# Über eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittelst der Waage

von

Dr. Gottlieb Adler,

*Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.*

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1891.)

Die Abhandlung untersucht zunächst, in welcher Anordnung man aus der mechanischen Anziehung einer Substanz im Magnetfelde am einfachsten die Magnetisirungszahl derselben ableiten kann. Die geführte Rechnung lehrt, dass dies dann der Fall ist, wenn man der Substanz die Gestalt eines sehr langen und sehr dünnen Drahtes gibt, von welchem ein im Verhältnisse zu seiner Dicke sehr langes Stück in ein homogenes Magnetfeld derart ragt, dass die Kraftlinien desselben parallel der Längsaxe des Stabes verlaufen, während der andere Endquerschnitt desselben sich an Orten befindet, wo die Magnetkraft bereits verschwindend kleine Werthe hat.

Der Betrag der in dieser Anordnung den vorderen Endquerschnitt pro Flächeneinheit angreifenden Zugkraft ergibt sich unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl der Substanz

$$p_{\#} = J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J\,dJ}{k}. \qquad \text{I)}$$

Hierin bezeichnet $H_1$ die Intensität des homogenen Magnetfeldes, $J_1$ das in der Substanz daselbst erzielte magnetische Moment, $k = \frac{J}{H}$ ihre Magnetisirungszahl.

Die Auswerthung des Integrales in Formel I) geschieht unter Zugrundelegung jener empirischen Formel, durch welche Stefan (diese Berichte, Bd. $69_2$, S. 202) die Magnetisirungszahl als Function des magnetischen Moments dargestellt hat.

Messungen der magnetischen Zugkraft sind für starke Felder durch Quincke gemacht worden und liegen für die Feldintensitäten von 400, 1600 und 3730 Einheiten C. G. S. vor. Die in der angegebenen Weise aus Formel I) berechneten Werthe befinden sich in ziemlicher Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen und die bestehenden Abweichungen deuten darauf hin, dass innerhalb des untersuchten Intervalles der Magnetkraft eine Steigerung derselben immer noch eine weitere Steigerung des erreichten magnetischen Momentes bewirke.

Quincke hat noch eine zweite Versuchsanordnung messend verfolgt, in welcher die Längsaxe des Stabes die Kraftlinien des homogenen Magnetfeldes senkrecht durchsetzt.

Bezeichnet man die magnetische Zugkraft in dieser Anordnung mit $p_{\perp}$, so ergibt die Rechnung, dass bei derselben Feldintensität das Verhältniss der Zugkräfte für beide Anordnungen

$$\frac{p_{\#}}{p_{\perp}} = 1 + 2\pi k$$

ist für Substanzen constanter Magnetisirungszahl. Es ist also dies Verhältniss kleiner als Eins für diamagnetische, grösser als Eins für paramagnetische Substanzen und umso grösser, je magnetischer die bezügliche Substanz ist, beides übereinstimmend mit Quincke's Beobachtungsresultaten. Gleichfalls im Einklange mit letzteren ergibt die Rechnung obiges Verhältniss für Substanzen variabler Magnetisirungszahl von der Feldstärke abhängig, und zwar grösser für schwächere als für stärkere Felder.

Die von Kirchhoff ohne Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl abgeleiteten Ausdrücke für die magnetische Zugkraft unterscheiden sich wesentlich von Formel I), und ihre Beträge sind speciell in starken Feldern nur halb so gross als die aus I) sich ergebenden Werthe.

## §. 1.

## Magnetische Zugkraft an Drähten.

Die Berechnung der mechanischen Anziehung, die ein magnetischer fester Körper in einem Magnetfelde erfährt, gründet sich auf den Ausdruck für den Arbeitswerth seiner magnetischen Polarisation. Bekanntlich ist dieser, berechnet als Gesammtbetrag jener mechanischen Arbeit, die von aussen her gegen die wirksamen Kräfte des Magnetfeldes geleistet werden muss, um den Körper, dessen Configuration als starr betrachtet, aus unendlicher Entfernung an die bezügliche Feldstelle zu bringen, gegeben durch

$$W = -\int\int_0^{H_1} J \cos(J,H)\, dH\, dv, \tag{I$a$}$$

wo die äussere Integration über alle Volumelemente $dv$ des magnetischen Körpers sich erstreckt, $H_1$ die ursprüngliche Feldstärke an der von $dv$ schliesslich eingenommenen Raumstelle bezeichnet, während $J$ jenen Werth des magnetischen Moments bedeutet, welches dem Werthe $H$ der Magnetkraft in irgend einem Augenblicke des Annäherungsvorganges zugeordnet war.

Die Ausführung einer einfachen partiellen Integration führt diesen Energieausdruck in einen zweiten über, in welchem das in der Volumseinheit geweckte magnetische Moment $J$ als die unabhängige Variable auftritt [1]

$$W = -\int\left[J_1 H_1 \cos(J_1, H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ\right] dv. \tag{I}$$

Diese zweite Form des Energieausdruckes hat vor der ersten den Vorzug, dass in ihr, wie unmittelbar ersichtlich, die Variation von $W$ nach $J_1$ verschwindet, also bei Vornahme einer Verschiebung jene Änderungen, die sich hiebei für den Arbeitswerth aus der geänderten Werthevertheilung des magnetischen Moments $J_1$ ergeben, nicht in Anschlag zu bringen sind.

Die mechanische Anziehung, die der Körper im Magnetfelde erfährt, lässt sich mit Leichtigkeit nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen ableiten.

Es mag so ein einfacher Fall, wie er in experimentellen Anordnungen verwendet worden, rechnend verfolgt werden: Ein Stab magnetischer Substanz rage mit der einen Endfläche in ein sehr starkes homogenes Magnetfeld, wie es zwischen den

[1] S. diese Berichte, dieser Band (S. 477).

Polen eines kräftigen Elektromagneten hergestellt wurde, während die andere Endfläche sich ausserhalb des Magnetfeldes bereits an einer Stelle befindet, wo die Magnetkraft verschwindend kleine Werthe besitzt.

In zweifacher Weise kann dann das, was bei einer Verschiebung des Stabes nach Richtung seiner Längsaxe vorgeht — und nur eine solche soll dem Stabe gestattet sein — aufgefasst werden.

Man kann darin erstens einen Vorgang erblicken, in welchem die einzelnen Stabelemente von Orten niedriger zu solchen höherer Magnetkraft gelangt sind, und in dieser Weise verfahrend, ist die den Stab als Ganzes angreifende mechanische Kraft anzusehen als die Resultirende von Kräften, die jedes einzelne Volumelement der magnetischen Substanz angreifen.

Es ist aber auch eine zweite Auffassungsweise des Verschiebungsvorganges möglich, welche an das anknüpft, was in den einzelnen Raumpunkten des Magnetfeldes sich abspielt. Von diesem Gesichtspunkte aus besteht die ganze bei der Verschiebung eintretende Änderung darin, dass aus den an die Vorderfläche des Stabes angrenzenden Raumtheilen des Magnetfeldes Luft, die nichts zur magnetischen Energie beigetragen, durch magnetisch polarisirbare Substanz verdrängt worden und hiedurch der Energiebetrag sich ändert, während durch den entgegengesetzten Vorgang an der Rückfläche, da dort die Magnetkraft bereits Null ist, keine weitere Änderung resultirt.

Einer solchen Anschauungsweise wird die am Stabe wirksame mechanische Kraft als eine lediglich seine vordere Endfläche angreifende Zugkraft entgegentreten, und in diesem Sinne wollen wir uns die Aufgabe stellen, den Betrag $p$ derselben bezogen auf die Flächeneinheit zu berechnen.

Wir bezeichnen mit $q$ den Querschnitt des Stabes, mit $c$ die Länge des in das homogene Feld tauchenden Endstückes desselben; wir nehmen dann eine virtuelle Verschiebung vor, durch welche diese Länge um $\delta c$ zunimmt. Dann besteht die hiedurch verursachte Änderung des Arbeitswerthes $W$ aus zwei Theilen: Erstens wird hiedurch das Volumelement $q\delta c$ des Magnetfeldes, das früher von Luft erfüllt war, die vermöge ihrer Magnetisirungszahl Null nichts zum Energiewerthe beigetragen, durch magnetisch polarisirte Substanz eingenommen, und da an der rückwärtigen Endfläche als an einer Stelle, wo die Magnetkraft gleich Null ist, durch das correspondirende Abrücken der Substanz $W$ nichts sich ändert, so ist der hiedurch verursachte Theilbetrag der Anderung des Arbeitswerthes

$$\delta_1 W = -\left[J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ\right] q\delta c.$$

Jene Änderung, welche aus der geänderten Anordnung der Werthe von $J_1$ durch die ganze Ausdehnung des Stabes resultirt, ist, da, wie unmittelbar ersichtlich, $\delta_{J_1} W$ verschwindet, nicht in Rechnung zu ziehen.

Wohl aber ist noch ein zweiter Posten von $\delta W$ zu berücksichtigen

$$\int_0^{J_1} \delta H \cos(J, H)\, dJ,$$

welcher daher kommt, dass in Folge der geänderten Configuration gleichzeitig auch die Zuordnung der Werthe von $H$ zu den entsprechenden des $J$ sich ändert.

Beachtet man nun, dass die Componenten $A, B, C$ des magnetischen Moments $J$ mit jener der Magnetkraft $H$, $E, F, G$ durch die Gleichungen verknüpft sind

$$\frac{A}{k} = E + \mathfrak{X},\quad \frac{B}{k} = F + \mathfrak{Y},\quad \frac{C}{k} = G + \mathfrak{Z}, \qquad 1)$$

wo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten jener Magnetkraft $R$ sind, die von den in der polarisirten Substanz auftretenden freien Magnetismen herrührt, $k$ die Magnetisirungszahl bezeichnet, nach dem Vorgange Stefan's als Function des magnetischen Moments aufgefasst; dann ist unmittelbar ersichtlich, dass in der geänderten Configuration

$$\frac{A}{k} = E + \delta E + \mathfrak{X} + \delta\mathfrak{X}$$

oder

$$\delta E = -\delta\mathfrak{X}$$

ist, wobei unter $\delta\mathfrak{X}$ jene Anderung zu verstehen ist, welche die Magnetkraft $\mathfrak{X}$ lediglich durch die geänderte Configuration, aber bei beibehaltenen Werthen des magnetischen Moments $J$ erfährt.

Auf solche Weise ergibt sich der zweite Theil der Änderung des Arbeitswerthes

$$\delta_2 W = \iint (\delta\mathfrak{X}\, dA + \delta\mathfrak{Y}\, dB + \delta\mathfrak{Z}\, dC)\, dv =$$

$$= \iint_0^{J_1} \{\delta R \cos(R, J)\, dJ\}\, dv) \qquad \mathrm{I}c)$$

Da aber $R$ eben von den in Folge der magnetischen Polarisation auftretenden freien Magnetismen herrührt, also jeweilig $J$ proportional ist, so ist nach bekannten Sätzen

$$\delta_2 W = \frac{1}{2} \int J_1\, \delta R_1 \cos(J_1 R_1)\, dv,$$

wobei bei Auswerthung von $\delta R_1$ wesentlich zu beachten ist, dass es die bei festgehaltenen Werthen von $J_1$ in Folge der Configurationsänderung eintretende Variation von $R_1$ ist, also

$$\delta R_1 = \frac{\partial R_1}{\partial c}\, \delta c.$$

Es ergibt sich sonach im Ganzen

$$\delta W = -\left[J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ\right] q\, \delta c +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \delta c \int J_1 \frac{\partial R_1}{\partial c} \cos(J_1, R_1)\, dv.$$

Nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen muss $\delta W$ als die bei der gedachten Verschiebung gegen die magnetischen Kräfte geleistete Arbeit und die hiebei durch die supponirte Zugkraft $p$ geleistete $pq\delta c$ die Summe Null ergeben, woraus sich

$$p = J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ -$$

$$- \frac{1}{2q} \int J_1 \frac{\partial R_1}{\partial c} \cos(J_1, R_1)\, dv \qquad 2a)$$

ergibt.

Aus dieser Formel ist unmittelbar ersichtlich, welches die dem Stabe am vortheilhaftesten zu gebende Form ist; es wird jene sein, bei welcher $\frac{\partial R}{\partial c}$ und damit der letzte Posten, $p_2$, in $2a$) zu einer vernachlässigbaren Grösse wird. Die nachstehend geführte Rechnung zeigt, dass dies dann der Fall ist, wenn man der Substanz die Gestalt eines sehr dünnen Drahtes von kreisförmigem Querschnitte gibt, von welchem ein im Verhältnisse zum Querschnittsradius $a$ sehr grosses Stück $c$ in das homogene Magnetfeld, dessen Kraftlinien der Längsaxe des Drahtes parallel verlaufen, hineinragt. Wir wollen annehmen, dass die dann in dem Endstücke $c$ des Drahtes vorhandene magnetische Vertheilung dieselbe ist, wie in einem sehr verlängerten Rotationsellipsoïde von den Halbaxen $\frac{c}{2}$ und $a$.

Es sind dann die Grössen $H_1$, $J_1$ und $R_1$ mit einander verknüpft durch die Gleichungen:[1]

$$J_1 = \frac{k H_1}{1+4\pi k\left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a}}; \quad R_1 = -4\pi J_1 \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a} \qquad 1a)$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial R_1}{\partial c} = 4\pi J_1 \frac{a^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^3}\left(\log\frac{c}{a} - 1\right)$$

Beachtet man nun, dass für das ausserhalb des homogenen Magnetfeldes liegende Drahtstück bei der gedachten Verschiebung nichts sich ändert, vorausgesetzt, dass der Draht genügend lang gewählt ist, so ist der aus dem letzten Posten von Formel $2a$) für die am Endquerschnitte pro Flächeneinheit angreifende Zugkraft resultirende Theilbetrag

$$p_2 = -J_1^2 4\pi . \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \left(\log\frac{c}{a} - 1\right),$$

[1] S. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität, 438*c*.

kann also durch eine Anordnung, in der $\frac{a}{c}$ sehr klein gemacht ist, zu verschwindender[1] Kleinheit gebracht werden.

Ersetzt man im ersten Posten der Formel 2$a$) für die magnetische Zugkraft $p$, $H$, respective seine Componenten $E, F, G$, wie für die Ausführung der bezüglichen Integration geboten, durch ihre aus den Gleichungen 1) folgenden Werthe, so ergibt sich

$$p = \left\{ J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) + \frac{1}{2} J_1 R_1 \cos(J_1, R_1) - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} \right\} \qquad 3)$$

oder unter Berücksichtigung von Formel 1$a$) für $R_1$ für einen sehr dünnen, kreisrunden, parallel seiner Längsaxe magnetisirten Draht die seine Endfläche pro Flächeneinheit angreifende Zugkraft

$$p = J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k}, \qquad 3a)$$

wobei der Posten

$$-6\pi \left(\frac{2a}{c}\right)^2 J_1^2 \log \frac{c}{a}$$

als sehr klein vernachlässigt worden ist.

Schreibt man Formel 3) unter Berücksichtigung der Gleichungen 1) in der Form

$$p = \frac{J_1 H_1 \cos(J_1, H_1)}{2} + \left(\frac{J_1^2}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k}\right)$$

$$= \frac{k_1}{2} H^2 + \left(\frac{J_1^2}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k}\right) \qquad 3b)$$

so ist, da bei Substanzen unveränderlicher Magnetisirungszahl $k = k_1$ ist und mithin die Klammer verschwindet, aus ihr mit grösster Leichtigkeit der Einfluss der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl auf den Betrag der magnetischen Zugkraft erkennbar.

---

[1] Ist hingegen die Dicke des verwendeten Stabes ziemlich gross im Vergleiche zur Länge des ins Feld ragenden Endstückes $c$, dann ergibt sich, wie unmittelbar ersichtlich, der Betrag der Zugkraft wesentlich abhängig von der Länge des in Feld tauchenden Stückes, wie auch, gemäss privater Mittheilung Quincke's, experimentell von ihm constatirt wurde.

Quincke hat die Ergebnisse seiner Untersuchungen über magnetische Zugkräfte in der Weise zusammengestellt, dass er das Verhältniss derselben zum Quadrate der zugehörigen Feldintensität

$$\frac{p}{H_1^2} = \mathfrak{k}$$

als die Dimagnetisirungsconstante $\mathfrak{k}$ bezeichnete und den Wertheverlauf letzterer bestimmte. Für die gewählte Versuchsanordnung ist also nach $3b$) bei Substanzen constanter Magnetisirungszahl

$$\mathfrak{k} = \frac{k}{2}$$

Eine solche ist unter den festen Körpern Manganstahl, und es ist hieraus ersichtlich, dass man aus der Grösse der Anziehung, die ein Manganstahldraht in ein homogenes Magnetfeld erfährt, in einfachster Weise die Intensität des Feldes bestimmen kann.

Für Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl ist hingegen der Wertheverlauf der Dimagnetisirungsconstante $\mathfrak{k}$, wie aus Formel $3b$) ersichtlich, ein ganz anderer. In jenem Intervall der Feldintensität, in welchem $k$ aufsteigenden Wertheverlauf besitzt, ist der Klammerausdruck in $3b$) wesentlich negativ, in jenem Werthebereiche hingegen, wo $k$ nach Erlangung eines Maximalwerthes absteigenden Wertheverlauf hat, gelangt die Klammer zu positiven Werthen. Es ist unmittelbar klar, dass in Folge hievon die Zunahme der Dimagnetisirungsconstante $\mathfrak{k}$ und ebenso dessen Abnahme nach Erreichung eines Maximalwerthes langsamer erfolgen wird, als dies rücksichtlich der Magnetisirungzahl $k$ selbst der Fall ist.

Schliesst man also aus der mechanischen Kraft, mit der eine Substanz in ein Magnetfeld gezogen wird, unvermittelt auf die Magnetisirbarkeit derselben, so ergibt sich diese als minder veränderlich, als thatsächlich der Fall ist.

## §. 2.

## Magnetische Zugkräfte in starken Feldern.

Von besonderem Interesse ist es, die Formel für die an einem parallel seiner Längsaxe magnetisirten Draht auftretende Zugkraft

$$p = J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} \qquad 3a)$$

für sehr starke Felder anzuwenden, um zu sehen, inwiefern aus den Beträgen derselben auf das Verhalten einer Substanz in der Nähe ihres magnetischen Sättigungspunktes geschlossen werden kann.

Formel 3$a$) erfordert aber wesentlich die Kenntniss des Integrales $\int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k}$, dessen Auswerthung auf mechanischem Wege übergrosse Schwierigkeiten verursachen würde.

Es gelingt diese hingegen ungemein leicht unter Zugrundelegung der empirischen, von Stefan[1] aufgestellten Formel, welche die Magnetisirungszahl $k$ als Function des magnetischen Moments darstellt durch

$$\frac{1}{k} = \frac{a J_m}{J^{1-n} (J_m - J)^n} - a. \qquad 4)$$

Hierin bezeichnet $J_m$ das für die bezügliche Substanz erreichbare Maximalmoment — für Eisen nimmt Stefan[2] dieses als 1400 Einheiten C. G. S. an — $n$ ist ein echter Bruch

$$n = \frac{J_k}{J_m},$$

wo $J_k$ jenen Werth des magnetischen Momentes bezeichnet, für den $k$ ein Maximum ist, $a$ endlich ist ein Zahlenwerth, der aus einem der experimentell festgestellten, $J$ und $k$ einander zuord-

[1] S. Stefan, diese Ber., $69_2$, 1874, S. 202.

[2] Neuere Untersuchungen von Ewing (Phil. transact. 180, 1889, S. 232) haben für Eisen als in sehr starken Feldern erreichbares Maximalmoment 1700 Einheiten C. G. S. ergeben. Aus der graphischen Darstellung von $\frac{J}{k}$ (diese Ber., dieser Bd., S. 481) ist aber ersichtlich, dass die Hauptschwierigkeit in den Auswerthungen $\int_0^{J_1} \frac{J}{k} dJ$ im ersten, sanft ansteigenden Theile der Curve gelegen ist, der durch Stefan's empirischer Formel 4) genau dargestellt ist. Die Auswerthung im sehr steil verlaufenden Endtheile hingegen ist, wie aus Figur 1) (S. 481) ersichtlich, eine viel leichtere, nämlich gegeben als der Inhalt des sehr steil abgeschrägten trapezförmigen Flächenstreifens.

nenden Tabelle entnommenen Werthepaare unter Zugrundelegung von Formel 4) abgeleitet ist.

Die magnetische Molecularkraft ist somit

$$\frac{J}{k} = a J_m \left(\frac{J}{J_m - J}\right)^n - a J \tag{5}$$

und daher

$$\int_0^{J_1} \frac{J}{k} dJ = a J_m \int_0^{J_1} \left(\frac{J}{J_m - J}\right)^n dJ - a \frac{J_1^2}{2} \tag{6}$$

oder wenn mit Hilfe der Substitution

$$J = \theta J_m$$

eine neue Variable $\theta$ eingeführt wird,

$$\int_0^{J_1} \frac{J}{k} dJ = a J_m^2 \left[\int_0^{\theta_1} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n d\theta - \frac{a\theta_1^2}{2}\right]^1 \tag{6a}$$

Für Felder so grosser Intensität, dass in ihnen das Maximalmoment $J_m$ merklich erreicht angenommen werden kann, ist

$$\int_0^{J_m} \frac{JdJ}{k} = a J_m^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n d\theta - \frac{1}{2}\right]$$

$$= a J_m^2 \left[B(n+1, 1-n) - \frac{1}{2}\right],$$

wo $B$ das erste Euler'sche Integral ist. Nun ist bekanntlich

---

[1] Die in Figur 1), S. 481, dargestellte Curve für $J/k$ ist Ewing's Untersuchungen an einem Eisendrahte entnommen, und sie fügt sich bis $J = 1000$ Stefan's empirischer Formel in befriedigendster Weise ein, wenn man in dieser $J_m = 1400$, $n = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{250}$ annimmt. Unter dieser Annahme ist aber das Integral 6$a$) für beliebige Grenzen ausführbar, nämlich

$$\int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} = a J_m^2 . \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} - \theta \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}}\right]_{\theta = \theta_1} \tag{6b}$$

wo $\theta_1 = \frac{J_1}{J_m}$ ist. Es ist also hiemit die Möglichkeit gegeben, sich im Intervalle der kleineren Momentwerthe eine Vorstellung von der Grössenordnung des Subtrahenden in Formel 3$a$) für $p$ zu verschaffen.

$$B(n+1, 1-n) = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1-n)}{\Gamma(2)} = \frac{n\pi}{\sin n\pi},$$

wonach sich also die Zugkraft in sehr starken Feldern

$$p = J_m H_1 - a J_m^2 \left(\frac{n\pi}{\sin n\pi} - \frac{1}{2}\right) \qquad 3c)$$

ergibt.

Der von Rowland für die Magnetisirungszahl des Eisens gefundene Wertheverlauf fügt sich in Stefan's Formel vollständig ein, wenn in dieser

$$J_m = 1400, \qquad n = \frac{2}{3}, \qquad a = \frac{1}{175}$$

angenommen wird, die von Stoletow gefundenen hingegen, wenn man

$$J_m = 1400, \qquad n = \frac{3}{5}, \qquad a = \frac{1}{167}$$

annimmt.

Die erstere Annahme ergibt den Subtrahenden in Formel $3c)$ für $p$ gleich 22.560 Einheiten des C. G. S., die zweite hingegen gleich 17.248 Einheiten C. G. S.

Der Betrag der Anziehung eines parallel den Kraftlinien in ein Magnetfeld ragenden Eisendrahtes ist von Quincke für drei Feldintensitäten gemessen worden, für $H_1 = 400$, $H_1 = 1597$ und $H_1 = 3731$.

Berechnet man die auf 1 $cm^2$ entfallende Zugkraft mit Zugrundelegung von Formel $3c)$ unter der Annahme, dass für alle diese drei Feldstärken das magnetische Moment ein und dasselbe sei, nämlich gleich dem erreichten Sättigungsmomente von 1400 Einheiten C. G. S., so ergibt die Rechnung das Verhältniss $\frac{p}{H_1^2} = \mathfrak{k}$ für diese drei Feldstärken

$$H_1 = 400, \qquad H_1 = 1597, \qquad H_1 = 3731$$

$$\mathfrak{k} = \frac{p}{H_1^2} \quad = 3{\cdot}36, \qquad 0{\cdot}86, \qquad 0{\cdot}37,$$

während die von Quincke[1] durch Beobachtung festgestellten Werthe für $\mathfrak{k}$ beziehungsweise sind

$$\mathfrak{k} = 3\cdot02, \qquad 1\cdot15, \qquad 0\cdot61.$$

Die Zahl der vorliegenden Beobachtungsergebnisse ist eine zu geringe, und die Werthe der Feldintensität, denen sie zugeordnet sind, liegen zu weit auseinander, als dass der Grund für den Mangel an Übereinstimmung mit voller Sicherheit angebbar wäre. Gleichwohl ist eine zweifache Ursache hiefür erkennbar, erstens eine in den Beobachtungsfehlern liegende, dann eine zweite, essentielle, die in der Art und Weise liegt, wie die Magnetisirung des Eisens der Sättigungsgrenze sich nähert. Die Fehlerquelle ist jene, deren Quincke[2] mit den Worten erwähnt:

„Die erwähnten Methoden haben den Übelstand, dass bei stark magnetischen Substanzen, wie Eisen und Nickel, die Stabenden gegen die Polflächen des Elektromagnets gezogen werden und die Reibung dann die freie Beweglichkeit des Stabes hindert.“ Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die hier erwähnte Reibung der verwendeten Drähte in jener Führung, welche ihnen freie Beweglichkeit lediglich in Richtung ihrer Längsaxe gestattet, mit wachsender Feldstärke zunehmen muss, und dass somit die mittelst der Waage bestimmte Zugkraft $p$ durch die Mitwirkung dieses Umstandes als eine viel grössere sich ergeben muss, als der Wirksamkeit der magnetischen Kraft allein entspricht.

Der essentielle Grund aber könnte darin liegen, dass das Eisen bei einer Feldstärke von 400 Einheiten C. G. S. — der niedrigsten bei diesen Experimenten in Anwendung gebrachten — noch nicht den Maximalbetrag des erreichbaren magnetischen Moments besitzt, sondern dass die Steigerung der Feldintensität auf 1600 und weiterhin auf 3731 Einheiten eine weitere Steigerung des magnetischen Moments bewirke. Ein Blick auf Formel 3$a$) für die Zugkraft $p$ zeigt, dass ein, wenn auch nur geringes

---

[1] Die von Quincke (Tagbl. der 62. Versamml. deutscher Naturf. und Ärzte, 1889, Heidelberg, S. 210) angegebenen Zahlen sind, wie ich privater Mittheilung entnehme, nicht mit $10^{-5}$, sondern mit $10^{-2}$ zu multipliciren.

[2] l. c.

weiteres Wachsen des magnetischen Moments den ersten Posten um einen grösseren Betrag vermehrt als den zweiten.[1]

In der That hat Ewing,[2] indem er in seiner auf Stefan's[3] Verfahren zur Herstellung intensiver Magnetfelder gegründeten Isthmus-Methode bis zu Feldstärken von $H = 20.000$ Einheiten C. G. S. ging, eine Steigerung des Maximalmoments bis auf 1700 Einheiten C. G. S. erreichen können.

Immerhin ist aus der geführten Rechnung ersichtlich, dass aus der an Eisendraht in sehr starken Feldern angreifenden Zugkraft Aufschluss über die Art und Weise erwartet werden darf, wie die Magnetisirung des Eisens der Sättigungsgrenze sich nähert.

Endlich möchte ich noch hervorheben, dass die ohne Berücksichtigung der Veränderlichkeit von $k$ abgeleiteten Zugkraftsformeln Kirchhoff's[4] in den betrachteten Feldern die Zugkraft fast nur als halb so gross ergeben würden, als die oben nach Formel $3a$) berechneten Werthe.

## §. 3.

## Verhältniss der Zugkräfte bei Längs- und Transversalmagnetisirung eines Drahtes.

Eine zweite Versuchsanordnung, die gleichfalls die Bedingung erfüllt, dass in ihr für eine Verschiebung der Längsaxe des Drahtes $\delta R$ und damit $p_2$ in Formel I $c$), beziehungsweise $2a$), beliebig klein gemacht werden kann, ist jene, in welcher die Kraftlinien des homogenen Magnetfeldes senkrecht zur Längsaxe des Drahtes verlaufen.

Für diese Anordnung sind die Grössen $H$, $J'$ und $R'$ miteinander verknüpft durch die Gleichungen:

---

[1] Der Zuwachs, den hiebei der Subtrahend $\int_0^{J_1} \frac{J\,dJ}{k}$ erfährt, ist nämlich, wie aus der graphischen Darstellung (S. 481) für $J/k$ ersichtlich ist, der sehr steil abgeschrägte trapezförmige Flächenstreifen, dessen Höhe der weitere Zuwachs des Moments $J$ und dessen Parallelseiten die zugehörigen, sehr weit von einander differirenden $\frac{J}{k}$ Werthe sind.

[2] S. Ewing, Phil. transact., 1889, t. 180, p. 232.

[3] S. Stefan, diese Ber.

[4] S. Kirchhoff, Wiedemann's Annalen, Bd. 24.

$$J' = \frac{kH}{1-kM'}; \qquad R' = J'M', \tag{1b}$$

wo [1]

$$M' = -2\pi\left(1-\left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a}\right)$$

ist, $c$ und $a$ die oben angegebene Bedeutung haben.

Für eine Verschiebung des Drahtes nach der Längsaxe ist also

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial c}\delta c = -2\pi J \frac{a^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^3} \log c/a\,.\,\delta c$$

und die daraus nach Formel $2a$) sich ergebende Zusatzzugkraft

$$p_2 = 2\pi J^2 \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a},$$

kann somit durch entsprechende Verkleinerung des Verhältnisses $\frac{a}{c}$ beliebig klein gemacht werden.

Die den Endquerschnitt des Drahtes nach Richtung seiner Längsaxe angreifende Zugkraft ergibt sich somit für eine Substanz constanter Magnetisirungszahl gemäss Formel $2a$)

$$p_{\perp} = \frac{J_1' H_1}{2} = \frac{k}{2}\cdot\frac{H_1^2}{1+2\pi k}$$

bis auf vernachlässigbare Posten.

Und somit ergibt sich das Verhältniss der Zugkräfte $p_{\#}$ und $p_{\perp}$, mit denen ein Draht von sehr kleinem kreisförmigen Querschnitte in ein homogenes Magnetfeld gezogen wird, im Falle, dass die Kraftlinien desselben parallel und im Falle sie senkrecht zur Richtung seiner Längsaxe verlaufen

$$\frac{p_{\#}}{p_{\perp}} = 1+2\pi k. \tag{7a}$$

Es ist somit dies Verhältniss für paramagnetische Substanzen grösser als Eins, für die diamagnetischen kleiner

---

[1] S. Maxwell, l. c, §. 43, 8c.

als Eins, wie dies von Quincke (l. c.) an Wismuthstäben festgestellt worden. Dessgleichen ergab sich übereinstimmend mit Formel 7 $a$) das Verhältniss beider Anziehungen „umso grösser, je magnetischer die bezügliche Substanz ist".

Nicht unwesentlich erscheint mir, darauf hinzuweisen, dass aus der Verschiedenheit der Anziehung parallel und senkrecht den Kraftlinien nicht ohneweiters auf eine Abhängigkeit der Magnetisirungszahl einer Substanz von der Lage ihrer Hauptdimensionen gegen die Kraftlinien des Feldes geschlossen werden darf, da im Vorstehenden die Ungleichheit beider Anziehungen unter wesentlicher Annahme der Gleichheit des $k$ nach allen Richtungen abgeleitet werden konnte.

Für Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl ist das Verhältniss beider Anziehungen ein viel complicirteres, nämlich nach Formel 3 $a$), beziehungsweise 3 $b$) und 2 $a$)

$$\frac{p_{\#}}{p_{\perp}} = \frac{\frac{k}{2} H_1^2 + \left[\frac{J_1^2}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k}\right]}{\frac{k'}{2} \frac{H_1^2}{1+2\pi k_1'} + \left[\frac{J_1'^2}{2k_1'} - \int_0^{J_1'} \frac{J dJ}{k}\right]} \tag{7 b}$$

$$= \frac{J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k}}{\frac{J_1' H_1}{2} + \left[\frac{J_1'^2}{2k_1'} - \int_0^{J_1'} \frac{J dJ}{k}\right]}. \tag{7 c}$$

Aus den Formeln für das magnetische Moment in der Längsanordnung

$$J_1 = k H_1$$

und in der Queranordnung

$$J_1' = \frac{k_1' H_1}{1+2\pi k_1'} = \frac{H_1}{2\pi + \frac{1}{k_1'}}$$

ist ersichtlich, dass von allem Anfang an $J_1$ den Werthen $J_1'$ weit vorauseilen wird. In mittelstarken Feldern (Feldern von der Intensität etwa dreier Einheiten C. G. S. und darüber) wird der Klammerausdruck im Zähler von 7 $b$) bereits positiv sein, während jener des Nenners noch in negativen Werthen verharrt; es ist ersichtlich, dass daher in Feldern mittlerer Intensität das Verhältniss beider Anziehungen $1+2\pi k$ weit übersteigen kann.

Für grosse Feldintensitäten $H_1$, für welche das zugehörige $J_1$ bereits das Maximalmoment $J_m$ erreicht hat, eignet sich zur Discussion besser Formel 7 *c*).

Denkt man sich in ihr, wie ja sehr näherungsweise gestattet, $J'_1 = \frac{H_1}{2\pi}$ gesetzt und berücksichtigt weiterhin, dass in allen von Quincke angewendeten Feldstärken, die 3730 Einheiten C.G.S. als obere Grenze hatten, der Klammerausdruck im Nenner immer noch negative Werthe hat — allerdings verhältnissmässig sehr kleine[1] — so ist das Verhältniss

$$\frac{p_{\#}}{p_{\perp}} > \frac{4\pi J_m}{H},$$

aber nicht viel diesen Betrag selbst übersteigend. Es ist also das Verhältniss beider Anziehungen für Substanzen variabler Magnetisirungszahl conform den Resultaten Quincke's von der Feldintensität abhängig und „im Allgemeinen umso grösser, je schwächer das Magnetfeld ist".

---

[1] Der grösste negative Werth, den diese Klammer annehmen kann, beträgt gemäss Formel 6 *b*) der Anm. 3) —274·4 Einheiten C. G. S., und dieser würde erst bei einer Feldstärke von 8800 Einheiten C. G. S. erreicht.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Adler Gottlieb

Artikel/Article: Über eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittelst der Waage. 897-913