Über arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Im §. 11 des vierten Haupttheiles seiner „Théorie des nombres“ hat Legendre eine allgemeine Formel zur Bestimmung der Anzahl jener Glieder einer arithmetischen Progression, in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, angegeben, die durch eine Reihe von gegebenen Primzahlen nicht theilbar sind, und mit Hilfe derselben mehrere interessante zahlentheoretische Sätze über arithmetische Progressionen aufgestellt, von denen allerdings die Behauptung, dass alle in einer vorgegebenen Zahl a nicht enthaltenen Primzahlen sich auf die $\varphi(a)$ verschiedenen Progressionen mit der Differenz a, deren Anfangsglieder die zu a theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \dots a$ sind, gleichmässig vertheilen, sich als nicht stichhältig erweist, was übrigens auch schon daraus hervorgeht, dass, wie Herr Tchebychef im Jahre 1878 bewiesen hat und eine Durchmusterung der Primzahltafeln bestätigt, die Primzahlen von der Form $4s+1$ bedeutend zahlreicher sind, als diejenigen von der Form $4s+3$. Die angezogene Legendre'sche Formel, welche in der letzten Zeit ziemlich in Vergessenheit gerathen zu sein scheint, ist nur ein Glied in einer langen Kette von wichtigen zahlentheoretischen Sätzen über arithmetische Progressionen, von denen mehrere in der vorliegenden Mittheilung abgeleitet werden sollen.

§. 1. Da sämmtliche Wurzeln der Congruenz ersten Grades

$$ax \equiv b \pmod{\varkappa},$$

wenn a und $\varkappa$ theilerfremd sind, durch die Linearform $\alpha_\varkappa + mk$ gegeben werden, wo $\alpha_\varkappa$ die unterhalb $\varkappa$ liegende positive Wurzel derselben vorstellt, so sind die durch $\varkappa$ theilbaren Glieder der arithmetischen Reihe

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots.\ na-b \quad (a>0;\ a>b), \tag{1}$$

in welcher Differenz und Anfangsglied, also auch a und b theilerfremd sind,

$$\alpha_\varkappa a-b,\ (\alpha_\varkappa+\varkappa)a-b,\ (\alpha_\varkappa+2\varkappa)a-b,$$

$$\left(\alpha_\varkappa+\left\{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]-1\right\}\right)a-b, \text{ eventuell } \left(\left(\alpha_\varkappa+\left[\frac{n}{\varkappa}\right]\varkappa\right)a-b\right),$$

wo das zuletzt erwähnte Glied offenbar nur dann auftreten kann, wenn der bei der Division von n durch $\varkappa$ verbleibende Rest $\varepsilon_\varkappa$ nicht kleiner als $\alpha_\varkappa$ ist. Aus der Gleichung

$$n = \left[\frac{n}{\varkappa}\right]\varkappa+\varepsilon_\varkappa$$

folgt die Relation

$$\left[\frac{n}{\varkappa}\right]-\left[\frac{n-\alpha_\varkappa}{\varkappa}\right] = \begin{cases}1\\0\end{cases}$$

je nachdem $\alpha_\varkappa < \varepsilon_\varkappa$ oder $\alpha_\varkappa \geqq \varepsilon_\varkappa$ ist, und daher ist allgemein das grösste der durch $\varkappa$ theilbaren Glieder der vorgelegten Progression

$$\left(\alpha_\varkappa+\left[\frac{n_\varkappa-\alpha_\varkappa}{\varkappa}\right]\varkappa\right)a-b,$$

so dass also ihre Anzahl gleich

$$\left[\frac{n-\alpha_\varkappa}{\varkappa}\right]+1 = \left[\frac{n+(\varkappa-\alpha_\varkappa)}{\varkappa}\right]$$

ist. Nun ist aber $\alpha'_\varkappa = \varkappa-\alpha_\varkappa$ die kleinste positive Wurzel der Congruenz

$$ax \equiv -b \pmod{\varkappa}$$

und desshalb hat man das folgende von Legendre a. a. O. gefundene Resultat:

Von den ersten n aufeinanderfolgenden Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b),$$

deren Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, enthalten $\left[\frac{n+\alpha'_\varkappa}{\varkappa}\right]$ die zu a theilerfremde ganze Zahl $\varkappa$ als Factor, wo $\alpha'_\varkappa$ die kleinste positive Wurzel der Congruenz

$$ax+b \equiv 0 \pmod{\varkappa}$$

vorstellt.

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei für alle in Betracht kommenden ganzzahligen Werthe von x existirende, im Übrigen ganz willkürliche Functionen und

$$h(x) = \sum_d f\left(\frac{x}{d}\right) g(d), \tag{2}$$

wo die Summation bezüglich d über alle Theiler der ganzen Zahl x auszudehnen ist. Es soll nun zunächst die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(\lambda a - b)$$

untersucht werden. Nach den eben gemachten Erörterungen ist derjenige Theil derselben, welcher sich auf irgend einen bestimmten Theiler y eines Gliedes der arithmetischen Progression 1) bezieht

$$g(y)\left\{f\left(\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)+f\left(a+\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)+f\left(2a+\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+f\left(\left[\frac{n-\alpha_y}{y}\right]a+\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)=\right.$$
$$=g(y)\left\{f\left(a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)+f\left(2a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)+f\left(3a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)+\right.$$
$$\left.+\ldots+f\left(\left[\frac{n+\alpha'_y}{y}\right]a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)\right.$$

und demnach hat man, da nur zu a theilerfremde Zahlen, diese aber sämmtlich als Theiler der Glieder der arithmetischen Reihe auftreten können, die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(\lambda a-b)=\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) g(x), \qquad 3)$$

wo

$$F\left(\left[\frac{n+a'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} f\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]} f\left(\mu a+\frac{a\alpha_x-b}{x}\right)$$

ist.

Da die Function $h(x)$ in Bezug auf die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ vollkommen symmetrisch ist, so folgt aus der eben aufgestellten Gleichung die bemerkenswerthe Relation

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) g(x)=\sum_{x=1}^{x=na-b} G\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x), \qquad 4)$$

wo

$$G\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} g\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]} g\left(\mu a+\frac{a\alpha_x-b}{x}\right)$$

ist.

Ist $a=2$, $b=1$, handelt es sich also um die Progression der ungeraden Zahlen, so ist x ungerade und

$$\alpha'_x=\frac{x-1}{2}, \qquad \alpha_x=\frac{x+1}{2};$$

die Gleichungen 3) und 4) gehen demnach in diesem Falle in die folgenden über:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(2\lambda-1) = \sum_{x=1}^{x=n} F\left(\left[\frac{2n-1}{4x-2}+\frac{1}{2}\right]\right) g(2x-1)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} F\left(\left[\frac{2n-1}{4x-2}+\frac{1}{2}\right]\right) g(2x-1) = \sum_{x=1}^{x=n} G\left(\left[\frac{2n-1}{4x-2}+\frac{1}{2}\right]\right) f(2x-1).$$

Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass jedesmal, wenn x ein Theiler von n ist, $\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right] = \frac{n}{x}$ wird.

Es soll nun eine Reihe von besonders interessanten speciellen Fällen dieser allgemeinen Formeln aufgestellt werden, die zu bemerkenswerthen Theoremen führen.

§. 2. Die Function $f(x)$ sei so beschaffen, dass für alle ganzzahligen Werthepaare x, y

$$f(xy) = f(x) f(y)$$

ist, und es habe $g(x)$ den Werth 0, wenn x keine r^{te} Potenz ist oder einen von $p_1, p_2, \ldots, p_s$ verschiedenen Primfactor enthält, in allen anderen Fällen aber den Werth $f(x) f_1(x)$. Alsdann ist

$$h(x) = f(x) \left(\sum_{d_r} f_1\left(\frac{x}{d_r}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s} \tag{5}$$

wo die Summation bezüglich d_r über alle Theiler der ganzen Zahl x zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine r^{te} Potenz ist, und mit $\left(\sum_x f_2(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$ die Summe der Werthe bezeichnet wird, welche die Function $f_2(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument nur jene von den durch x bezeichneten ganzen Zahlen genommen werden, die lediglich aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ zusammengesetzt sind. Für die durch Gleichung 5) definirte specielle Function $h(x)$ besteht nach den obigen Entwicklungen die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(\lambda a - b) =$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right) \left(\frac{a^2}{x^r}\right) f(x^r) f_1(x^r)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s} \tag{6}$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} H\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

wo

$$H\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}{}' f(a(\lambda x - \alpha'_x) - b) f_1\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x + b}{x}\right)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]}{}' f(a(\lambda x + \alpha_x) - b) f_1\left(\lambda a + \frac{a\alpha_x - b}{x}\right)$$

ist und die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von λ zu nehmen sind, für welche die zugehörigen Argumente der Function $f_1(y)$ r^{te} Potenzen sind.

Es mögen nun einige von den zahlreichen interessanten Relationen, welche in 6) enthalten sind, näher erörtert werden.

α) Ist

$$r = 1, f_1(x) = \mu(x),$$

so wird

$$\left(\sum_{d_1} f_1\left(\frac{x}{d_1}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s} = \prod_{\lambda} \{1 + \mu^{\varkappa_\lambda}(p_\lambda)\},$$

wo das Product bezüglich λ über alle Primtheiler von x auszudehnen ist, und $\varkappa_\lambda$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $\lambda \leqq s$ oder $\lambda > s$ ist. Diese Gleichung zeigt, dass $h(x)$ den Werth $f(x)$ oder 0 besitzt, je nachdem x zu dem Producte $p_1, p_2, \ldots, p_s$, welches zur Differenz a der arithmetischen Progression 1) relativ prim sein soll, theilerfremd ist oder nicht, und daher stellt in diesem Falle der auf der linken Seite der Gleichung 6) stehende Ausdruck die Summe derjenigen Werthe vor, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Glieder der erwähnten arithmetischen Progression durchläuft, welche zu diesem Producte theilerfremd sind. Man hat demnach für diese Summe die zwei Ausdrücke

$$\frac{\left(\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\,\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}}{\left(\sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}} \qquad 7)$$

wo

$$\mathrm{M}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right) f(a(\lambda x-\alpha'_x)-b) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a + \frac{a\alpha_x-b}{x}\right) f(a(\lambda x+\alpha_x)-b)$$

ist.

Ist

$$s = \Theta(na-b),$$

d. i. stellen die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ alle Primzahlen des Intervalles $1\ldots na-b$ vor, so ist nur dann ein zu dem Producte derselben theilerfremdes Glied in der arithmetischen Progression 1) vorhanden, wenn $a-b=1$ ist, und demnach sieht man, dass die Summen

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\,\mu(x),\quad \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

den Werth $f(1)$ oder 0 besitzen, je nachdem $a-b=1$ oder $a-b>1$ ist. Als ganz specieller Fall ist in diesem Satze die bekannte Formel

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \mu(x) = 1$$

enthalten.

Nimmt man

$$s = \Theta(\sqrt{na-b}),$$

so sind nur jene Glieder der arithmetischen Progression 1) zu dem Producte $p_1\, p_2 \ldots p_s$ theilerfremd, welche Primzahlen des Intervalles $\sqrt{na-b} \ldots na-b$ sind, und eventuell noch die Zahl 1, falls $a-b=1$ ist. Die Ausdrücke 7) stellen daher in diesem Falle die Summe der Werthe vor, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Glieder der arithmetischen Progression 1) durchläuft, welche Primzahlen des eben genannten Intervalles sind, eventuell noch vermehrt um $f(1)$.

Wird in den Ausdrücken 7) speciell

$$f(x) = x^{\varkappa},\ x^{\varkappa}\lambda(x)$$

gesetzt, so entstehen die Gleichungen

$$\varphi^{(\varkappa)}_{a,b}(n) = \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} x^{\varkappa} S'_{\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

$$A^{(\varkappa)}_{a,b}(n) = \left(\sum_{y=1}^{x=na-b} x^{\varkappa}\Lambda_{\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_c}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu^2(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\mathrm{M}}^{(\varkappa)}_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\,x^{\varkappa}\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

wo

$$S'_{\varkappa}\left(\left[\frac{n+a'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^{\varkappa}$$

$$\mathrm{M}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)(\{\lambda x-\alpha'_x\}\,a-b)^{\varkappa}$$

$$\Lambda_{\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^{\varkappa}$$

$$M_{\varkappa}^{(\rho)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu_{\varkappa}\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^{\rho} \quad (\varkappa \geqq 2)$$

ist und

$\varphi_{a,b}^{(\varkappa)}(n)$ die Summe der $\varkappa$ten Potenzen derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1) vorstellt, welche durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ theilbar sind,

$A_{a,b}^{(\varkappa)}(n)$ aber den Überschuss der Summe derjenigen von diesen Potenzen, deren Basen aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, über die Summe der übrigen.

Setzt man in der ersten von diesen speciellen Formeln $\varkappa = 0$, so erhält man für die Anzahl der zum Producte $p_1 p_2 \ldots p$ theilerfremden Glieder der arithmetischen Progression 1) einerseits den im Anfange erwähnten von Legendre ermittelten Ausdruck

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b}\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

anderseits die neue Darstellung

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b} M_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}.$$

Nimmt man in den obigen Entwicklungen für b zwei verschiedene von den zu a theilerfremden $\varphi(a)$ Zahlen des Intervalles $1 \ldots a-1$ b_1 und $b_2 < b_1$, so können auch die einander entsprechenden zugehörigen grössten ganzen Zahlen $\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]$ sich höchstens um eine Einheit unterscheiden, und demnach kann auch die Differenz der bezüglichen eben ermittelten Summen 7) nicht mehr betragen als

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b_2} \left|f\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]^{+}\right) ax-(a\alpha'_x+b)\right)\right|\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu^2(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

wo mit $\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]^{+}$ die grössere der beiden einander entsprechenden ganzen Zahlen bezeichnet wird. Man sieht demnach, dass die Anzahlen derjenigen Glieder von zwei verschiedenen arithmetischen Progressionen mit der Differenz a, welche zu dem Producte $p_1, p_2, \ldots, p_s$ theilerfremd sind, sich um nicht mehr als

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b}\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu^2(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

d. i. um nicht mehr als die Anzahl aller zu a theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots na-b_2$, welche durch kein Quadrat theilbar und nur aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ zusammengesetzt sind, unterscheiden können. Von dieser Zahl kann man offenbar im Allgemeinen nur behaupten, dass sie sicher nicht grösser als 2^s-1 ist, keineswegs aber, wie Legendre a. a. O. thut, dass sie s nicht überschreiten kann. Stellen nun die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ alle $\sqrt{na}$ nicht übertreffenden Primzahlen dar, so ist

$$s = \Theta(\sqrt{na})$$

und es ergibt sich demnach für die Differenz der Anzahlen ϑ_1 und ϑ_2 der in zwei verschiedenen arithmetischen Progressionen mit der Differenz a enthaltenen zwischen $\sqrt{na}$ und $na-b$ befindlichen Primzahlen die Beziehung

$$|\vartheta_1-\vartheta_2| \leqq 2^{\vartheta(\sqrt{na})}-1.$$

Da sich alle ungeraden Primzahlen auf die erwähnten $\varphi(a)$ Progressionen vertheilen, so ist demnach

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta(na-b)-\vartheta(\sqrt{na})}{\varphi(a)} + \varepsilon(2^{\vartheta(\sqrt{na})}-1) \qquad (|\varepsilon| \leqq 1).$$

Bedenkt man nun, dass asymptotisch nach Tchebychef

$$\vartheta(m) = \frac{m}{\log m-1}$$

ist, so erkennt man, dass aus dieser Relation keinesfalls die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{\vartheta_1 \varphi(a)}{\vartheta(na-b)-\vartheta(\sqrt{na})} = 1$$

gefolgert werden kann, was doch der Fall sein müsste, wenn die im Anfange erwähnte Behauptung Legendre's richtig wäre.

β) Setzt man ferner in 5)

$$r = 1, \quad s = \Theta(na-b), \quad f_1(x) = \alpha(x),$$

wo

$$\alpha(1) = 0, \qquad \alpha(x) = 0 \tag{8}$$

ist, wenn x eine Primzahl in einer höheren als der zweiten, oder mehr als eine Primzahl in einer höheren als der ersten Potenz erhält,

$$\alpha(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)} f_2(p_1) \tag{9}$$

wird, wenn x den Primfactor p_1 in der zweiten, die übrigen $\tilde{\omega}(x)-1$ aber nur in ersten Potenz enthält, endlich $\alpha(x)$ durch die Gleichung

$$\alpha(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \sum f_2(p_\lambda) \tag{10}$$

definirt ist, wo die Summation über alle Primfactoren der ganzen Zahl x auszudehnen ist, wenn x durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, so wird die Function $h(x)$ gleich $f(x)f_2(x)$, wenn x eine Primzahl ist, während sie in allen anderen Fällen den Werth 0 besitzt. Die auf der linken Seite der Gleichung 6) stehende Summe ist demnach bei dieser Specialisirung die Summe $F_{a,b}(n)$ der Werthe, welche das Product $f(x)f_2(x)$ annimmt, wenn sein Argument alle Glieder der arithmetischen Progression durchläuft, welche Primzahlen sind, und daher hat man die Formel

$$F_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\,\alpha(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} A\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\left(f(a(\lambda x-\alpha'_x)-b\right)$$

ist. Aus derselben ergibt sich für die Anzahl $\Theta_{a,b}(n)$ der unter den Gliedern der arithmetischen Progression 1) enthaltenen Primzahlen der bemerkenswerthe Ausdruck

$$\Theta_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\,\alpha_0(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} A_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha_0\left(\left[\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right]\right) f(\alpha(\lambda x - \alpha'_x) - b)$$

ist und $\alpha_0(x)$ den Werth der Function $\alpha(x)$ für $f_2(x) = \frac{1}{f(x)}$ bezeichnet. Ein specieller Fall dieser Formel ist die Relation

$$\Theta_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_1(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} A_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha_1\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

ist und für die Function $\alpha_1(x)$ an die Stelle der Gleichungen 8) 9), 10) die folgenden treten

$$\alpha_1(1) = 0, \quad \alpha_1(x) = 0$$
$$\alpha_1(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)}$$
$$\alpha_1(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1}.$$

Dieselbe geht einerseits für $a = 1$, $b = 0$ in die bekannte Bugajef'sche Formel für die Anzahl aller n nicht überschreitenden Primzahlen

$$\Theta(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \alpha_1(x)$$

über, anderseits liefert sie die nur die Hälfte der für die eben angeführte nöthigen Operationen erfordernde neue

$$\Theta(n) = 1 + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{4x-2} + \frac{1}{2}\right] \alpha_1(2x-1) \qquad (n \text{ ungerade}).$$

Unter diesen $\Theta(n)$ Primzahlen haben, wie man durch Specialisirung der eben aufgestellten allgemeinen Formeln erhält,

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+3}{4}\right]} \left\{ \left[\frac{\left[\frac{n+3}{4}\right]+x-1}{4x-1}\right] {}_1(4x-1) + \left[\frac{\left[\frac{n-1}{4}\right]+3x-2}{4x-3}\right] \alpha_1(4x-3) \right\}$$

die Form $4s+1$ und

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{4}\right]} \left\{ \left[\frac{\left[\frac{n+1}{4}\right]+x-1}{4x-3}\right] \alpha_1(4x-3) + \left[\frac{\left[\frac{n+1}{4}\right]+3x-1}{4x-1}\right] \alpha_1(4x-1) \right\}$$

die Form $4s-1$.

Die Differenz aus der Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), welche Primzahlen sind, und der Anzahl aller n nicht überschreitenden Primzahlen beträgt nach den obigen Entwicklungen

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left\{ \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right] \left(\frac{a^2}{x}\right) - \left[\frac{n}{x}\right] \right\} \alpha_1(x).$$

Könnte man zeigen, dass diese Summe nicht negativ ist, oder wenigstens, dass sie dem absoluten Betrage nach $\varepsilon\Theta(n)$ ($|\varepsilon| < 1$) ist, so wäre damit ein neuer Beweis des zuerst von Dirichlet strenge abgeleiteten Satzes, dass in einer unbegrenzten arithmetischen Progression, deren Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, unendlich viele Primzahlen vorkommen, geliefert. Ein solcher ist mir aber auf diesem Wege bisher nicht gelungen.

Definirt man die Function $\alpha_2(x)$ durch die folgenden, den Formeln 8), 9), 10) entsprechenden Relationen

$$\alpha_2(1) = 0, \qquad \alpha_2(x) = 0$$
$$\alpha_2(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)} \left(\frac{4\Delta}{p_1}\right)$$
$$\alpha_2(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \sum \left(\frac{4\Delta}{p_\lambda}\right)$$

so erhält man für den Überschuss der Summe derjenigen Werthe, welche die Function $f(x)$ erhält, wenn ihr Argument jene unter den Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots,\ na-b \quad (a>0;\ a>b)$$

vorkommenden ungeraden Primzahlen durchläuft, von denen die vorgegebene Zahl Δ quadratischer Rest ist, über die Summe der den übrigen zu 2Δ theilerfremden, in derselben auftretenden Primzahlen entsprechenden Werthe von $f(x)$ die zwei Ausdrücke

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\,\alpha_2(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} A_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha_2\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right) f((\lambda x-\alpha'_x)\,a-b)$$

ist.

Man sieht also namentlich, dass es unter den $\Theta_{a,b}(n)$ in der arithmetischen Progression 1) vorkommenden ungeraden Primzahlen um

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_2(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} A'_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

mehr solche gibt, von denen 4Δ quadratischer Rest ist, also solche, von denen es Nichtrest ist, wo

$$A_2'\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \alpha_2\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)$$

ist.

Es übertrifft demnach die Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), welche Primzahlen von der Form $4s+1$ sind, die Anzahl derjenigen, welche Primzahlen von der Form $4s+3$ sind, um

$$\sum_{x=1}^{x=na-b}\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_3(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} A_3\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

und die Anzahl derjenigen, welche Primzahlen von einer der Formen $8s+1$, $8s-1$ sind, die Anzahl jener, welche Primzahlen von einer der beiden Formen $8s+3$, $8s-3$ sind um

$$\sum_{x=1}^{x=na-b}\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_4(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} A_4\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_3\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \alpha_3\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)$$

$$A_4\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \alpha_4\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)$$

ist und für die Functionen $\alpha_3(x)$ und $\alpha_4(x)$ die Relationen 8), 9), 10) in die folgenden speciellen übergehen:

$$\alpha_3(1) = 0, \qquad \alpha_3(x) = 0$$

$$\alpha_3(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+\frac{p_1-1}{2}}\left(\frac{4}{p_1}\right)$$

$$\alpha_1(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1}\sum\left(\frac{4}{p_\lambda}\right)(-1)^{\frac{p_\lambda-1}{2}}$$

$$\alpha_4(1) = 0, \quad \alpha_4(x) = 0$$

$$\alpha_4(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+\left[\frac{p_1+1}{4}\right]}\left(\frac{4}{p_1}\right)$$

$$\alpha_4(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1}\sum_{\lambda}\left(\frac{4}{p_\lambda}\right)(-1)^{\left[\frac{p_\lambda+1}{4}\right]}$$

γ) Wird in 5)

$$s = \Theta(na-b); \quad f_1(x) = \mu(\sqrt[r]{x}), \text{ beziehungsweise } \lambda_\rho(\sqrt[r]{x})$$

gesetzt, so hat $h(x)$ im ersten Falle den Werth 0 oder $f(x)$, je nachdem x durch eine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht, im zweiten aber $f(x)$ oder 0, je nachdem sämmtliche Exponenten der die ganze Zahl x zusammensetzenden Primzahlpotenzen nach dem Modul $r\rho$ einer unterhalb r befindlichen Zahl congruent sind oder nicht. Es stellt demnach die auf der linken Seite der Gleichung 6) stehende Summe im ersten Falle die Summe $\overline{F}_{a,b}(n)$ der Werthe vor, welche die Function $f(x)$ annimmt; wenn für ihr Argument alle Glieder der arithmetischen Progression 1) gesetzt werden, welche durch keine r^{te} Potenz (ausser 1), theilbar sind, im zweiten Falle aber die Summe $F^{(1)}_{a,b}(n)$ jener Werthe von $f(x)$, welche diese Function annimmt, wenn ihr Argument diejenigen Glieder der erwähnten Progression durchläuft, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen kein Exponent nach dem Modul $r\rho$ grösser als $r-1$ ist. Aus der Gleichung 6) folgen daher die Relationen

$$\overline{F}_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x^r}\right) f(x^r)\,\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$F^{(1)}_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x^r}\right) f(x^r)\,\lambda_\rho(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(1)}_\rho\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$M^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}{}' f(a(\lambda x-\alpha'_x)-b)\,\mu\left(\sqrt[r]{\lambda a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

$$\Lambda^{(1)}_\rho\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}{}' f(a(\mu x-\alpha'_x)-b)\,\lambda_\rho\left(\sqrt[r]{\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

ist.

Durch zweckentsprechende Specialisirung der Function $f(x)$ findet man, dass die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), welche durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, gleich

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} x^{r\varkappa} S'_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x^r}\right)\mu(x)=\sum_{x=1}^{x=na-b} M^{(r)}_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

ist, während der Überschuss der Summe derjenigen unter ihnen, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, über die Summe der übrigen

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)x^{r\varkappa}\left(\frac{a^2}{x^r}\right)\lambda^r(x)\,\mu(x)=\sum_{x=1}^{x=na-b}\overline{M}^{(r)}_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

beträgt, wo

$$M^{(r)}_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}{}' \mu\left(\sqrt{\lambda a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)(\{\lambda x-\alpha'_x\}\,a-b)^\varkappa$$

$$\overline{M}^{(r)}_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=$$

$$=\sum_{\mu_1=1}^{\mu_1=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}{}' \lambda(a(\mu_1 x-\alpha'_x)-b)\,\mu\left(\sqrt[r]{\mu_1 a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)(a(\mu_1 x-\alpha'_x)-b)^\varkappa$$

ist.

Ebenso ergibt sich, dass die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$, einer unterhalb r liegenden ganzen Zahl congruent sind, gleich ist:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} x^{r\varkappa}\, S'_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda_\rho(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(1)}_{\rho,\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

sowie, dass die Summe derjenigen unter ihnen, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, die Summe der übrigen um

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right) x^{r\varkappa}\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda^r(x)\lambda_\rho(x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\Lambda}^{(1)}_{\rho,\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

übertrifft, wo

$$\Lambda^{(1)}_{\rho,\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda_\rho\left(\sqrt{\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)\{(\mu x-\alpha'_x)a-b\}^\varkappa$$

$$\overline{\Lambda}^{(1)}_{\rho,\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda((\mu x-\alpha'_x)a-b)\lambda_\rho\left(\sqrt[r]{\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

$$.\{(\mu x-\alpha'_x)a-b\}^\varkappa$$

ist.

Von den zahlreichen Theoremen, welche aus den eben entwickelten Formeln abgeleitet werden können, mögen hier die folgenden besonders angeführt werden:

Unter den ersten n Gliedern der unbegrenzten arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, befinden sich $\frac{a^r n}{\zeta(r)\varphi_r(a)} + A_1 n^{\frac{1}{r}}$ durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbare, wo A_1 eine für alle Werthe von n endliche Zahl bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffenes Glied der unbegrenzten arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{a^r}{\zeta(r)\varphi_r(a)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich gewähltes Glied der unbegrenzten arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine $(2r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{2\Gamma(2r+1)a^{2r}}{(2\pi)^{2r}B_r\varphi_{2r}(a)}$.

Beiläufig der $\frac{6a^2}{\pi^2\varphi_2(a)}^{\text{te}}$ Theil von allen Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, ist aus lauter verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt.

Ungefähr der $\frac{90a^4}{\pi^4\varphi_4(a)}^{\text{te}}$ Theil von allen Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, enthält keinen biquadratischen Theiler (ausser 1).

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ganze Zahl zur ganzen Zahl a theilerfremd und durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, ist $\frac{\varphi(a)}{a}$-mal so gross, als die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich herausgegriffenes Glied der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b);$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass irgend ein beliebig gewähltes Glied einer der beiden arithmetischen Progressionen

$$a-b,\ \ 2a_1-b,\ \ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b)$$
$$a_1-b_1,\ 2a_1-b_1,\ 3a_1-b_1, \qquad (a_1>0;\ a_1>b_1),$$

in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, verhalten sich wie $\frac{a^r}{\varphi_r(a)}$ zu $\frac{a_1^r}{\varphi_r(a_1)}$

Es ist um so wahrscheinlicher, dass ein beliebig herausgegriffenes Glied einer arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, je kleiner die Anzahl der Systeme von r die Differenz nicht übertreffenden ganzen Zahlen ist, welche ein zu derselben theilerfremdes Zahlensystem bilden, und je grösser die Differenz ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung eines beliebigen Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, beträgt im Mittel $\frac{a^{r(\rho-1)}\varphi_{r\rho}(a)\,\zeta(r\rho)}{\varphi_r(a)\,\zeta(r)}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung eines beliebigen Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $2r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, beträgt im Mittel $\frac{(2\pi)^{2r\rho} B_{r\rho}\, a^{r(2\rho-1)} \varphi_{2r\rho}(a)}{2\Gamma(2r\rho+1)\varphi_r(a)\zeta(r)}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung eines willkürlich herausgegriffenen Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $2r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, beträgt im Mittel $\frac{(2\pi)^{2r(\rho-1)}\Gamma(2r+1) B_{r\rho}\, a^{2r(\rho-1)} \varphi_{2r\rho}(a)}{\Gamma(2r\rho+1) B_r \varphi_{2r}(a)}$

Unter den Gliedern einer arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz gibt es um so mehr solche Zahlen, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, je grösser die Differenz und die Anzahl der Systeme von $r\rho$ dieselbe nicht übertreffenden ganzen Zahlen und je kleiner die Anzahl der Systeme von r solchen unter ihnen ist, welche ein zur Differenz theilerfremdes System von $r\rho$, beziehungsweise r ganzen Zahlen bilden.

Unter den ersten n Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz gibt es

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right] \left(\frac{a^2}{x}\right) \lambda_\rho(x)$$

ρ^{te} Potenzen.

δ) Es sei ferner

$$r=1, \quad s=\Theta(na-b), \quad f(x)=x^\varkappa$$

und der Reihe nach

$$f_1(x)=\frac{\mu(x)}{x^\varkappa},\ \left(\frac{D}{x}\right)x^{\mu-\varkappa},\ \frac{\mu(x)}{x^\varkappa}\left(\frac{\Delta}{x}\right),$$

wo Δ eine Fundamentaldriscriminante ist, dann wird beziehungsweise

$$h(x) = \varphi_\varkappa(x),\ \varphi_{\mu,\varkappa}(D, x),\ \chi_\varkappa(\Delta, x),$$

und es ergeben sich aus der Gleichung 6) die speciellen Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_\varkappa(\lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} S'_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} H_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\varkappa}(D, \lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} S'_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)x^\mu\left(\frac{D}{x}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} H_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \chi_\varkappa(\Delta, \lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} S'_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2\Delta}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} H_3\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right),$$

wo

$$H_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = x^\varkappa \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right) = x^\varkappa \mathrm{M}_0^{(1)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)$$

$$H_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = x^{\mu-\varkappa} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} (a(\lambda x - \alpha'_x) - b)^\mu \left(\frac{D}{\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

$$H_3\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = x^\varkappa \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\left(\frac{\Delta}{\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

ist.

Berücksichtigt man, dass für jede beliebige ganze Zahl n die Relation

$$K(\Delta n^2) = \chi_1(n)\frac{\log E_1(\omega)}{\log E(\Delta n^2)}$$

besteht, wo $K(D)$ die Classenzahl, $E(D)$ die Fundamentaleinheit der Discriminante D,

$$E_1(\omega) = e^{(\sqrt{\Delta})\sum\limits_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}} \qquad \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{(\sqrt{\Delta})}}\right)$$
$$= \frac{t+u\sqrt{\Delta}}{r}$$

und $(\sqrt{\Delta})$ der Hauptwerth von $\sqrt{\Delta}$ ist, so erhält man aus der letzten Gleichung die interessante Beziehung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \log E(\Delta(\lambda a-b)^2) K(\Delta(\lambda a-b)^2) =$$
$$= \frac{1}{2\log E_1(\omega)} \sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\left[\frac{n+\alpha'_x+x}{x}\right]\left(\frac{a^2\Delta}{x}\right)\mu(x).$$

Die eben aufgestellten Relationen lassen sich mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\frac{1}{2}a_1^{\mu}+(a_1+h)^{\mu}+(a_1+2h)^{\mu}+\ldots+(b-h)^{\mu}+\frac{1}{2}b^{\mu} =$$
$$= \frac{b^{\mu+1}-a_1^{\mu+1}}{(\mu+1)h} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}(-1)^{\varkappa-1}\binom{\mu}{2\varkappa-1}\frac{B_{\varkappa}h^{2\varkappa-1}}{2\varkappa}(b^{\mu-2\varkappa+1}-a_1^{\mu-2\varkappa+1}) +$$
$$+R_n \qquad (b = a_1+(n-1)h)$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\left(\frac{D}{n}\right) = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}}$$

wo für positive ganzzahlige μ R_n verschwindet, für beliebige reelle aber jedenfalls

$$|R_n| < \frac{h^{2n-1}}{2n}\binom{\mu}{2n-1}B_n\left(b^{\mu-2n+1}-a_1^{\mu-2n+1}\right)$$

ist, und unter Benützung des Umstandes, dass nach einem bekannten Dirichlet'schen Satze

$$\left|\sum_{x=n+1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^{\lambda}}\right| < \frac{12|D|}{n^{\lambda}}$$

ist, in die folgenden verwandeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\varkappa}(\lambda a - b) = \frac{n^{\varkappa+1} a^{\varkappa}}{(\varkappa+1)\zeta(\varkappa+1)\varphi_{\varkappa+1}(a)} + An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\varkappa}(D, \lambda a - b) =$$

$$= \frac{n^{\varkappa+1}}{a(\varkappa+1)} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{D}{x}\right) \frac{1}{x^{\mu-\varkappa+1}} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1 - \left(\frac{D}{p'_{\lambda}}\right) \frac{1}{p'^{\,\varkappa-\mu+1}_{\lambda}}\right) + Bn^{\varkappa}$$

$$(\varkappa > \mu;\ a = p'^{\rho_1}_1 p'^{\rho_2}_2 \ldots p'^{\rho_r}_r;\ p'_1 > 2)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(D, \lambda a - b) =$$

$$= \frac{n^{\mu+1}}{(\mu+1)a} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{D}{x}\right) \frac{1}{x} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1 - \left(\frac{D}{p'_{\lambda}}\right) \frac{1}{p'_{\lambda}}\right) + B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \chi_{\varkappa}(\Delta, \lambda a - b) = \frac{n^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)a \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right) \frac{1}{x^{\varkappa+1}} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1 - \left(\frac{\Delta}{p'_{\lambda}}\right) \frac{1}{p'^{\,\varkappa+1}_{\lambda}}\right)} + Cn^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \log E(\Delta(\lambda a - b)^2) K(\Delta(\lambda a - b)^2) =$$

$$= \frac{n^2}{2a \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right) \frac{1}{x^2} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1 - \left(\frac{\Delta}{p'_{\lambda}}\right) \frac{1}{p'^{2}_{\lambda}}\right)} + C_1 n$$

wo A, B, C, B_1, C_1 für alle Werthe von n endlich bleiben.

Ist

$$D = \Delta Q^2,$$

sind ferner $q_1, q_2, \ldots, q_\rho$ die sämmtlichen Primfactoren von Q und bezeichnet man endlich die Bernoulli'sche Function $n$ter Ordnung mit $\varphi(z, m)$, so ergeben sich aus diesen Gleichungen auf Grund von bekannten Theoremen des Herrn Berger die folgenden bemerkenswerthen Beziehungen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\varkappa-2\sigma,\varkappa}(D, \lambda a-b) = \frac{(-1)^{\sigma+1}(2\pi)^{2\sigma+1} n^{\varkappa+1}}{2a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+1)\left|\sqrt{-\Delta}\right|}$$

$$\prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{\,2\sigma+1}_\lambda}\right)\prod_{\mu=1}^{\rho}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q_\lambda^{2\sigma+1}}\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{h=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2\sigma+1\right)+An^{\varkappa} \quad (\Delta<0)$$

$$= \frac{(-1)^{\sigma+1}(2\pi)^{2\sigma+1} n^{\varkappa+1}}{a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+1)\left|\sqrt{-\Delta}\right|}\prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{\,2\sigma+1}_\lambda}\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{\mu=1}^{\rho}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q_\lambda^{2\sigma+1}}\right)\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{-\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2\sigma+1\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-2\sigma-1,\varkappa}(D, \lambda a-b) = \frac{(-1)^{\sigma}(2\pi)^{2\sigma+2}n^{\varkappa+1}}{2a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+2)\left|\sqrt{\Delta}\right|}\cdot$$

$$\prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{\,2\sigma+2}_\lambda}\right)\prod_{\mu=1}^{\rho}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q_\lambda^{2\sigma+2}}\right)\sum_{h=1}^{h=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2\sigma+2\right)+$$

$$+An^{\varkappa} \quad (\Delta>0)$$

$$= \frac{(-1)^{\sigma}(2\pi)^{2\sigma+2}n^{\varkappa+1}}{2a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+2)\left|\sqrt{\Delta}\right|}\prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{\,2\sigma+2}_\lambda}\right)\prod_{\mu=1}^{\rho}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q_\lambda^{2\sigma+2}}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2\sigma+2\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_{2\sigma}(\Delta, \lambda a-b) =$$

$$= \frac{(-1)^{\sigma+1}2\Pi(2\sigma+1)\left|\sqrt{-\Delta}\right|n^{2\sigma+1}}{a\prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{\,2\sigma+1}_\lambda}\right)\sum_{h=1}^{h=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2\sigma+1\right)(2\pi)^{2\sigma+1}}+$$

$$+Bn^{2\sigma} \quad (\Delta<0)$$

$$= \frac{(-1)^{\sigma+1}\Pi(2\sigma)\left|\sqrt{-\Delta}\right| n^{2\sigma+1}}{(2\pi)^{2\sigma+1} a \prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_{\lambda}}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+1}}\right)\sum\limits_{h=1}^{h=\left[\frac{-\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta}, 2\sigma+1\right)} +$$

$$+ Bn^{2\sigma} \quad (\Delta < 0)$$

$$\sum_{\lambda=n}^{\lambda=n} \chi_{2\sigma+1}(\Delta, \lambda a - b) =$$

$$= \frac{(-1)^{\sigma} 2\Pi(2\sigma+1)\left|\sqrt{\Delta}\right| n^{2\sigma+2}}{(2\pi)^{2\sigma+2} a \prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_{\lambda}}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+2}_{\lambda}}\right)\sum\limits_{h=1}^{h=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2\sigma+2\right)} +$$

$$+ Bn^{2\sigma+1} \quad (\Delta > 0)$$

$$= \frac{(-1)^{\sigma}\Pi(2\sigma+1)\left|\sqrt{\Delta}\right| n^{2\sigma+2}}{(2\pi)^{2\sigma+2} a \prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_{\lambda}}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+2}_{\lambda}}\right)\sum\limits_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2\sigma+2\right)} +$$

$$+ Bn^{2\sigma+1}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \log E\left(\Delta(\lambda a - b)^2\right) K\left(\Delta(\lambda a - b)^2\right) =$$

$$= \frac{4\left|\sqrt{\Delta}\right| n^2}{(2\pi)^2 a \prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_{\lambda}}\right)\frac{1}{p'^{2}_{\lambda}}\right)\sum\limits_{h=1}^{h=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2\right)} + Bn \quad (\Delta > 0)$$

$$= \frac{2\left|\sqrt{\Delta}\right| n^2}{(2\pi)^2 a \prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_{\lambda}}\right)\frac{1}{p'^{2}_{\lambda}}\right)\sum\limits_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta}, 2\right)} + Bn.$$

Von den speciellen Fällen derselben mögen die folgenden angeführt werden:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\varkappa-2,\varkappa}(-7, \lambda a - b) = \frac{32\pi^3 n^{\varkappa+1}}{343\sqrt{7}(\varkappa+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{7}{p'_{\lambda}}\right)\frac{(-1)^{\frac{p'_{\lambda}-1}{2}}}{p'^{3}_{\lambda}}\right) + An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-2,\varkappa}(-11,\lambda a-b)=\frac{12\pi^3 n^{\varkappa+1}}{121\sqrt{11}(\varkappa+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{11}{p'_\lambda}\right)\frac{(-1)^{\frac{p'_\lambda-1}{2}}}{p'^3_\lambda}\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-3,\varkappa}(5,\lambda a-b)=\frac{8\pi^4 n^{\varkappa+1}}{375\sqrt{5}(\varkappa+1)a}\prod_{1}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{5}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^4_\lambda}\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-4,\varkappa}(-3,\lambda a-b)=\frac{4\pi^5 n^{\varkappa+1}}{729\sqrt{3}(\varkappa+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^5_\lambda}\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_2(-7,\lambda a-b)=\frac{343\sqrt{7}n^3}{96a\pi^3\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{7}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{p'_\lambda}{14}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^3_\lambda}\right)}+Bn^2$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_2(-11,\lambda a-b)=\frac{121\sqrt{11}\,n^3}{36a\pi^3\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{11}{p'_\lambda}\right)\frac{(-1)^{\frac{p'_\lambda-1}{2}}}{p'^3_\lambda}\right)}+Bn^2$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_3(5,\lambda a-b)=\frac{375\sqrt{5}n^4}{32a\pi^4\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{5}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^4_\lambda}\right)}+Bn^3$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_4(-3,\lambda a-b)=\frac{729\sqrt{3}n^5}{20a\pi^5\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^5_\lambda}\right)}+Bn^4$$

Für negative Fundamentaldiscriminanten Δ hat man ferner die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\mu,\mu}(\Delta,\lambda a-b)=\frac{2\pi K(\Delta)n^{\mu+1}}{\tau\left|\sqrt{-\Delta}\right|(\mu+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'_\lambda}\right)+B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

wo die Anzahl der Transformationen eine Form der Discriminante Δ in sich selbst ist. Dieselbe zerfällt in die folgenden drei Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(-3, \lambda a-b) = \frac{\pi n^{\mu+1}}{3a(\mu+1)\sqrt{3}} \prod_{\lambda=1}^{r}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'_\lambda}\right)+B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(-4, \lambda a-b) = \frac{\pi n^{\mu+1}}{4a(\mu+1)} \prod_{\lambda=1}^{r}\left(1+\frac{(-1)^{\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'_\lambda}\right)+B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(\Delta, \lambda a-b) = \frac{\pi K(\Delta) n^{\mu+1}}{a(\mu+1)\left|\sqrt{-\Delta}\right|} \prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'_\lambda}\right)+B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

Von den aus den entwickelten Formeln sich ergebenden Theoremen mögen folgende drei erwähnt werden:

Die mittlere Anzahl der Darstellungen eines Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b;\ a=p_1'^{\lambda_1}\,p_2'^{\lambda_2}\quad p_r'^{\lambda_r})$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz durch das System der quadratischen Formen der Fundamentaldiscriminante Δ ist gleich

$$\frac{\pi}{a}\prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'_\lambda}\right)\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Die mittlere Anzahl der Darstellungen eines Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b;\ a=p_1'^{\lambda_1}\,p_2'^{\lambda_2}\ldots p_r'^{\lambda_r})$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz durch das System der quadratischen Formen der negativen Fundamentaldiscriminante Δ ist gleich

$$\frac{2\pi \prod_{\lambda=1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\right)K(\Delta)}{a\left|\sqrt{-\Delta}\right|}$$

Ein Glied einer arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a lässt sich im Mittel $\frac{1}{a}$-mal so oft durch das System der quadratischen Formen der Fundamentaldiscriminante Δ darstellen, als sich irgend eine ganze Zahl durch das System der quadratischen Formen der Discriminante $a^2\Delta$ darstellen lässt.

ε) Setzt man endlich

$$f(x) = 1,\; s = \Theta(na-b)$$

und der Reihe nach

$$f_1(x) = x^{\varkappa},\; \mu_\sigma(\sqrt[r]{x})\, x^{\varkappa},$$

so wird $h(x)$ gleich der Summe $P_{\varkappa,r}(x)$ der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler der ganzen Zahl x, welche r^{te} Potenzen sind, beziehungsweise der Summe $\tau_{\varkappa,r,\sigma}(x)$ derjenigen unter ihnen, welche durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und man erhält demnach aus 6) die speciellen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} P_{\varkappa,r}(\lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} \left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\left(\frac{a^2}{x^r}\right) x^{r\varkappa}$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} G_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \tau_{\varkappa,r,\sigma}(\lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} \left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\left(\frac{a^2}{x^r}\right)\mu_\sigma(x)\, x^{r\varkappa}$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} G_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right),$$

wo

$$G_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x + b}{x}\right)^{\varkappa}$$

$$G_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}{}' \left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x + b}{x}\right)^{\varkappa} \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\lambda a - \frac{a\alpha'_x + b}{x}}\right)$$

ist.

Von den in diesen Formeln enthaltenen asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie mögen die folgenden angeführt werden:

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen sind, ist im Mittel gleich $\dfrac{\zeta(r(\varkappa+1))\varphi_{r(\varkappa+1)}(a)}{a^{r(\varkappa+1)}}$.

Die Summe der reciproken $(2\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen sind, beträgt im Mittel $\dfrac{(2\pi)^{2\varkappa r}B_{\varkappa r}\varphi_{2\varkappa r}(a)}{2a^{2\varkappa r}\Gamma(2\varkappa r+1)}$.

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen sind, ist im Mittel gleich $\dfrac{(2\pi)^{2r(\varkappa+1)}B_{r(\varkappa+1)}\varphi_{2r(\varkappa+1)}(a)}{2a^{2r(\varkappa+1)}\Gamma(2r(\varkappa+1)+1)}$

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, besitzt im Mittel $\dfrac{\zeta(r)\varphi_r(a)}{a^r}$ Theiler, welche r^{te} Potenzen sind.

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich $\dfrac{\zeta(r(\varkappa+1))a^{(\sigma-1)r(\varkappa+1)}\varphi_{r(\varkappa+1)}(a)}{\zeta(\sigma r(\varkappa+1))\varphi_{\sigma r(\varkappa+1)}(a)}$

Die Summe der reciproken $(2\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich

$$\frac{\Gamma(2\sigma r\varkappa+1)B_{r\varkappa}a^{2r\varkappa(\sigma-1)}\varphi_{2r\varkappa}(a)}{(2\pi)^{2\sigma\varkappa(\sigma-1)}\varphi_{2\sigma r\varkappa}(a)\Gamma(2r\varkappa+1)B_{\sigma r\varkappa}}.$$

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich

$$\frac{\Gamma(2\sigma r(\varkappa+1)+1)B_{r(\varkappa+1)}a^{2r(\varkappa+1)(\sigma-1)}\varphi_{2r(\varkappa+1)}(a)}{(2\pi)^{2r(\varkappa+1)(\sigma-1)}\Gamma(2r(\varkappa+1)+1)B_{\sigma r(\varkappa+1)}\varphi_{2\sigma r(\varkappa+1)}(a)}$$

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a hat im Mittel $\frac{\zeta(r)a^{r(\sigma-1)}\varphi_r(a)}{\zeta(\sigma r)\varphi_{\sigma r}(a)}$ Theiler, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a hat im Mittel $\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)\zeta(r)a^{r(2\sigma-1)}\varphi_r(a)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)}$ $(r>1)$ Theiler, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a hat im Mittel $\frac{\Gamma(2\sigma r+1)B_r a^{2r(\sigma-1)}\varphi_{2r}(a)}{(2\pi)^{2r(\sigma-1)}\Gamma(2r+1)B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)}$ Theiler, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

§. 3. Setzt man in 2) der Reihe nach

$$g(x)=\mu(x),\ \psi_0(x),\ \mu^2(x),\ \mu(x),\ \mu^2(x),\ \lambda(x)x^{\varkappa},\ \lambda(x)\omega(x),$$
$$\lambda(x)\psi_0(x^2);\ \lambda(x)\psi_0^2(x)$$

und gleichzeitig beziehungsweise

$$f(x)=S_{\varkappa}(x),\ \varphi_{\varkappa}(x),\ f_{\gamma}(x),\ \psi_{\varkappa}(x),\ \rho_{\varkappa,2}(x),\ \mu^2(x),\ \omega(x),\ \psi_0(x^2),\ \psi_0^2(x)$$

so wird

$$h(x)=\varphi^{(\varkappa)}(x),\ \psi_{\varkappa}(x),\ \frac{f_{\gamma-1}(x)\psi(x^2\pi^{\gamma-2}(x))}{(\gamma-1)^{\bar{\omega}(x)}},\ x^{\varkappa},\ \psi_{\varkappa}(x),\ \lambda(x)\varphi_{\varkappa}(x),$$
$$\begin{cases}0\ (x>1)\\ 1\ (x=1)\end{cases},\ \begin{cases}0\\1\end{cases},\ \begin{cases}0\\1\end{cases},$$

je nachdem in den zwei letzten Fällen x kein Quadrat oder ein Quadrat ist, und daher folgen aus 3) und 4) die Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi^{(\varkappa)}(\lambda a-b)=\sum_{x=1}^{x=na-b}\bar{S}_{\varkappa}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) S_\varkappa(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \psi_\varkappa(\lambda a-b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Psi'_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\varphi_\varkappa(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Phi'_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_0(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{f_{\gamma-1}(\lambda a-b)\,\psi((\lambda a-b)^2\pi^{\gamma-2}(\lambda a-b))}{(\gamma-1)^{\omega(\lambda a-b)}} =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} F_\gamma\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\mu^2(x)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\mathrm{M}}_2^{(0)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f_\gamma(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (\lambda a-b)^\varkappa = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Psi'_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_\varkappa(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \psi_\varkappa(\lambda a-b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\mathrm{M}}_2^{(0)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\rho_{\varkappa,2}(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} P'_{\varkappa,2}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu_2(x)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \lambda(\mu a-b)\,\varphi_\varkappa(\mu a-b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\mathrm{M}}_2^{(0)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\,x^\varkappa$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu_2(x)$$

$$Q^{(2)}_{a,\,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(1)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_0(x^2)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\psi_0(x^2)$$

$$Q^{(2)}_{a,\,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(2)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_0^2(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \tilde{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\psi_0^2(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=na-b} \Lambda^{(3)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\omega(x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Omega'\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\,\omega(x) = \begin{cases} 1 & (a-b=1) \\ 0 & (a-b>1) \end{cases}$$

wo $Q^{(\lambda)}_{a,\,b}(n)$ die Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1) bezeichnet, welche λte Potenzen sind, und

$$\Psi'_\chi\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \psi_\chi\left(\lambda a - \frac{a\,\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\overline{S}_\chi\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} S_\chi\left(\lambda a - \frac{a\,\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$F_\gamma\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} f_\gamma\left(\lambda a - \frac{a\,\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Phi'_\chi\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \varphi_\chi\left(\lambda a - \frac{a\,\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$P'_{\varkappa,\lambda}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}\rho_{\varkappa,\lambda}\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Lambda^{(1)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}\lambda\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\psi_0\left(\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^2\right)$$

$$\Lambda^{(2)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}\lambda\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\psi_0^2\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Lambda^{(3)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}\lambda\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\omega\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\overline{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}\psi_0\left(\left(\lambda a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^2\right)$$

$$\tilde{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}\psi_0^2\left(\lambda a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Omega'\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}\omega\left(\lambda a-\frac{a\alpha_x+b}{x}\right)$$

ist.

Von weiteren Theoremen, welche aus den Formeln 2) und 3) auf dem bisher eingeschlagenen Wege abgeleitet werden können, mögen schliesslich noch die folgenden angeführt werden:

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\dfrac{\zeta(r)\varphi_r(a)}{a^{r-\lambda}\zeta(\lambda)\varphi_\lambda(a)}$ Theiler, welche r^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor haben, welcher durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\frac{\zeta(r)\, a^{r(\sigma-1)+\lambda}\varphi_r(a)}{\zeta(\sigma r)\zeta(\lambda)\varphi_{\sigma r}(a)\,\varphi_\lambda(a)}$ Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)\,\zeta(r)\, a^{r(2\sigma-1)+\lambda}\varphi_r(a)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)\,\zeta(\lambda)\,\varphi_\lambda(a)}$ $(r>1)$ Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\frac{\Gamma(2\sigma r+1)B_r a^{2r(\sigma-1)+\lambda}\varphi_{2r}(a)}{(2\pi)^{2r(\sigma-1)}\Gamma(2r+1)B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)\,\zeta(\lambda)\,\varphi_\lambda(a)}$ Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Bezeichnet $\mathfrak{Q}'_2(m)$ die Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression

$$a-\frac{a\alpha'_x+b}{x},\quad 2a-\frac{a\alpha'_x+b}{x},\qquad\qquad ma-\frac{a\alpha'_x+b}{x}$$

(in welcher a und b theilerfremd sind), welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind, so ist die Anzahl derjenigen unter den Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\qquad (a>0;\ a>b)$$

welche Primzahlen sind, gleich

$$\sum_{x=1}^{x=n}\mathfrak{Q}'_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\,\tilde{\omega}(x).$$

Es ist bei theilerfremden a und b

$$\prod_1^n{}_x\prod{}_{\rho_x}(2\sin\rho_x\pi)^{2\left[\frac{n+\alpha_x}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)}=2^{\left[\frac{n+\alpha'_2}{2}\right]\left(\frac{a^2}{2}\right)}\prod_1^n{}_\lambda(\lambda a-b)\quad(a>0;a>b)$$

wo das Product bezüglich ρ_x über alle reducirten positiven echten Brüche mit dem Nenner x zu erstrecken ist, welche nicht grösser als $\frac{1}{2}$ sind.

Die Summe der Theiler der ersten n Glieder der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b, \qquad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz vermehrt um die Summe der Reste, welche bleiben, wenn man die um n vergrösserte kleinste positive Wurzel jeder der für alle zu a theilerfremden, n nicht überschreitenden Module m gebildeten Congruenzen

$$ax+b \equiv 0 \pmod{m}$$

durch den Modul m dividirt, übertrifft die Summe der genannten Congruenzwurzeln um das n-fache ihrer Anzahl.