Über räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen

von

Dr. Jan de Vries in Kampen.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1891.)

Herr Reye hat in seiner Abhandlung „Die Hexaëder- und die Oktaëderconfigurationen $(12_6, 16_3)$", Acta Mathematica, Bd. I, S. 97, gezeigt, wie die von Poncelet bei den Ähnlichkeitspunkten von vier Kugeln bemerkte Cf. collinear bezogen werden kann auf die Cf., welche durch die Ecken, den Mittelpunkt und die unendlich fernen Kantenpunkte eines Würfels bestimmt ist, oder auch auf jene Cf., welche sich aus den Ecken und unendlich fernen Kantenpunkten eines regelmässigen Oktaëders ergibt.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun diejenigen Cf. betrachtet werden, für welche die regelmässigen Polyeder überhaupt die Quelle sind.

Nachdem das von Herrn Reye für räumliche Cf. eingeführte Symbol nicht ausreicht, wenn die Anzahl der Punkte von der Anzahl der Ebenen verschieden ist, möchte ich nachstehende Bezeichnung vorschlagen, welche sich derjenigen anschliesst, deren ich mich in meinen Arbeiten über ebene Cf.[1] bedient habe.

Es möge

$$(A_b^c,\ B_a^\gamma,\ C_a^\beta)$$

eine Cf. bezeichnen, welche aus A Punkten, B Geraden und C Ebenen derart zusammengesetzt ist, dass jeder Punkt mit b Geraden und c Ebenen, jede Gerade mit a Punkten und

[1] Acta Math., XII, S. 63. Diese Berichte, XCVII, S. 1307, XCVIII, S. 446 und 1290. Math. Ann., XXXIV, S. 227 und XXXV, S. 401.

γ Ebenen, jede Ebene mit α Punkten und β Geraden incident ist. Selbstverständlich genügen jene neun Zahlen den Gleichungen

$$Ab = Ba, \; B\gamma = C\beta, \; C\alpha = Ac.$$

Diese Cf. lässt sich offenbar zerlegen in drei einfachere Cf., welche je nur zwei Arten von Elementen enthalten. Sie umschliesst nämlich:

I. Die aus Punkten und Geraden gebildete Cf.

$$(A_b, \; B_a).$$

II. Die aus Geraden und Ebenen gebildete Cf.

$$(B^\gamma, \; C^\beta).$$

III. Die aus Punkten und Ebenen gebildete Cf.

$$(A^c, \; C_\alpha).$$

Beispielsweise gilt für die durch die 27 Geraden der kubischen Fläche bestimmte Cf. die Bezeichnung $(135_2^9, 27_{10}^5, 45_{27}^3)$ und die Zerlegung in

$$(135_2, 27_{10}) + (27^5, 45^3) + (135^9, 45_{27}).$$

Bei der Aufzählung der aus Punkten und Ebenen gebildeten Cf., welche sich aus den regelmässigen Polyedern ergeben, übergehe ich alle jene „elementaren" Cf., wo jeder Punkt nur drei Ebenen, beziehungsweise jede Ebene nur drei Punkte trägt.

---

1. Die Ecken, Flächen und vierpunktigen Diagonalebenen eines Würfels bilden offenbar eine $(8^6, 12_4)$, welche collinear bezogen werden kann auf die Cf., zu der man gelangt, wenn man aus der Reye'schen Hexaëderconfiguration vier getrennte Punkte fortlässt.

Die Ebenen der $(8^6, 12_4)$ bestimmen demnach vier gleichberechtigte Sextupel, indem die sechs Ebenen einer solchen Gruppe einen der Cf. nicht angehörenden Punkt gemein haben. Jeder der unendlich fernen Kantenpunkte trägt nämlich vier Würfelflächen und zwei Diagonalebenen, während der Mittelpunkt mit allen Diagonalebenen incident ist.

Es mögen 1, 2, 3, 4 vier Würfelecken bezeichnen, welche ein Tetraëder bestimmen, und 5, 6, 7, 8 beziehungsweise die Gegenecken andeuten. Ferner sollen e_{ik} und f_{ik} die beiden Ebenen sein, welche zwei durch i und k gekennzeichneten Sextupeln gemein sind. Die obige Cf. wird alsdann dargestellt durch:

e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{34}	e_{24}	e_{23}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{34}	f_{24}	f_{23}
1	1	1	1	1	1	3	2	2	3	2	2
2	3	4	2	3	4	4	4	3	4	4	3
5	5	5	7	6	6	7	6	6	5	5	5
6	7	8	8	8	7	8	8	7	6	7	8

(1)

Ein Ebenenpaar, welches durch sämmtliche Punkte der Cf. hindurchgeht, soll als ein „Hauptzweiflach“ angedeutet werden.

Durch Ausscheidung eines solchen Paares entsteht eine $(8^5, 10_4)$.

2. Die Entfernung von zwei Hauptzweiflachen führt auf zwei verschiedene $(8^4, 8_4)$, je nachdem die betreffenden Ebenenpaare demselben Sextupel oder verschiedenen Sextupeln angehören.

Lässt man beispielsweise die Ebenen $e_{14} f_{14} e_{23} f_{23}$ aus, so ergibt sich die Cf.:

e_{12}	e_{34}	e_{13}	f_{24}	f_{12}	f_{34}	f_{13}	e_{24}
1	1	1	2	3	3	4	3
2	2	5	5	4	4	6	6
5	7	7	7	8	6	8	8
6	8	3	4	7	5	2	1

(A)

Sie ist gleichartig mit der von Moebius bemerkten Figur zweier einander um- und einbeschriebener Tetraëder, hier 1257 und 3468.

Aus der Tabelle erhellt, dass die Schnittlinie der Ebenen e_{12} und f_{12} die sechs Punkte

(12, 78) (15, 37) (16, 38)
(56, 34) (26, 48) (25, 47)

enthält.

Die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks 1256 werden daher durch die Gegenseitenpaare des Vierecks 3478 in drei Punktepaaren einer Involution geschnitten. Dabei ist zu bemerken, dass drei zusammenlaufende Seiten des einen Vierecks allemal von drei ein Dreieck bildenden Seiten des zweiten Vierecks getroffen werden.

Hieraus ergibt sich nachstehende Construction der $(8^4, 8_4) A$.

„Die Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks 1256 werden mit einer beliebigen Geraden in den sechs Punkten 12, 56; 15, 26; 16, 25 geschnitten. Auf einer durch den Punkt 12 gelegten Geraden werden die weiteren Punkte 7 und 8 gewählt, wonach 7 mit 15 und 25, 8 mit 16 und 26 verbunden wird. Der Schnittpunkt 3 der Geraden 7(15) und 8(16) ist dann der siebente, der Schnitt 4 von 7(25) und 8(26) der achte Punkt der Cf."

Wenn die Transversale des Vierecks 1256 den Schnittpunkt (16, 25) mit dem Schnitte (15, 26) verbindet, wobei der Punkt (16, 38) mit (25, 47) und (15, 37) mit (26, 48) zusammenfällt, so enthält die Figur noch die Ebenen 1467, 2358, 1458, 2367, welche die $(8^4, 8_4)$ zu einer mit der obigen gleichartigen $(8^6, 12_4)$ ergänzen.

3. Entzieht man der $(8^6, 12_4)$ die Ebenen $e_{12} f_{12} e_{14} f_{14}$, so entsteht die Cf.:

e_{34}	f_{34}	e_{24}	f_{24}	e_{23}	f_{23}	e_{13}	f_{13}	
1	3	1	2	1	2	1	2	
2	4	3	4	4	3	3	4	(*B*)
7	5	6	5	6	5	5	6	
8	6	8	7	7	8	7	8	

Hier werden die Seiten 13, 68; 16, 38; 18, 36 des Vierecks 1368, beziehungsweise durch die Seiten 57, 24; 47, 25; 27, 45 des Vierecks 2457 geschnitten. Die beiden Vierecke liegen demnach perspectivisch; allerdings treffen sich die Geraden 17, 35, 64, 82 in ihrem unendlich fernen Punkte.

Die $(8^4, 8_4)B$ lässt sich daher auf diese Weise herstellen:

„Man schneidet vier nach einem Punkte zusammenlaufende Gerade durch zwei Ebenen; die acht Schnittpunkte bilden mit jenen beiden Ebenen und den sechs durch je zwei der Geraden gelegten Ebenen die fragliche Cf.“

Wird die zweite Ebene durch zwei Nebenecken des von der ersten erzeugten Vierecks geführt, so gibt es in der Figur weitere vier Ebenen durch je vier Configurationspunkte, welche die Cf. zu einer $(8^6, 12_4)$ ergänzen.

Die Cf. *A* und *B* können einfach hierdurch unterschieden werden, dass in *A* jeder Punkt mit sechs Punkten zweifach verbunden ist, in *B* jeder Punkt mit einem Punkte dreimal, mit drei Punkten zweimal, mit drei Punkten einmal verbunden erscheint.

Beide Cf. besitzen, wie aus obigen Constructionen erhellt, im Allgemeinen 17 Freiheitsgrade.

Das duale Gegenbild der $(8^4, 8_4)B$ ist eine Cf., deren acht Ebenen die Seiten eines vollständigen Vierseits aus zwei beliebigen Punkten projiciren. Sie wird dargestellt durch:

1	1	1	1	2	2	3	3	
2	2	5	5	4	4	4	4	(*C*)
3	3	6	6	6	6	5	5	
7	8	7	8	7	8	7	8	

Von den 15 Paaren, welche aus den Hauptzweiflachen der $(8^6, 12_4)$ gebildet werden können, liefern deren drei eine Cf. *A*, die übrigen 12 eine Cf. *B*. Nachdem die Reye'sche $(12^6, 12_6)$ drei $(8^6, 12_4)$ und drei $(12^4, 8_6)$ umschliesst, lassen sich aus ihr im Ganzen 81 Cf. $(8^4, 8_4)$ hervorheben, nämlich 9 Cf. *A*, 36 Cf. *B* und 36 Cf. *C*.

4. Die Mitte der Würfelkante, welche die Ecken *i* und *k* verbindet, soll durch *ik* dargestellt werden. Aus den 12 Punkten *ik* können drei mit der obigen $(8^6, 12_4)$ gleichartige Cf. gebildet werden, welche beziehungsweise die Punkte enthalten:

$$\left.\begin{array}{l} 16,\ 17,\ 25,\ 28,\ 35,\ 38,\ 46,\ 47; \\ 17,\ 18,\ 27,\ 28,\ 35,\ 36,\ 45,\ 46; \\ 16,\ 18,\ 25,\ 27,\ 36,\ 38,\ 45,\ 47. \end{array}\right\}$$

Diese Cf. haben paarweise eine der drei Symmetrieebenen

16	17	18
25	28	27
38	35	36
47	46	45

(2)

gemein.

Die Kantenmitten sind bekanntlich die Ecken von vier regelmässigen Sechsecken, deren Ebenen zu den Würfeldiagonalen senkrecht stehen; jede dieser Ebenen

16	16	17	27
17	18	18	28
25	25	35	36
27	28	38	38
35	45	45	46
36	46	47	47

(3)

gehört zu jeder der drei Cf.

Die 12 Punkte liegen ferner zu vieren in den Würfelflächen:

16	17	16	25	25	35
17	18	18	27	28	36
46	27	36	45	35	45
47	28	38	47	38	46

(4)

Hiernach bilden die Kantenmitten eine Cf. $(12^7, 21_4)$, von deren Ebenen sechs mit den Würfelflächen zusammenfallen, drei zu je zwei Würfelflächen und die übrigen 12 paarweise einer vierpunktigen Diagonalebene des Würfels parallel laufen.

5. Es lassen sich aus dieser $(12^7, 21_4)$ mehrere einfache Cf. herstellen; zunächst liefert die Entfernung der drei Ebenen (2) eine $(12^6, 18_4)$, die Ausscheidung der sechs Ebenen (4) eine $(12^5, 15_4)$ und die Abtrennung beider Gruppen eine $(12^4, 12_4)$ mit nachstehender Tabelle:

α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
17	17	18	27	16	16	17	25	16	16	18	25
18	27	28	28	17	35	25	35	18	36	25	36
36	45	35	35	28	38	28	46	27	45	27	38
46	46	36	45	38	46	47	47	47	47	38	45

(5)

Diese Cf. besitzt sechs Paare getrennter Ebenen und sechs Paare getrennter Punkte. Jeder Punkt (jede Ebene) ist mit je zwei Punkten (Ebenen) doppelt verbunden, mit je acht einmal.

Jede Würfeldiagonale ist sechs Ebenen dieser Cf. parallel. Werden die vier unendlich fernen Punkte 15, 26, 37, 48 der Diagonalen und die sechs Ebenen der Tabelle (3) in die Figur der Cf. (5) aufgenommen, so entsteht eine $(16^6, 16_6)$, wo

$$\begin{array}{l} 15 \text{ mit } \alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3\gamma_2\gamma_3, \\ 26 \text{ mit } \alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_4\gamma_1\gamma_4, \\ 37 \text{ mit } \alpha_1\alpha_4\beta_1\beta_4\gamma_2\gamma_3, \\ 48 \text{ mit } \alpha_1\alpha_4\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_4 \end{array}$$

incident ist.

Diese Cf. ist mit der bekannten Kummer'schen Cf. gleichartig (vergl. z. B. H. Schroeter, Über das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration. Journal von Crelle, Bd. C., S. 231). Demnach:

„Bestimmt man für jeden von vier getrennten Punkten der Reye'schen $(12^6, 12_6)$ die vier Punkte, welche ihn harmonisch trennen von den vier mit ihm allineirten Punktepaaren der Cf., so ergibt sich eine durch die neuen 16 Punkte bestimmte Kummer'sche $(16^6, 16_6)$."

6. Ersetzt man zwei getrennte Ebenen der obigen $(12^4, 12_4)$ durch zwei die nämlichen acht Punkte enthaltenden Ebenen der Tabelle (2), so entsteht eine neue $(12^4, 12_4)$, wo, wie oben, vier Punkte je zwei Doppelbindungen und acht einfache Bindungen besitzen, die übrigen acht aber mit je sieben Punkten einfach, mit je einem Punkte zweifach und mit je einem dreifach verbunden sind.

Die Ersetzung von zwei getrennten Ebenen der Cf. (5) durch zwei Ebenen der (4) liefert gleichfalls eine $(12^4, 12_4)$ der zweiten Art.

Es mögen nun die Ebenen $\beta_1\beta_4\gamma_1\gamma_4$ durch die 1., 3., 4. und 5. Ebene der (4) ersetzt werden; die dadurch entstandene $(12^4, 12_4)$ besitzt vier Punkte 16, 25, 38, 47, welche je vier einfache und vier doppelte Bindungen aufweisen, indess die übrigen acht je mit sieben Punkten einfach, mit einem zweifach und mit einem dreifach verbunden sind.

Die Ebenen $\alpha_1 \alpha_4 \beta_1 \beta_4 \gamma_1 \gamma_4$ bilden mit den sechs Ebenen der (4) eine $(12^4, 12_4)$,

16	16	16	16	17	17	25	25	27	25	25	35
17	17	18	18	18	18	27	28	28	35	45	36
28	46	27	36	27	36	45	35	35	46	36	45
38	47	47	38	28	46	47	38	45	47	38	46

(6)

wo jeder Punkt (jede Ebene) mit vier anderen einfach, mit vier weiteren zweifach verbunden erscheint.

Die Cf. $(12^5, 15_4)$, welche aus (6) durch Hinzufügung der Ebenen (2) entsteht, ist von der oben erwähnten verschieden; jeder Punkt besitzt nämlich zwei dreifache, zwei doppelte und fünf einfache Bindungen, indess die obige $(12^5, 15_4)$ für jeden Punkt zwei dreifache und neun einfache Bindungen aufweist.

7. Die Mitten der Kanten des Tetraëders 1234 (zugleich Mittelpunkte der Würfelflächen) bezeichne ich durch 12, 13, 14, 34, 24, 23. Nachdem nun jede durch drei Würfelecken gelegte Ebene drei dieser Punkte und jede vierpunktige Diagonalebene deren zwei enthält, ergibt sich eine Cf. $(14^6, 14_6)$, nämlich:

1	1	1	2	5	5	5	6	1	1	1	2	2	3
2	2	3	3	6	6	7	7	2	3	4	3	4	4
3	4	4	4	7	8	8	8	5	5	5	6	6	7
12	12	13	23	14	13	12	12	6	7	8	7	8	8
13	14	14	24	24	23	23	13	12	13	14	14	13	12
23	24	34	34	34	34	24	14	34	24	23	23	24	34

(7)

Diese aus den Ecken, Flächenmittelpunkten und Diagonalebenen des Würfels zusammengesetzte Cf. besitzt keine getrennten Punkte; acht Punkte haben je drei einfache, drei zweifache und sieben dreifache Bindungen, die übrigen sechs aber je neun zweifache und vier dreifache Bindungen. Dagegen gibt es vier Paare getrennter Ebenen.

Durch Combination des Würfels mit dem ihm umbeschriebenen Oktaëder wird man auf eine $(14^4, 14_4)$ geführt, welche aus den Ecken und Flächen der beiden Polyeder besteht.

Aus ihr ergibt sich noch eine $(14^6, 21_4)$ durch Hinzufügung der Diagonalebenen des Oktaëders und von vier rechteckigen Diagonalebenen des Würfels.

8. Wenn 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 die Gegeneckenpaare eines Oktaëders und 12, 13 u. s. w. dessen Kantenmitten bezeichnen, so stellt nachstehende Tabelle die Cf. $(18^4, 12_6)$ dar, welche die Ecken, Kantenmitten, Flächen und sechspunktigen Symmetrieebenen des Oktaëders enthält.

1	4	1	3	1	2	1	2	15	13	12	12	
2	5	2	4	3	4	5	3	16	15	16	13	
3	6	6	5	5	6	6	4	24	23	23	26	
12	45	12	34	13	24	15	23	34	24	34	35	(8)
13	46	16	35	15	26	16	24	26	46	45	45	
23	56	26	45	35	46	56	34	35	56	56	46	

Jede Oktaëderecke bildet mit den Mitten zweier Kanten, welche durch die Gegenecke laufen und in einer Diagonalebene liegen, ein „Hauptdreieck“, also ein Punktetripel, dessen Punkte zusammen die 12 Ebenen der Cf. tragen.

Die Ausscheidung eines dieser 12 Hauptdreiecke liefert eine $(15^4, 12_5)$.

Sollen zwei Hauptdreiecke entfernt werden, so sind die beiden in ihnen enthaltenen Oktaëderecken entweder auf einer Kante oder auf einer Diagonale belegen. Im ersten Falle liegen die vier ausfallenden Kantenmitten in einer Ebene, welche entweder der Gegenkante oder einer sie treffenden Diagonale parallel ist. Im zweiten Falle sind die vier Mitten mit den beiden Ecken in einer Ebene oder aber als die Ecken eines Tetraëders zu denken.

Diese Betrachtung führt daher auf vier Arten von $(12^4, 12_4)$. Bei Ausscheidung von

a) 1, 34, 46; 2, 15, 45 entsteht eine Cf., wo fünf Punkte je fünf Doppelbindungen, sechs Punkte je vier Doppelbindungen und ein Punkt deren drei aufweist.

b) Die Gruppe 1, 34, 46; 2, 35, 56 liefert eine Cf., wo drei Punkte je fünf, acht Punkte je vier Doppelbindungen besitzen, der zwölfte Punkt deren drei.

c) Die Gruppe 1, 34, 46; 4, 12, 15 führt auf eine Cf., wo acht Punkte je fünf, die übrigen vier je drei zweifache Bindungen besitzen.

d) Die Gruppe 1, 34, 46; 4, 13, 16 gibt schliesslich eine $(12^4, 12_4)$, wo zwei Punkte je sechsmal, vier Punkte je fünfmal und sechs Punkte je viermal doppelt verbunden sind.

9. Die Cf. $(18^4, 12_6)$ liefert ausserdem Gruppen von sechs Punkten, welche nicht in zwei Hauptdreiecke zerlegt werden können, trotzdem aber zur Bildung einer $(12^4, 12_4)$ Anlass bieten. Eine solche Gruppe besteht aus vier in einer Diagonalebene belegenen Kantenmitten und den beiden ausserhalb dieser gelegenen Oktaëderecken.

Werden z. B. die Punkte 3, 6; 12, 15, 24, 45 ausgelassen, so entsteht die durchaus regelmässige $(12^4, 12_4)$:

1	4	16	1	4	13	1	2	16	1	2	13
2	5	26	2	5	23	5	4	23	5	4	26
13	46	34	16	34	46	13	26	34	16	23	35
23	56	35	26	35	56	35	46	56	56	34	46

(9)

Diese Cf. hat mit der Cf. (6) die Eigenschaft gemein, dass sämmtliche Punkte von je drei getrennt, mit je vier doppelt verbunden sind, unterscheidet sich von ihr aber durch das Vorhandensein von vier Hauptdreiflachen und von vier Hauptdreiecken, nämlich (1, 34, 46), (2, 35, 56), (4, 13, 16), (5, 23, 26).

Werden eine Diagonalebene des Oktaëders und zwei ihr parallele Ebenen in die Cf. (9) aufgenommen, so entsteht eine $(12^5, 15_4)$, wo jeder Punkt mit je zwei dreifach, mit je zwei weiteren zweifach verbunden ist. Sie besitzt 11 Hauptdreiflache. Werden nämlich beispielsweise die Ebenen

1	13	16
2	23	26
4	34	46
5	35	56

(10)

hinzugefügt, so lässt sich jede dieser Ebenen mit je zweien der Ebenen aus (9) zu einem neuen Hauptdreiflach zusammenstellen.

Hierin ist die sprachliche $(12^5, 15_4)$ verschieden von der in §. 6 aus Tabelle (6) hergeleiteten Cf., wo nur sieben Hauptdreiflache gebildet werden können.

10. Durch Vertauschung der Gruppe (10) mit einem Hauptdreiflache der (9) entsteht eine $(12^4, 12_4)$, deren sämmtliche

Punkte mit je einem Punkte dreifach, mit je zweien zweifach verbunden sind. Die Ebenen der (10) sind hier mit je sechs Ebenen doppelt verbunden, die übrigen neun Ebenen mit je fünf. Sie besitzt sieben Hauptdreiflache.

Werden schliesslich die Ebenen

1	4	16	1	4	13
2	5	26	2	5	23
34	13	46	46	16	34
35	23	56	56	26	35

(11)

der Figur (9) zugesellt, so ergibt sich eine $(12^6, 18_4)$, wo vier Punkte je eine vierfache und fünf zweifache, die übrigen acht Punkte je eine vierfache, eine dreifache und drei doppelte Verbindungen besitzen.

11. Die Ecken des regelmässigen Dodekaëders bestimmen bekanntlich zehn regelmässige Tetraëder. Werden diese durch 0, 1, 2, . . . 9 angedeutet, so kann jede Dodekaëderecke dargestellt werden durch die Zusammenstellung der Zahlen der beiden Tetraëder, welchen sie angehört. Die Bezeichnung lässt sich so treffen, dass allemal die Gegenecke der Ecke ik das Zeichen $(9-i)(9-k)$ erhält. Werden zwei Gegenecken 01 und 89 genannt und die sechs durch Flächendiagonalen mit 89 verbundenen Ecken der Reihe nach mit 02, 15, 04, 16, 03, 17 bezeichnet, so ergibt sich die Darstellung der übrigen Ecken ohne Zweideutigkeit.

Die 20 Ecken liegen sechsmal zu fünf in vier parallelen Ebenen, nämlich zwei Flächen und zwei Diagonalebenen. Sie bilden demnach mit den 12 Seitenflächen und 12 fünfpunktigen Diagonalebenen eine aus sechs Hauptvierflachen zusammengesetzte Cf. $(20^6, 24_5)$ mit der nachstehenden Tabelle.

01	02	03	04	01	02	03	04	01	02	03	04
25	16	17	15	25	17	15	16	26	15	16	17
38	35	26	28	37	38	26	28	35	37	28	25
46	47	48	37	48	46	47	35	48	46	47	38
79	89	59	69	69	59	89	79	79	89	59	69

01	02	03	04	01	02	03	04	01	02	03	04
26	17	15	16	28	16	17	15	28	15	16	17
38	35	28	25	35	37	25	26	37	38	25	26
47	48	46	37	47	48	46	38	46	47	48	35
59	69	79	89	69	59	89	79	59	69	79	89

(12)

Jeder Punkt dieser Cf. ist von sieben anderen getrennt, nämlich von seinem Gegenpunkte und den Ecken der beiden Tetraëder, welchen er angehört; mit den übrigen 12 Punkten ist er zweifach verbunden.

Entfernt man eine Tetraëdergruppe, z. B. (01, 02, 03, 04), so entsteht allemal eine $(16^6, 24_4)$, wo jeder Punkt neun doppelte Bindungen besitzt.

Wird ein Hauptvierflach der $(20^6, 24_5)$ ausgelassen, so ergibt sich eine $(20^5, 20_5)$, deren Punkte mit je acht Punkten zweifach verbunden sind.

Zwei Hauptvierflache der Tabelle (12) enthalten acht doppelt gebundene Punktepaare; durch Ausscheidung dieser beiden Ebenenquadrupel entstehen daher acht neue getrennte Punktepaare. Die dadurch entstandene $(20^4, 16_5)$ enthält demnach 16 Punkte, welche je fünf Doppelbindungen besitzen, indess die übrigen vier Punkte je vier zweifache Bindungen aufweisen. Werden z. B. die fünfte und sechste Gruppe der (12) ausgelassen, so sind 02, 35, 46, 79 die Punkte der zweiten Art; sie begrenzen offenbar zwei Gegenkanten. Den 15 Gegenkantenpaaren entsprechen die 15 Paare von Hauptvierflachen.

Durch gleichzeitige Entfernung eines Hauptvierecks und eines Hauptvierflachs (dies kann auf 10×6 verschiedene Weisen geschehen) erhält man aus (12) eine $(16^5, 20_4)$, deren sämmtliche Punkte je sechs Doppelbindungen besitzen.

12. Die oben erhaltene Cf. $(20^4, 16_5)$ erlaubt die Aufstellung zweier verschiedener $(16^4, 16_4)$, je nachdem nämlich die ausgeschiedene Punktgruppe einen oder keinen Punkt der zweiten Art enthält.

Sind, wie oben, 02, 35, 46, 79 die Punkte zweiter Art, so gibt es nur zwei Hauptvierecke (01, 15, 16, 17) und (28, 38, 48, 89), welche keinen der vier Punkte enthalten; die übrigen acht haben je einen Punkt mit jenem Quadrupel gemein.

Durch Abtrennung eines dieser acht Hauptvierecke entsteht eine $(16^4, 16_4)$, wo sechs Punkte je drei Doppelbindungen, die übrigen zehn deren je vier besitzen.

Dagegen liefert jede der beiden erstgenannten Tetraëdergruppen eine $(16^4, 16_4)$, wo acht Punkte je drei und acht Punkte je vier Doppelbindungen zeigen.

13. Die 20 Dodekaëderecken liegen zu sechs in 20 Ebenen, deren jede zwei Tetraëder begrenzt.

01	01	01	02	01	01	01	02	02	02
02	02	03	03	15	15	16	25	25	26
03	04	04	04	16	17	17	26	28	28
46	35	25	15	37	26	25	38	16	15
47	37	26	16	47	46	35	48	46	35
48	38	28	17	79	69	59	89	69	59

03	03	03	04	04	04	15	16	17	28
35	35	37	46	46	47	25	26	37	38
37	38	38	47	48	48	35	46	47	48
28	17	15	28	17	16	69	59	59	59
48	47	25	38	37	26	79	79	69	69
89	79	59	89	79	69	89	89	89	79

(13)

In dieser $(20^6, 20_6)$ ist jeder Punkt (jede Ebene) nur von einem Punkte (einer Ebene) getrennt, mit je 12 Punkten (Ebenen) zweifach verbunden.

Durch Ausscheidung einer Tetraëdergruppe (01, 02, 03, 04) und der Gruppe (59, 69, 79, 89) der Gegenecken zerfällt die Cf. in zwei einfachere Cf.; die übrigen 12 Punkte liegen nämlich zu dreien in den acht Ebenen der beiden Tetraëder, zu vieren in den übrigen 12 Ebenen; sie bilden demnach eine $(12^2, 8_3)$ und eine $(12^4, 12_4)$. Letztere ist gleichartig mit der Cf. (5); ihre Tabelle übergeht geradezu in diese, wenn man die Zahlen 2 und 3, 5 und 8 vertauscht.

Nachdem die sprachliche Spaltung der $(20^6, 20_6)$ auf fünf Arten geschehen kann, lässt sich diese Cf. betrachten als eine Combination von fünf Cf. $(12^4, 12_4)$, welche paarweise sechs Punkte und sechs Ebenen gemein haben.

Jede dieser fünf Cf. kann, wie die Cf. des §. 5, zu einer $(12^5, 15_4)$ ergänzt werden; die drei neuen Ebenen sind allemal Diagonalebenen durch je zwei Gegenkanten des Dodekaëders. Die 15 Ebenen dieser Art ordnen sich demgemäss in fünf Tripel an.

14. Die Ecken des Dodekaëders bestimmen bekanntlich fünf Würfel, welche paarweise zwei Gegenecken gemein haben;

ihre Seitenflächen sind die 30 quadratischen Diagonalebenen des Dodekaëders.

Sie bilden mit den 20 Ecken eine $(20^6, 30_4)$ und lassen sich in Quintupel anordnen, deren Ebenen zusammen sämmtliche Punkte der Cf. tragen. Man findet diese Ebenengruppen durch folgende Überlegung.

Jeder Würfelfläche ist eine Dodekaëderkante parallel, welche mit ihr durch weitere vier Kanten verbunden erscheint. Für fünf völlig getrennte quadratische Diagonalebenen müssen die fünf ihnen auf diese Weise zugeordneten Kanten ebenfalls getrennt liegen. Wählt man zwei Gegenflächen des Dodekaëders aus, so bilden die 10 nicht in ihnen belegenen Ecken ein windschiefes Zehneck, welches offenbar in zwei Kantenquintupel mit der verlangten Eigenschaft zerlegt werden kann. Die 12 möglichen Quintupel ordnen sich daher in sechs Paare. Sie lassen sich ferner in zwei Gruppen von je sechs Quintupeln anordnen, deren jede sämmtliche 30 Kanten enthält. Die sechs Quintupel der einen Gruppe ergänzen diejenigen der anderen zu den sechs windschiefen Zehnecken.

In der nachstehenden Tabelle sind die Ebenen der sprachlichen $(20^6, 30_4)$ auf eine der beiden Weisen in sechs Hauptfünfflache geordnet.

01	03	04	16	25	01	02	04	15	37
02	26	15	17	28	03	17	25	16	38
59	38	35	48	37	59	26	35	28	46
69	46	47	89	79	79	47	48	89	69

01	02	03	15	25	01	02	03	17	35
04	28	16	17	46	15	04	16	25	47
69	37	26	38	48	28	69	37	26	48
79	47	35	89	59	38	89	46	79	59

(14)

01	02	03	15	26	01	02	04	16	26
16	17	04	46	35	17	03	15	35	28
28	25	79	47	38	38	59	25	37	47
48	37	89	59	69	48	89	46	69	79

Jeder Punkt dieser Cf. ist mit sechs Punkten doppelt verbunden, also nur von einem Punkte getrennt.

In der $(20^5, 25_4)$, welche durch Ausscheidung eines Ebenenquintupels erhalten wird, ist jeder Punkt noch mit vier Punkten zweifach verbunden.

15. Durch Entfernung von zwei Hauptfünfflachen ergeben sich zwei verschiedenartige $(20^4, 20_4)$, je nachdem man zwei Quintupel der Tabelle (14) nimmt oder zwei Quintupel, deren zugeordnete Kanten ein windschiefes Zehneck bilden. Letzteres trifft z. B. zu für die Combination des fünften Quintupels von (14) mit der Gruppe

01	03	04	15	26
02	16	25	17	28
59	37	35	38	47
69	46	48	69	79

(15)

welche aus jedem der übrigen Quintupel eine Ebene enthält.

Im ersten Falle werden im Ganzen vier Doppelbindungen aufgehoben; die $(20^4, 20_4)$ besitzt demnach acht Punkte mit je drei und 12 Punkte mit je zwei doppelten Bindungen.

Im zweiten Falle verschwinden überhaupt keine Doppelbindungen. Sämmtliche Punkte der betreffenden $(20^4, 20_4)$ sind mit je drei Punkten zweifach verbunden.

16. Die Diagonalebenen der fünf in das Dodekaëder gestellten Würfel lassen sich zu einer $(20^6, 30_4)$ zusammenfassen, welche wie die obige Cf. 12 Hauptfünfflache besitzt.

Jede Seitenfläche des Dodekaëders wird in ihren Endpunkten durch 10 Seitendiagonalen geschnitten, welche den Kanten des jener Fläche zugeordneten windschiefen Zehnecks parallel laufen (§. 14). Diese Diagonalen bilden zwei zusammengehörige Quintupel getrennter Geraden, und die fünf durch ein solches Quintupel bestimmten Würfeldiagonalebenen bilden ein Hauptfünfflach der sprachlichen Cf.

Die 12 Ebenenquintupel dieser $(20^6, 30_4)$ lassen sich aber nicht in Sextupel anordnen, deren jedes sämmtliche Ebenen erschöpft; vielmehr gibt es nur Gruppen zu je drei gegenseitig unabhängigen Quintupeln.

Der Punkt 01 trägt die nachstehenden Ebenen.

01	01	01	01	01	01	
02	03	04	15	16	17	(16)
79	69	59	48	38	28	
89	89	89	89	89	89	

Jeder Punkt ist demnach mit seinem Gegenpunkte sechsfach verbunden.

Die durch Auslassung eines Ebenenquintupels erhaltene $(20^5, 25_4)$ ist natürlich von der in §. 14 erwähnten verschieden; jeder Punkt besitzt eine fünffache Bindung.

Werden zwei zusammengehörige Quintupel entfernt, so verliert jeder Punkt eine Doppelbindung und vier einfache, besitzt demnach in der entstandenen $(20^4, 20_4)$ eine vierfache Bindung.

Es möge nun ein Ebenenquintupel der $(20^6, 30_4)$ des §. 14 durch ein Quintupel der Cf. des §. 16 ersetzt werden. Dabei tritt z. B. an die Stelle der Ebene (01, 02, 59, 69) eine der sechs Ebenen der (16).

Man wird hierdurch auf drei verschiedene $(20^6, 30_4)$ geführt, wo der Punkt 01 entweder drei zweifache Bindungen und eine dreifache besitzt — oder vier zweifache und eine dreifache — oder aber wiederum sechs zweifache.

17. Den fünf Würfeln entsprechend gibt es fünf aus den Ecken des Dodekaëders gebildete $(8^6, 12_4)$, welche derart zusammenhängen, dass ihre Elemente zu einer $(20^{12}, 60_4)$ vereinigt sind, wo jeder Punkt sechs dreifache und sechs zweifache Bindungen besitzt.

Diese Cf. kann offenbar in die beiden $(20^6, 30_4)$ der §§. 14 und 16 zerlegt werden.

Durch Hinzufügung der 15 je ein Paar Gegenkanten enthaltenden Ebenen kommt man auf eine $(20^{15}, 75_4)$, wo jeder Punkt eine neunfache, sechs dreifache und sechs zweifache Bindungen aufweist.

Aus der obigen $(20^{12}, 60_4)$ können einfachere Cf. dadurch erhalten werden, dass man jeder der 5 Cf. $(8^6, 12_4)$ ein Hauptzweiflach oder deren mehrere entzieht; es ergeben sich dann Cf. $(20^{10}, 50_4)$, $(20^8, 40_4)$, $(20^6, 30_4)$ und $(20^4, 20_4)$.

18. Ausserhalb zweier Gegenflächen des Dodekaëders liegen 20 Kantenmitten auf drei den Flächen parallelen Ebenen und

bilden die Ecken zweier regelmässiger Fünfecke und eines regelmässigen Zehnecks. Nachdem es daher ausser den 12 in den Flächen des Polyeders belegenen Mittenquintupel deren noch 12 gibt, bilden die 30 Kantenmitten mit besagten 24 Ebenen eine Cf. $(30^4, 24_5)$.

Es möge nun ein Paar Gegenflächen des Dodekaëders durch a und α dargestellt werden, indess die fünf mit a verbundenen Flächen der Reihe nach durch b, c, d, e, f, ihre Gegenebenen durch β, γ, δ, ε, φ angedeutet werden. Bezeichnet man nun die Mitte der Kante, welche den Flächen a und b gemein ist, durch ab, so ergibt sich für die obige $(30^4, 24_5)$ die nachstehende Tabelle:

ab	bc	$\beta\gamma$	$\alpha\beta$	ab	ac	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta$	ac	ab	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$
ac	cd	$\gamma\delta$	$\alpha\gamma$	bc	$c\varepsilon$	γe	$\beta\gamma$	bc	$b\varepsilon$	βe	$\beta\gamma$
ad	de	$\delta\varepsilon$	$\alpha\delta$	$b\delta$	$\delta\varepsilon$	de	βd	cd	$d\varphi$	δf	$\gamma\delta$
ae	ef	$\varepsilon\varphi$	$\alpha\varepsilon$	$b\varepsilon$	δf	$d\varphi$	βe	$c\varepsilon$	$\varepsilon\varphi$	ef	γe
af	bf	$\beta\varphi$	$\alpha\varphi$	bf	af	$\alpha\varphi$	$\beta\varphi$	$c\varphi$	ad	$\alpha\delta$	γf

ad	ac	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	ae	ad	$\alpha\delta$	$\alpha\varepsilon$	af	ab	$\alpha\beta$	$\alpha\varphi$
cd	$c\varphi$	γf	$\gamma\delta$	de	af	$\alpha\varphi$	$\delta\varepsilon$	bf	$b\delta$	βd	$\beta\varphi$
$d\varphi$	$\beta\varphi$	bf	δf	βe	γf	$c\varphi$	$b\varepsilon$	δf	$\gamma\delta$	cd	$d\varphi$
βd	βe	$b\varepsilon$	$b\delta$	γe	$\beta\gamma$	bc	$c\varepsilon$	γf	γe	$c\varepsilon$	$c\varphi$
de	ae	$\alpha\varepsilon$	$\delta\varepsilon$	ef	βd	$b\delta$	$\varepsilon\varphi$	ef	ae	$\alpha\varepsilon$	$\varepsilon\varphi$

(17)

Die dreissig Kantenmitten bestimmen bekanntlich fünf regelmässige Oktaëder, deren Ecken sie sind. Sie bilden demnach die nachstehenden Eckensextupel:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{I.} & ab, & \alpha\beta, & de, & \delta\varepsilon, & c\varphi, & \gamma f \\ \text{II.} & ac, & \alpha\gamma, & ef, & \varepsilon\varphi, & b\delta, & \beta d \\ \text{III.} & ad, & \alpha\delta, & bf, & \beta\varphi, & c\varepsilon, & \gamma e \\ \text{IV.} & ae, & \alpha\varepsilon, & bc, & \beta\gamma, & d\varphi, & \delta f \\ \text{V.} & af, & \alpha\varphi, & cd, & \gamma\delta, & b\varepsilon, & \beta e \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Werden die Ecken eines dieser Octaëder aus der $(30^4, 24_5)$ entfernt, so verliert, wie aus (17) erhellt, jede Ebene einen Punkt; diese Cf. enthält daher fünf Cf. $(24^4, 24_4)$.

19. Senkrecht zu jeder Hauptdiagonale des Dodekaëders (Diagonale durch zwei Gegenecken) gibt es drei Ebenen, welche

je sechs Kantenmitten tragen. Zwei von diesen bilden ein gemeinschaftliches Gegenflächenpaar für zwei der Oktaëder, die dritte halbirt die betreffende Hauptdiagonale des Dodekaëders.

Werden allemal nur die ersten beiden Ebenen berücksichtigt, so ergibt sich für die 30 Kantenmitten eine $(30^4, 20_6)$, welche durch Hinzunahme der übrigen zehn Ebenen in eine $(30^6, 30_6)$ übergeht.

Die Ebenen des ersten Oktaëders tragen ausser dessen Ecken noch je drei der übrigen 24 Kantenmitten, also zusammengenommen jeden dieser Punkte einmal. Durch Entfernung jener Oktaëderebenen entsteht demnach aus der oben erwähnten $(30^4, 20_6)$ eine $(24^3, 12_6)$. Unter den zehn Halbirungsebenen der Hauptdiagonalen gibt es vier, welche keine Ecke des ersten Oktaëders tragen; werden sie jener $(24^3, 12_6)$ zugesellt, so entsteht eine $(24^4, 16_6)$.

20. Die Diagonalen $(bc, \beta\gamma)$, $(ae, \alpha\varepsilon)$, $(d\varphi, \delta f)$ eines Oktaëders sind senkrecht zu den Seitenflächen von drei rechtwinkeligen Parallelepipeden, deren Ecken die Mitten der übrigen 24 Dodekaëderkanten bilden. Jedes Parallelepipedon besitzt drei Arten von Flächen; diejenigen, welche den grössten Abstand vom Mittelpunkte des Dodekaëders haben, sollen Ebenen erster Art heissen; für die Ebenen der dritten Art habe dieser Abstand den kleinsten Werth. Für das Parallelepipedon mit den Flächen

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} ab & \alpha\beta & ab & \alpha\beta & ac & \alpha\gamma \\ ac & \alpha\gamma & ac & \alpha\gamma & c\varepsilon & \gamma e \\ b\varepsilon & \beta e & \beta e & b\varepsilon & \beta e & b\varepsilon \\ c\varepsilon & \gamma e & \gamma e & c\varepsilon & \alpha\beta & ab \end{array}\right| \qquad (19)$$

sind die erste und zweite Fläche Ebenen erster Art, die dritte und vierte solche zweiter Art, die fünfte und sechste solche dritter Art.

Werden nur Ebenen einer Art berücksichtigt, so wird man auf Cf. $(30^4, 30_4)$ geführt; durch Hinzunahme der Ebenen einer zweiten Art entstehen offenbar Cf. $(30^8, 60_4)$; schliesslich gehören sämmtliche Ebenen der 15 Parallelepipede einer $(30^{12}, 90_4)$ an.

Letztere wird durch die 15 Diagonalebenen der fünf Oktaëder zu einer $(30^{14}, 105_4)$ ergänzt.

Es liegt nahe, auch die Diagonalebenen der Parallelepipede in die Figur aufzunehmen. Allein die Ebene durch die Punkte *ab*, *ac*, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ läuft den Flächen e, ε des Dodekaëders parallel, enthält demnach noch sechs Punkte *bf*, *cd*, δf, $d\varphi$, $\gamma\delta$, $\beta\varphi$; sie ist daher auch als Diagonalebene des durch die Zehnecksdiagonalen (*bf*, *cd*) und ($\beta\varphi$, $\gamma\delta$) bestimmten Parallelepipeds zu betrachten. Offenbar gehört sie zehn Parallelepipeden als Diagonalebene an.

Ebenso erhellt, dass die Diagonalebene (*ac*, βe, $\alpha\gamma$, $b\varepsilon$) noch sechs weitere Punkte trägt. Die Ebene (*ac*, $c\varepsilon$, $\alpha\gamma$, γe) dagegen enthält nur noch die beiden Punkte *ae* und $\alpha\varepsilon$. Jede sechspunktige Ebene ist drei Parallelepipeden gemeinsam.

Es möge jetzt die Anzahl der Ebenen bestimmt werden, welche je zwei Kanten von verschiedenen Parallelepipeden enthalten.

Jeder Oktaëderdiagonale laufen die Kanten von drei Parallelepipeden parallel; man würde demnach schliessen, dass die fragliche Anzahl der Ebenen durch je zwei Kanten von ungleicher Länge $16\times3\times15=720$ wäre. Allein jede Ebene durch 10 Kantenmitten ersetzt 20 jener Ebenen, weil jedes Paar Gegenseiten und ebenso jedes Paar paralleler Diagonalen des bezüglichen Zehnecks als Kantenpaar eines Parallelepipedons aufzufassen ist. Ferner ist z. B. die sechspunktige Ebene (*ab*, *ac*, $c\varphi$, $\varepsilon\varphi$, $\delta\varepsilon$, $b\delta$), wo die Geraden (*ab*, *ac*), ($c\varphi$, $b\delta$), ($\varepsilon\varphi$, $\delta\varepsilon$) parallel sind, als Ersatz zu betrachten für neun Ebenen. Schliesslich vertreten die 24 Ebenen der Tabelle (17) je fünf der fraglichen Ebenen. Es bleiben daher noch $720-(6\times20+20\times9+24\times5)=300$ vierpunktige Ebenen, welche je zwei Kanten von ungleicher Länge enthalten.

Diese Ebenen ergänzen die obige $(30^{14}, 105_4)$ zu einer $(30^{54}, 405_4)$. Es ist einleuchtend, dass diese stark concentrirte Cf. eine Fülle von einfacheren Cf. umfasst.

21. Sechs Ecken eines Ikosaëders sollen derart mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden, dass die Ecke 1 mit den übrigen fünf durch Kanten verbunden ist; die sechs Gegenecken sollen durch 1′ bis 6′ dargestellt werden.

Die 12 Ecken bilden nun mit den 12 fünfpunktigen Diagonalebenen eine $(12^5, 12_5)$.

1	1	1	1	1	1′	1′	1′	1′	1′	2	2′	
2	2	2′	2′	3	2′	2′	2	2	3′	3	3′	
3′	4	3	3′	4′	3	4′	3′	3	4	4	4′	(20)
4′	5′	5	4	5′	4	5	5′	4′	5	5	5′	
5	6′	6′	6	6	5′	6	6	6′	6′	6	6′	

Jeder Punkt ist nur von einem Punkte getrennt, mit den übrigen zehn je zweimal verbunden. Die zehn durch zwei Gegenecken laufenden Ebenen gehen demnach zu vieren durch die übrigen zehn Punkte, bilden also mit diesen eine $(10^4, 10_4)$. Ihre Tabelle entsteht z. B. aus (20), wenn man die letzten zwei Ebenen und die Zeichen 1 und 1′ unterdrückt.

22. Die Ebenen, welche je zwei Gegenkanten des Ikosaëders tragen, bestimmen mit den Ecken eine $(12^5, 15_4)$ mit der Tabelle (21), wo die Ebenen in fünf Hauptdreiflache geordnet sind; diese Gruppirung ist auf sechs Weisen möglich.

1	3	5	1	2	4	1	2	3	1	2	3	1	2	4
2	4	6	3	5	6	4	6	5	5	4	6	6	3	5
1′	3′	5′	1′	2′	4′	1′	2′	3′	1′	2′	3′	1′	2′	4′
2′	4′	6′	3′	5′	6′	4′	6′	5′	5′	4′	6′	6′	3′	5′

(21)

Durch Entfernung eines Hauptdreiflachs ergibt sich eine $(12^4, 12_4)$, deren Punkte mit je einem Punkte vierfach verbunden sind.

Werden die fünf durch 1 und 1′ gelegten Ebenen ausgeschieden, so erübrigt eine $(10^4, 10_4)$, wo jeder Punkt eine vierfache Bindung besitzt; diese Cf. ist somit verschieden von der oben erwähnten $(10^4, 10_4)$, deren Punkte je vier Doppelbindungen zeigen.

Die beiden Cf. lassen sich zu einer $(10^8, 20_4)$ vereinigen, wo jeder Punkt eine vierfache, vier dreifache und vier zweifache Bindungen besitzt.

Durch Ausscheidung eines vierfach verbundenen Punktepaares 6, 6′ und der 12 mit ihnen incidenten Ebenen entsteht eine $(8^4, 8_4)$ *B*, welche durch die Ebenen 2345 und 2′3′4′5′ zu einer $(8^5\ 10_4)$ ergänzt wird.

Die obige $(10^8, 20_4)$ ist gleichartig mit der Cf., welche durch die Ecken, Flächen und Diagonalebenen eines regelmässigen fünfseitigen Prismas bestimmt wird.

Überhaupt bilden die Eckpunkte, Seitenflächen und vierpunktigen Diagonalebenen eines regelmässigen n-seitigen Prismas, wenn $n = 2k+1$, eine

$$((4k+2)^{2k^2}, \quad k^2(2k+1)_4),$$

wenn $n = 2k$, eine

$$(4k^{2k^2-2k+1}, \quad k(2k^2-2k+1)_4).$$

Die Betrachtung der Kantenmitten des Ikosaëders führt offenbar auf die Cf. der §§. 18, 19 und 20.

Es möge nebenbei bemerkt werden, dass unter den in dieser Arbeit erwähnten Cf. manche in der Anzahl der Elemente übereinstimmen; beispielsweise wurden nicht weniger als neun verschiedene $(12^4, 12_4)$ hervorgehoben.