Über Achromasie

von

Dr. **Hanns Pitsch,**

k. k. Gymnasiallehrer in Böhmisch-Leipa.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. October 1891.)

Bei der Berechnung achromatischer Prismen nach der von Euler (1747) und Dollond (1757)[1] aufgestellten Grundlage erfüllt man die Bedingung, dass die äussersten, sichtbaren Strahlen des Spectrums, nämlich die rothen und violetten, nach der Brechung in den Prismen parallel zu einander austreten. Natürlich kann diese Berechnung nur für einen ganz bestimmten Einfallswinkel gelten. Die Erfahrung zeigt nun, dass ein nach dieser Berechnung construirtes Prismensystem zwar eine Stellung gegenüber dem einfallenden Lichte besitzt, in welcher eine gute Achromasie erzielt wird, dass aber dann der Einfallswinkel des Lichtes nicht mit dem der Rechnung zu Grunde gelegten übereinstimmt. Eine bessere Übereinstimmung beider wird erreicht, wenn man die Rechnung so einrichtet, dass die gelben und violetten Strahlen parallel das Prismensystem verlassen, wiewohl auch

---

[1] Da der Antheil, welchen beide Männer an der bedeutenden Entdeckung besitzen, nur selten im richtigen Lichte dargestellt wird, möge hier eine darauf bezügliche Stelle aus Euler's Werk: Instruction détaillée pour porter les lunettes de toutes les différentes espèces au plus haut dégré de perfection dont elles sont susceptibles (A St. Pétersbourg, 1774), angeführt werden. Es heisst darin auf dem dritten Blatte der Vorrede: C'est sur cette preuve que j'ai hardiment soutenû, qu'en emploïant différens milieux transparens, il serait très possible de diminuer, de reduire même à rien, tous les défauts aux quels la différente réfraction des rayons parut alors nécessairement assujettie.

Ce sentiment fut bientôt attaqué, avec beaucoup de chaleur par feu Mr. Dollond, qui soutint encore longtemps, que la démonstration rapportée du grand Newton était très solidement fondée, ne saurait souffrir dann noch die angegebene Differenz auftritt und die Thatsache bestehen bleibt, dass man für zwei, durch ihre Brechungsquotienten für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien gegebene Glassorten nicht unmittelbar das zu einem bestimmten Prisma der einen Glassorte gehörige, achromatisirende Prisma der anderen Sorte bei vorgeschriebenem Einfallswinkel des Lichtes berechnen kann.

Der Unterschied in den oben erwähnten Rechnungsmethoden liegt in dem Umstande, dass bei der einen das Verhältniss der totalen Dispersionen, bei der anderen jenes der partiellen Dispersionen beider, zu einem achromatischen System verbundenen Glassorten genommen wird. Formell ausgedrückt, ist also für die eine Rechnungsweise das Verhältniss $\frac{n_v - n_r}{n'_v - n'_r}$, für die zweite $\frac{n_v - n_g}{n'_v - n'_g}$, oder in abgekürzter Schreibweise $\frac{\Delta n_{vr}}{\Delta n'_{vr}}$, $\frac{\Delta n_{rg}}{\Delta n'_{rg}}$ massgebend, wenn man die Brechungsquotienten der beiden Glassorten mit n, n' bezeichnet und die Farbe, für welche sie gelten, durch den Anfangsbuchstaben ihrer Benennung oder das Zeichen der Fraunhofer'schen Linie als Index sichtbar macht. Je nach der Wahl beider Farben ist aber das Verhältniss der partiellen Dispersionen zweier Glassorten sehr verschieden,[1] und

---

la moindre exception. Pour appuyer son opinion, il s'est avisé de faire plusieures expériences, sur la réfraction de différentes matières transparentes, principalement sur les différentes espèces de verre; or ces experiences ont si bien réussi, que mon sentiment en a été entièrement confirmé, que Mr. Dollond a été obligé de réconnaître son erreur. C'est sans doute une des plus importantes découvertes, vû qu'elle a déterminé cet habile artiste, travailler avec le plus grand empressement à la perfection des lunettes ordinaires; il y a si bien réussi, qu'après un grand nombre d'essais inutiles, il a produit des lunettes, qui ont mérité d'abord l'admiration de tout le monde; par son application infatigable il les a enfin portées à un si haut dègré de perfection, qu'on les a généralement préférées aux télescopes catoptriques.

[1] So ist z. B. für zwei von den Herren Dr. Steinheil und Dr. Voit, Handbuch der angewandten Optik I, (S. 26), angeführte Glassorten, Flintglas Nr. 318 und Crownglas Nr. 506:

$$\frac{n_D - n_F}{n'_D - n'_F} = 0\cdot548; \quad \frac{n_F - n_G}{n'_F - n'_G} = 0\cdot520; \quad \frac{n_G - n_H}{n'_G - n'_H} = 0\cdot498.$$

schon Fraunhofer[1] bemühte sich, eine zur Berechnung jenes Verhältnisses, welches den besten optischen Gesammteffect liefert. brauchbare Formel abzuleiten. Die Formel, welche er hiefür aufstellte, weicht nicht unbeträchtlich von der Erfahrung ab. Später formten die Herren C. A. Steinheil und L. v. Seidel[2] die Fraunhofer'sche Formel um und erzielten hiemit wohl eine bessere, nicht aber eine in allen Fällen genügende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung. Ergebnisse solcher Art zeigen wohl hinreichend, dass die Grundlage der Lehre von der Achromasie noch keine gesicherte ist, und es möge daher im Folgenden der Versuch unternommen werden, eine mit der Erfahrung übereinstimmende Theorie derselben aufzustellen.

Die Betrachtungen sollen sich auf ein achromatisches Doppelprisma beziehen, das in der bekannten Weise aus zwei verschiedenen Glassorten zusammengesetzt ist. An einem solchen System ergeben sich die Verhältnisse am übersichtlichsten, und die Ausdehnung der Resultate auf andere Fälle bietet weiter keine Schwierigkeiten.

Auf das Prismensystem fällt ein Bündel paralleler, weisser Strahlen unter dem Einfallswinkel i und wird beim Durchgang durch die Prismen in seine farbigen Bestandtheile zerlegt, die dann unter verschiedenen Winkeln i_f die Prismen verlassen. i_f hängt von der Farbe des betreffenden Lichtstrahles ab, ist also eine Function der Wellenlänge l. Was für eine Function das sein kann, lehrt folgende Betrachtung. Bekanntlich besteht zwischen dem Winkel i, unter welchem ein Lichtstrahl in das Prisma mit dem brechenden Winkel α eintritt, und dem Winkel i_1, unter welchem er das Prisma wieder verlässt, die Relation:

$$\sin i_1 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \sin i.$$

Nach Cauchy's Dispersionsformel gibt es für den Brechungsquotienten n eine Reihe von der Form:

$$n = a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4} +$$

---

[1] Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernrohre. Fraunhofer's Gesammelte Schriften, S. 21.

[2] Siehe Handbuch der angewandten Optik von Dr. A. Steinheil und Dr. E. Voit, I, S. 253.

und ebenso lässt sich jede beliebige Potenz von n in eine nach steigenden Potenzen der Grösse $\frac{1}{l^2}$, die wir der Kürze wegen mit x bezeichnen wollen, geordnete Reihe entwickeln. Für $\sqrt{n^2-\sin^2 i}$ bekommt man daher die Entwicklung:

$$\sqrt{n^2-\sin^2 i} = n\left(1-\frac{1}{2}\frac{\sin^2 i}{n^2}-\frac{1}{8}\frac{\sin^4 i}{n^4}- \qquad\qquad \right) =$$
$$= m_0+m_1x+m_2x^2+\ldots$$

so dass auch für $\sin i$ eine Reihe von der Form:

$$\sin i_1 = p_0+p_1x+p_2x^2+$$

gilt. Dringt nun der Lichtstrahl nach dem Verlassen des ersten Prismas in ein zweites, dessen erste Fläche parallel zur letzten des anderen Prismas steht, und verlässt er dasselbe unter dem Winkel i_2, so muss wieder:

$$\sin i_2 = \sin\alpha' \sqrt{n'^2-\sin^2 i_1}-\cos\alpha' \sin i_1,$$

wenn α' den Winkel und n' den Brechungsquotienten des zweiten Prismas bedeutet. Setzt man nun für $\sin i_1$ und n' die ihnen entsprechenden, nach steigenden Potenzen von x geordneten Reihen, so resultirt auch für $\sin i_2$ eine Reihe gleicher Art:

$$\sin i_2 = q_0+q_1x+q_2x^2+\,.$$

Um das Verhalten des Winkels i_f in der Nähe eines Werthes i_0, welcher der Wellenlänge l_0 entsprechen soll, zu untersuchen, wird man die Function i_f nach dem Taylor'schen Lehrsatz in eine Reihe entwickeln:

$$i_f = (i_f)_0+\left(\frac{di_f}{dx}\right)_0(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2i_f}{dx^2}\right)_0(x-x_0)^2+\,.$$

wobei $x_0 = \frac{1}{l_0^2}$ und der Zeiger 0 andeutet, dass der betreffende Differentialquotient für eine bestimmte Farbe mit der Wellenlänge l_0 zu nehmen ist. Der Unterschied zwischen i_f und $(i_f)_0$, also die Abweichung des austretenden Strahles der Wellenlänge l von jenem mit der Wellenlänge l_0 ist demzufolge:

$$i_f-(i_f)_0=\left(\frac{di_f}{dx}\right)_0(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2i_f}{dx^2}\right)_0(x-x_0)^2+\ldots \qquad 1)$$

Wegen der vorausgesetzten Convergenz dieser Reihe werden ihre Glieder umso kleiner, je mehr sie sich vom Anfangsglied entfernen. Bei vollkommener Achromasie müsste $i_f-i_0=0$, was auch l und l_0 bedeuten mögen. Diesem unmöglich zu erreichenden Idealzustand wird man sich umsomehr nähern, je mehr Glieder der Reihe man zum Verschwinden bringen kann, weil auch dann für jedes beliebige l die Differenz $i_f-(i_f)_0$ immer kleinere Werthe erhält. Die erste Bedingung für eine angenäherte Achromasie ist also:

$$\left(\frac{di_f}{dx}\right)_0=0.$$

Ist aber bei der Erfüllung dieser Bedingung die Bedeutung der Wellenlänge l_0 gleichgiltig? Über die richtige Wahl dieser Grösse liefert folgende Überlegung Aufschluss. Wenn man ein Doppelprisma so herstellt, dass die rothen und violetten Strahlen parallel austreten, so unterliegt es keinem Zweifel, dass man beim Gebrauche des optischen Systems nicht auf diese lichtschwachen Strahlen einstellt, sondern dass für die Einstellung jene, wenn auch nur wenig abweichende Richtung massgebend sein wird, in welcher die lichtstärksten Strahlen austreten. Wozu wurde aber dann der Parallelismus gerade für die genannten Strahlen erzielt? Ausserdem treten nicht nur die rothen und violetten Strahlen parallel zu einander aus, sondern im Allgemeinen gibt es für jede Farbe noch eine andere, deren Strahlen parallel mit den ihrigen austreten, wenn auch der Winkel, unter welchem dies geschieht, für jedes solche Farbenpaar eine andere Grösse besitzt. Und jedes dieser Farbenpaare hätte man mit gleichem Erfolge der Berechnung zu Grunde legen können. Bei einer anderen Wahl der Farben, für deren Strahlen man unmittelbar den Parallelismus nach der Brechung herstellt, ändert sich auch die Art der übrigen Farbenpaare mit Parallelstrahlen und zweifellos auch die Einstellung. Gegenüber dieser Willkür in der Berechnung zeigt aber die Erfahrung, dass es nur eine Stellung des optischen Systems in Bezug auf das einfallende Licht gibt, in welcher eine möglichst vollkommene Achromasie stattfindet.

Die oben für die Achromasie aufgestellte Bedingungsgleichung zeigt, dass bei ihrer Erfüllung die Strahlen von der Wellenlänge l_0 möglichst nahe beisammenbleiben, indem der Parallelismus zweier Nachbarstrahlen, da $(di_f)_0 = 0$ ist, sich auch nach der Brechung erhält. Ein solches Verhalten ist aber gerade für die wirksamsten Strahlen erwünscht, und man wird also für l_0 die Wellenlänge der wirksamsten Strahlen zu setzen haben. Für optische Zwecke sind es jene, welche die grösste Lichtintensität besitzen, für chemische Zwecke, z. B. bei photographischen Anwendungen, sind es jene, welchen die grösste chemische Wirksamkeit zukommt. Wir wollen den ersten Fall annehmen, da er wohl am häufigsten eintritt.

Fraunhofer hat die Helligkeitsverhältnisse des Sonnenspectrums untersucht und für dasselbe die Helligkeitscurve gezeichnet.[1] Die betreffende Zeichnung ist auch in Steinheil und Voit's Handbuch der angewandten Optik[2] genau reproducirt. Trägt man für die in derselben verzeichneten Fraunhofer'schen Linien die Wellenlänge ein (es sollen im Folgenden immer die von Herrn Prof. Dr. L. Ditscheiner gefundenen genommen werden), so findet man leicht, dass die grösste Lichtintensität circa der Wellenlänge $0 \cdot 574\ \mu$ entspricht und einen diesem Werthe gleich oder nahe kommenden wird man der Wellenlänge l_0 zur Erzielung einer möglichst vollkommenen Achromasie beilegen.

Um die Theorie mit der Erfahrung vergleichen zu können, wollen wir einen speciellen Fall der Berechnung unterziehen. Wir betrachten den Gang des Bündels paralleler Strahlen durch ein Doppelprisma aus zwei verschiedenen Glassorten. Es seien α und α' die Winkel der beiden vereinigten Prismen, positiv gerechnet, wenn sich die brechende Kante nach der einen, negativ, wenn sie sich nach der anderen Seite kehrt. Das erste Prisma wird von den Strahlen unter dem Winkel i getroffen, der immer positiv in Rechnung kommt. Nach dem Vorgang im genannten Handbuch[3] erhält der erste Prismenwinkel das negative Zeichen, wenn das Einfallsloth zwischen dem einfallenden Strahl und der

[1] Fraunhofer's gesammelte Schriften, 1. Abhandl., Taf. II.

[2] Taf. I.

[3] S. 24.

brechenden Kante liegt, und im Gegenfalle das positive. Das Zeichen des zweiten Prismenwinkels richtet sich dann nach seiner Lage in Bezug auf den ersten. Nach der Brechung an der Prismenfläche bildet der Strahl mit dem Lothe einen Winkel r_1, gelangt unter dem Winkel r_2 an die zweite Fläche, tritt unter dem Winkel r'_1 in das zweite Prisma, erreicht die zweite Fläche desselben unter dem Winkel r'_2 und verlässt es unter dem Winkel i'. Die Winkel r_1, r_2, r'_1, r'_2, i' bekommen jenes Zeichen, welches nach obigen Festsetzungen aus dem Brechungsgesetze folgt. Dann gelten für den Gang des Lichtes durch das Doppelprisma die Formeln:

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r_1 \\ r_2 &= r_1 + \alpha \\ n \sin r_2 &= n' \sin r'_1 \\ r'_2 &= r'_1 + \alpha' \\ n' \sin r'_2 &= \sin i', \end{aligned}$$

oder nach Elimination der Grössen r_2 und r'_2:

$$\left.\begin{aligned} \sin i &= n \sin r_1 \\ n \sin (r_1 + \alpha) &= n' \sin r'_1 \\ n' \sin (r'_1 + \alpha') &= \sin i'. \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Ferner ist die Ablenkung δ, welche der Lichtstrahl beim Durchgang durch das Doppelprisma erleidet, aus der Gleichung:

$$\delta = i - i' + \alpha + \alpha'$$

zu rechnen. Durch Differentiation nach der Grösse x ergeben sich die Ausdrücke:

$$\cos i \frac{di}{dx} = \sin r_1 \frac{dn}{dx} + n \cos r_1 \frac{dr_1}{dx}$$

$$\sin (r_1 + \alpha) \frac{dn}{dx} + n \cos (r_1 + \alpha) \frac{dr_1}{dx} = \sin r'_1 \frac{dn'}{dx} + n' \cos r'_1 \frac{dr'_1}{dx}$$

$$\sin (r'_1 + \alpha) \frac{dn'}{dx} + n' \cos (r'_1 + \alpha') \frac{dr'_1}{dx} = \cos i' \frac{di'}{dx}$$

Die Endgleichung zur Bestimmung von $\frac{di'}{dx}$ erhält man durch Berücksichtigung des Umstandes, dass $\frac{di}{dx} = 0$, da für alle

Strahlen der Einfallswinkel derselbe bleibt, und durch Elimination der Grössen $\frac{dr_1}{dx}$ und $\frac{dr'_1}{dx}$. Letztere vollzieht sich wohl am einfachsten, wenn man die erste Gleichung mit dem Factor: $\cos(r_1+\alpha).\cos(r'_1+\alpha')$, die zweite mit: $\cos r_1 \cos(r'_1+\alpha')$, die dritte mit $\cos r_1 \cos r'_1$ multiplicirt und die so veränderten Gleichungen addirt.

$$\sin(r_1+\alpha)\cos r_1 \cos(r'_1+\alpha')\frac{dn}{dx}+\sin(r'_1+\alpha)\cos r_1 \cos r'_1 \frac{dn'}{dx}=$$

$$=\sin r_1 \cos(r_1+\alpha)\cos(r'_1+\alpha')\frac{dn}{dx}+\sin r'_1 \cos r_1 \cos(r'_1+\alpha')\frac{dn'}{dx}+$$

$$+\cos r_1 \cos r'_1 \cos i' \frac{di'}{dx}$$

Eine passende Zusammenfassung entsprechender Glieder führt ferner zur Gleichung:

$$\cos r_1 \cos r'_1 \cos i' \frac{di'}{dx}=$$

$$\cos(r'_1+\alpha')[\sin(r_1+\alpha)\cos r_1-\cos(r_1+\alpha)\sin r_1]\frac{dn}{dx}+$$

$$+\cos r_1[\sin(r'_1+\alpha')\cos r'_1-\cos(r'_1+\alpha')\sin r'_1]\frac{dn'}{dx},$$

oder:

$$\cos r_1 \cos r'_1 \cos i' \frac{di'}{dx}=\sin\alpha\cos(r'_1+\alpha)\frac{dn}{dx}+\sin\alpha'\cos r_1\frac{dn'}{dx};$$

$$\cos r_1 \cos r'_1 \cos i' \frac{di'}{dx}=\sin\alpha\cos r_2\frac{dn}{dx}+\sin\alpha'\cos r_1\frac{dn'}{dx}.$$

Die Bedingung $\frac{di'}{dx}=0$ ist also gleichbedeutend mit der Gleichung:

$$\sin\alpha\cos r_2\frac{dn}{dx}+\sin\alpha'\cos r_1\frac{dn'}{dx}=0,$$

welche im Verein mit den aus der Anwendung des Brechungsgesetzes abgeleiteten Formeln die Bedingung für eine möglichst gute Achromasie angibt. Sie ist nichts Anderes als eine Gleichung zur Bestimmung des besten Verhältnisses $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$, nämlich als Differentialquotient $\frac{dn}{dn'}$, genommen für die Wellenlänge l_0.

Da $\frac{dn}{dx}$ und $\frac{dn'}{dx}$ für die in Betracht kommenden Körper gleich bezeichnet sind, und $\cos r_1$, $\cos r_2'$ der Natur der Sache nach nur positiv sein können, so ist die Gleichung nur erfüllbar, wenn α und α' entgegengesetzt bezeichnet, also bei beiden Prismen die brechenden Kanten entgegengesetzt gerichtet sind.

Eine weitere, leichte Verification bietet die Anwendung der Formel für den Fall, dass beide Glassorten identisch, also $n = n'$ und $\frac{dn}{dx} = \frac{dn'}{dx}$ ist. Dann wird sofort auch $r_2 = r_1'$, $r_2' = r_1' + \alpha' = = r_2 + \alpha'$, und die Bedingungsgleichung für Achromasie lautet:

$$\cos(r_2 + \alpha') \sin\alpha + \cos(r_2 - \alpha) \sin\alpha' = 0$$

und in weiterer Ausführung:

$$\cos r_2 (\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha') + \sin r_2 (\sin\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha') = 0$$
$$\cos r_2 \sin(\alpha + \alpha') = 0.$$

Da der Factor $\cos r_2$ der Natur der Sache nach nicht Null werden kann, so ist nur die Lösung: $\sin(\alpha + \alpha') = 0$, $\alpha + \alpha' = 0$ möglich. Die Winkel der beiden Prismen müssen entgegengesetzt gleich sein.

Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge des benützten Lichtes wird im vorliegenden Fall am besten nach Cauchy's Dispersionsformel dargestellt:

$$n = a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4} + \quad = a + bx + cx^2 + \ldots$$
$$n' = a' + \frac{b'}{l^2} + \frac{c'}{l^4} + \ldots = a' + b'x + c'x^2 +$$

Aus dieser Annahme folgen für die in Betracht kommenden Differentialquotienten die Werthe:

$$\frac{dn}{dx} = b + 2cx + \ldots = b + \frac{2c}{l^2} + \ldots$$
$$\frac{dn'}{dx} = b' + 2c'x + \ldots = b' + \frac{2c'}{l^2} +$$

Hiedurch bekommt die Bedingungsgleichung für Achromasie die Gestalt:

$$\frac{\sin\alpha'\cos r_1}{\sin\alpha\cos r_2'}+\frac{b+\frac{2c}{l^2}}{b'+\frac{2c'}{l^2}}=0, \tag{3}$$

in welcher sie am besten mit der Erfahrung verglichen werden kann.

Die Herren Steinheil und Voit theilen in ihrem Handbuch der angewandten Optik [1] ausführliche Messungen an einem Doppelprisma aus Crown- und Flintglas mit, bei welchem die Winkel die Grössen:

$$\alpha = -(60^\circ\ 2'\ 10\cdot8''),\quad \alpha' = 33^\circ\ 35'\ 47\cdot3''$$

besitzen. Die Brechungsquotienten der genannten Glassorten für die Fraunhofer'schen Linien D_2, E, F sind: [2]

	Crownglas n	Flintglas n'	l
D_2 . .	1·516274	1·603528	0·58910
E.	1·519570	1·609450	0·52713
F. . .	1·522437	1·614771	0·48622

aus welchen Angaben sich für die Cauchy'sche Dispersionsformel folgende Constanten berechnen:

Crownglas

$a =$ 1·50263546
$b =$ 0·004843852 $\log b = 0\cdot6851909-3$
$c = -0\cdot00003843412$ $\log(-c) = 0\cdot5847170-5$

Flintglas

$a' = 1\cdot58109252$
$b' = 0\cdot007410000$ $\log b' = 0\cdot8698182-3$
$c' = 0\cdot00013048$ $\log c' = 0\cdot1155454-4$

Zur Berechnung der Constanten wurden die Brechungsquotienten für die Fraunhofer'schen Linien D, E, F benützt,

---

[1] S. 28—33.
[2] A. a. O., S. 22 u. 27.

damit die Formel möglichst genau die Brechungsquotienten für den lichtstärksten Theil des Spectrums darstellt. Würde es sich in einem Apparat um die Verwendung der chemisch wirksamen Strahlen handeln, so müsste man einen möglichst genauen Anschluss der Formel an die Beobachtung im blau-violetten Theile des Spectrums erzielen und demgemäss die zur Berechnung der Constanten dienenden Wellenlängen für Strahlen aus diesem Theile wählen.

Die Beobachtung an dem oben angeführten Doppelprisma ergab, dass die Einstellung auf beste Achromasie dann erreicht ist, wenn die Strahlen eine Ablenkung $\gamma = 13° \, 36' \, 57 \cdot 8''$ erfahren. Weiter ergibt sich, dass die Einstellung des Doppelprismas auf beste Achromasie mit keinem besonderen Grad von Genauigkeit erfolgt, indem der mittlere Fehler des Resultates ungefähr dreissigmal grösser ist als jener bei der Bestimmung des Prismenwinkels.[1] Die Richtigkeit unserer Theorie vorausgesetzt, dass die Einstellung auf die parallel gemachten, lichtstärksten Strahlen erfolgt, lässt sich dieser Umstand sehr leicht erklären, da eben in der Nähe dieses Maximums eine kleine Änderung der Wellenlänge des Lichtes, wie auch aus der Fraunhofer'schen Zeichnung der Helligkeitscurve des Spectrums deutlich hervorgeht, keine nennenswerthe Änderung der Intensität bewirkt, also auch eine kleine Änderung der Einstellung keine sonderliche Veränderung des Bildes bewirken kann.

Zur Prüfung der Theorie hat man nun zu untersuchen, welche Strahlen im Prisma die angegebene Ablenkung erfahren und gleichzeitig den Formeln 2) und 3) genügen. Durch Anwendung einer beliebigen Näherungsmethode gelangt man zu dem Werthe $l_0 = 0 \cdot 57382$.

Für denselben ergibt sich:

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 \cdot 516992, \quad n'_0 = 1 \cdot 604801 \\ i &= 46° \; 36' \; 33'' \\ r_1 &= 28 \;\; 37 \;\; 19 \cdot 4 \\ r_2 &= -(31 \;\; 24 \;\; 51 \cdot 4) \\ r'_1 &= -(29 \;\; 31 \;\;\; 6 \cdot 3) \\ r'_2 &= 4 \;\;\; 4 \;\; 41 \cdot 0 \end{aligned}$$

[1] A. a. O., S. 31.

$$i' = 6° \, 33' \, 11 \cdot 6''$$
$$\gamma = 13 \quad 36 \quad 57 \cdot 9$$

$$\frac{dn}{dn'} = \frac{b + \frac{2c}{l_0^2}}{b' + \frac{2c'}{l_0^2}} = 0 \cdot 56207$$

Der gefundene Werth l_0 entspricht vollkommen der Wellenlänge für die von Fraunhofer angegebene Stelle der grössten Lichtintensität im Spectrum des Sonnenlichtes. Für das beste Verhältniss $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ ergab eine auf die Beobachtung gegründete Rechnung: 0·5628.[1] Nach der von den Herren Steinheil und Seidel aufgestellten, verbesserten Fraunhofer'schen Formel ergibt sich das Verhältniss für den besten optischen Gesammteffect der genannten Glassorten zu: 0·5590,[2] welcher Werth ziemlich bedeutend von dem auf die Beobachtung gegründeten abweicht. Der aus unserer Theorie abgeleitete Werth 0·5621 stimmt mit dem aus der Beobachtung folgenden umso vollkommener, als ja der letztere nicht unmittelbar aus der Beobachtung stammt, sondern unter der nicht ganz richtigen Voraussetzung berechnet wurde, dass die Einstellung auf die parallel austretenden gelben (Linie *D*) und violetten Strahlen erfolgt.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung möge noch an einem zweiten Beispiele dargethan werden. Fraunhofer[3] bestimmte experimentell für Crownglas Nr. 13 und Flintglas Nr. 30 den für die Berechnung besten Werth des Zerstreuungsverhältnisses $\frac{\Delta n'}{\Delta n} = 1 \cdot 98$. Die Brechungsquotienten für die genannten Glassorten sind:

		n'	l
D	1·527982	1·630585	0·58942
E	1·531372	1·637356	0·52713
F	1·534337	1·643466	0·48622

---

[1] A. a. O., S. 32.
[2] S. 27.
[3] Gesammelte Schriften, S. 21.

Aus diesen Bestimmungen ergeben sich die Constanten:

Crownglas

$$a = 1\cdot 51438421$$
$$b = 0\cdot 0047391063 \qquad \log b = 0\cdot 6756965-3$$
$$c = -0\cdot 00000521793 \quad \log(-c) = 0\cdot 7174983-6$$

Flintglas

$$a' = 1\cdot 60570731$$
$$b' = 0\cdot 0080388922 \qquad \log b' = 0\cdot 9051962-3$$
$$c' = 0\cdot 00020984456 \qquad \log c' = 0\cdot 3218977-4.$$

Die Rechnung liefert dann $\left(\frac{dn'}{dn}\right)_0 = \frac{b'+\frac{2c'}{l_0^2}}{b+\frac{2c}{l_2^0}} = 1\cdot 9785$

Auch hier ist die Übereinstimmung soviel wie vollkommen. Es ist somit der Beweis erbracht, dass der beste optische Gesammteffect bei einem achromatischen Doppelprisma erzielt ist, wenn für die wirksamen Strahlen der Parallelismus zweier unmittelbar benachbarter Strahlen auch nach der Brechung aufrecht bleibt.

Es erscheint nur noch wünschenswerth, dass man den Werth für l_0 nicht, wie es in der vorliegenden Arbeit nothgedrungen geschehen, aus einem einzigen Experiment ableitet, sondern für diesen Zweck eine ganze Reihe von Versuchen unternehmen würde, was umsomehr zu empfehlen wäre, als ja die praktische Optik ein wesentliches Interesse an der genauen Kenntniss dieses Werthes besitzt.

Das bei der Construction achromatischer Doppelprismen am häufigsten vorkommende Problem ist jenes, zu einem gegebenen Prisma für einen vorgeschriebenen Einfallswinkel des Lichtes jenes Prisma aus einer bestimmten Glassorte zu rechnen, welches die beste Achromasie bewirkt. Hiefür gestatten die abgeleiteten Formeln eine ziemlich bequeme Lösung. Der Gang der Rechnung ist ohne Schwierigkeit aus Folgendem ersichtlich:

$$n_0 = a + \frac{b}{l_0^2} + \frac{c}{l_0^4} \qquad n'_0 = a' + \frac{b'}{l_0^2} + \frac{c'}{l_0^4}$$

$$\left(\frac{dn'}{dn}\right)_0 = \frac{b'+\frac{2c'}{l_2^0}}{b+\frac{2c}{l_0^2}}$$

$$\sin r_1 = \frac{\sin i}{n_0}$$
$$r_2 = r_1 + \alpha$$
$$\sin r'_1 = \frac{n_0}{n'_0} \sin r_2$$
$$\operatorname{cotg} \alpha' = \operatorname{tg} r'_1 - \frac{\cos r_1}{\cos r'_1 \sin \alpha} \left(\frac{dn'}{dn}\right)_0 \qquad 4)$$

Aus Gleichung 3) folgt nämlich:

$$\frac{\cos(\alpha'+r'_1)}{\sin \alpha'} = -\frac{\cos r_1}{\sin \alpha} \left(\frac{dn'}{dn}\right)_0$$
$$\cos r'_1 \cot \alpha' - \sin r'_1 = -\frac{\cos r_1}{\sin \alpha} \left(\frac{dn'}{dn}\right)_0,$$

aus welch' letzter Beziehung unmittelbar die Gleichung 4) hervorgeht. In Bezug auf ihre Anwendung möge nochmals darauf hingewiesen werden, dass auch für die darin vorkommenden Winkelgrössen die oben angeführte Zeichenregel gilt.

Von den drei in Betracht kommenden Grössen α, α', i können bei der Construction eines achromatischen Doppelprismas zwei beliebig gewählt werden, während über die dritte dann schon verfügt ist. Es liegt der Gedanke nahe, nur eine Grösse beliebig zu wählen und die beiden andern so zu bestimmen, dass nicht nur $\left(\frac{di'}{dx}\right)_0$, sondern auch noch $\left(\frac{d^2 i}{dx^2}\right)_0 = 0$, wodurch zweifellos der Grad der Achromasie sich erhöhen müsste. Die diesbezüglichen Gleichungen sind leicht zu entwickeln, bei ihrer Anwendung auf concrete Fälle zeigt sich aber, dass unter Benützung von Crown- und Flintglas die Auflösungen zum Theil imaginär ausfallen. Eine solche erhöhte Achromasie ist eben nur bei der Anwendung mehrerer Prismen zu erreichen. Die darauf bezüglichen Formeln, deren Entwicklung keine wesentlichen Schwierigkeiten bereitet, mögen übergangen werden, da der Fall mehrfacher achromatischer Prismen nur sehr selten in der Praxis vorkommt.

Die Anwendung der oben entwickelten Theorie auf die Lehre von den achromatischen Linsensystemen ergibt sich fast von selbst. Die Brennweite eines Linsensystems kann man durch die Brennweite der einzelnen Linsen und ihre Distanzen von einander darstellen. Die Brennweite jeder Linse, oder besser ihr reciproker Werth lässt sich als Function des Brechungsexponenten n durch eine nach steigenden Potenzen der Grösse $\frac{1}{l^2} = x$ geordnete Reihe ausdrücken. Durch genau dieselben Überlegungen, wie sie früher angestellt wurden, kommt man zu der Entwicklung:

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{F_0} = \left(\frac{d\frac{1}{F}}{dx}\right)_0 (x-x)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\frac{1}{F}}{dx^2}\right)(x-x_0)^2 +$$

Die Achromasie wird einen umso höheren Grad erlangen, je mehr Glieder der Reihe man zum Verschwinden bringt. Die erste Bedingung, welche eine achromatische Combination zu erfüllen hat, ist also $\left(\frac{d\frac{1}{F}}{dx}\right)_0 = 0$ und falls dann noch verfügbare Grössen übrig bleiben $\left(\frac{d^2\frac{1}{F}}{dx^2}\right)_0 = 0$ u. s. w.

Es möge auch hier die Theorie beispielsweise auf einige specielle Fälle einfacher Art angewendet werden. Ein System von Linsen, welche so dicht aneinander stehen, dass man ihre gegenseitigen Entfernungen vernachlässigen kann, ist die Brennweite bekanntlich durch die Gleichung:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} + \frac{1}{\varphi''} +$$

gegeben, wenn $\varphi, \varphi', \varphi''$ die Brennweiten der einzelnen Linsen darstellt. Die Bedingungsgleichungen für Achromasie sind dann:

$$\sum\left(\frac{d\frac{1}{\varphi}}{dn} \; \frac{dn}{dx}\right)_0 = 0$$

$$\sum\left[\frac{d^2\frac{1}{\varphi}}{dn^2}\left(\frac{dn}{dx}\right)^2 + \frac{d\frac{1}{\varphi}}{dn} \; \frac{d^2 n}{dx^2}\right]_0 = 0$$

Unter der üblichen Vernachlässigung der Linsendicke ist bekanntlich:

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

und daher:

$$\frac{d\,\frac{1}{\varphi}}{dn} = \frac{1}{n-1}\;\frac{1}{\varphi}, \qquad \frac{d^2\,\frac{1}{\varphi}}{dn^2} = 0.$$

Die endgiltigen Formen der Bedingungsgleichungen sind daher:

$$\sum\left(\frac{1}{\varphi}\;\frac{\frac{dn}{dx}}{n-1}\right)_0 = 0$$

$$\sum\left(\frac{1}{\varphi}\;\frac{\frac{d^2 n}{dx^2}}{n-1}\right)_0 = 0$$

Die erste dieser Gleichungen hat die Form jener, welche für diesen Fall immer angeführt werden, nur dass der bestimmte Ausdruck $\frac{dn}{dx}$ für $x = \frac{1}{l_0^2}$ an Stelle der willkürlichen Grösse Δn getreten. Wesentlich neu sind die folgenden Gleichungen, die freilich erst bei der Erzielung höherer Grade der Achromasie unter Anwendung mehrerer Linsen zur Benützung kommen.

Die Frage, ob man nicht auch in besonderen Fällen durch Anwendung nur zweier Linsen eine Achromasie höherer Ordnung herzustellen ist, muss wieder verneint werden. Denn die Lösung dieses Problems enthalten die Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{dn}{dx}}{n-1}\right)_0 + \frac{1}{\varphi_0'}\left(\frac{\frac{dn'}{dx}}{n'-1}\right)_0 = 0$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{d^2 n}{dx^2}}{n-1}\right)_0 + \frac{1}{\varphi_0'}\left(\frac{\frac{d^2 n'}{dx}}{n'-1}\right)_0 = 0$$

und es ist ersichtlich, dass beide Gleichungen, aus welchen nur das Verhältniss der Grössen φ bestimmbar ist, sich widersprechen. Doch ist die Lösung sofort möglich, wenn man drei Linsen aus verschiedenen Glassorten combinirt. Ist nämlich die Brennweite F der ganzen Combination festgestellt, so ergeben sich die Brennweiten der drei Linsen aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi_0}+\frac{1}{\varphi'_0}+\frac{1}{\varphi''_0}=\frac{1}{F_0}$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{dn}{dx}}{n-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi'_0}\left(\frac{\frac{dn'}{dx}}{n'-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi''_0}\left(\frac{\frac{dn''}{dx}}{n''-1}\right)_0=0$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{d^2n}{dx^2}}{n-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi'_0}\left(\frac{\frac{d^2n'}{dx^2}}{n'-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi''_0}\left(\frac{\frac{d^2n''}{dx^2}}{n''-1}\right)_0=0.$$

Wie aus den gewählten Beispielen hervorgeht, kommen in den Gleichungen zur Berechnung mehrelementiger, achromatischer Systeme die höheren Differentialquotienten der Brechungsexponenten vor. Zu ihrer Berechnung müssen immer mehr und mehr Glieder der Cauchy'schen Dispersionsformel herangezogen werden, so dass zur Erzielung höherer Grade der Achromasie auch die Brechungsverhältnisse der betreffenden Glassorten immer genauer und genauer bekannt sein müssen. Ferner finden sich in den Gleichungen nicht die Differentialquotienten der Brechungsexponenten selbst, sondern ihre Verhältnisse zu einander, z. B. $\frac{dn}{dn'}$, $\frac{d^2n}{d^2n'}$ u. s. w. Man kann daher ohne Änderung der Resultate für die Abhängigkeit der Brechungsquotienten von der Wellenlänge statt der Cauchy'schen irgend eine andere, mit der Erfahrung übereinstimmende Dispersionsformel, z. B. die so exacte Formel von Helmholtz, anwenden. Hängt nämlich in einer solchen Formel der Brechungsquotient unmittelbar von der Grösse u ab, die selbst wieder eine Function der Wellenlänge darstellt, so können sofort die in die Gleichung eingehenden Verhältnisse, wie $\frac{dn}{dn'}=\frac{\frac{dn}{du}}{\frac{dn'}{du}}$ u. s. w. abgeleitet werden.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Pitsch Hanns

Artikel/Article: Über Achromasie. 1105-1121