Zur Theorie der associirten Formen

von

Dr. **Gustav Kohn,**

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1891.)

Während für die Darstellung aller Co- und Invarianten einer binären Form f (oder eines Systems solcher Formen) in ganzer und rationaler Weise durch eine endliche Anzahl unter ihnen einfache allgemeine Gesetze nicht zu bestehen scheinen, kann man, wie Hermite gezeigt hat,[1] nach einer überaus einfachen Regel und noch auf unendlich viele Arten alle Co- und Invarianten einer Form f durch eine geschlossene Anzahl unter ihnen in rationaler Weise so ausdrücken, dass nur eine Potenz von f im Nenner erscheint. Unter all diesen Arten ist aber eine bestimmte dadurch ausgezeichnet, dass diejenigen Covarianten, durch welche alle anderen ausgedrückt werden, völlig von einander unabhängig sind. Es ist dies die Darstellung durch die zu f associirten Formen.

Diese Formen ergeben sich als Coëfficienten einer gewissen typischen Darstellung von f, und es ist desshalb ein sehr naheliegender Gedanke, statt der Coëfficienten dieser typischen Darstellung, der zu f associirten Formen, die Lösungen dieser typischen Darstellung — ich nenne sie die associirten Wurzeln — einzuführen. Dies ist der Grundgedanke der vorliegenden Arbeit.

Die associirten Wurzeln lassen sich in einfacher Weise als ganze Functionen der Veränderlichen und der Lösungen der Form f (beziehungsweise der Formen des zugrunde liegenden Systems) ausdrücken, und die Eigenschaften dieser Ausdrücke

[1] Cambridge and Dublin Math. Journal, IX; Crelle's Journal, LII.

führen direct zu einigen allgemeinen Sätzen über Covarianten. Es ergibt sich, dass eine vielfache Lösung einer Form einer grossen Classe ihrer Covarianten als Lösung in gewisser Vielfachheit zugehört, man gelangt zu allgemeinen Sätzen über Resultanten von Covarianten, aus denen einige diesbezügliche Resultate von Gordan[1] durch Specialisirung hervorgehen, und findet einen Zusammenhang zwischen den Realitätsverhältnissen der Lösungen einer Form und gewisser Covarianten derselben.

Deutet man die associirten Wurzeln als homogene Punktcoordinaten, so kommt man zu einer ungemein sachgemässen geometrischen Repräsentation für die Co- und Invarianten des binären Gebiets, in der auch die Relationen zwischen diesen algebraischen Gebilden einen naturgemässen geometrischen Ausdruck finden.

§. 1. Associirte Formen und associirte Wurzeln.

1. Wir bringen zunächst jenen Theil der Theorie der associirten Formen in Erinnerung, welcher für das Folgende in Betracht kommt.

Es sei

$$f(y) = a_0 y_1^n + \binom{n}{1} a_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} a_2 y_1^{n-2} y_2^2 \dots + a_n y_2^n$$

die Form n^{ter} Ordnung, welche wir zugrunde legen. An Stelle der Variabeln y_1, y_2 führen wir in diese Form neue Veränderliche ξ, η ein durch die lineare Substitution

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} y_2\right) \\ \eta &= -x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

welche ausgerechnet lautet:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{f(x)}\left(x_1 \xi - \frac{1}{n}\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\,\eta\right) \\ y_2 &= \frac{1}{f(x)}\left(x_2 \xi + \frac{1}{n}\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\,\eta\right) \end{aligned}\right\} \tag{1 a}$$

---

[1] Vergl. Resultanten von Covarianten, Math. Ann., Bd. IV, S. 169.

Setzt man die Werthe (1 a) von y_1 und y_2 in $f(y)$ein, so kommt

$$f(y) = \frac{1}{[f(x)]^n}\left[u_0\xi^n + \binom{n}{1}u_1\xi^{n-1}\eta + \binom{n}{2}u_2\xi^{n-2}\eta^2 \ldots + u_n\eta^n\right]$$

Dies ist eine „typische Darstellung“ der Form f, d. h. eine Darstellung, in der sowohl die Coëfficienten als auch die Veränderlichen Covarianten sind. Die Coëfficienten $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnet Hermite als System der zu f associirten Formen. Indessen hat dieser selbst schon erkannt, dass die sämmtlichen Formen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ durch $f(x)$ theilbar sind, und dass insbesondere

$$u_0 = f(x) \text{ und } u_1 = 0.$$

Desshalb wollen wir die Gordan'sche Terminologie[1] acceptiren und erst die Quotienten $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$, welche man erhält, wenn man die Formen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ durch $f(x)$ dividirt, als das System der associirten Formen (Schwesterformen) von f bezeichnen.

Die obige typische Darstellung von $f(y)$ durch associirte Formen schreibt sich jetzt

$$f(y) = \frac{1}{[f(x)]^{n-1}}\left[v_0\xi^n + \binom{n}{1}v_1\xi^{n-1}\eta + \binom{n}{2}v_2\xi^{n-2}\eta^2 \quad + v_n\eta^n\right], \quad (2)$$

wobei $v_0 = 1$ und $v_1 = 0$ ist.

Um eine beliebig vorgelegte Covariante (oder Invariante) durch die Formen $f, u_2, u_3, \ldots, u_n$ auszudrücken, hat man nach Hermite bloss im leitenden Coëfficienten der Covariante die Coëefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ von f beziehungsweise durch die Formen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ zu ersetzen und das Resultat durch $[f(x)]^i$ zu dividiren, wo i den Index[2] der betreffenden Covariante bedeutet. Daraus entspringt die Regel: Soll eine beliebige Covariante (oder Invariante) durch die associirten Formen von f in

[1] Vergl. Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. II, S. 357.

[2] Unter dem Index einer Covariante versteht man nach Hermite den Exponenten der Potenz der Substitutionsdeterminante, mit welcher sich die Covariante multiplicirt, wenn man in ihr die Coëfficienten und Variabeln der ursprünglichen Form durch die Coëfficienten und Variabeln der linear transformirten Form ersetzt.

Verbindung mit dieser Form selbst ausgedrückt werden, so hat man im leitenden Coëfficienten der Covariante die Coëfficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ von f beziehungsweise zu ersetzen durch die Formen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ und das erhaltene Resultat durch eine Potenz von f zu dividiren, deren Exponent gleich ist der Differenz zwischen Index und Grad der Covariante.

Hervorzuheben ist noch, dass zwischen den associirten Formen $v_2, v_3, \ldots, v_n$ keinerlei Relation bestehen kann. Denn die Covarianten einer Form n^{ter} Ordnung f hängen von $(n-1)$ wesentlichen Parametern ab und sind durch die $(n-1)$ Formen $f, v_2, v_3, \ldots, v_n$ ausdrückbar.

2. Der einfache Grundgedanke, auf dem unsere Untersuchungen ruhen, besteht darin, die associirten Formen, welche als Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von ξ und η in der typischen Darstellung

$$[f(x)]^{n-1}f(y) = v_0\xi^n + \binom{n}{1} v_1\xi^{n-1}\eta + \binom{n}{2} v_2\xi^{n-2}\eta^2 \ldots + v_n\eta^n \quad (2)$$

definirt waren, in unseren Betrachtungen zu ersetzen durch die Werthe $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ von $\frac{\xi}{\eta}$, für welche der Ausdruck (2) gleich Null wird und deren elementarsymmetrische Functionen (von numerischen Factoren abgesehen) die associirten Formen $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sind.

Das System der Grössen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ soll in der Folge als System der (zu den Lösungen f) associirten Wurzeln bezeichnet werden.

Die associirten Wurzeln sind die Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades

$$z^n + \binom{n}{2} v_2 z^{n-2} + \binom{n}{3} v_3 z^{n-3} \ldots + v_n = 0,$$

und da in dieser Gleichung der Coëfficient von z^{n-1} gleich Null, die übrigen Coëfficienten $\binom{n}{2} v_2, \binom{n}{3} v_3, \ldots, v_n$ völlig von einander unabhängig sind, so folgt, dass zwischen den associirten Wurzeln die Relation besteht

$$z_1+z_2+z_3\ldots+z_n=0$$

und dies die einzige Relation zwischen den associirten Wurzeln ist.

Wenn Π irgend eine Covariante (oder Invariante) der Form f ist und i ihren Index, g ihren Grad bedeutet, dann ist nach Art. 1 das Product $f^{i-g}\Pi$ eine ganze Function der associirten Formen, die erhalten wird, indem man in dem leitenden Coëfficienten von Π die Coëfficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ von f der Reihe nach durch die associirten Formen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ ersetzt. Da alle Glieder des leitenden Coëfficienten dasselbe Gewicht haben, welches gleich ist dem Index der Covariante, und da jede der associirten Formen eine homogene symmetrische Function der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ist von dem Grade, welchen ihr Index angibt, so erhält man

$$f^{i-g}\Pi=S_i(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n), \tag{3}$$

wo S_i eine homogene symmetrische Function i^{ten} Grades ihrer Argumente bedeutet. Umgekehrt ist jede ganze homogene symmetrische Function i^{ten} Grades der associirten Wurzeln $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ als isobare Function der associirten Formen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vom Gewichte i eine Covariante vom Index i.

3. Um die associirten Wurzeln explicite darzustellen, denken wir uns $f(y)$ in seine Wurzelfactoren aufgelöst. Es sei

$$f(y)=(y\alpha^{(1)})(y\alpha^{(2)})(y\alpha^{(3)})\ldots(y\alpha^{(n)}),$$

dann wird

$$\frac{\xi}{\eta}=\frac{1}{n(xy)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}y_2\right)=\frac{1}{n(xy)}\big[(y\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+$$
$$+(y\alpha^{(2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+\ldots+(y\alpha^{(n)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})\big].$$

Da die associirten Wurzeln als die Werthe von $\frac{\xi}{\eta}$ definirt waren, welche die rechte Seite von (2) zu Null machen, so werden wir mit Rücksicht auf die linke Seite der Gleichung (2) die Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ erhalten, wenn wir in dem (eben entwickelten) Ausdruck von $\frac{\xi}{\eta}$ für y der Reihe nach die Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ von f einsetzen.

Es kommt:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{n}\big[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(4)})\ldots(x\alpha^{(n)})+ \\ &\qquad \ldots+(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})\big] \\ z_2 &= \frac{1}{n}\big[(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+(\alpha^{(2)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(4)})\ldots(x\alpha^{(n)})+ \\ &\qquad +(\alpha^{(2)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})\big] \\ z_n &= \frac{1}{n}\big[(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})+(\alpha^{(n)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})+ \\ &\qquad \ldots+(\alpha^{(n)}\alpha^{(n-1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n-2)})\big]. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dieses Gleichungssystem bildet das Fundament unserer weiteren Überlegungen. Wir hätten direct von diesem Gleichungssystem ausgehen können, und wir haben die Theorie der associirten Formen nur desshalb zum Ausgangspunkte gewählt, um an Bekanntes anzuknüpfen. Denn alles, was wir brauchen, lässt sich leicht direct aus den Gleichungen (4) folgern.

Dass $z_1+z_2+\quad+z_n=0$ entnimmt man aus diesen Gleichungen sofort. Ebenso ist ersichtlich, dass jede ganze homogene symmetrische Function i^{ten} Grades S_i der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine Covariante vom Index i ist. Denn S_i ist ein Aggregat von Gliedern, deren jedes ein Product von i Factoren vom Typus $(\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})$ und $(n-2)i$ vom Typus $(x\alpha^{(r)})$ ist und bleibt bei einer Vertauschung der α unter einander ungeändert. Um zu zeigen, dass umgekehrt jede Covariante vom Index i mit einer Potenz von f multiplicirt eine ganze homogene symmetrische Function i^{ten} Grades der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ist, braucht man die Covariante bloss in den Lösungen von f ausgedrückt zu denken als Aggregat von Producten von Factoren von den Typen $(\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})$ und $(x\alpha^{(r)})$ und zu benützen, dass die Gleichungen (4) geben

$$z_r - z_s = (\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(r-1)})(x\alpha^{(r+1)})\ldots \\ \ldots(x\alpha^{(s-1)})(x\alpha^{(s+1)})\ldots(x\alpha^{(n)}).$$

Denn mit Rücksicht auf diese Gleichung folgt, dass man im leitenden Coëfficienten der Covariante für jeden Factor vom Typus $(\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})$ bloss $z_r - z_s$ einzusetzen hat, um das Product der Covariante in einer Potenz der Form f zu erhalten.

§. 2. Anwendungen der Darstellung durch associirte Wurzeln.

4. Nicht nur all das, was die Theorie der associirten Formen liefert, lässt sich bei Zugrundelegung der Darstellung (4) für die associirten Wurzeln leicht ableiten, sondern man gelangt von hier aus mit Leichtigkeit auch zu neuen allgemeinen Resultaten.

Wir machen die Annahme, dass k von den Verschwindungselementen von f zusammenfallen. Man habe $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \ldots = \alpha^{(k)}$. Dann gehen die Gleichungen (4) über in

$$\left.\begin{aligned}
z_2 \ldots = z_k &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+ \\
&\quad + (\alpha^{(1)}\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+\ldots\} \\
z_{k+1} &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{k(\alpha^{(k+1)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})\ldots(x\alpha^{(n)})+ \\
&\quad + (\alpha^{(k+1)}\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+3)})(x\alpha^{(k+4)})\ldots(x\alpha^{(n)})+\ldots\} \\
z_n &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{k(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})+ \\
&\quad + (\alpha^{(n)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})+\ldots\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ist Π eine beliebige Covariante vom Index i und dem Grad g, so ist

$$f^{i-g}\Pi = S_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad (3)$$

wo S_i eine ganze homogene symmetrische Function ihrer Argumente bedeutet. In dem uns vorliegenden Falle, wo jede der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ den Factor $(x\alpha^{(1)})^{k-1}$ besitzt, wird auf der rechten Seite der eben hingeschriebenen Gleichung (3) der Factor $(x\alpha^{(1)})^{i(k-1)}$ heraustreten, und da f^{i-g} nur durch $(x\alpha^{(1)})^{k(i-g)}$ theilbar ist, so muss Π durch $(x\alpha^{(1)})$ zur Potenz $i(k-1)-(i-g)k = gk-i$ theilbar sein, vorausgesetzt dass $gk-i > 0$ ist.

Wir haben den Satz:

Jede k-fache Lösung der Grundform ist für eine Covariante vom Grade g und Index i, $gk > i$ vorausgesetzt, eine mindestens $(gk-i)$-fache Lösung.

Von diesem sehr allgemeinen Satze sind bisher, wie ich glaube, nur vereinzelte Specialfälle bekannt geworden; so ist z. B. bekannt, dass ein Doppelfactor der Grundform auch ein Doppelfactor für ihre Hesse'sche Form (bei der Grad und Index $= 2$ sind) ist.

5. Um die Tragweite des gefundenen Theorems zu zeigen, wollen wir jetzt einige Folgerungen aus demselben ziehen.

Ist ν die Ordnung der Covariante Π, so kann diese durch keine höhere Potenz eines Linearfactors als die ν^{te} theilbar sein, ohne identisch zu verschwinden. Hat also f eine k-fache Wurzel und ist

$$\nu < gk - i$$

oder, was mit Rücksicht auf

$$i = \frac{1}{2}(gn - \nu)$$

dasselbe ist,

$$k > \frac{1}{2}\left(n + \frac{\nu}{g}\right),$$

so verschwindet die Covariante Π identisch.

Wir haben den Satz:

Ist die Vielfachheit einer Lösung einer Form n^{ter} Ordnung grösser als $\frac{1}{2}\left(n + \frac{\nu}{g}\right)$, so verschwindet jede Covariante dieser Form identisch, deren Ordnung ν und deren Grad g ist.

Als Specialfall dieses Satzes für $\nu = 0$ folgt:

Liegt mehr als die Hälfte der Verschwindungselemente einer Form vereinigt, so verschwinden alle ihre Invarianten identisch.

Aus dem allgemeinen Theorem des Art. 4 lassen sich noch die beiden folgenden Sätze schliessen:

Die Resultante einer Form und jeder ihrer Covarianten, bei welcher der doppelte Grad den Index übertrifft, hat die Discriminante der Grundform zum Factor.

Die Discriminante jeder Covariante, bei welcher der doppelte Grad den Index um mindestens zwei Einheiten übersteigt, hat die Discriminante der Grundform zum Factor.

Denn jenes Theorem besagt, dass, wenn die Discriminante von f verschwindet, d. h. f eine Doppelwurzel hat, diese eine $(2g-i)$-fache Lösung der Covariante ist.

6. Genauen Aufschluss gibt die folgende Betrachtung über die Resultante einer Form und einer ihrer Covarianten für den Fall, dass Index und Grad der Covariante übereinstimmen.

Setzt man in dem Gleichungssystem (4) $x = \alpha^{(1)}$, so wird

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{n-1}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}) \\ z_2 = z_3 \dots = z_n &= -\frac{1}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}) = -\frac{1}{n-1}z_1. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Für eine Covariante $\Pi(x)$, deren Index und Grad einander gleich sind, lautet die Gleichung (3):

$$\Pi(x) = S_i(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n),$$

wo S_i eine ganze homogene symmetrische Function ihrer Argumente bedeutet, deren Grad i dem Index der Covariante gleich ist. Setzt man in dieser Gleichung $x = \alpha^{(1)}$, so kommt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6)

$$\Pi(\alpha^{(1)}) = c\left[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})\right]^i,$$

wo c eine numerische Constante bedeutet. Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man für x die übrigen Lösungen von f einsetzt. Multiplicirt man alle diese Gleichungen mit einander, so kommt:

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha^{(1)}).\Pi(\alpha^{(2)}).\Pi(\alpha^{(3)})\dots\Pi(\alpha^{(n)}) = c^n\big[&(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})\times \\ &\times(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})(\alpha^{(2)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(2)}\alpha^{(n)})\times\dots\times(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(\alpha^{(n)}\alpha^{(2)})\dots(\alpha^{(n)}\alpha^{(n-1)})\big]^i. \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist die Resultante von f und Π, während auf der rechten Seite, von dem numerischen Factor c^n abgesehen, die i^{te} Potenz der Discriminante von f steht.

Wir haben den Satz:

Die Resultante einer Form und jeder ihrer Covarianten, deren Index und Grad denselben Wert i haben, ist bis auf einen Zahlenfactor die i^{te} Potenz der Discriminante der Grundform.

7. Von der Darstellung durch associirte Wurzeln wollen wir noch eine Anwendung anderer Natur machen.

Es sei $S(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$ eine ganze homogene symmetrische Function ihrer Argumente so beschaffen, dass sie für jedes reelle Werthsystem derselben einen von Null verschiedenen Wert hat. Dann wird durch S eine Covariante dargestellt, deren Lösungen sämmtlich imaginär sind, im Falle die Grundform f lauter reelle Lösungen hat. Denn nach den Gleichungen (4) haben $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ sämmtlich reelle Werthe, wenn $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und x reell sind.

Functionen S von der angegebenen Beschaffenheit kann man leicht herstellen. Jeder in den Quadraten der associirten Wurzeln symmetrische Ausdruck, der aus lauter positiven Gliedern besteht, ist eine solche Function. Als einfachstes Beispiel haben wir:

$$S = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots z_n^2.$$

Da dieser Ausdruck vom zweiten Grade in den associirten Wurzeln ist, so stellt er eine Covariante vom Index 2 dar. Es gibt aber nur diese eine Covariante von diesem Index, weil die andere symmetrische Function zweiten Grades $\Sigma z_r z_s$ (von einem Zahlenfactor abgesehen) dieselbe Covariante darstellt, wie aus der Identität $(z_1 + z_3 + z_3 + \ldots z_n)^2 = 0$ hervorgeht.

Nun besitzt aber die Hesse'sche Covariante den Index 2, folglich ist sie bis auf einen Zahlenfactor gleich der Summe der Quadrate der associirten Wurzeln und wir haben den Satz:

Sind die Lösungen einer Form sämmtlich reell, dann sind die Lösungen ihrer Hesse'schen Covariante sämmtlich imaginär.[1]

[1] Vergl. Schramm, Annali di Mat., Ser. II, p. 1, t. 262/3.

§. 3. Ausdehnung der Betrachtungen auf simultane Systeme binärer Formen.

8. Es macht keine Schwierigkeit, an unseren Betrachtungen die Modificationen anzubringen, welche sie erfahren müssen, wenn statt einer einzelnen Form f ein simultanes System von Formen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$ zugrunde gelegt wird.

Die Stelle von f in den Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2\right) \\ \eta &= -x_2 y_1 + x_1 y_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

vermöge welcher die einzuführenden typischen Veränderlichen ξ, η durch die ursprünglichen Variabeln y_1, y_2 ausgedrückt sind, vertritt das Product der Formen unseres simultanen Systems

$$f = f_1 f_2 f_3 \cdots f_\varkappa.$$

Durch Einführung dieser neuen Veränderlichen ξ, η erhält man die typischen Darstellungen für die Formen unseres Systems

$$f_r(y) = \frac{1}{[f(x)]^{n_r}}\left(u_0^{(r)} \xi^{n_r} + \binom{n_r}{1} u_1^{(r)} \xi^{n_r-1} \eta + \binom{n}{2} u_2^{(r)} \xi^{n_r-2} \eta^2 + \ldots u_{n_r}^{(r)} \eta^{n_r}\right)$$
$$(i = 1, 2, 3 \ldots k), \tag{7}$$

wobei n_r die Ordnung der Form f_r bedeutet. Indem man beiderseits $x = y$ setzt, wodurch $\xi = f(x), \eta = 0$ wird, erkennt man, dass $u_0^{(r)} = f_r(x)$.

Zu jeder Lösung von f_r gehört eine „der Lösung associirte Wurzel". Als solche bezeichnen wir den Werth, den der Quotient $\frac{\xi}{\eta}$ annimmt, wenn in demselben y der betreffenden Lösung von f_r gleichgesetzt wird. Die den Lösungen von f_r associirten Wurzeln sind also, wie aus der obigen typischen Darstellung von $f_r(y)$ ersichtlich ist, die Lösungen der Gleichung

$$f_r(x) z^{n_r} + \binom{n}{1} u_1^{(r)} z^{n_r-1} + \binom{n}{2} u_2^{(r)} z^{n_r-2} + \ldots + u_n^{(r)} = 0. \tag{8}$$

Es sei wieder

$$f(x) = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\dots(x\alpha^{(n)})$$

und das Product der n_1 ersten unter den Linearfactoren von $f(x)$ sei gleich $f_1(x)$, das Product der n_2 folgenden gleich $f_2(x)$ u. s. f. Dann sind die den Lösungen der Formen $f_1, f_2, f_3, \dots, f_\varkappa$ associirten Wurzeln $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ wieder gegeben durch die Gleichungen (4) des §. 1, und zwar sind die n_1 ersten unter ihnen den Lösungen von f_1, die n_2 folgenden den Lösungen von f_2 u. s. f. associirt.

Die Gestalt der Gleichungen (4) lässt erkennen, dass das System der zu den Lösungen von f_r associirten Wurzeln das Lösungssystem einer Gleichung n_r.ten Grades darstellt, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten die Einheit und die übrigen Coëfficienten Covarianten des Formensystems $f_1, f_2, \dots, f_\varkappa$ sind. Denn die elementar-symmetrischen Functionen der zu den Lösungen von f_r associirten Wurzeln ergeben sich als Aggregate von Producten von Factoren der Typen $(\alpha^{(s)}\alpha^{(t)})$ und $(x\alpha^{(s)})$, enthalten jede Lösung einer der Formen $f_1, f_2, \dots, f_\varkappa$ in demselben Grade wie jede andere Lösung der betreffenden Form und bleiben unverändert, wenn man die Lösungen irgend einer der Formen $f_1, f_2, \dots, f$ unter einander vertauscht.

Wir schliessen, dass in der Gleichung (8), deren Lösungen die zu f_r associirten Wurzeln sind, alle Coëfficienten durch den Coëfficienten f_r von z^{n_r} theilbar sind, so dass, wenn $\frac{u_s^{(r)}}{f_r}$ mit $v_s^{(r)}$ bezeichnet wird, die obige typische Darstellung der Formen unseres simultanen Systems übergeht in:

$$\frac{[f(x)]^{n_r}}{f_r(x)} f_r(y) = v_0^{(r)}\xi^n + \binom{n_r}{1} v_1^{(r)}\xi^{n-1}\eta + \binom{n_r}{2} v_2^{(r)}\xi^{n-2}\eta^2 + \dots v_n\eta^n,$$

$$(r = 1, 2, \dots, \varkappa) \qquad (9)$$

wo $v_0^{(r)} = 1$ ist.

Zufolge der Theorie der associirten Formen hat man, um eine beliebige Covariante (oder Invariante) des Formensystems $f_1, f_2, \dots, f_\varkappa$ auszudrücken, in dem leitenden Coëfficienten der Covariante an Stelle eines jeden Coëfficienten von

f_r $(r = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ den entsprechenden Coëfficienten u der typischen Darstellung (7) zu substituiren und das Resultat durch eine Potenz von f zu dividiren, deren Exponent gleich ist dem Index der Covariante. Ersetzt man also in dem leitenden Coëfficienten einer Covariante Π vom Index i, welche die Coëfficienten der Form $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, beziehungsweise zum Grade $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ enthält, jeden Coëfficienten einer dieser Formen durch den entsprechenden Coëfficienten v der typischen Darstellung (9), so hat man noch durch $f_1^{i-g_1} . f_2^{i-g_2} . f_3^{i-g_3} \ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}$ zu dividiren, um den Ausdruck für die Covariante zu erhalten. Mit Rücksicht darauf, dass die associirten Formen $v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \ldots, v_{nr}^{(n)}$ sich von den elementarsymmetrischen Functionen der zu f_r associirten Wurzeln nur durch Zahlenfactoren unterscheiden, schliessen wir, dass

$$f_1^{i-g_1} . f_2^{i-g_2} . f_3^{i-g_3} \ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa} \Pi =$$
$$= S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots z_{n_1+n_2}; \ldots), \quad (10)$$

wo S_i eine ganze homogene Function i^{ten} Grades ihrer Argumente bedeutet, welche ungeändert bleibt, wenn man die n_1 ersten ihrer Argumente unter einander, oder die n_2 folgenden unter einander u. s. f. vertauscht und erkennen auch, dass jede derartige Function S_i eine Covariante unseres Formensystems vom Index i darstellt.

9. In Art. 4 haben wir gesehen, dass wenn $f(x) = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)}) \ldots (x\alpha^{(n)})$ einen k-fachen Linearfactor besitzt, jede der associirten Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durch die $(k-1)^{\text{te}}$ Potenz dieses Factors theilbar ist. Wenn wir annehmen, dass k_1 Lösungen von f_1, k_2 Lösungen von $f_2, \ldots, k_\varkappa$ Lösungen von $f_\varkappa$ sämmtlich unter einander zusammenfallen, so werden die associirten Wurzeln sämmtlich durch die $(k_1 + k_2 + \ldots k_\varkappa - 1)^{\text{te}}$ Potenz des zu dieser Lösung gehörigen Linearfactors theilbar sein. Aus der Gleichung

$$f_1^{i-g_1} . f_2^{i-g_2} \ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa} \Pi =$$
$$= S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots z_{n_1+n_2}; \ldots), \quad (10)$$

welche für jede Covariante Π vom Index i und den Gradzahlen $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ in den Coëfficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ besteht, und in der S_i eine homogene Function i^{ten} Grades ihrer Argumente bedeutet, folgt jetzt, da die rechte Seite derselben durch die $i(k_1+k_2+\ldots+k_\varkappa-1)$te Potenz des zur betrachteten Lösung gehörigen Linearfactors theilbar ist, das Product $f_1^{i-g_1}.f_2^{i-g_2}\ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}$ aber nur die $[(i-g_1)k_1+(i-g_2)k_2+\ldots+(i-g_\varkappa)k_\varkappa]$te Potenz dieses Factors enthält, dass dieser Factor der Covariante Π angehören muss in der Vielfachheit

$$i(k_1+k_2+\ldots+k_\varkappa-1)-[(i-g_1)k_1+(i-g_2)k_2+\ldots(i-g_\varkappa)k_\varkappa]=$$
$$=g_1k_1+g_2k_2+\ldots+g_\varkappa k_\varkappa-i.$$

Wir haben den Satz:

Ist eine und dieselbe Lösung für die Grundformen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, beziehungsweise von der Vielfachheit $k_1, k_2, \ldots, k_\varkappa$, so enthält jede simultane Covariante dieser Grundformen vom Index i und den Gradzahlen $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ in den Coëfficienten dieser Formen jene Lösung mindestens in der Vielfachheit

$$g_1k_1+g_2k_2+\ldots+g_\varkappa k_\varkappa-i.$$

Aus diesem allgemeinen Theorem fliessen direct die folgenden Sätze:

Die Resultante der Covariante Π und der Grundform f_r ist theilbar durch die Discriminante von f_r, sobald $2g_r > i$, und theilbar durch die Resultante der Grundformen f_r und f_s, sobald $g_r+g_s > i$.

Die Discriminante der Covariante Π enthält die Resultante der Grundformen f_r und f_s als Factor, sobald $g_r+g_s > i+1$, und die Discriminante von f_r, sobald $2g_r > i+1$.

Denn nach unserem Theorem ist im ersten Falle jede Doppellösung von f_r und jede gemeinsame Lösung von f_r und f_s für Π eine mindestens einfache, im zweiten Falle eine mindestens doppelte Lösung.

Unser Theorem wird uns erlauben, für gewisse Covarianten zu schliessen, dass sie verschwinden, wenn von den Lösungen der Grundformen an einer oder mehreren Stellen eine gewisse Anzahl vereinigt liegt. Denn nach unserem Satze werden wir unter Umständen schliessen können, dass diese Stellen Lösungen der Covariante von angebbarer Vielfachheit sind, und wenn die

Summe der Zahlen, welche die Vielfachheit dieser Stellen angeben, grösser ist als die Ordnung der Covariante, so muss diese identisch verschwinden.

10. Wenn wir voraussetzen, dass der Index der Covariante $\Pi(x)$ gleich ist ihrem Grad g_1 in den Coëfficienten von f_1, so können wir den vollständigen Ausdruck der Resultante von $f_1(x)$ und $\Pi(x)$ angeben.

In diesem Falle lautet die Gleichung (10):

$$f_2^{i-g_2}(x).f_3^{i-g_3}(x)\ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}(x)\,\Pi(x) =$$
$$= S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1};\ z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2};\qquad).$$

Setzt man x gleich der Lösung $\alpha^{(1)}$ von f_1, so wird nach Art. 6

$$z_1 = -(n-1)z_2 = -(n-1)z_3 = \ldots = -(n-1)z_n =$$
$$= \frac{n-1}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(4)})\ldots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}). \qquad (6)$$

Durch Substitution von $\alpha^{(1)}$ für x in die obere Gleichung kommt also mit Rücksicht darauf, dass S_i eine homogene Function $i$ten Grades ihrer Argumente ist,

$$f_2^{i-g_2}(\alpha^{(1)}).f_3^{i-g_3}(\alpha^{(1)})\ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}(\alpha^{(1)})\,\Pi(\alpha^{(1)}) =$$
$$= c\left[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(4)})\ldots(\alpha^{(1)}\alpha^{n})\right]^i,$$

wo c einen Zahlenfactor bedeutet. Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man für x statt $\alpha^{(1)}$ eine der übrigen Lösungen $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n_1)}$ von f_1 substituirt. Multiplicirt man alle so erhaltenen Gleichungen mit einander, so kommt:

$$R_{f_1,f_2}^{i-g_2}.R_{f_1,f_3}^{i-g_3}\ldots R_{f_1,f_\varkappa}^{i-g_\varkappa}.R_{f_1,\Pi} = c^{n_1}[\Delta_{f_1}.R_{f_1,f_2}.R_{f_1,f_3}\ldots R_{f_1,f_\varkappa}]^i,$$

wo allgemein $R_{\varphi,\psi}$ die Resultante der Formen φ und ψ und Δ_{f_1} die Discriminante von f_1 bedeutet.

Wir haben den Satz:

Ist Π eine Covariante des Formensystems $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$, welche die Coëfficienten dieser Formen beziehungsweise zum Grade $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_\varkappa$ enthält, und ist der Index dieser Covariante gleich g_1, so haben wir für die Resultante der Covariante und der Form f_1, von einem numerischen Factor abgesehen, den Ausdruck

$$\Delta_{f_1}^{g_1} \cdot R_{f_1, f_2}^{g_2} \cdot R_{f_1, f_3}^{g_3} \cdot R_{f_1, f_4}^{g_4} \ldots R_{f_1, f_\varkappa}^{g_\varkappa}$$

Die Sätze, welche Gordan in seiner Abhandlung „Resultanten von Covarianten" (Math. Ann., Bd. IV, S. 169) für Formen beliebiger Ordnung gegeben hat, sind vereinzelte Specialfälle des eben aufgestellten Theorems.

§. 4. Die associirten Wurzeln als homogene Coordinaten in einem Raume von n—2 Dimensionen.

11. Die wichtigste Anwendung welche wir von den associirten Wurzeln machen, besteht in ihrer Verwerthung für eine geometrische Repräsentation der Covarianten und Invarianten des binären Gebiets, welche wohl als äusserst sachgemäss bezeichnet zu werden verdient.

Die durch die Gleichungen (4) definirten associirten Wurzeln $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ stellen sich als Functionen der Reihe der binären Werthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und x dar, welche sich, von der als Factor hinzutretenden Transformationsdeterminante abgesehen, reproduciren, wenn für die Reihe dieser Werthe die Reihe der aus ihnen durch eine lineare Transformation entstehenden Werthe substituirt wird. Es bleiben also bei einer solchen Substitution die Quotienten der Grössen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ vollständig ungeändert.

Unter diesen Verhältnissen liegt es nahe, die associirten Wurzeln, zwischen denen die Relation besteht

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = 0, \tag{11}$$

die aber sonst völlig von einander unabhängig sind, als homogene Coordinaten der Punkte eines (linearen) Raumes von n—2 Dimensionen zu interpretiren. Man gelangt dadurch zu einer geometrischen Deutung für die Invarianten und Covarianten des zugrunde liegenden Formensystems $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$.

Wir hatten nämlich, wenn Π irgend eine Covariante dieses Formensystems bedeutet, die identische Gleichung:

$$f_1^{\prime\, i-g_1} \cdot f_2^{\prime\, i-g_2} \ldots f_\chi^{\prime\, i-g_\chi} \Pi =$$
$$= S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; z_{n-n_\chi+1}, \ldots, z_n),$$

in der S_i eine ganze homogene Function i^{ten} Grades ihrer Argumente bedeutet, welche bei Vertauschung von Argumenten derselben Gruppe ungeändert bleibt. Als „Bild" der Covariante (Invariante) Π soll nun die Fläche i^{ter} Ordnung (von $n-3$ Dimensionen) angesehen werden, welche durch die Gleichung

$$S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \ldots; z_{n-n_\chi+1}, \ldots, z_n) = 0$$

gegeben ist.

Die Untersuchung des Zusammenhanges, der zwischen einer Covariante (Invariante) und ihrem Bilde besteht und sich als ein äusserst inniger herausstellen wird, soll dem folgenden Paragraphen vorbehalten bleiben; hier soll nur die Natur des verwendeten Coordinatensystems und der Flächen, welche Bilder von Covarianten oder Invarianten unseres Formensystems sind, eine Untersuchung erfahren.

12. Die verwendete Coordinatenbestimmung ist von den gewöhnlichen homogenen Coordinaten nicht wesentlich verschieden. Wir haben eben nur für den $(n-2)$-dimensionalen Raum statt $(n-1)$ unabhängiger homogener Coordinaten, deren n eingeführt, welche durch die lineare homogene Relation (11) mit einander zusammenhängen, vermöge welcher irgend eine der Coordinaten jederzeit durch die anderen ausgedrückt und damit weggeschafft werden könnte.

Die n durch unser Coordinatensystem ausgezeichneten Ebenen (von $(n-3)$ Dimensionen), welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = 0,\ \ldots,\ z_n = 0,$$

bezeichnen wir der Reihe nach als erste, zweite, dritte, ..., n^{te} Fundamentalebene und sagen, die Ebene $z_r = 0$ sei „zugehörig" sowohl zur Coordinate z_r, als zur Lösung $\alpha^{(r)}$ der associirt ist.

In äusserst einfacher Weise stellen sich in den Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$, wie zuerst Herr F. Klein[1] bemerkt hat, die Collineationen dar, welche das n-Flach der Fundamentalebenen in sich transformiren. Die Collineation unseres $(n-2)$-dimensionalen Raumes, welche dadurch bestimmt ist, dass man allgemein der Ebene $z_r = 0$ die Ebene $z_s = 0$ als entsprechend zuweist, erscheint offenbar gegeben durch das System der Gleichungen $z'_s = z_r$. Wir finden also die Coordinaten des dem Punkte mit den Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ entsprechenden Punktes, wenn wir auf diese Coordinaten dieselbe Permutation ausüben, welche die zugehörigen Fundamentalebenen erleiden. Es wird infolge dessen nur einen Punkt geben — wir nennen ihn den r^{ten} Fundamentalpunkt — welcher bei allen Collineationen des n-Flachs in sich, welche die r^{te} Fundamentalebene sich selbst zuweisen, sich selbst entspricht. Alle Coordinaten dieses Punktes ausser der z_r-Coordinate, müssen nämlich unter einander gleich sein, da deren Vertauschung keine Veränderung hervorbringen soll. Setzen wir alle diese Coordinaten $= 1$, so haben wir in Rücksicht auf die Relation (11) für die Coordinaten des r^{ten} Fundamentalpunktes die Werthe:

$$z_1 = z_2 = \ldots z_{r-1} = z_{r+1} = \ldots = z_n = 1, \; z_r = -(n-1).$$

Es ist jetzt ersichtlich, dass bei allen Collineationen des n-Flachs der Fundamentalebenen in sich auch das n-Eck der Fundamentalpunkte in sich übergeht, und dass die Fundamentalpunkte genau dieselbe Permutation erfahren wie die zugehörigen Fundamentalebenen. Die Collineationen des n-Ecks in sich sind also identisch mit den Collineationen des n-Flachs in sich, die Ebene $z_r = 0$ ist die einzige, welche bei allen denjenigen unter diesen Collineationen sich selbst entspricht, bei denen der r^{te} Fundamentalpunkt sich selbst zugeordnet ist. Die Beziehung zwischen dem n-Eck und n-Flach erweist sich damit als eine reciprok vertauschungsfähige, und ich habe desshalb schon bei einer früheren Gelegenheit[2] diese beiden Figuren einander associirt genannt.

---

[1] Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen (Math. Ann., Bd. IV, S. 346).

[2] Über das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck. Diese Berichte, Bd. 93.

Jetzt können wir den geometrischen Charakter der Flächen, welche Bilder von Covarianten unseres Formensystems $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$ sind, in dem folgenden Satze festlegen:

Das Bild einer Covariante, beziehungsweise Invariante des Formensystems $f_1, f_2,$ $f_\varkappa$ vom Index i ist eine Fläche i^{ter} Ordnung, welche bei allen jenen Collineationen unseres $(n-2)$-dimensionalen Raumes, bei welchen die einzelnen Gruppen von Fundamentalpunkten (und -Ebenen), welche den Lösungen der einzelnen Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zugehörig sind, in sich transformirt werden, ebenfalls in sich übergeht, und jede derartige Fläche i^{ter} Ordnung ist das Bild einer Covariante oder Invariante vom Index i des Formensystems.

Wir haben damit nur die Eigenschaft der Function $S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \ldots)$, welche, gleich Null gesetzt, die Gleichung des Bildes liefert, ausgedrückt, ungeändert zu bleiben bei Vertauschungen von Argumenten derselben Gruppe.

13. Es mögen hier noch die Definitionen der Seiten- oder Kantenräume und der Diagonalräume des n-Ecks der Fundamentalpunkte ihre Stelle finden und die Gleichungen dieser Räume aufgestellt werden.

Unter einem Seiten- oder Kantenraume des n-Ecks der Fundamentalpunkte verstehen wir den linearen Raum von r Dimensionen, welcher durch $r+1$ von den Fundamentalpunkten bestimmt ist, wo $r = 1, 2, \ldots, n-3$. Der Kantenraum von $n-r-2$ Dimensionen, der durch die übrigen $n-r-1$ Fundamentalpunkte bestimmt ist, soll sein Gegenraum heissen. Ein Kantenraum und sein Gegenraum haben einen Punkt mit einander gemein, der als Diagonalpunkt dieser beiden Räume bezeichnet werden soll.

Der Kantenraum, welcher durch die $r+1$ ersten Fundamentalpunkte hindurchgeht, ist gegeben durch die Gleichungen

$$z_{r+2} = z_{r+3} = \ldots = z_n,$$

sein Gegenraum durch die Gleichungen

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_{r+1}.$$

Dies ergibt sich sofort mit Rücksicht darauf, dass für den s^{ten} Fundamentalpunkt alle Coordinaten mit Ausnahme der s^{ten} einander gleich sind.

Den Raum, welcher als Schnitt von zwei oder mehreren Kantenräumen entsteht, nennen wir einen Diagonalraum. Ein solcher Raum umfasst also die Punkte, welche mindestens zwei Gruppen von unter einander gleichen Coordinaten besitzen. Er enthält die Fundamentalpunkte, welche den unter einander verschiedenen Coordinaten seiner Punkte zugehörig sind und die Diagonalpunkte der Kantenräume, welche durch je eine unter den Gruppen gleicher Coordinaten geliefert werden. Eine Abzählung ergibt sofort, dass für einen t-dimensionalen Diagonalraum die Zahl der erwähnten in ihm enthaltenen Ecken und Diagonalpunkte zusammen gleich $t+2$ ist.

§. 5. Die Beziehungen zwischen einer Covariante, beziehungsweise Invariante und ihrem Bilde.[1]

14. Für die Entwicklung der Beziehungen zwischen einer Covariante oder Invariante und ihrem Bilde wird wieder das Gleichungssystem die Grundlage bilden:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{n}\left[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\dots(x\alpha^{(3)})+(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(4)})\dots(x\alpha^{(n)})\right.\\
&\qquad\left.+\dots+(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\dots(x\alpha^{(n-1)})\right]\\
z_2 &= \frac{1}{n}\left[(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\dots(x\alpha^{(n)})+(\alpha^{(2)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(4)})\dots(x\alpha^{(n)})\right.\\
&\qquad\left.+\dots+(\alpha^{(2)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(4)})\dots(x\alpha^{(n-1)})\right]\\
&\dots\\
z_n &= \frac{1}{n}\left[(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\dots(x\alpha^{(n-1)})+(\alpha^{(n)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\dots(x\alpha^{(n-1)})\right.\\
&\qquad\left.+\dots+(\alpha^{(n)}\alpha^{(n-1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\dots(x\alpha^{(n-2)})\right].
\end{aligned} \tag{4}$$

[1] Es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, dass die hier behandelte geom. Repräsentation für die Co- und Invarianten (für den Fall einer Grund form) den Gegenstand einer Arbeit des Herrn Waelsch bildet (Über ein geom. Darstellung in der Theorie der binären Formen, in diesem Bande S. 574—585), bei deren Druck die vorliegende Abhandlung bereits der kais. Akademie überreicht war. Herr Waelsch hat insbesondere die Resultate der Art. 14 und 15 dieser Abhandlung entwickelt und den Zusammenhang der geom. Repräsentation mit den Hermite'schen associirten Formen erkannt. October 1891.

Denkt man sich in diesem Gleichungssystem die Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ fest gewählt, x aber als variabeln Parameter, so haben wir die Parameterdarstellung für eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in dem Raume von $n-2$ Dimensionen vor uns, in dem wir $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als homogene Punktecoordinaten interpretiren. Durch einen jeden beliebig gewählten Werth des Parameters x ist ein bestimmter Punkt der Curve C_{n-2} gegeben.

Setzen wir in die Gleichungen (4) speciell $x = \alpha^{(r)}$, so erhalten wir die Coordinaten desjenigen Punktes von C_{n-2}, welcher dem Parameterwerthe $\alpha^{(r)}$ entspricht; es kommt:

$$
\begin{aligned}
z_1 = z_2 = \quad & = z_{r-1} = z_{r+1} = \ldots z_n = \\
& = \frac{1}{n} (\alpha^{(r)} \alpha^{(1)}) (\alpha^{(r)} \alpha^{(2)}) \ldots (\alpha^{(r)} \alpha^{(r-1)}) (\alpha^{(r)} \alpha^{(r+1)}) \quad (\alpha^{(r} \; \alpha^{(n)}) \\
& = -\frac{n-1}{n} (\alpha^{(r)} \alpha^{(1)}) (\alpha^{(r)} \alpha^{(2)}) \ldots (\alpha^{(r)} \alpha^{(r-1)}) (\alpha^{(r)} \alpha^{(r+1)}) \ldots (\alpha^{(r)} \alpha^{(n)}).
\end{aligned}
$$

Dies sind aber (vorausgesetzt, dass $\alpha^{(r)}$ mit keiner der übrigen Lösungen identisch ist) die Coordinaten des r^{ten} Fundamentalpunktes. Die Curve C_{n-2} geht also durch die n Fundamentalpunkte unseres Coordinatensystems und der Parameter x besitzt beziehungsweise in diesen Punkten die Werthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$.

Eine durch die Gleichungen (4) gegebene Curve C_{n-2} ist eindeutig bestimmt, wenn n Elemente eines rationalen Trägers gegeben werden, denen die n Fundamentalpunkte, als Punkte der rationalen Curve C_{n-2} angesehen, in bestimmter Reihenfolge projectiv sein sollen.

Wie schon erwähnt, ändern sich nämlich die linken Seiten der Gleichungen (4) nur um denselben Factor, wenn das System der binären Werthe $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}; \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}; \ldots; \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}$ durch ein beliebiges ihm projectives Werthsystem ersetzt wird, d. h. durch ein binäres Werthsystem, welches aus dem genannten durch eine lineare Transformation hervorgeht.

Wir erkennen jetzt, dass durch einen beliebigen Punkt unseres $(n-2)$-dimensionalen Raumes nicht mehr als eine unter den Curven C_{n-2} hindurchgehen kann. In den Coordinaten $z_1, z_2,$ z_n irgend eines Punktes einer solchen Curve haben wir nämlich n Werthe, welche, als Parameter von n Elementen eines rationalen Trägers aufgefasst, n Elemente definiren, die der

Reihe nach projectiv sind den n Fundamentalpunkten auf der Curve. Denn diese Punkte entsprechen auf der Curve den Parameterwerthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$, welche mit den associirten Wurzeln (nach Art. 3) durch die Gleichungen

$$z_r = \frac{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha_1^{(r)} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\alpha_2^{(r)}\right)}{-x_2\alpha_1^{(r)} + x_1\alpha_2^{(r)}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

zusammenhängen.

Wir haben den folgenden Satz:

Durch das System der Gleichungen (4) ist diejenige Rationalcurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung dargestellt, welche durch die n Fundamentalpunkte des Coordinatensystems hindurchgeht und in diesen Punkten beziehungsweise die Parameterwerthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \quad \alpha^{(n)}$ besitzt.

Wir sind berechtigt, unser Resultat in dieser Form auszusprechen, weil die Zählung der Constanten einer rationalen Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in einem Raume von $n-2$ Dimensionen ergibt, dass für eine solche Curve nicht mehr als $n+1$ Punkte beliebig angenommen werden können. Die Eindeutigkeit der Bestimmung durch $n+1$ unabhängige Punkte ist aber oben implicite bewiesen.

15. Jetzt fällt volles Licht auf die Beziehung zwischen einer Covariante oder Invariante Π und ihrem Bilde.

Dieses Bild war gegeben durch die Gleichung

$$S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_2+1}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \quad) = 0, \tag{12}$$

wenn die Gleichung

$$f_1^{i-g_1} f_2^{i-g_2} \quad f_\chi^{i-g_\chi}\Pi =$$
$$= S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \ldots) \tag{10}$$

eine Identität wird, sobald in derselben für $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ihre Werthe aus den Gleichungen (4) eingesetzt werden.

---

[1] Eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung im $(n-2)$-dimensionalen Raume kann erzeugt werden durch zwei collineare Strahlenbündel (Systeme aller Strahlen, welche im $(n-2)$-dimensionalen Raume durch einen Punkt gehen). Von dieser Erzeugung ausgehend beweist man dann sofort die eindeutige Bestimmung der Curve durch $n+1$ unabhängige Punkte.

Dem letzten Artikel zufolge heisst, für $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Werthe aus (4) in die Gleichung (12) des Bildes S_i substituiren, nichts anderes als die Coordinaten eines beliebigen Punktes der rationalen Raumcurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung C_{n-2} einsetzen, welche durch die n Fundamentalpunkte hindurchgeht und auf welcher dieselben der Reihe nach den Parameterwerthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ entsprechen. Diejenigen Werthe des Parameters x, welche jetzt der Gleichung (12) genügen, sind also die Parameterwerthe jener Punkte der Curve C_{n-2}, welche auf der Bildfläche S_i liegen. Allein die linke Seite der Identität (10) lässt erkennen, dass die $(n-2)i$ Werthe des Parameters x, welche man so erhält, bestehen: aus den je $(i-g_1)$-fach zählenden Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n_1)}$ von f_1, den je $(i-g_2)$-fach zählenden Lösungen $\alpha^{(n_1+1)}, \alpha^{(n_1+2)}, \ldots, \alpha^{(n_1+n_2)}$ von $f_2, \ldots$, den je $(i-g_\varkappa)$-fach zählenden Lösungen von $f_\varkappa$ und aus den Lösungen der Covariante Π. Mit Rücksicht darauf, dass für jede Curve C_{n-2} die Parameterwerthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ die Fundamentalpunkte liefern, schliessen wir:

Wählt man n beliebige Punkte eines $(n-2)$-dimensionalen Raumes als Fundamentalpunkte und weist sie einzeln den Lösungen der Formen des Formensystems $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zu, dann erhält man das Bild S_i einer beliebigen Covariante Π vom Index i und den Gradzahlen $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ in den Coëfficienten der Formen, wenn man auf jeder durch die Fundamentalpunkte hindurchgehenden Unicursalcurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung für diese Punkte, welche gruppenweise den Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ entsprechen, die covariante Punktgruppe Π verzeichnet. Die sich ergebende Fläche S_i ist von der i^{ten} Ordnung und besitzt in jedem einer Lösung der Form f_ν zugehörigen Fundamentalpunkte einen $(i-g_\nu)$-fachen Punkt.

Ist jedoch Π eine Invariante, so schliessen wir vermöge der obigen, auf die Identität (10) gegründeten Überlegung, dass ihre Bildfläche S_i von einer beliebig durch die Fundamentalpunkte gelegten Unicursalcurve C_{n-2} nur in den Fundamentalpunkten getroffen wird, und zwar fallen in jeden, einer Lösung der Form f_ν zugeordneten Fundamentalpunkt $i-g_\nu$ von den $(n-2)i$ Schnittpunkten hinein. Eine Ausnahme bilden nur jene Curven C_{n-2}, auf welchen das System der Parameter $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ der Fundamentalpunkte so beschaffen ist, dass $\Pi = 0$ wird; dann ist aus (10) zu ersehen, dass die Gleichung (12) für jeden Werth von x erfüllt ist. Unser Resultat lautet daher:

Legt man durch n beliebige Punkte eines $(n-2)$-dimensionalen ebenen Raumes, welche einzeln den Lösungen der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zugehörig sind, diejenigen Unicursalcurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welchen diese Punkte ein System bilden, für welches die Invariante Π des Formensystems verschwindet, so erfüllen dieselben das Bild S_i der Invariante Π. Ist diese vom Index i und dem Grade g_r in den Coëfficienten von f_r, so ist die Bildfläche S_i von der i^{ten} Ordnung und hat in jedem einer Lösung von f_r zugehörigen Fundamentalpunkte einen $(i-g_r)$-fachen Punkt.

Die Vielfachheit der Fundamentalpunkte für das Bild S_i der Covariante (Invariante) Π war aus der Anzahl der Schnittpunkte von S_i mit einer beliebigen, die Fundamentalpunkte enthaltenden Unicursalcurve C_{n-2} geschlossen worden, die in die einzelnen Fundamentalpunkte hineinfallen. Man kann dieselbe Erkenntniss auch auf directerem Wege erlangen.

Hält man in den Gleichungen (4) die binären Werthe $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und x fest und sieht $\alpha^{(1)}$ als Parameter an, so wird durch diese Gleichungen der Ort des Punktes mit dem Parameterwerthe x auf allen jenen Curven C_{n-2} gegeben sein, auf welchen der 2^{te}, 3^{te}, n^{te} Fundamentalpunkt beziehungsweise die Parameterwerthe $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ besitzt. Da der binäre Parameter $\alpha^{(1)}$ in den Gleichungen (4) linear vorkommt, so erweist sich der genannte Ort als Gerade, und zwar als Gerade durch den ersten Fundamentalpunkt, der dem Parameterwerthe $\alpha^{(1)} = x$ correspondirt.

Man wird desshalb die Schnittpunkte von S_i mit einer beliebigen Geraden durch den ersten Fundamentalpunkt bestimmen, wenn man in den Gleichungen (4) $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und x beliebig wählt, die Werthe von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in die Flächengleichung (12) einsetzt und diese nach $\alpha^{(1)}$ löst. Allein die Identität (10) sagt, dass von diesen Lösungen $i-g_1$ lauten $\alpha^{(1)} = x$; die übrigen sind dann Lösungen der Gleichung $\Pi = 0$, welche, da sie die Coëfficienten von f_1 im g_1^{ten} Grade enthält, jede der Lösungen von f_1 im g_1^{ten} Grade enthalten wird, wenn man diese an Stelle der Coëfficienten einführt.

16. Unsere geometrische Repräsentation für die Co- und Invarianten des Formensystems $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ ist so geartet, dass innerhalb derselben geometrische Bilder für alle Specialfälle vorhanden sind, welche entstehen, wenn man dem Systeme der Verschwindungselemente der Formen irgend einen speciellen projectiven Charakter zuschreibt. Ein besonderes Interesse dürfen die Specialfälle beanspruchen, welche dadurch entstehen, dass man Verschwindungselemente der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ gruppenweise zusammenfallen lässt.

Wir machen zunächst die Voraussetzung, dass von den n Werthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ irgend welche k untereinander zusammenfallen, und es sei die Bezeichnung so gewählt, dass die zusammenfallenden Lösungen sind $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \quad \alpha^{(k)}$. Wir haben damit unsere frühere Bezeichnungsweise verlassen, nach welcher die n_1 ersten unter den Werthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ die Lösungen von f_1, die n_2 folgenden die von f_2 u. s. f. bedeuteten Jetzt soll ganz unbestimmt bleiben, in welcher Reihenfolge diese Werthe den Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zugehören.

Die Gleichungen (4), welche die associirten Wurzeln liefern, gehen, wenn $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \quad \alpha^{(k)}$, über in:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 = z_2 = \ldots = z_k = {} & \frac{1}{n} (x\alpha^{(1)})^{k-1} \{ (\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)}) \\
& (x\alpha^{(n)}) + (\alpha^{(1)}\alpha^{k+2})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+3)}) \ldots (x\alpha^{(n)}) + \ldots \} \\
z_{k+1} = {} & \frac{1}{n} (x\alpha^{(1)})^{k-1} \{ k(\alpha^{(k+1)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)}) \ldots \\
& (x\alpha^{(n)}) + (\alpha^{(k+1)}\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+3)})(x\alpha^{(k+4)}) \ldots (x\alpha^{(n)}) + \ldots \} \\
& \cdot \\
z_n = {} & \frac{1}{n} (x\alpha^{(1)})^{k-1} \{ k(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)}) \\
& \ldots (x\alpha^{(n-1)}) + (\alpha^{(n)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)}) \ldots (x\alpha^{(n-1)}) + \ldots \}
\end{aligned}\right\} \quad .(5)$$

Hält man in diesem Gleichungssystem die Werthe der Lösungen α fest und lässt den Parameter x variiren, so beschreibt der Punkt mit den Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine Unicursalcurve C_{n-k-1} von der Ordnung $n-k-1$, deren Parameterdarstellung wir in den Gleichungen (5) vor uns haben, da der gemeinsame Factor bei den homogenen Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ weggelassen werden darf. Nur für den Werth des Parameters $x = \alpha^{)1)}$, für den dieser Factor verschwindet und der durch die Gleichungen (5) gegebene Punkt unbestimmt wird, ist diese Weglassung nicht zulässig.

Wir schliessen, dass, wenn man durch eine bestimmte Variation der Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ zu unserem Specialfalle übergeht, die durch die Gleichungen (4) gegebene Curve C_{n-2} zerfällt in die Curve C_{n-k-1}, welche die gesammte Parametervertheilung trägt, und eine Curve $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (welche von der Art des Grenzüberganges abhängen kann), deren Punkte sämmtlich dem singulären Werthe $\alpha^{(1)}$ des Parameters entsprechen.

Die Curve C_{n-k-1} liegt, wie aus (5) ersichtlich ist, ganz in dem $(n-k-1)$-dimensionalen Kantenraume K des n-Ecks der Fundamentalpunkte, der durch die Gleichungen $z_1 = z_2 = \ldots = z_k$ gegeben ist, d. h. in dem Kantenraume, welcher durch jene Fundamentalpunkte bestimmt ist, welche den isolirt liegenden Lösungen α zugehörig sind. Diese $n-k-1$ Fundamentalpunkte entsprechen, wie aus den Betrachtungen über die Curve C_{n-2} des allgemeinen Falles folgt, auf der Curve C_{n-k-1} der Reihe nach den Parameterwerthen $\alpha^{(k+1)}, \alpha^{(k+2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$.

Dem singulären Parameterwerthe $x = \alpha^{(1)}$ entspricht auf der Curve C_{n-k-1} der Diagonalpunkt des Kantenraumes K, in dem die Curve liegt. Denn durch Einsetzung von $x = \alpha^{(1)}$ in die vom Factor $(x\alpha^{(1)})^{k-1}$ befreiten linken Seiten der Gleichungen (5) ergeben sich die Coordinatenwerthe:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_k = \frac{n-k}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+2)}) \qquad (\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})$$

$$z_{k+1} = z_{k+2} = \ldots = z_n = -\frac{k}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+2)}) \ldots (\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}).$$

Wir haben also in dem Kantenraume K für die Curve C_{n-k-1} $n-k+1$ feste Punkte, welche beziehungsweise den Parameterwerthen $\alpha^{(k+1)}, \alpha^{(k+2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und $\alpha^{(1)}$ entsprechen, und durch jeden weiteren Punkt dieses Raumes geht eine solche Curve hindurch (vergl. Art. 14).

Die im letzten Artikel erkannte Bedeutung der Schnittpunkte einer Curve C_{n-2} mit dem Bilde S_i einer Covariante II liefert im vorliegenden Specialfalle den Satz:

In dem Schnitte $S_i(K)$ des Bildes S_i einer Covariante oder Invariante II mit dem durch $n-k$ unter den Fundamentalpunkten bestimmten Kantenraume K haben wir das Bild der Covariante, beziehungsweise Invariante II unter der speciellen Voraussetzung, dass die Lösungen der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, welche den k nicht im Kantenraume K gelegenen Fundamentalpunkten zugehörig sind, untereinander zusammenfallen. Man erhält dieses Bild $S_i(K)$, wenn man auf jeder Unicursalcurve $(n-k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung im $(n-k-1)$-dimensionalen Kantenraume K, welche durch die in diesem Raume gelegenen Fundamentalpunkte und durch seinen Diagonalpunkt hindurchgeht, von denen der letzte den zusammenfallenden Lösungen des Formensystems, die ersten den getrennt liegenden zugehörig sind, die Covariante II dieser Punkte construirt, beziehungsweise jene unter den Curven verzeichnet, auf welchen die Invariante II für diese Punkte verschwindet.

Wir wollen jetzt annehmen, dass es unter den Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ der Form $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ mehrere Gruppen von einander gleichen Werthen gibt. Es sei:

$$\alpha^{(11)} = \alpha^{(12)} = \quad\quad = \alpha^{(1a)} = \alpha; \quad \alpha^{(21)} = \alpha^{(22)} = \quad\quad = \alpha^{(2b)} = \beta;$$
$$\alpha^{(t1)} = \alpha^{(t2)} = \quad\quad = \alpha^{(ts)} = \sigma,$$

wo die doppelten Indices der α mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ in gewisser Reihenfolge übereinstimmen, so dass $a+b+ \quad + +s = n$.

Von den Zahlen $a, b, \ldots, s$ sind mindestens 2 von der Einheit verschieden angenommen, denn sonst würden wir auf den schon behandelten Fall zurückfallen.

Die Gleichungen (4) lauten unter den gemachten Voraussetzungen:

$$z_{11} = z_{12} = \quad = z_{1a} = \frac{1}{n}(x\alpha)^{a-1}(x\beta)^{b-1}\ldots(x\sigma)^{s-1}$$
$$.[b(\alpha\beta)(x\gamma)(x\delta)\ldots(x\sigma) + c(\alpha\gamma)(x\beta)(x\delta)\ldots(x\sigma) + \ldots]$$
$$z_{21} = z_{22} = \quad = z_{2b} = \frac{1}{n}(x\alpha)^{a-1}(x\beta)^{b-1}\quad(x\sigma)^{s-1}.$$
$$.[a(\beta\alpha)(x\gamma)(x\delta)\ldots(x\sigma) + c(\beta\gamma)(x\alpha)(x\delta)\ldots(x\sigma) + \ldots]$$
$$\vdots$$
$$z_{t1} = z_{t2} = \quad = z_{ts} = \frac{1}{n}(x\alpha)^{a-1}(x\beta)^{b-1}\ldots(x\sigma)^{s-1}$$
$$.[a(\sigma\alpha)(x\beta)(x\gamma)\quad + b(\sigma\beta)(x\alpha)(x\gamma)\ldots + \ldots].$$

In diesen Gleichungen haben wir die Parameterdarstellung für eine Unicursalcurve C_{t-2} von der Ordnung $n-2-(a-1)-$ $-(b-1)\ldots-(s-1) = t-2$, welche in dem Diagonalraume D liegt, der durch die Gleichungen $z_{11} = z_{12} = \ldots = z_{1a}$; $z_{21} = z_{22} =$ $= \quad = z_{2b}$; ...; $z_{t1} = z_{t2} = \quad = z_{ts}$ gegeben ist. Setzt man in die Gleichungen der Curve C_{t-2} $x = \alpha$, so kommt

$$z_{11} = z_{12} = \quad = z_{1a}$$
$$z_{21} = z_{22} = \ldots z_{2b} = z_{31} = z_{32} = \ldots z_{3c} = \ldots = z_{t1} = \ldots = z_{ts},$$

d. h. der Diagonalpunkt des Kantenraumes $z_{11} = z_{12} = \ldots = z_{1a}$ beziehungsweise, wenn $a = 1$, der z_{11} zugehörige Fundamentalpunkt liegt auf der Curve C_{t-2} und entspricht dem Parameterwerthe $x = \alpha$. Hieraus ziehen wir jetzt ganz ähnlich wie oben das Resultat:

In dem Schnitte $S_i(D)$ des Bildes S_i der Covariante (Invariante) Π mit dem Diagonalraume D haben wir das nach denselben Principien wie S_i construirte Bild für die Covariante (Invariante) Π unter der speciellen Voraussetzung, dass von den Lösungen der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\lambda$ immer jene unter einander zusammenfallen, welche einer Gruppe von ausserhalb des Diagonalraumes D gelegenen Fundamentalpunkten zugehörig sind, die so beschaffen ist, dass der Diagonalpunkt des durch sie bestimmten Kantenraumes im Diagonalraume D liegt. Diesem Diagonalpunkte ist dann die den Fundamentalpunkten der Gruppe zugehörige Lösung zugehörig.

Die Bedeutung der Betrachtungen dieses Artikels besteht darin, dass sich zeigt, dass die Schnitte der Fläche S_i mit den

Kanten- und Diagonalräumen des n-Ecks der Fundamentalpunkte, durch niedrigere Theorien geliefert werden. Denn man wird unter Umständen aus den Eigenschaften dieser Schnitte Aufschlüsse über die Fläche S_i erlangen und also vermöge von Sätzen der niedrigeren Theorie Sätze der höheren allgemeinen Theorie aufstellen können.

17. Wir wollen zum Schlusse noch ein Wort über die Anwendungen sagen, welche die Einführung der associirten Wurzeln und deren geometrische Interpretation gestattet.

Dass die bekannten Sätze der Formentheorie jetzt in geometrische Sätze umgesetzt werden können, braucht kaum hervorgehoben zu werden, nur dass sich dabei auch Theoreme ergeben, welche von geometrischem Interesse sind, wäre zu erwähnen.

Die algebraische Bedeutung der in Rede stehenden geometrischen Interpretation liegt in ihrem Zusammenhange mit gewissen Betrachtungen von Clebsch und F. Klein (Math. Ann., Bd. IV, S. 284 f. und S. 346 f.), welcher zu erörtern sein wird. Ausserdem haben wir in den associirten Wurzeln ein geeignetes Hilfsmittel für das Studium der invariantiven Bildungen von n Linearformen, welche bei einer beliebig fixirten Gruppe von Vertauschungen dieser Linearformen unter einander ungeändert bleiben. Es sind dies Bildungen, auf welche man von geometrischer Seite her vielfach geführt wird.

Von Interesse sind die sich ergebenden invarianten-theoretischen Sätze über Resultanten und Discriminanten von Covarianten und über Syzygien, welche die geometrische Interpretation nahe legt.

Alle diese Betrachtungen sollen einer umfassenderen Darstellung des Gegenstandes vorbehalten bleiben. Hier handelte es sich vor Allem darum, an einer Reihe von Beispielen die Erspriesslichkeit der Einführung der associirten Wurzeln in die Invariantentheorie darzuthun.