Über die Resultante einer Covariante und einer Grundform

von

Dr. Gustav Kohn,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. October 1891.)

Aus einem allgemeinen Satze, welchen ich vor Kurzem in diesen Sitzungsberichten (Bd. C, S. 878) gegeben habe,[1] ist zu schliessen, dass die Resultante von zwei Covarianten desselben Systems von binären Grundformen in einer ausgedehnten Reihe von Fällen in Factoren zerlegbar ist, indem sie durch gewisse Potenzen der Discriminanten der einzelnen Grundformen und der Resultanten von je zwei unter ihnen theilbar wird. Es erwächst nun die Aufgabe, die angedeutete Zerlegung der Resultante von zwei Covarianten wirklich zu leisten. Für den speciellen Fall, dass eine der beiden Covarianten mit einer der Grundformen identisch ist, wird diese Aufgabe in der vorliegenden Note auf algebraischem Wege vollständig gelöst.[2]

---

[1] Dieser Satz lautet:

Jede Covariante vom Index i des Systems der binären Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, in der die Coëfficienten dieser Formen, beziehungsweise im Grade $g_1, g_2, \ldots g_\varkappa$ vorkommen, ist durch die

$$[g_1k_1+g_2k_2+\ldots+g_\varkappa k_\varkappa-i]^{\text{te}}$$

Potenz eines Linearfactors theilbar, den die Grundformen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, beziehungsweise zur Potenz $k_1, k_2, \ldots k_\varkappa$ als Factor enthalten.

[2] Der allgemeine Fall, bei dessen Behandlung die Einführung der associirten Wurzeln und deren geometrische Interpretation (vergl. diese Berichte, Bd. C, S. 865 f.) gute Dienste leistet, wird in einer Abhandlung untersucht, deren Erscheinen in den Monatsheften für Math. u. Phys. in Aussicht steht.

Eine Covariante eines simultanen Systems von binären Formen mit allgemeinen Coëfficienten ist bekanntlich durch Angabe ihres ersten Coëfficienten, den man auch als Quelle der Covariante zu bezeichnen pflegt, vollständig definirt. Zwischen den Quellen von Covarianten bestehen genau dieselben Relationen wie zwischen den Covarianten selbst. Es ist daher die Theilbarkeit der Quelle einer Covariante durch die λ^{te} Potenz des ersten Coëfficienten einer der Grundformen nothwendig und hinreichend dafür, dass die Covariante selbst die λ^{te} Potenz dieser Grundform als Factor enthalte.

Wird in jeder der Grundformen der erste Coëfficient der Einheit gleichgesetzt, dann wird durch Angabe ihres ersten Coëfficienten φ eine Covariante nicht mehr vollständig bestimmt sein. Es wird eine „einfachste" Covariante Φ mit dem ersten Coëfficienten φ geben, welche keine der Grundformen als Factor enthält, und aus dieser einfachsten Covariante Φ werden alle übrigen, für welche φ der erste Coëfficient ist, durch Multiplication mit Potenzen der Grundformen hervorgehen. Denn aus der neuen Gestalt φ des ersten Coëfficienten der Covariante kann dessen ursprüngliche Gestalt (dadurch, dass man durch Hinzufügung passender Potenzen der ersten Coëfficienten der Grundformen alle Glieder homogen macht) nur bis auf eventuell multiplicatorisch hinzutretende Potenzen der ersten Coëfficienten der Grundformen restituirt werden.

Wir erinnern noch daran, dass, wenn eine Covariante, die keine der Grundformen als Factor enthält, als Function der Wurzeln der Grundformen betrachtet wird, der höchste Grad, in welchem in ihrem Leitgliede eine Wurzel einer Grundform vorkommt, den Grad der Covariante in den Coëfficienten der betreffenden Grundform angibt.

Ist

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2)\ldots(x_1 - \alpha_{n_1} x_2)$$

eine von den Grundformen, so ergibt sich endlich aus der bekannten Gestalt, welche eine Covariante als Function der Wurzeln der Grundformen besitzt, dass, wenn man in ihrem Ausdrucke überall an Stelle der Wurzel α_1 die Variable x_1 einsetzt und die einzelnen Glieder durch Hinzufügung passender Potenzen von x_2

homogen macht, eine simultane Covariante des Formensystems zum Vorschein kommt, welches von der Form

$$f_1^{(1)}(x_1, x_2) = (x_1 - \alpha_2 x_2)(x_1 - \alpha_3 x_2)\ldots(x_1 - \alpha_{n_1} x_2)$$

in Verbindung mit den neben $f_1(x_1, x_2)$ ursprünglich vorhandenen Grundformen gebildet wird.

Nachdem diese Vorerinnerungen erledigt sind, wenden wir uns dem Gegenstande unserer Untersuchung zu.

Es seien $\varkappa$ beliebige Grundformen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ vorgelegt, welche sämmtlich den ersten Coëfficienten gleich eins haben, und es sei

$$\begin{aligned}
f_1(x, 1) &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n_1})\\
f_2(x, 1) &= (x-\alpha_{n_1+1})(x-\alpha_{n_1+2})\ldots(x-\alpha_{n_1+n_2})\\
&\\
f_\varkappa(x, 1) &= (x-\alpha_{n-n_\varkappa+1})(x-\alpha_{n-n_\varkappa+2})\ldots(x-\alpha_n)
\end{aligned}$$

Es sei ferner Π eine beliebige simultane Covariante dieser Grundformen, vom Grade g_1 in den Coëfficienten von f_1, vom Grade g_2 in den Coëfficienten von f_2, ..., vom Grade $g_\varkappa$ in den Coëfficienten von $f_\varkappa$ und man habe

$$\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; x, 1) = (\alpha_1^{g_1}\varphi_1 + \psi_1)x^\mu + \ldots \tag{1}$$

eine Gleichung, durch welche angedeutet werden soll, dass der erste Coëfficient der als Function der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n$ dargestellten Covariante Π die Form besitzt

$$\alpha_1^{g_1}\varphi_1 + \psi_1,$$

wo die Function φ_1 die Wurzel α_1 von f_1 gar nicht mehr enthält, während diese Wurzel in der Function ψ_1 in keinem höheren als dem $(g_1 - 1)^{\text{ten}}$ Grade vorkommt.

Die Resultante R_{Π, f_1} der Covariante Π und der Grundform f_1, welche wir untersuchen wollen, ist gegeben durch

$$R_{\Pi, f_1} = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n; \alpha_1, 1)\,\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \alpha_2, 1) \\ \ldots \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \alpha_{n_1}, 1).$$

Setzt man in dem Factor $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n; \alpha_1, 1)$ an Stelle von α_1 überall x ein, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ersetzt man in der Covariante $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; x, 1)$ die Wurzel α_1 durch x, so erhält man der oben gemachten Bemerkung zufolge in nicht homogener Schreibweise eine Covariante des Formensystems, welches aus der Form $f_1^{(1)}$

$$f_1^{(1)}(x, 1) = (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n_1})$$

und den Formen $f_2, f_3, \ldots f_\varkappa$ sich zusammensetzt.

Der erste Coëfficient der so erlangten Covariante

$$\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n; x, 1)$$

ist sofort anzugeben[1]: er ist gleich φ_1.

Dies folgt direct aus der Gleichung (1), da α_1 in keinem Gliede von $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; x, 1)$ zu einer höheren Potenz vorkommt als zur $g_1$ten und somit nur aus dem ersten Gliede von $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; x, 1)$ durch Substitution von x für α_1 ein Glied mit dem Factor $x^{\mu + g_1}$ hervorgeht.

Nun braucht $\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n; x, 1)$ keineswegs die „einfachste" Covariante des Formensystems $f_1^{(1)}, f_2, f_3, \ldots f_\varkappa$ zu sein, welche φ_1 als ersten Coëfficienten besitzt. Diese einfachste Covariante mag mit Φ_1 bezeichnet werden.

Wir wollen jetzt die Voraussetzung machen, dass die Function φ_1 der Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ eine beliebige Wurzel von $f_1^{(1)}$ zum Grade g_{11} und eine beliebige Wurzel von f_r $(r = 2, 3, \ldots \varkappa)$ zum Grade g_{1r} enthalte. Dann wird die einfachste simultane Covariante Φ_1 des Formensystems $f_1^{(1)}, f_2, f_3, \ldots f_\varkappa$, welche φ_1 als ersten Coëfficienten besitzt, die Coëfficienten von $f_1^{(1)}$ zum Grade g_{11} und jene von f_r $(r = 2, 3, \ldots \varkappa)$ zum Grade g_{1r} enthalten.

Von der Covariante Φ_1 kann sich jede andere, welche ebenfalls φ_1 zum ersten Coëfficienten hat, nur durch multiplicatorisch hinzutretende Potenzen der Grundformen unterscheiden.

Aus diesem Grunde wird:

$$\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n; x, 1) =$$
$$= \Phi_1(x, 1) \,.\, [f_1^{(1)}(x, 1)]^{\lambda_{11}} \,.\, [f_2(x, 1)]^{\lambda_{12}} \,.\, [f_3(x, 1)]^{\lambda_{13}} \ldots [f_\varkappa(x, 1)]^{\lambda_{1\varkappa}}.$$

Die Exponenten $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \quad \lambda_{1\varkappa}$ bestimmen sich durch Vergleichung der Gradzahlen, in welchen die Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ auf beiden Seiten dieser Gleichung auftreten.

---

[1] Werden die ersten Coëfficienten der Grundformen f_1 (und $f_1^{(1)}$), $f_2, \ldots, f_\varkappa$ nicht gleich eins, sondern bez. gleich $a_0, b_0, \ldots, k_0$ vorausgesetzt, so wird der erste Coëfficient von $\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n; x, 1)$ gleich $a_0^{g_1} b_0^{g_2} \ldots k_0^{g_\varkappa} \varphi_1$, woraus die weiter unten gegebene Factorenzerlegung dieser Covariante des Formensystems $f_1^{(1)}, f_2, \ldots, f_\varkappa$ direct folgt.

Linker Hand kommt in dieser Gleichung jede der Lösungen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n_1}$ von $f_1^{(1)}$ zum $g_1$ten Grade vor, rechter Hand zum Grade $g_{11}+\lambda_{11}$; es folgt also:

$$\lambda_{11} = g_1 - g_{11}.$$

Linker Hand kommt jede Lösung von f_r $(r = 2, 3, \ldots \varkappa)$ zum $g_r$ten Grade vor, rechter Hand zum Grade $g_{1r}+\lambda_{1r}$; es folgt also:

$$\lambda_{1r} = g_r - g_{1r}. \qquad (r = 2, 3, \ldots \varkappa)$$

Substituirt man in der obigen Gleichung α_1 für x, so geht dieselbe über in:

$$\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n; \alpha_1, 1) =$$
$$= \Phi_1(\alpha_1, 1)[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_{n_1})]^{g_1 - g_{11}}.[f_2(\alpha_1, 1)].^{g_2 - g_{12}}$$
$$.[f_3(\alpha_1, 1)]^{g_3 - g_{13}} \ldots [f_\varkappa(\alpha_1, 1)].^{g_\varkappa - g_{1\varkappa}}$$

Denkt man sich auch alle analogen Gleichungen gebildet, welche entstehen, wenn man α_1 mit irgend einer der übrigen Wurzeln von f_1 vertauscht, und multiplicirt alle diese Gleichungen mit einander, so kommt:

$$R_{\Pi, f_1} = \Phi_1(\alpha_1, 1).\Phi_2(\alpha_2, 1)\ldots\Phi_{n_1}(\alpha_{n_1}, 1).$$
$$.\Delta_{f_1}^{g_1 - g_{11}} R_{f_1, f_2}^{g_2 - g_{12}} R_{f_1, f_3}^{g_3 - g_{13}} \ldots R_{f_1, f_\varkappa}^{g_\varkappa - g_{1\varkappa}},$$

wo Δ_{f_1} die Discriminante von f_1 und allgemein R_{f_1, f_r} die Resultante von f_1 und f_r bedeutet. Hiemit ist die angestrebte Factorenzerlegung der Resultante R_{Π, f_1} geleistet.

Für den besonderen Fall, dass der Grad der Covariante Π in den Coëfficienten der Grundform f_1 mit dem Gewicht des ersten Coëfficienten von Π übereinstimmt (was soviel heisst, als dass die Function φ_1 unserer Betrachtung sich auf eine Constante c reducirt), ist die Factorenzerlegung der Resultante von Π und f_1 von mir schon in einer früheren Arbeit durchgeführt worden (vergl. a. a. O. S. 880).

In diesem Falle ist $g_{11} = g_{12} = g_{13} = \ldots = g_{1\varkappa} = 0$, so dass man hat

$$R_{\Pi, f_1} = c^{n_1}\Delta_{f_1}^{g_1}.R_{\Pi, f_2}^{g_2}.R_{\Pi, f_3}^{g_3}\ldots R_{\Pi, f_\varkappa}^{g_\varkappa}.$$