©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Arithmetische Relationen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

In dem vor Kurzem ausgegebenen Hefte des 14. Bandes der „Acta mathematica“ beweist Herr J. Hacks[1] die wohl zuerst von Herrn Bugajef aufgestellten Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] \mu(x) = \mathfrak{Q}_\lambda(n) \qquad 1)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{x}\right]} \mathfrak{Q}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) = n, \qquad 2)$$

in denen $\mathfrak{Q}_\lambda(n)$ die Anzahl jener ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ bezeichnet, welche durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, auf einem neuen Wege und erschliesst aus dem speciellen Falle $\lambda = 2$ der ersten von ihnen in etwas einfacherer Weise als Herr J. Perott den Euklid'schen Satz, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Dass nicht nur die zweite Relation aus der ersten, sondern auch umgekehrt die erste aus der zweiten leicht abgeleitet werden kann, wie Herr J. Hacks zeigt, lässt sich durch das folgende auch auf andere Fälle anwendbare Verfahren leicht erweisen. Schreibt man in 2) für n: $\left[\frac{n}{y^\lambda}\right]$ multiplicirt sodann mit $\mu(y)$ und summirt von $y = 1$ bis $y = [\sqrt[\lambda]{n}]$, so erhält man die Gleichung

[1] „Einige Anwendungen der Function $[x]$.“ A. a. O., S. 329—336.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \left[\frac{n}{y^\lambda}\right] = \sum_{x,\,y=1}^{x,\,y=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{(xy)^\lambda}\right]\right) \mu(y).$$

Vereinigt man nun auf der rechten Seite derselben alle Glieder, in denen xy den Werth z hat, so ergibt sich als Coëfficient von $\mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{z^\lambda}\right]\right)$ die über alle Theiler d von z erstreckte Summe

$$\sum_d \mu(d),$$

welche bekanntlich den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $z = 1$ oder $z > 1$ ist, und demnach entsteht die Formel 1).

Ausser den zwei genannten Formeln habe ich bei verschiedenen Gelegenheiten[1] eine Reihe von analogen auf die Function $\mathfrak{D}_\lambda(n)$ bezüglichen Relationen ermittelt, von denen beispielsweise die folgenden erwähnt werden mögen:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) x^\varkappa = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] \varphi_\varkappa(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_{\sigma\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{\lambda,\,0,\,\sigma}(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varrho_{\varkappa,\,\lambda}(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \psi_\varkappa(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \lambda_r(x) = 1$$

---

[1] „Arithmetische Theoreme." Denkschr. d. mathem.-naturw. Cl. der k. Akad. d. Wissensch., 49. Bd. — „Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie." A. e. a. O. — „Über die Divisoren der ganzen Zahlen." Diese Sitzb., 91. Bd., II. Abth., S. 600—621. — „Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen." Denkschr. d. mathem.-naturw. Cl. d. k. Akad. d. Wissensch., 50. Bd.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \tau_{1,\lambda,\varkappa,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{\lambda,\varkappa,\sigma}(x).$$

Alle diese und zahlreiche andere Formeln derselben Kategorie, welche sich theils auf die Function $\mathfrak{D}_\lambda(n)$, theils auf andere zahlentheoretische Functionen beziehen, folgen aus einer allgemeinen Relation, welche zunächst aufgestellt und sodann durch Specialisirung zur Ableitung von mehreren interessanten Sätzen und Formeln benützt werden soll.

Es sei

$$\sum B\left(\left[\frac{n}{f(x_\lambda)}\right]\right) g(x_\lambda) = A(n), \tag{3}$$

wo die Summation bezüglich x_λ über alle n nicht überschreitenden ganzen Zahlen auszudehnen ist, welche eine vorgeschriebene, durch den Index λ charakterisirte Eigenschaft besitzen. Schreibt man in dieser Gleichung für n: $\left[\frac{n}{(x_\mu)}\right]$, multiplicirt, sodann mit $h(x_\mu)$ und summirt über alle n nicht übersteigenden ganzen Zahlen, welchen die durch den Index μ angegebene Eigenschaft zukommt, so erhält man die Formel

$$\sum_{x_\mu} B\left(\left[\frac{n}{f(x_\mu)}\right]\right) h(x_\mu) = \sum_{x_\lambda, x_\mu} B\left(\left[\frac{n}{f(x_\lambda) f(x_\mu)}\right]\right) g(x_\lambda) h(x_\mu).$$

Ist nun die Function $f(x)$ so beschaffen, dass für alle in Betracht kommenden Werthepaare x_λ, x_μ die Beziehung

$$f(x_\lambda) f(x_\mu) = f(x_\lambda x_\mu) = f(z)$$

besteht, und ist ferner die über alle der Gleichung

$$x_\lambda x_\mu = z \qquad (x_\lambda \leqq n;\ y_\mu \leqq n) \tag{4}$$

genügenden Werthepaare x_λ, x_μ ausgedehnte Summe

$$\sum_{x_\lambda, x_\mu} g(x_\lambda) h(x_\mu) = k(z), \tag{5}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{z} B\left(\left[\frac{n}{f(z)}\right]\right) k(z) = \sum_{x_\mu} A\left(\left[\frac{n}{f(x_\mu)}\right]\right) h(x_\mu), \qquad 6)$$

in welcher für z alle durch die Gleichung 4) bestimmten ganzen Zahlen zu setzen sind.

Dies ist die erwähnte allgemeine Relation, welche nun auf mehrere bemerkenswerthe specielle Fälle angewendet werden soll. Dass dieselbe auch ihr Analogon in der Theorie der complexen Zahlen hat, ist selbstverständlich.

Ist

$$B(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad x_\lambda = x^\lambda, \quad x_\mu = x^\mu,$$

so gehen die Gleichungen 3)--6) in die folgenden über

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] g(x^\lambda) = A(n)$$

$$x^\lambda y^\mu = z$$

$$\sum g(x^\lambda) h(y^\mu) = k(z) \qquad 7)$$

$$\sum_{z=1}^{z=n}{}' \left[\frac{n}{z}\right] k(z) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} A\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu),$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass für z nur diejenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ zu nehmen sind, welche ein Product aus einer λten und einer μten Potenz sind.

Nun ist

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] = \sum_{x,\,y=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right],\, y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^\lambda y}\right) g(x^\lambda)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \left(\sum_{d_\lambda} g\left(\frac{r}{d_\lambda}\right)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \overline{g}_\lambda(r)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$= \overline{G}_\lambda(n)$$

$$\sum_{z=1}^{z=n}{}' \left[\frac{n}{z}\right] k(z) = \sum_{x,\ z=1}^{x,\ z=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xz}\right) k(z)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right)\left(\sum_{d}^{(z)} k(d)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} k(r)$$

$$= \overline{K}(n),$$

wo $\overline{g}_\lambda(r)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $g(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler $\frac{r}{d_\lambda}$ von r durchläuft, welche λ^{te} Potenzen sind, und $\overline{k}(r)$ die Summe jener Werthe, welche die Function $k(x)$ erhält, wenn für ihr Argument alle zu den Zahlen z gehörigen Theiler der ganzen Zahl r gesetzt werden.

Für die Function $\overline{k}(r)$ erhält man aus der Relation 7), wie man leicht erkennt, den Ausdruck

$$\overline{k}(r) = \sum_{d_\mu} \overline{g}_\lambda(d_\mu)\, h\left(\frac{r}{d_\mu}\right) \qquad 8)$$

$$= \sum_{d_\lambda} \overline{h}_\mu(d_\lambda)\, g\left(\frac{r}{d_\lambda}\right),$$

wo

$$\overline{h}_\mu(r) = \sum_{d_\mu} h\left(\frac{r}{d_\mu}\right)$$

ist. Die eben gemachten Erörterungen führen zu der Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \overline{K}(n). \qquad 9)$$

Von besonderem Interesse sind diejenigen speciellen Fälle dieser Formel, in denen die Function $g(x)$ so beschaffen ist, dass

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$\overline{g_\lambda}(x)$ den Werth 1 oder 0 besitzt, je nachdem die ganze Zahl x eine bestimmte Eigenschaft besitzt oder nicht. In einem solchen Falle stellt die Function $\overline{G_\lambda}(n)$ die Anzahl aller ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ vor, welche die eben erwähnte Eigenschaft besitzen, und es ist $\overline{k}(r)$ die Summe derjenigen Werthe, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler der ganzen Zahl r durchläuft, welche μ^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, dem die vorgeschriebene Eigenschaft zukommt.

Beachtet man nun, dass der Ausdruck

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\mu}\right] h(x^\mu) \qquad 10)$$

die Summe der Werthe ergibt, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument der Reihe nach alle jene Theiler jeder einzelnen von den ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ gesetzt werden, welche μ^{te} Potenzen sind, so erhält man das interessante Resultat, dass die Ersetzung von $\left[\frac{n}{x^\mu}\right]$ durch die eben angeführte specielle Function $\overline{G_\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right)$ in 10) der Unterdrückung derjenigen von den genannten Theilern gleichkommt, deren complementärer Divisor die vorgeschriebene Eigenschaft nicht besitzt.

Einer von den eben erörterten speciellen Fällen ergibt sich, wenn man

$$g(x) = \mu\left(\sqrt[\lambda]{x}\right)$$

setzt; denn es ist

$$\sum_{d_\lambda} \mu\left(\sqrt[\lambda]{\frac{x}{d_\lambda}}\right) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

je nachdem x durch eine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht. Nach 9) ist also

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \sum_{x=1}^{x=n} h_{\lambda,\mu}(x),$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo $h_{\lambda,\mu}(r)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Theiler der ganzen Zahl r durchlauft, welche μ^{te} Potenzen sind und einen durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen.

Da, wie ich gezeigt habe,

$$\mathfrak{Q}_\lambda(m) = \frac{m}{\zeta(\lambda)} + A_m m^{\frac{1}{\lambda}}$$

ist, wo A_m eine für alle Werthe von m endliche Grösse vorstellt, so kann die Relation 11) auch in folgender Form geschrieben werden

$$\sum_{x=1}^{x=n} h_{\lambda,\mu}(x) = \frac{1}{\zeta(\lambda)} \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\mu}\right] h(x^\mu) + \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} A_x \left[\frac{n}{x^\mu}\right]^{\frac{1}{\lambda}} h(x^\mu) \quad 12)$$

in welcher sie zur Ableitung von verschiedenen asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie benützt werden kann.

In der Gleichung 11) sind die im Anfange angegebenen sechs auf die Function $\mathfrak{Q}_\lambda(n)$ bezüglichen Formeln als specielle Fälle enthalten.

Von den mannigfachen anderen Ausdrücken und Theoremen, welche sich aus 11) und 12) durch Specialisirung von $h(x)$ ableiten lassen, mögen folgende hier besondere Erwähnung finden:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{Q}_{\sigma\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \lambda_\sigma(x) = \mathfrak{Q}_\lambda(n)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{Q}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \mu_\sigma(x) = \mathfrak{Q}_{\sigma\lambda}(n)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma\lambda]{n}\right]} \mathfrak{Q}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\sigma\lambda}}\right]\right) x^{\varkappa\sigma\lambda} = \sum_{x=1}^{x=n} \alpha_{\varkappa,\lambda,\sigma}(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{Q}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \tau_{r,\lambda\varkappa,\sigma} = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r\lambda,\varkappa,\sigma}(x)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{Q}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\mu(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mu(x).$$

Die Anzahl derjenigen unter den Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen im Mittel um

$$\frac{\log 2}{r\zeta(\lambda)} + \frac{\pi}{r^2\zeta(\lambda)} \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}$$

Ist

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0,$$

so hat jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(\log n + 2C + \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(\log n + 2C + \frac{\log 2}{r} - \frac{\pi}{r^2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

solche von ihnen, welche eine der Formen $2\mu r$, $(2\mu+1)r+1$, $(2\mu+1)r+2$, $\ldots$, $(2\mu+2)r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(s\log 10 + 2C - 1 + \frac{\log 10}{9} + \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{r}-\frac{\pi}{r^2}\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

solche von ihnen, welche eine der Formen $2\mu r$, $(2\mu+1)r+1$, $(2\mu+1)r+2$, $\ldots$, $2(\mu+1)r-1$ besitzen.

Die Anzahl derjenigen unter den ungeraden Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer ganzen Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen im Mittel um

$$\frac{\pi}{4r\zeta(\lambda)}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}$$

Ist

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0,$$

so hat jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C+\log 2+\frac{\pi}{4r}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

ungerade Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer ganzen Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C+\log 2-\frac{\pi}{4r}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

solche von ihnen, welche eine der Formen $4\mu r+2r+1$, $4\mu r+$ $+2r+3$, ..., $4(\mu+1)r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\pi}{4r}\right.$$
$$\left.\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer ungeraden Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\pi}{4r}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right.$$

solche von ihnen, welcher eine der Formen $4\mu r+2r+1$, $4\mu r+$ $+2r+3$, ..., $4(\mu+1)r-1$ besitzen.

Die Anzahl derjenigen geraden Divisoren einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen von ihnen im Mittel um

$$\frac{\log 2}{2\,r\zeta(\lambda)}+\frac{\pi}{4r^2\zeta(\lambda)}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}.$$

Ist

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0,$$

so besitzt jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C-\log 2+\frac{\log 2}{2r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gerade Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C-\log 2-\frac{\log 2}{2r}-\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\,.\right.$$
$$\left.\cdot\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

solche von ihnen, welche eine der Formen $4\mu r+2r+2$, $4\mu r+2r+4$, ..., $4(\mu+1)r$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{2r}+\frac{\pi}{4r^2}\cdot\right.$$
$$\left.\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

gerade Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2r$ congruent sind, während die Anzahl der übrigen von ihnen

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\log 2}{2r}-\frac{\pi}{4r^2}\cdot\right.$$
$$\left.\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

beträgt.

Ist

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0,$$

so besitzt jede ganze ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{\zeta(\lambda)\zeta(\sigma)}\left(\log n+2C+\frac{\sigma}{\zeta(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)\frac{\log n+2C}{\zeta(\lambda)}-\frac{\sigma}{\zeta(\lambda)\zeta^2(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}$$

solche von ihnen, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Ist

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0\,,$$

so besitzt jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel ebenso viele Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche durch keine (mindestens eine) σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, als jede ganze Zahl des Intervalles $1 \ldots ne$.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}+\frac{\sigma}{\zeta(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}\right)$$

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)\frac{1}{\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1\right)-\frac{\sigma}{\zeta(\lambda)\zeta^2(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}$$

von diesen Theilern, welche wenigstens einen Primfactor in einer höheren als der $(\sigma-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

Die Anzahl derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und einen durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen, ist für $r>1$ im Mittel gleich

$$\frac{\zeta(r)}{\zeta(\lambda)\zeta(\sigma r)}$$

 ©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen unter den Divisoren einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welcher r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich $\frac{\zeta(r(\varkappa+1))}{\zeta(\lambda)\zeta(\sigma r(\varkappa+1))}$.

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, welcher durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{\zeta(r(\varkappa+1))}{\zeta(\lambda)}$

Unter denjenigen Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche r^{te} Potenzen von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $\varkappa\rho$ und $\varkappa\rho+1$ auftreten, gibt es im Mittel um $\frac{\zeta(r\rho)}{\zeta(\lambda)\zeta(r)}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der letzteren Exponenten gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche Quadrate von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von einer der Formen $3\varkappa$, $3\varkappa+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{\pi^4}{120\,\zeta(\lambda)}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der zuletzt genannten Exponenten gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche Quadrate von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von einer der Formen $6\varkappa$, $6\varkappa+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{188643\,\pi^{10}}{21794572800\,\zeta(\lambda)}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Form gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Einen zweiten speciellen Fall derselben Kategorie erhält man, wenn man

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\lambda = 1,\ g(x) = \lambda_\sigma(x)$$

setzt, weil

$$\sum_d \lambda_\sigma\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem x eine σ^{te} Potenz ist oder nicht. Da in diesem Falle

$$\bar{G}_\lambda(n) = [\sqrt[\sigma]{n}]$$

ist, so entsteht aus 9) die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\mu]{n}]} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x^\mu}}\right] h(x^\mu) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{h}_{\sigma,\mu}(x),$$

in welcher $\bar{h}_{\sigma,\mu}(x)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Theiler der ganzen Zahl r durchläuft, welche μ^{te} Potenzen sind, und einen complementären Divisor besitzen, der eine σ^{te} Potenz ist.

Von den zahlreichen interessanten Fällen dieser Formel mögen die folgenden angeführt werden

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \mu(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \lambda_\chi(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \mu_\chi(x) = [\sqrt[\rho]{n}]$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \lambda_\sigma(x) = [\sqrt[\sigma\rho]{n}]$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[2\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \frac{f_{\beta-2}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}(x)}} = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} f_\beta(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[2\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \omega_\chi(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \psi_\chi(x)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \left[\sqrt[\mu\varrho\sigma]{\frac{n}{x^\mu}}\right] \frac{\tau_{r,\varkappa,\sigma}(x)}{x^\varkappa} = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \rho_{\varkappa,r}(x).$$

Die Annahme

$$\lambda = 1, \quad g(x) = \alpha_0(x)$$

führt endlich, da bekanntlich

$$\sum_d \alpha_0\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem x eine Primzahl ist oder nicht, zu einem dritten Falle desselben Formelkreises, nämlich zu der Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \Theta\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \sum_{x=1}^{x=1} h_\mu(x),$$

in welcher $h_\mu(x)$ die Summe jener Werthe bezeichnet, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument alle Theiler der ganzen Zahl x mit primzahligem complementären Divisor gesetzt werden, welche μ^{te} Potenzen sind.

Ist ferner die Function $g(x)$ so beschaffen, dass für alle in Betracht kommenden Werthe des Argumentes

$$g(x)g(y) = g(xy)$$

ist und

$$h(x) = g(x)h_1(x),$$

so wird bei den gemachten Annahmen über die Functionen $B(x)$ und $f(x)$ und die Zahlen x_λ, x_μ die Formel 6)

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) g(x^\mu) h_1(x^\mu) = \sum_{z=1}^{z=n}{}' \left[\frac{n}{z}\right] g(z) H_1(z),$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo $H_1(z)$ die über alle der Gleichung

$$x^\lambda y^\mu = z$$

genügenden Werthe von y ausgedehnte Summe der Werthe von $h_1(y)$ ist, oder also

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) g(x^\mu) h_1(x^\mu) = \sum_{r=1}^{r=n} G(r)$$

$$= \overline{G}(n),$$

wenn $G(r)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche das Product $g(x)H_1(x)$ annimmt, wenn für sein Argument alle zu den Zahlen z gehörigen Theiler der ganzen Zahl r gesetzt werden.

Aus dieser Relation folgert man sofort das Theorem:

Ist die Function $h_1(y)$ so beschaffen, dass die über alle der Gleichung

$$x^\lambda y^\mu = z$$

genügenden Werthe von y ausgedehnte Summe $H_1(z)$ ihrer Werthe gleich 1 oder 0 ist, je nachdem die Zahl z eine bestimmte Eigenschaft besitzt oder nicht, ist ferner $\overline{G}_\lambda(n)$ die Summe der Werthe, welche die der Bedingung

$$g(x)g(y) = g(xy)$$

genügende Function $g(x)$ annimmt, wenn ihr Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ durchläuft, welche λte Potenzen sind, so gibt die Summe

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) g(x) h_1(x)$$

die Summe jener Werthe an, welche die Function $g(x)$ erhält, wenn für ihr Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen von 1 bis n gesetzt werden, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nach diesem Satze geben also die Ausdrücke

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma\lambda]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\sigma\lambda}}\right]\right) g(x^{\sigma\lambda})\,\mu(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) g(x^{\lambda})\,\lambda_\sigma(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) g(x^{\lambda})\,\alpha_0(x)$$

der Reihe nach die Summen jener Werthe an, welche die Function $g(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler jeder der ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ durchläuft, welche λ^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma\lambda)^{\text{te}}$ Potenz theilbar, beziehungsweise $(\sigma\lambda)^{\text{te}}$ Potenzen beziehungsweise λ^{te} Potenzen von Primzahlen sind.

Aus der eben aufgestellten allgemeinen Relation folgt u. A. auch die Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \overline{G}_{\sigma\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) g(x^{\lambda})\,\mu_\sigma(x) = \overline{G}_\lambda(n).$$

Mit Hilfe des in den bisherigen Entwicklungen benützten Verfahrens beweist man endlich den Satz:

Ist die Function $g_1(x)$ so beschaffen, die die über alle der Gleichung

$$x^\lambda y^\mu = z$$

genügenden Werthe von x ausgedehnte Summe $G_1(z)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem die Zahl z eine bestimmte Eigenschaft besitzt oder nicht, ist ferner $\overline{G}'_\lambda(n)$ die Summe der Werthe, welche das Product $g_1(x)h(x)$, dessen Factor $h(x)$ die Bedingung

$$h(x)h(y) = h(xy)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

erfüllt, annimmt, wenn sein Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ durchlauft, welche λte Potenzen sind, so gibt die Summe

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\nu]{n}\right]} \overline{G}'_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\nu}\right]\right) h(x^\nu)$$

die Summe jener Werthe an, welche die Function $h(x)$ erhält, wenn für ihr Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen von 1 bis n gesetzt werden, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: Arithmetische Relationen. 1054-1071