist

$$(f, \varphi)^2 = (ap)(aq)a_\alpha^2:$$

die gemischte Polare ist identisch mit der zweiten Überschiebung, wesshalb die Fläche F_3 auch als „Überschiebungsfläche“ bezeichnet werden kann.

Wird $a_\alpha^5 = p_\alpha \cdot q_\alpha \cdot r_\alpha^3$ gesetzt, so ergibt sich als zweite Überschiebung von $p_\alpha q_\alpha$ über a_α^5 :

$$3p_\alpha q_\alpha \cdot (rp)(rq)r_\alpha - 4(pq)^2 \cdot r_\alpha^3;$$

daher wird die Ebene Φ , welche der Verbindungslinie zweier Punkte (α) entspricht, durch den Durchstosspunkt dieser Linie mit der Ebene gehen, welche die übrigen Punkte (a) verbindet. Dieser Punkt gehört demnach der Fläche F_3 an: Die Überschiebungsfläche enthält die zehn Diagonalepunkte des Fünfeckes (a).¹

¹ Herr G. Kohn hat in seiner Arbeit: „Über eine neue Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung“, diese Sitzungsber., Bd. 99, bewiesen, dass der Ort des Punktes, in welchem eine die Punkte (a) enthaltende Curve dritter Ordnung von Complexstrahlen eines linearen Complexes berührt wird, eine Fläche dritter Ordnung ist, welche die zehn Diagonalepunkte des Fünfeckes enthält; daher: Die Überschiebungsfläche ist der Ort des Punktes, in welchem eine Curve dritter Ordnung, welche die Punkte (a) enthält, von Strahlen des Complexes C berührt wird. Die Schmiegungebenen der $\mathfrak{C}_3$ in (a) sind Tangentialebenen der F_3 .

5. Es sei nun (ε) die Regelschaar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_\varphi$, zu welcher die Tangenten der Punkte φ gehören; die Erzeugenden dieser Schaar schneiden auf $\mathfrak{C}_3$ Punktepaare aus, welche φ harmonisch trennen. Das Hyperboloid $\mathfrak{H}_\varphi$ schneidet F_3 in einer Curve C_3^φ , welche erzeugt wird durch die Regelschaar (ε) und das ihr projective Ebenenbüschel (E) , welches die gemischten Polaren der Punktepaare ε ausschneidet.

Es sei ferner o einer der fünf Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ und C_3^φ , und o' der Punkt, welcher mit o auf der Erzeugenden der Schaar (ε) liegt; dann muss die Ebene, welche die gemischte Polare $(a)_{11}^{o'}$ enthält, durch o gehen. Folglich geben die fünf Punkte o , mit ihren linearen Polaren o' verbunden, fünf Gerade von (ε) . Da dann die fünf Punktepaare oo' das Paar φ harmonisch trennen, so ist o' gleichzeitig die lineare Polare von o bezüglich f und bezüglich φ : o gehört der Überschiebung $(f, \varphi)^1$ an.

Die Axe des Büschels (E) ist die Bisecante, welche sich von s über C_3^φ legen lässt, in Folge dessen gehören die Ebenen der reinen zweiten Polaren der Punkte von φ diesem Büschel an; die Polarebene bezüglich des Hauptkegels dieser Bisecante enthält daher die gemischte Polare von φ . Es ergibt sich demnach:

Die Punkte der Überschiebung $(f, \varphi_2^2)^1$ sind die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ mit der Curve dritter Ordnung C_3^φ , welche dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_\varphi$ und der Überschiebungsfläche gemein ist. Die Punkte der Überschiebung $(f, \varphi_2^2)^2$ liegen in der Polarebene bezüglich des Hauptkegels derjenigen Bisecante von C_3^φ , welche durch den Hauptpunkt geht.

Ist speciell φ ein doppeltgezählter Punkt ψ , so wird $\mathfrak{H}_\varphi$ der Kegel, welcher aus ψ die Curve $\mathfrak{C}_3$ projicirt, und die Curve C_3^φ enthält den Punkt ψ . Die Punkte $(f, \psi)^1$ sind daher die Punkte der ersten Polare des Poles ψ , daher: Der Kegel, welcher $\mathfrak{C}_3$ aus dem Punkte o projicirt, schneidet die Überschiebungsfläche in einer Curve dritter Ordnung C_3^ψ , welche $\mathfrak{C}_3$ in dem Punkte der ersten Polare $(a)_1^\psi$ trifft.

Nach dem vorigen Satze folgt auch, dass die Bisecante der Curve C_3^ψ , welche durch den Hauptpunkt geht, die Hesse'sche Gerade des Quadrupels $(a)_1^\psi$ ist; daher: Der Hauptkegel ist

der Ort der Bisecanten vom Hauptpunkt s über die Curven C_3 .

Durch einen Punkt von $(a)_1^o$ gehen demnach die beiden dem Kegel und F_3 gemeinsamen Curven; daher berühren sich diese Flächen in den Punkten $(a)_1^o$. Hieraus ergibt sich: Die erste Polarfläche eines Punktes von $\mathfrak{C}_3$ bezüglich der Überschiebungsfläche schneidet $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten $(a)_1^o$. Ferner: Die Gerade, welche o mit seiner linearen Polare $(a)_4^o$ verbindet, ist Tangente der Überschiebungsfläche.

6. Es gibt sechs Bisecanten der $\mathfrak{C}_3$, welche auf F_3 liegen; für jede dieser Bisecanten φ_v enthält die Ebene Φ_v der gemischten Polare wieder die Punkte φ_v , wie dies aus der Erzeugung der Überschiebungsfläche durch drei collineare Bündel (siehe Art. 4) folgt. Daher sind die Punktepaare φ_v die zweigliedrigen Polarcyclen von f , d. h. Paare von Punkten, von denen jeder zur ersten Polare des anderen gehört. Die sechs Geraden der F_3 , welche Bisecanten von $\mathfrak{C}_3$ sind, schneiden $\mathfrak{C}_3$ in den zweigliedrigen Polarcyclen von f .

Nimmt man zwei der Geraden φ_v , z. B. φ_1, φ_2 , so bestimmen dieselben mit $\mathfrak{C}_3$ ein Hyperboloid, welches F_3 noch in einer Geraden ε_{12} schneidet, die einpunktige Secante von $\mathfrak{C}_3$ ist. Bestimmt man nun das Punktepaar φ_{12} , welches die Paare φ_1 und φ_2 harmonisch trennt, so wird das Hyperboloid $\mathfrak{H}_{\varphi_{12}}$ die Geraden φ_1, φ_2 enthalten und daher auch die Gerade ε_{12} . Es folgt demnach (siehe Art. 5), dass sich als die fünf Punkte $(f, (\varphi_1, \varphi_2))^1$ wieder die Punkte φ_1, φ_2 und der Punkt ε_{12} ergeben: Daher: Die Functionaldeterminante von f mit der Functionaldeterminante zweier zweigliedrigen Polarcyclen φ_μ, φ_ν enthält diese Cyclen und den Punkt $\varepsilon_{\mu\nu}$.

F_3 hat ausserdem noch sechs Gerade γ_v , welche $\mathfrak{C}_3$ nicht schneiden; γ_v schneidet aber fünf Gerade φ , nur φ_v nicht. Jede γ_v ist Axe einer cubischen Involution auf $\mathfrak{C}_3$, so dass sich ergibt. Fünf der Polarcyclen sind Theile von Tripeln einer cubischen Involution; ist φ_μ einer dieser Cyclen und φ_ν deren sechstes, so gehört der Punkt $\varepsilon_{\mu\nu}$ zu demselben Tripel wie φ_μ .

7. Die Gleichung der Überschiebungsfläche ist, wenn die Bezeichnungen von Seite 575 verwendet werden und $f'_i = f'(\alpha_i)$ gesetzt wird:

$$\sum_{i, k=1}^5 \frac{(\alpha_i - \alpha_k)^3}{f'_i f'_k} x_i^2 x_k = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird auch erhalten, indem man in der Determinante fünften Grades

$$(1, \alpha_i, \alpha_i^2, x_i, x_i^2)$$

das Glied, welches den Factor $x_i^2 x_k$ hat, mit $(\alpha_i - \alpha_k)^2$ multiplicirt.

Die Gleichung der Ebene, welche die Gruppe dritter Ordnung ψ aus $\mathfrak{C}_3$ schneidet ist, wenn $\psi_i = \psi(\alpha_i)$ gesetzt wird:

$$\sum \frac{\psi_i}{f'_i} x_i = 0;$$

daher hat die Schmiegungebene eines Punktes α der Curve die Gleichung:

$$\sum \frac{(\alpha - \alpha_i)^3}{f'_i} x_i = 0.$$

Die Schmiegungebene des Punktes α_k , dessen Parameter $\alpha = \alpha_k$ ist, hat demnach die Gleichung

$$A_x^{(k)} \equiv \sum_i \frac{(\alpha_k - \alpha_i)^3}{f'_i} x_i,$$

so dass die Gleichung der Überschiebungsfäche ist:

$$\sum \frac{A_x^{(k)}}{f'_i} x_k^2 = 0,$$

welche wieder in der Form:

$$(1, \alpha_i, \alpha_i^2, \alpha_i^3, A_x^{(i)} \cdot x_i^2) = 0$$

geschrieben werden kann.

§. 3. Die Covarianten H , T und die Covarianten zweiter und dritter Ordnung.

8. Die Punkte i^ν der quadratischen Covariante i haben äquianharmonische erste Polaren $(a)_1^\nu$. Die Covariante j ist die zweite Überschiebung von i über f oder die gemischte Polare der Punkte i^ν .

Ist das Polarquadrupel äquianharmonisch, so ist seine einzige Begleitgerade ein Complexstrahl; da dann auch die Hesse'sche Covariante des Quadrupels äquianharmonisch ist, so ist auch die Hesse'sche Gerade des Quadrupels ein Complexstrahl. Die Hesse'schen Geraden der äquianharmonischen Quadrupel $(a)_1^\nu$ liegen demnach im Complex C , da sie aber auch nach Art. 2 auf dem Hauptkegel liegen müssen, so sind sie die Schnittlinien η_ν des Hauptkegels mit der Nullebene des Hauptpunktes s . Diese Ebenen schneidet ferner nach Art. 2 die gemischte Polare der Pole i^ν aus, so dass sich ergibt:

Die Covariante j liegt in der Nullebene j des Hauptpunktes s .

Die Pole i_ν von j werden nach Art. 3 gefunden, indem man für die Gerade η_ν die Tangentialebene des Hauptkegels bestimmt und von diesen die Nullpunkte; von diesen Punkten lassen sich Bisecanten über $\mathfrak{C}_3$ legen, die mit ihren Geraden η_ν und den Punkten i^ν in einer Ebene liegen. Ist v die Polargerade der Ebene j bezüglich des Hauptkegels und v' ihre Conjugirte bezüglich des Complexes C , so werden demnach die Punkte i gefunden als Schnittpunkte der Ebenen, welche die Geraden η_ν verbinden mit den Bisecanten, die durch die gemeinsamen Punkte von v' und der Geraden η^ν gehen.

Nach Art. 1 ist es leicht, die Covarianten von j zu construiren. Die Bisecante, welche sich vom Hauptpunkte über $\mathfrak{C}_3$ legen lässt, schneidet $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten der Covariante τ . Ist τ' die conjugirte Gerade von τ bezüglich des Complexes C , so schneidet die Ebene, welche durch τ' geht und die beiden Punkte der Covariante τ von der Ebene j harmonisch trennt, die Curve $\mathfrak{C}_3$ in der Covariante l .

Nach einem Satze über die Functionaldeterminante einer quadratischen und einer cubischen Form¹ muss τ' die lineare Polare des Hauptpunktes bezüglich des Dreieckes j sein. Nach demselben Satze verbindet die Ebene der Covariante k die Polargerade bezüglich des Dreieckes des Durchstosspunktes der Bisecante i mit der Ebene j und den vierten harmonischen Punkt dieses Durchstosspunktes bezüglich der Punkte i .

Die Covariante $\mathfrak{S}$ trennt i und τ harmonisch, daher liegen die Tangenten der Punkte von $\mathfrak{S}$ auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_3$, welches durch $\mathfrak{C}_3$ und die Geraden i und τ bestimmt ist.

9. Die Hesse'sche Covariante H wird (siehe l. c. S. 582.) von der Hauptfläche des Fünfeckes (a) ausgeschnitten, die Covariante T von der Diagonalfäche dritter Ordnung seines Gegenflaches (A). Die Hesse'sche Covariante liegt ferner nach Art. 2 auf dem Hauptkegel und auf dem Begleithyperboloid B der Form f . Wir beweisen zunächst:

Die Covariante k liegt in der Polarebene des Hauptpunktes bezüglich der Hauptfläche.

Hierzu bemerken wir, dass eine Covariante g ten Grades von f ein Punktsystem g ten Grades beschreibt, wenn f in einer Involution variirt; d. h. durch einen Punkt sind g der Covarianten bestimmt. Die Polarebene des Hauptpunktes s bezüglich der Hauptfläche müsste demnach auf $\mathfrak{C}_3$ ein Punktsystem fünften Grades ausschneiden, wenn die Punktgruppe (a) in einer Involution auf $\mathfrak{C}_3$ variirt. Ist dies der Fall, so muss die ausgeschnittene Covariante mit k identisch sein, da es keine andere Covariante dritter Ordnung fünften Grades gibt.

Wenn f in einer Involution variirt, so beschreibt die zweite Polare des Punktes o auch eine Involution, ihre Ebene ein Ebenenbüschel. Diese Ebenenbüschel für drei Pole sind projectiv aufeinander bezogen, entsprechende Ebenen schneiden sich in

¹ Es gilt allgemein: Die Gruppe der Functionaldeterminante der Punktgruppen $a_1 \dots a_\nu$ und $a_{\nu+1} \dots a_n$ auf $\mathfrak{C}_{n-2}$ des R_{n-2} wird von der Ebene ausgeschnitten, welche den gemeinsamen Raum der Gegenebenen $A_1 \dots A_\nu$ des n -Eckes $a_1 \dots a_n$ mit dem gemeinsamen Raum der Ebenen $A_{\nu+1} \dots A_n$ verbindet.

dem zu f gehörigen Hauptpunkt. Daher ist der Ort des Hauptpunktes eine Curve dritter Ordnung $\mathcal{C}'_3$.¹

Die Hauptflächen (H) der Gruppen f bilden ein Flächensystem vom zweiten Grade, da durch jeden Punkt der $\mathcal{C}_3$ zwei Flächen gehen, denn die Hesse'schen Covarianten, welche diese Flächen aus $\mathcal{C}_3$ ausschneiden, bilden ein Punktsystem zweiten Grades. Dieses Flächensystem ist den Hauptpunkten s der Curve $\mathcal{C}'_3$ projectiv zugeordnet.

Es ist also zu zeigen, dass die Polarebenen der Punkte s einer Curve dritter Ordnung bezüglich der ihnen projectiv zugeordneten Flächen zweiter Ordnung eines Systems zweiten Grades eine Curve fünfter Classe umhüllen, dass also durch jeden Punkt des Raumes fünf dieser Ebenen gehen. Es ist zu zeigen, dass fünfmal eine Polarebene von p bezüglich einer Fläche H den entsprechenden Punkt s enthält.

Einem Punkte s entsprechen nun die drei Schnittpunkte σ der Polarebene P des Punktes p bezüglich der Fläche H , welche dem Punkte s entspricht. Wird ein Punkt σ angenommen, so gibt es zwei Flächen (H), für welche σ zu p conjugirt ist; daher entsprechen einem Punkte σ zwei Punkte s . Folglich geschieht es fünfmal, dass ein Punkt s mit einem seiner entsprechenden σ zusammenfällt, wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Es ist nun leicht, die Coordinaten des Hauptpunktes s zu bestimmen. Denn die Gleichung der Ebene k ist

$$\sum \frac{k^i}{f^i} x_i = 0;$$

die Coordinaten ihres Poles s bezüglich der Hauptfläche sind daher:

$$x_i = \frac{k(\alpha_i)}{f^i}.$$

10. Auch das Begleithyperboloid B der Form f schneidet die Hesse'sche Covariante H aus; daher variirt B in einem Flächensystem zweiten Grades, wenn f eine Involution beschreibt.

¹ Die Nullebenen der Punkte dieser Curve bezüglich des Complexes C bilden eine Curve dritter Classe, schneiden daher auf $\mathcal{C}_3$ ein Punktsystem dritten Grades aus; daher schneidet, wie hier von Neuem folgt, die Nullebene des Hauptpunktes s von f , die Covariante j aus.

Hieraus folgt wie oben, dass auch die Polarebene des Hauptpunktes bezüglich des Begleithyperboloids die Covariante k enthält.

Da nun die Hauptfläche und das Begleithyperboloid dieselbe Polarebene des Hauptpunktes haben, so wird die Schnittcurve dieser Flächen aus s durch einen Kegel zweiter Ordnung projectirt, welcher die sechs Punkte der Hesse'schen Covariante H enthält, da beide Flächen diese Covarianten ausschneiden. Dieser Kegel ist daher mit dem Hauptkegel, welcher auch H enthält, identisch; es ergibt sich:

Der Hauptkegel, die Hauptfläche und das Begleithyperboloid von f gehören einem Büschel an.

Die Covariante i beschreibt, wenn f in einer Involution variirt, ein Punktsystem (i) zweiten Grades. Die Hyperboloide, welche durch $\mathfrak{C}_3$ und einen Punkt im Raume gehen, enthalten die Bisecante der $\mathfrak{C}_3$, auf welcher dieser Punkt liegt; unter den Paaren des Systems (i) gibt es zwei, welche die Schnittpunkte dieser Bisecante mit $\mathfrak{C}_3$ harmonisch trennen. Daher gehen von den Hyperboloiden $\mathfrak{H}_{(i)}$ zwei durch jeden Raumpunkt; die Hyperboloide $\mathfrak{H}_{(i)}$ gehören demnach einem Flächensystem zweiten Grades an. Hieraus folgt wieder: Die Polarebene des Hauptpunktes bezüglich des Hyperboloids $\mathfrak{H}_i$ ist die Ebene k .

Unter den Flächen des obigen Büschels gibt es eine, welche die Raumcurve $\mathfrak{C}_3$ enthält. Unter den Flächen zweiter Ordnung, welche $\mathfrak{C}_3$ enthalten, gibt es anderseits im Allgemeinen keine, welche eine gegebene Ebene zur Polare eines Punktes hat, wenn es aber eine gibt, so nur diese; denn wäre eine zweite Fläche vorhanden, so müsste s ein Eckpunkt des gemeinsamen Polartetraëders sein, also auf $\mathfrak{C}_3$ liegen. Es ergibt sich demnach:

Die Fläche $\mathfrak{H}_i$, welche $\mathfrak{C}_3$ und deren Tangenten in den Punkten der Covariante i enthält, gehört auch dem obigen Büschel an.

Da die Covariante k die Functionaldeterminante (i, j) ist, so kann nun i auch in folgender Weise construirt werden: Man suche den Schnitt der Ebene j mit einer der Flächen des obigen Büschels, ferner die Polargerade des Hauptpunktes bezüglich dieses Kegelschnittes; dann ist der Pol dieser Geraden bezüglich des Dreieckes j ein Punkt der Bisecante i .

§. 4. Die weiteren Covarianten.

11. Da die lineare Covariante α die gemischte Polare der Punkte i bezüglich j ist, so ist α nach Art. 1 der dritte Schnittpunkt der Ebene, welche durch den Hauptpunkt geht und die Punkte i enthält.

Die linearen Covarianten β, γ, δ sind die vierten harmonischen Punkte von α bezüglich der Covarianten i, τ, ϑ . Daher liegen diese linearen Covarianten auch auf der Erzeugenden der Hyperboloide $\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_\tau, \mathfrak{H}_\vartheta$, welche den Punkt α enthalten. Oder aber: Die Verbindungslinien des Punktes α und der Schnittpunkte seiner Schmiegungebene mit den Geraden i, τ, ϑ werden von den Tangenten der Punkte β, γ, δ geschnitten.

Die Tangenten der Covariante ϑ schneiden die Gerade $\alpha\beta$; in der That ist $(j, \alpha) = -\vartheta$.

Die Ebene j und die Ebene, welche i und α ausschneidet, gehen durch den Hauptpunkt, durch welchen auch die Gerade τ geht. Daher muss es eine Ebene geben, welche dem Büschel $j, \alpha i$ angehört und welche die Punkte der Covariante τ gleichzeitig mit einer linearen Covariante ξ_α ausschneidet.

Zwischen diesen Covarianten muss demnach eine Beziehung

$$c_1 j + c_2 \alpha i + c_3 \xi \tau = 0$$

bestehen. Überschiebt man diese Gleichung zweimal hintereinander über α , so erhält man,¹ wenn

$$M = 2AB - 3C, \quad N = \frac{1}{2}(AC - B^2)$$

gesetzt wird:

$$c_1 \delta + c_2 M \alpha + 2c_3 (\xi \alpha) \gamma + c_3 M \xi = 0;$$

diese Gleichung über α und δ geschoben gibt die Gleichungen:

$$-c_1 R + 3c_3 N (\xi \alpha) = 0, \quad -c_2 + c_3 \{ (MC - BN) (\xi \alpha) + N (\xi \delta) \} = 0.$$

¹ Wegen der zu verwendenden Hilfsformeln siehe Clebsch, Binäre Formen, S. 279 ff.

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn $\xi = \delta$ und $c_1 = 3MN$, $c_2 = 3(MC - BN)$, $c_3 = M$ gesetzt wird; daher:

Dem Ebenenbüschel, welches die Ebenen j und αi enthält, gehört auch die Ebene $\delta\tau$ an; zwischen diesen Covarianten besteht die Syzygie:

$$3MNj + 3(MC - BN)\alpha i + M\delta\tau = 0.$$

Vermöge der Relation

$$(\tau, f)^2 = -\frac{2}{3}Aj - \alpha i$$

gehört auch die Ebene der gemischten Polare von diesem Büschel an.

12. Die Covarianten fünfter Ordnung g und h werden nach Art. 6 aus $\mathfrak{C}_3$ von den Curven dritter Ordnung ausgeschnitten, welche auf den Hyperboloiden $\mathfrak{H}_i$, respective $\mathfrak{H}_\tau$ und der Überschiebungsfläche F_3 liegen.

Die Covariante siebenter Ordnung wird gleichzeitig mit τ von der Fläche dritter Ordnung ausgeschnitten, welche die Jacobi'sche Fläche der Ebene j des Hauptkegels und zweier Hyperboloide $\mathfrak{H}$ ist, welche $\mathfrak{C}_3$ und s enthalten. Denn diese Covariante ist mit j zusammen die Functional-determinante $(H, (j)^2)$, daher besteht sie aus den Berührungspunkten der Flächen zweiter Ordnung eines Büschels, von welchem eine Fläche zweimal die Punkte j und eine andere Fläche die Punkte H ausschneidet; als letztere Fläche kann man den Hauptkegel wählen. Diese Berührungspunkte werden aber ausgeschnitten von der Jacobi'schen Fläche des Gebüsches, welches durch die Fläche (j^2) , den Hauptkegel und zwei Flächen, welche $\mathfrak{C}_3$ enthalten, bestimmt ist, oder aber durch eine dieser Flächen, (j^2) und das Büschel des Art. 10.

Wählt man als Hyperboloide, welche $\mathfrak{C}_3$ enthalten, diejenigen, auf welchen die Gerade τ liegt, z. B. die beiden Kegel, welche aus den Punkten von τ die Curve projeciren, so wird die Fläche dritter Ordnung die Gerade τ enthalten und die Polargerade v der Ebene j bezüglich des Hauptkegels. Ferner enthält diese Fläche eine Curve dritter Ordnung, welche nur von $\mathfrak{C}_3$ und j abhängt. Diese Curve enthält die Eckpunkte des Diagonaldreieckes des Viereckes, welches aus den Punkten j und dem Haupt-

punkte besteht, ferner die Punkte τ , und hat in jedem dieser Punkte als Tangente die Schnittlinie seiner Schmiegungebene mit der Ebene, welche ihn mit der Tangente des anderen Punktes τ verbindet.

13. Die Covariante vierten Grades v ist durch dasjenige Quadrupel gegeben, dessen Begleitgerade die Polargerade der Ebene j bezüglich des Hauptkegels ist. Nach Art. 8 schneidet die Ebene j den Hauptkegel in zwei Geraden γ , in welchen der Hauptkegel von den Ebenen berührt wird, welche die zweiten Polaren der Punkte von i ausschneiden. Diese beiden Ebenen schneiden sich in v ; sie bestimmen auf $\mathbb{C}_3$ eine cubische Involution, deren Doppelpunkte eben die gesuchte Covariante v bilden. Um ihren Ausdruck zu finden, muss demnach die Jacobi'sche Determinante der zweiten Polaren der Punkte i bestimmt werden.

Wird $i_\alpha^2 = p_\alpha q_\alpha$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned} v &= ((ap)^2 a_\alpha^3, (bq)^2 b_\alpha^3) = (ap)^2 (bq)^2 ((ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 \\ &= \frac{1}{2} (ab) a_\alpha^2 b_\alpha^2 \{ (ap)^2 (bq)^2 - (aq)^2 (bp)^2 \} = (pq) a_\alpha^2 b_\alpha^2 (ap)(bq); \end{aligned}$$

die zu bestimmende Covariante ist demnach

$$(ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 (ap)(bq).$$

Nun ist die quadratische Polare der Hesse'schen Covariante H bekanntlich gegeben durch

$$\frac{1}{5} i(\alpha\beta)^2 + (ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 a_\beta b_\beta,$$

welche zweimal über $p_\beta q_\beta$ geschoben gibt:

$$(i, H)^2 = \frac{1}{5} i^2 + (ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 (ap)(bq);$$

demnach ist die gesuchte Covariante mit der Covariante

$$(i, H)^2 - \frac{1}{5} i^2$$

identisch.

Die Covariante vierter Ordnung sechsten Grades $w = (v, i)$ ist mit i zusammen die Functionaldeterminante von v und des Quadrates von i . Daher ist sie gegeben durch die Doppelpunkte

der biquadratischen Involution, welche die Gruppe v und die Gruppe $(i)^2$ enthält, und wird demnach von dem Begleithyperboloide dieser Involution ausgeschnitten. Dieses Hyperboloid enthält aber die Geraden v und i und ferner alle Strahlen des Complexes C , welche v und i schneiden; daher: Die Punkte der Covariante w liegen auf den vier Strahlen des Complexes C , welche die Geraden i und v schneiden.

14. Es erübrigt nun noch, die Covariante sechster Ordnung vierten Grades $s = (i, H)$ zu construiren. Dieselbe ist mit $(i)^2$ zusammen die Functionaldeterminante $((i)^3, H)$, besteht demnach aus den Berührungspunkten von $\mathfrak{C}_3$ mit den Flächen zweiter Ordnung eines Büschels. Eine Fläche dieses Büschels schneidet H aus, eine andere ist das Product der Schmiegungebenen der $\mathfrak{C}_3$ für die Punkte von i . Die Covariante s wird mit $(i)^3$ zusammen von der Jacobi'schen Fläche vierter Ordnung eines Flächengebüsches ausgeschnitten, welches sonst aus denselben Flächen besteht wie das oben verwendete, nur dass an Stelle der Fläche $(j)^2$ das Product der beiden Schmiegungebenen der Punkte i tritt.

Die Punkte der Covariante s ergeben sich ferner als Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ mit einer der Kernflächen einer Reciprocität. Nimmt man von einem Punkte die Polarebene an $\mathfrak{S}_i$, von dieser den Nullpunkt für C , von diesem die Polarebene für den Hauptkegel, so ist dies die entsprechende Ebene für den angenommenen Punkt; die Kernfläche ist der Ort des Punktes, der auf seiner entsprechenden Ebene liegt. Oder anders ausgedrückt: Diese Punkte sind diejenigen auf $\mathfrak{C}_3$, deren Tangentialebenen für $\mathfrak{S}_i$ sich mit der Polarebene bezüglich des Hauptkegels in einem Complexstrahl schneiden, oder da der Hauptkegel und $\mathfrak{S}_i$ dem Büschel des Art. 10 angehören: Die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ mit der Fläche zweiter Ordnung, deren Punkte Polargerade bezüglich dieses Büschels haben, welche Complexstrahlen sind. Die Punkte der Covariante s haben bezüglich des Hauptkegels und der Hauptfläche Polarebenen, die sich in einem Strahl des Complexes C schneiden.

§. 5. Die Invariantenflächen.

15. Nach l. c. S. 578 gehört zu jeder Invariante der Form f' eine „Invariantenfläche“, welche von denjenigen, die Punkte

(a) enthaltenden Curven dritter Ordnung $\mathfrak{C}_3$ erfüllt wird, für welche die Invariante der Punkte (a) verschwindet. Die Ordnungen der Invariantenflächen der Invarianten A , B , C , R sind nach l. c. S. 583 gleich 10, 20, 30, 45, und diese Flächen haben in den Punkten (a) 6-, 12-, 18-, 27-fache Punkte.

Für die Hermite'sche Invariante R wurde l. c. S. 584 bewiesen, dass ihre Invariantenfläche in 15 Flächen dritter Ordnung zerfällt. Man bestimme das Diagonaldreieck des Vierseits der Schnittlinien der Gegenebene A_i mit den übrigen Ebenen (A); die $\mathfrak{C}_3$, welche eine der Dreiecksseiten schneiden, erfüllen eine dieser Flächen. Es wurden dort auch einige Eigenschaften dieser Flächen angegeben und die Zerlegung von R in die 15 Hermite'schen Factoren gefolgert.

Wenn die Invariante C verschwindet, liegt der Hauptpunkt auf einer Tangente von $\mathfrak{C}_3$. Für $C = 0$ lässt sich die Form in die Gestalt

$$a\alpha_1^5 + b\alpha_1\alpha_2^4 + c\alpha_2^5$$

setzen. Nun ist, wenn $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ist, a_2 das Leitglied der Covariante H und a_3 das Leitglied von T . Wenn a_2 und a_3 gleichzeitig verschwinden sollen, muss es daher auf $\mathfrak{C}_3$ einen Punkt geben, welcher den H und T entsprechenden Covariantenflächen $\Sigma x_i^2 = 0$ und $\Sigma x_i^3 = 0$ gemeinsam ist. Es folgt demnach:

Die Invariantenfläche C wird gebildet von den Curven $\mathfrak{C}_3$, welche die Schnittcurve sechster Ordnung der Hauptfläche und der Diagonalfläche des Pentaeders (A) schneiden. Es ergibt sich ferner, dass diese $\mathfrak{C}_3$ die Hauptfläche in den Punkten dieser Schnittcurve berühren, dass also die Fläche C von den $\mathfrak{C}_3$ erfüllt wird, welche die Hauptfläche berühren.

16. Die Invariante B verschwindet dann und nur dann,¹ wenn f eine erste Polare hat, die ein volles Quadrat ist.

Wenn ein Quadrupel auf $\mathfrak{C}_3$ aus zwei doppeltgezählten Punkten φ besteht, so ist eine seiner Begleitgeraden die Bisecante φ ; da hier ferner alle ersten Polaren die Punkte φ ent-

¹ Siehe Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von Kerscheneiner, S. 263.

halten, so ist φ auch die Hesse'sche Gerade des Quadrupels. Nun liegt nach Art. 2 die Begleitgerade des Quadrupels auf dem Begleithyperboloid B , seine Hesse'sche Gerade auf dem Hauptkegel; diese beiden Flächen haben demnach die Bisecante φ gemein. Diese Flächen bilden aber nach Art. 10 ein Büschel, welchem auch die Hauptfläche angehört; daher liegt die Bisecante φ auf der Hauptfläche und es ergibt sich:

Die Invariantenfläche B wird erfüllt von denjenigen $\mathfrak{C}_3$, welche die Erzeugenden der Hauptfläche zu Bisecanten haben. Sie zerfällt demnach in zwei Flächen zehnter Ordnung, welche in den Punkten (a) sechsfache Punkte haben.

Da die Invariante A verschwindet, wenn i ein volles Quadrat ist, so besteht die Invariantenfläche A aus den $\mathfrak{C}_3$, welche die Covariantenfläche für i berühren. Diese Fläche ist nach l. c. S. 583 eine Fläche vierter Ordnung, welche in den fünf Punkten (a) Doppelpunkte hat, daher wird ihre Gleichung sein: $13(\Sigma x_i^2)^2 - 20 \Sigma x_i^4 = 0$.

Eine anschaulichere Bestimmung der Invariantenfläche A kann leicht in folgender Weise gegeben werden: Die Fläche der Discriminante $D = 64B - A^2$ besteht nach (B), Art. 3 aus den doppeltgezählten Ebenen des Seitenflachs S des Fünfeckes (a): $D = S^2$. Es ist daher

$$64B = A^2 + S^2;$$

die beiden Theile, in welche B zerfällt, gehören demnach dem Büschel $\lambda A + S = 0$ an. Es folgt hieraus:

Die Invariantenfläche A und die von dem Seitenflach S gebildete Fläche gehören dem Büschel an, welches durch die beiden Theile der Invariantenfläche B bestimmt ist, und zwar trennen sie in dem Büschel diese Theile harmonisch.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: [100_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Waelsch Emil

Artikel/Article: [Über Formen fünfter Ordnung auf der cubischen Raumcurve. 803-821](#)