Über die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung

von

Prof. Dr. **E. Weiss**,
w. M. k. Akad.

Im Laufe der letzten Jahre wurden von verschiedenen Seiten Methoden vorgeschlagen, bei der Berechnung der Bahn eines Körpers unseres Sonnensystems noch Glieder mit höheren Potenzen der Zwischenzeiten zu berücksichtigen als Olbers und Gauss in ihren Methoden beibehalten haben. Solche Methoden hätten ausser einem hohen theoretischen Interesse auch einen bedeutenden praktischen Werth, selbst wenn durch ihre Anwendung die Rechnung beträchtlich vergrössert würde, falls man hoffen könnte, dadurch schon gleich bei einer ersten Bahnberechnung ein der Wahrheit recht nahe kommendes Resultat zu erlangen. Dies war am Anfange, ja selbst bis gegen die Mitte unseres Jahrhunderts auch in der That der Fall, wo man bei Planeten mit der Bahnberechnung wartete, bis sich die Beobachtungen über mehrere Monate erstreckten, oder bei Kometen sich häufig damit begnügte, aus drei ziemlich entlegenen, als zuverlässig betrachteten Beobachtungen eine Bahn zu ermitteln. Anders aber liegen die Verhältnisse heutzutage, wo man in der Regel bei Planeten bereits zu einer Bahnberechnung schreitet, wenn die Beobachtungen erst drei, höchstens vier Wochen umspannen, oder bei Kometen, wenn sie kaum mehr als die eben genannte Zahl von Tagen verfolgt wurden. Bei so kurzen Bögen kann man aber nie mehr als eine ganz rohe Annäherung zu erlangen hoffen; es wäre daher nur ein unnützer Zeitverlust, wollte man schon bei einer ersten

Bahnberechnung durch Anwendung einer complicirten Methode und Berücksichtigung aller kleinen Correctionen die äusserste Genauigkeit anstreben. Dies bleibt zweckmässig einer zweiten Bahnbestimmung vorbehalten, für welche man sich nun, da man bereits Näherungswerthe der Elemente besitzt, die nöthigen Daten leicht mit aller wünschenswerthen Genauigkeit verschaffen kann.

Ich theile daher vollkommen die Meinung von Fabritius, dass bei Bahnberechnungen das Mitnehmen von Gliedern mit höheren Potenzen der Zwischenzeiten als den zweiten heutzutage nur dann Aussicht hat, eine allgemeinere Anwendung zu finden, wenn damit kein erheblich grösserer Arbeitsaufwand verbunden ist. Diese Anforderung erfüllt aber keine der bisher vorgeschlagenen Methoden in dem Masse, wie diejenige, deren Grundgedanken Fabritius bereits vor einer Reihe von Jahren in seiner interessanten Abhandlung „Über die Berechnung der richtigen Distanzen durch successive Annäherungen in dem Problem der Bahnbestimmung aus drei beobachteten Orten. Kiew 1877“ entwickelt hat und auf welche er vor Kurzem unter dem Titel „Über eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Principes von Gibbs“ zurückgekommen ist.¹ Diese Methode ist aber leider auf Bahnbestimmungen von Kometen nicht mit Vortheil anwendbar, weil sie Unsicherheiten in die Rechnung hineinträgt, die nicht nothwendigerweise mit dem Probleme verknüpft sind. Dies lässt sich jedoch mittelst allgemeiner Raisonnements nicht leicht darthun; es tritt erst klar hervor, wenn man die Coëfficienten nicht bloss bis zu Zwischengleichungen, sondern bis zu den Schlussgleichungen algebraisch entwickelt, damit auch noch in diesen der Zusammenhang der in ihnen vorkommenden Grössen ersichtlich bleibt. Fabritius leitet überdies seine Fundamentalgleichungen 3) in der letztcitirten Abhandlung auf einem Umwege ab, der abgesehen davon, dass er die auszuführenden Operationen viel weitläufiger erscheinen lässt als sie wirklich sind, noch den viel schwerwiegenderen Übelstand mit sich führt,

¹ Astronomische Nachrichten, Bd. 128, S. 225 ff. Während des Druckes der vorliegenden Abhandlung hat Fabritius in demselben Bande der Astron. Nachr., S. 322, seine Methode auch auf die Bestimmung einer Kometenbahn, aber wieder bloss andeutungsweise, ausgedehnt.

dass die Coëfficienten $\frac{A_1 B_3 - A_3 B_1}{B_3}$, $\frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{B_2}$ u. s. w. nahezu die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Endlich ist es mir noch

gelingen, die Gleichung für die geocentrische Distanz des mittleren Ortes derart zu transformiren, dass die Berechnung derselben sich nicht nur bequemer, sondern was noch wichtiger ist, sicherer gestaltet. Ich werde daher vor Allem die Grundformeln des Problems auf die, wie ich glaube, möglichst einfache Art so weit entwickeln, als wir es für unseren Zweck benöthigen, möchte aber vorher noch eine Bemerkung einschalten.

In den Lehrbüchern der Astronomie werden bei der Darlegung der Methoden der Bahnberechnung die dabei in Betracht kommenden Quantitäten nach Grössenordnungen classificirt, um sich ein Urtheil darüber zu bilden, welche Glieder zur Erzielung einer bestimmten Genauigkeit noch mitgenommen werden müssen. Hierbei lässt man gewöhnlich die in die Charakteristik unseres Sonnensystems multiplicirten Zwischenzeiten, ebenso wie die mittlerweile erfolgte Ortsveränderung der Erde und des Gestirnes als Grössen erster Ordnung gelten und gründet darauf Näherungsmethoden. Wenn nun die Bahnbestimmung aus einem kurzen Bogen vorgenommen wird, etwa aus Beobachtungen innerhalb 12—14 Tagen, dann beträgt kt beiläufig 0·2 und kann sowie die Bewegung der Erde zur Noth noch als eine Grösse erster Ordnung angesehen werden. Wenn man aber dann um die Convergencz der vorgeschlagenen Methode in Beispielen nachzuweisen, bis auf Zwischenzeiten von 50 und 60 oder noch mehr Tagen geht, so steigt kt bereits auf 0·9 und 1·0 und die Bewegung der Erde auf 50° bis 60° . Solche Grössen noch als Grössen erster Ordnung zu bezeichnen, deren höhere Potenzen ohne wesentliche Beeinträchtigung der Genauigkeit vernachlässigt werden können, ist unmathematisch und unlogisch und kann nur zu Trugschlüssen führen. Bei den Asteroiden tritt dies allerdings nicht hervor. Denn die von der dritten und vierten Potenz der Zeit abhängigen Glieder besitzen die Coëfficienten $\frac{1}{6r^3}$ und $\frac{1}{4r^4} \left(\frac{dr}{dt} \right)$ respective, und da bei den Asteroiden r meist grösser als 2·5

Um aus diesen Gleichungen möglichst einfach eine oder die andere Grösse eliminiren zu können, multipliciren wir die erste mit $q_x \sin P_x$, die zweite mit $-q_x \cos P_x$, die dritte mit S_x und addiren hierauf. Man erhält so

$$\begin{aligned} n_1 \{ \rho'_1 [q_x \sin (P_x + \Pi - \lambda_1) + S_x \operatorname{tg} \beta_1] - R_1 q_x \sin (P_x + \Pi - L_1) \} - \\ - n_2 \{ \rho'_2 [q_x \sin (P_x + \Pi - \lambda_2) + S_x \operatorname{tg} \beta_2] - R_2 q_x \sin (P_x + \Pi - L_2) \} + \\ + n_3 \{ \rho'_3 [q_x \sin (P_x + \Pi - \lambda_3) + S_x \operatorname{tg} \beta_3] - R_3 q_x \sin (P_x + \Pi - L_3) \} = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ist zunächst ersichtlich, dass sich die Winkel P_x und Π nicht trennen lassen, sondern in ihr und selbstverständlich auch in allen aus ihr abgeleiteten Relationen sich zu einem neuen Winkel $P_x + \Pi = Q_x$ zusammensetzen. Die Gleichung lässt sich daher einfacher so schreiben:

$$\begin{aligned} n_1 \{ \rho'_1 [q_x \sin (Q_x - \lambda_1) + S_x \operatorname{tg} \beta_1] - R_1 q_x \sin (Q_x - L_1) \} - \\ - n_2 \{ \rho'_2 [q_x \sin (Q_x - \lambda_2) + S_x \operatorname{tg} \beta_2] - R_2 q_x \sin (Q_x - L_2) \} + \\ + n_3 \{ \rho'_3 [q_x \sin (Q_x - \lambda_3) + S_x \operatorname{tg} \beta_3] - R_3 q_x \sin (Q_x - L_3) \} = 0. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} n_1 \{ \rho'_1 [q_x \sin (Q_x - \lambda_1) + S_x \operatorname{tg} \beta_1] - R_1 q_x \sin (Q_x - L_1) \} - } \right\} \dots 2) \end{aligned}$$

Um aus derselben n_1 zu eliminiren, hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} q_x \sin (Q_x - L_1) &= 0 \\ q_x \sin (Q_x - \lambda_1) + S_x \operatorname{tg} \beta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt $Q_x = L_1$; die zweite befriedigt man durch die Annahmen:

$$q_x = \operatorname{tg} \beta_1, \quad S_x = -\sin (Q_x - \lambda_1) = -\sin (L_1 - \lambda_1).$$

In gleicher Weise wird die Elimination von n_3 bewirkt durch:

$$Q_x = L_3, \quad q_x = \operatorname{tg} \beta_3, \quad S_x = -\sin (L_3 - \lambda_3).$$

Durch die Substitution dieser Werthe in die Gleichung 2) gewinnt man sofort Relationen, die sich von Fabritius' Gleichungen 3) nur dadurch unterscheiden, dass er mit den wirklichen, wir hier mit curtirten Distanzen rechnen. Dieselben gestalten sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} \rho'_1 [\sin (\lambda_1 - L_3) \operatorname{tg} \beta_3 - \sin (\lambda_3 - L_3) \operatorname{tg} \beta_1] = \\ = \rho'_2 [\sin (\lambda_2 - L_3) \operatorname{tg} \beta_3 - \sin (\lambda_3 - L_3) \operatorname{tg} \beta_2] + \\ + \operatorname{tg} \beta_3 [R_2 \sin (L_3 - L_2) - \frac{n_1}{n_2} R_1 \sin (L_3 - L_1)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n_3}{n_2} \rho'_3 [\sin (\lambda_1 - L_1) \operatorname{tg} \beta_3 - \sin (\lambda_3 - L_1) \operatorname{tg} \beta_1] = \\ = \rho'_2 [\sin (\lambda_1 - L_1) \operatorname{tg} \beta_2 - \sin (\lambda_2 - L_1) \operatorname{tg} \beta_1] + \\ + \operatorname{tg} \beta_1 [R_2 \sin (L_2 - L_1) - \frac{n_3}{n_2} R_3 \sin (L_3 - L_1)]. \end{aligned}$$

Zur Elimination von ρ'_1 und ρ'_3 wird erfordert:

$$\begin{aligned} q_x \sin (Q_x - \lambda_1) + S_x \operatorname{tg} \beta_1 = 0 \\ q_x \sin (Q_x - \lambda_3) + S_x \operatorname{tg} \beta_3 = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt zuvörderst:

$$q_x \sin (Q_x - \lambda_1) \operatorname{tg} \beta_3 - q_x \sin (Q_x - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_1 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} q_x \sin Q_x [\cos \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_3 - \cos \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_1] - \\ - q_x \cos Q_x [\sin \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_3 - \sin \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_1] = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man also:

$$\begin{aligned} q_x \sin Q_x = \sin \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_3 - \sin \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_1 \\ q_x \cos Q_x = \cos \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_3 - \cos \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_1, \end{aligned}$$

so hat man weiter:

$$S_x = \sin (\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$\begin{aligned} q_x \sin (Q_x - W) = \sin (\lambda_1 - W) \operatorname{tg} \beta_3 - \sin (\lambda_3 - W) \operatorname{tg} \beta_1 \\ q_x \sin (Q_x - \lambda_2) + S_x \operatorname{tg} \beta_2 = \sin (\lambda_2 - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_1 - \sin (\lambda_1 - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_2 + \\ + \sin (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \beta_3 \end{aligned}$$

und damit die mittlere Gleichung von Fabritius' System 2)

$$\begin{aligned} [\sin (\lambda_2 - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_1 - \sin (\lambda_1 - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_2 + \sin (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \beta_3] \rho'_2 = \\ = \frac{n_1}{n_2} R_1 [\sin (\lambda_3 - L_1) \operatorname{tg} \beta_1 - \sin (\lambda_1 - L_1) \operatorname{tg} \beta_3] - \\ - R_2 [\sin (\lambda_3 - L_2) \operatorname{tg} \beta_1 - \sin (\lambda_1 - L_2) \operatorname{tg} \beta_3] + \\ + \frac{n_3}{n_2} R_3 [\sin (\lambda_3 - L_3) \operatorname{tg} \beta_1 - \sin (\lambda_1 - L_3) \operatorname{tg} \beta_3]. \end{aligned}$$

Den Coëfficienten von ρ'_2 , die Determinante des Gleichungssystems 1), wollen wir Kürze halber mit D bezeichnen; es ist also:

$$D = \sin (\lambda_2 - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_1 - \sin (\lambda_1 - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_2 + \sin (\lambda_1 - \lambda_2) \operatorname{tg} \beta_3. \dots 3)$$

Um die eben entwickelten Gleichungen zusammenzuziehen und übersichtlicher zu gestalten, führen wir folgende Hilfsgrößen ein:

$$\begin{aligned}
 q_1 \sin Q_1 &= \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \beta_3 - \sin \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_2 \\
 q_1 \cos Q_1 &= \cos \lambda_2 \operatorname{tg} \beta_3 - \cos \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_2 \\
 q_2 \sin Q_2 &= \sin \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_3 - \sin \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_1 \\
 q_2 \cos Q_2 &= \cos \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_3 - \cos \lambda_3 \operatorname{tg} \beta_1 \\
 q_3 \sin Q_3 &= \sin \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_2 - \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \beta_1 \\
 q_3 \cos Q_3 &= \cos \lambda_1 \operatorname{tg} \beta_2 - \cos \lambda_2 \operatorname{tg} \beta_1 \\
 -2D &= q_1 \sin(Q_1 - \lambda_1) - q_2 \sin(Q_2 - \lambda_2) + q_3 \sin(Q_3 - \lambda_3),
 \end{aligned} \tag{4}$$

denen man als Probe beifügen kann:

$$\begin{aligned}
 2 \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \operatorname{tg} \beta_2 &= q_1 \sin(Q_1 - \lambda_1) + q_2 \sin(Q_2 - \lambda_2) + \\
 &+ q_3 \sin(Q_3 - \lambda_3). \quad \dots 4^*
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen lauten jetzt:

$$\begin{aligned}
 \frac{n_1}{n_2} \varrho'_1 &= \frac{q_1 \sin(Q_1 - L_3)}{q_2 \sin(Q_2 - L_3)} \varrho'_2 + \\
 &+ \frac{\operatorname{tg} \beta_3}{q_2 \sin(Q_2 - L_3)} \left[R_2 \sin(L_3 - L_2) - \frac{n_1}{n_2} R_1 \sin(L_3 - L_1) \right] \\
 \frac{n_3}{n_2} \varrho'_3 &= \frac{q_3 \sin(Q_3 - L_1)}{q_2 \sin(Q_2 - L_1)} \varrho'_2 + \\
 &+ \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{q_2 \sin(Q_2 - L_1)} \left[R_2 \sin(L_2 - L_1) - \frac{n_3}{n_2} R_3 \sin(L_3 - L_1) \right] \\
 \varrho'_2 &= -\frac{q_2}{D} \left[\frac{n_1}{n_2} R_1 \sin(Q_2 - L_1) - R_2 \sin(Q_2 - L_2) + \frac{n_3}{n_2} R_3 \sin(Q_2 - L_3) \right]
 \end{aligned} \tag{5}$$

Die letzte Gleichung kann in eine etwas einfachere Form gebracht werden, welche noch dazu den Vortheil darbietet, dass sie die Rechnung sicherer macht. Lässt man nämlich $N_1 N_2 N_3$ dieselben Symbole für die Erde bedeuten, wie n_1, n_2, n_3 für das Gestirn, nämlich die Dreiecksflächen zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten und dem ersten und zweiten Radius vector, so ist bekanntlich allgemein:

$$N_1 R_1 \sin(L_1 - \Pi) - N_2 R_2 \sin(L_2 - \Pi) + N_3 R_3 \sin(L_3 - \Pi) = 0. \quad \dots 6)$$

Setzt man hierin den willkürlichen Winkel $\Pi = Q_2$ und eliminirt man sodann mit Hilfe dieser Gleichung $R_2 \sin(Q_2 - L_2)$ aus der früheren, so findet sich:

$$\rho'_2 = \frac{q_2}{D} \left[\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2} \right) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + \left(\frac{n_3}{n_2} - \frac{N_3}{N_2} \right) R_3 \sin(L_3 - Q_2) \right]. \dots 7)$$

Da $\frac{n_1}{n_2}$ und $\frac{N_1}{N_2}$ bei kleinen Zwischenzeiten von $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ und $\frac{n_3}{n_2}$, sowie $\frac{N_3}{N_2}$ von $\frac{\theta_3}{\theta_2}$ nur um Grössen zweiter Ordnung von der Einheit abweichen, heben sich in den Differenzen rechter Hand die endlichen Glieder vollständig auf, wenn man jeden der obigen Ausdrücke auf die Form $1 + \varepsilon$ bringt und es bleiben nur die Glieder zweiter und höherer Ordnung zurück.¹

Den Gleichungen 5) und 7) sind zur Vervollständigung noch die Relationen hinzuzufügen zwischen den geocentrischen und heliocentrischen Distanzen, nämlich:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \rho_1'^2 \sec^2 \beta_1 - 2 R_1 \rho_1' \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1^2 \\ r_2^2 &= \rho_2'^2 \sec^2 \beta_2 - 2 R_2 \rho_2' \cos(\lambda_2 - L_2) + R_2^2 \\ r_3^2 &= \rho_3'^2 \sec^2 \beta_3 - 2 R_3 \rho_3' \cos(\lambda_3 - L_3) + R_3^2 \end{aligned} \dots 8)$$

Fabritius' Vorschlag geht nun dahin, aus der Gleichung 7) und der mittleren von 8) sich zunächst einen Näherungswerth von r_2 und ρ_2' abzuleiten, dann aus den Gleichungen 5) in Verbindung mit denen 8) ρ_1' , ρ_3' , r_1 und r_3 zu berechnen, hierauf mit Hilfe der so gewonnenen Werthe aus 7) und 8) neue verbesserte

¹ Setzt man für das Verhältniss der Dreiecksflächen den Ausdruck ein, den Gibbs in seiner weiter unten citirten Abhandlung dafür angegeben hat, so wird:

$$\frac{D \cdot \rho_2'}{q_2} = \frac{\theta_1 (\mu_1 r_1^{-3} + \mu_2 r_2^{-3}) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + \theta_3 (\mu_3 r_3^{-3} + \mu_2 r_2^{-3}) R_3 \sin(L_3 - Q_2)}{\theta_2 (1 - \mu_3 r_2^{-3})} - \frac{\theta_1 (\mu_1 R_1^{-3} + \mu_2 R_2^{-3}) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + \theta_3 (\mu_3 R_3^{-3} + \mu_2 R_2^{-3}) R_3 \sin(L_3 - Q_2)}{\theta_2 (1 - \mu_2 R_2^{-3})}$$

und es lautet ein Näherungswerth X für die erste Zeile rechter Hand, von dem man mit Vortheil ausgehen kann:

$$X = \frac{1}{6} \frac{\theta_1 \theta_3 [(\theta_1 + \theta_2) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + (\theta_2 + \theta_3) R_3 \sin(L_3 - Q_2)]}{\theta_2 r_2^3}$$

Werthe von r_2 und ρ'_2 sich zu bilden u. s. w., bis die Gleichungen 5), 7) und 8) vollständig befriedigt sind.

Die Determinante D (Gleichung 3) des Systemes 1) verschwindet, wie ihr Bau zeigt, wenn die drei Orte des Himmelskörpers in einem grössten Kreise liegen. Bei kurzen Zwischenzeiten ist dies jedoch, wenn die Bewegung des Gestirnes nicht zufälligerweise sehr unregelmässig war, stets sehr nahe der Fall. Dies macht die Bestimmung von ρ'_2 unsicher, und deshalb die Berechnung von ρ'_1 und ρ'_3 aus demselben misslich; ja sie wird sogar illusorisch, falls L_1 und L_3 sehr nahe gleich Q_2 werden, d. h. so oft die Bewegung des Gestirnes auf den Sonnenort hinzielt, oder der sogenannte Ausnahmefall eintritt, da, wie ein Blick auf die Gleichungen 4) erkennen lässt, Q_2 die Länge des Knotens des grössten Kreises durch den ersten und dritten Ort des Himmelskörpers vorstellt.

Die soeben hervorgehobenen Mängel sind indess nicht bloss der Methode von Fabritius eigenthümlich: sie haften allen Methoden an, sobald es sich um die Bestimmung einer Bahn aus einem kurzen Bogen ohne irgend eine Voraussetzung über ihre Excentricität handelt. Nimmt man aber für die letztere schon von vorneherein einen bestimmten Werth an, wie bei ersten Bahnbestimmungen von Kometen den Werth Eins, dann kann man durch Weglassen von einer der Grundgleichungen 1) und Ersetzen derselben durch die Euler'sche (Lambert'sche) Gleichung einen grossen Theil der Unsicherheit beheben. Dies ist bei Olbers' schöner Methode der Fall, welche, wie im Folgenden gezeigt werden soll, mit geringfügigen Modificationen leicht so umgestaltet werden kann, dass bei der Ermittlung der Bahn auch die höheren Potenzen der Zeit ohne erheblichen Mehraufwand berücksichtigt werden können.

Eliminirt man ρ'_2 aus den beiden letzten Gleichungen des Systems 1), so erhält man nach der Division mit n_3 :

$$\begin{aligned} & \frac{n_1}{n_3} \rho'_1 [\sin(\lambda_1 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_2 - \sin(\lambda_2 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_1] + \\ & + \rho'_3 [\sin(\lambda_3 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_2 - \sin(\lambda_2 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_3] = \\ & = \left[\frac{n_1}{n_3} R_1 \sin(L_1 - \Pi) - \frac{n_2}{n_3} R_2 \sin(L_2 - \Pi) + R_3 \sin(L_3 - \Pi) \right] \operatorname{tg} \beta_2. \end{aligned}$$

Schafft man aus der rechten Seite der Gleichung mittelst der schon früher verwendeten Relation 6) das Glied $R_3 \sin(L_3 - \Pi)$ heraus, so ergibt sich nach weiterer Division mit $\operatorname{tg} \beta_2$:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} \rho'_1 [\sin(\lambda_1 - \Pi) - \sin(\lambda_2 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{ctg} \beta_2] + \\ + \rho'_3 [\sin(\lambda_3 - \Pi) - \sin(\lambda_2 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_3 \operatorname{ctg} \beta_2] = \\ = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right) \sin(L_1 - \Pi) - \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{N_2}{N_3} \right) R_2 \sin(L_2 - \Pi). \end{aligned}$$

Um der linken Seite dieser Gleichung eine geschmeidigere Form zu geben, führen wir die Hilfsgrößen ein:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \sin(P_1 - \lambda_2) &= \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \\ \rho_1 \cos(P_1 - \lambda_2) &= -\operatorname{tg} \beta_3 \operatorname{ctg} \beta_2 + \cos(\lambda_3 - \lambda_2) \\ \rho_3 \sin(P_3 - \lambda_2) &= \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \rho_3 \cos(P_3 - \lambda_2) &= +\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{ctg} \beta_2 - \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned} \right\} \dots 9)$$

Sie nimmt dadurch die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin(P_1 - \Pi) \rho'_3 - \frac{n_1}{n_3} \rho_3 \sin(P_3 - \Pi) \rho'_1 = \\ = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right) R_1 \sin(L_1 - \Pi) - \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{N_2}{N_3} \right) R_2 \sin(L_2 - \Pi). \dots 10) \end{aligned}$$

Sind P_1 und P_3 nicht nahezu gleich L_2 , also der sogenannte Ausnahmefall nicht vorhanden, so geht diese Gleichung für $\Pi = L_2$ über in die einfachere:

$$\rho'_3 = \frac{n_1}{n_3} \frac{\rho_3}{\rho_1} \cdot \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)} \rho'_1 + \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{\rho_1 \sin(L_2 - P_1)} \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right),$$

oder für:

$$\begin{aligned} M &= \frac{n_1}{n_3} \frac{\rho_3}{\rho_1} \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)} \quad | \\ m &= \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{\rho_1 \sin(L_2 - P_1)} \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right) \quad | \end{aligned} \dots 11)$$

in:

$$\rho'_3 = M \rho'_1 + m. \dots 12)$$

Behält man bloss Glieder erster Ordnung bei, so kann man m als eines zweiter vernachlässigen und $\frac{n_1}{n_3}$ durch das Verhältniss der Zwischenzeiten ersetzen. Dies führt auf die Grundgleichung von Olbers' berühmter Methode:

$$\rho'_3 = M \rho'_1, \quad M = \frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{p_3}{p_1} \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)} \quad \dots 12^*)$$

Der äusserst durchsichtige Bau, den ich schon vor einigen Jahren bei den Grössen M und m durch Einführen der Hilfsgrössen ϱ), nämlich der grössten Kreise durch den ersten und zweiten und durch den zweiten und dritten Kometenort erzielt habe,¹ ermöglicht es, auf eine sehr einfache Weise auch die Glieder höherer Dimensionen der Zwischenzeiten zu berücksichtigen, und zwar die bis einschliesslich der vierten Dimension, wenn man von dem schönen Theoreme Gebrauch macht, welches Gibbs vor einiger Zeit durch eine originelle, scharfsinnige Analyse aufgefunden hat.² Nach demselben ist, bis auf die eben angegebene Grenze genau:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= \frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{1 + \mu_1 r_1^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} = \frac{\theta_1}{\theta_3} \left[1 + \frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} \right] \\ \frac{n_2}{n_3} &= \frac{\theta_2}{\theta_3} \frac{1 - \mu_2 r_2^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} = \frac{\theta_2}{\theta_3} \left[1 - \frac{\mu_2 r_2^{-3} + \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} \right] \end{aligned} \right\} \quad .13)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{12} (\theta_2 \theta_3 - \theta_1^2) & \mu_1 - \mu_3 &= \frac{1}{6} \theta_2 (\theta_3 - \theta_1) \\ \mu_2 &= \frac{1}{12} (\theta_1 \theta_3 + \theta_2^2) & \mu_1 + \mu_3 &= \frac{1}{6} \theta_1 \theta_3 \\ \mu_3 &= \frac{1}{12} (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2) & \mu_2 + \mu_3 &= \frac{1}{6} \theta_1 (\theta_3 + \theta_2) \\ & & \mu_2 - \mu_3 &= \frac{1}{6} \theta_2 \theta_3. \end{aligned}$$

E. Weiss, Über die Bestimmung von M bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn, mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall. Diese Berichte, Bd. 92, Abth. II, S. 1456 ff.

J. W. Gibbs, On the Determination of elliptic Orbits from three complete Observations. Mem. of the Nation. Acad. of Sciences, IV, 2, p. 81 ff.

Bei der Erde kann man, wenn die Zwischenzeiten nicht allzu gross sind, wegen der geringen Excentricität ihrer Bahn in den Zählern der obigen Ausdrücke R_1 , R_2 und R_3 unbedenklich durch $\frac{1}{2}(R_1 + R_3)$ ersetzen und dann etwas einfacher schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_1}{N_3} &= \frac{\theta_1}{\theta_3} \left[1 + \frac{4}{3} \frac{\theta_2(\theta_3 - \theta_1)(R_1 + R_3)^{-3}}{1 + \mu_3 R_3^{-3}} \right] \\ \frac{N_2}{N_3} &= \frac{\theta_2}{\theta_3} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\theta_1(\theta_3 + \theta_2)(R_1 + R_3)^{-3}}{1 + \mu_3 R_3^{-3}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Damit wird:

$$m = \frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{\sin(L_2 - P_1)} \left[\frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} - \frac{4}{3} \frac{\theta_2(\theta_3 - \theta_1)(R_3 + R_1)^{-3}}{1 + \mu_3 R_3^{-3}} \right] \quad \dots (15)$$

Beabsichtigt man also, die Rechnung bis auf Grössen vierter Dimension der Zwischenzeiten zu treiben, so hat man ausgehend von

$$M_0 = \frac{\theta_1}{\theta_3} \frac{p_3}{p_1} \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)} \quad \dots (16)$$

die Rechnung bis auf r_1 und r_3 fortzuführen und sich dann zu bilden ein verbessertes M :

$$M = M_0(1 + \xi) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} + \frac{1}{p_3} \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{\sin(L_2 - P_3)} \\ &\quad \left[\frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} - \frac{4}{3} \frac{\theta_2(\theta_3 - \theta_1)(R_3 + R_1)^{-3}}{1 + \mu_3 R_3^{-3}} \right] \end{aligned} \right. \quad \dots (17)$$

Sind die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Beobachtung nahe gleich, was man bekanntlich stets anstrebt, und kann man demgemäss $\theta_3 - \theta_1$ als eine Grösse zweiter Ordnung betrachten, so ist es vortheilhafter, statt r_1 und r_3 zu substituieren $\frac{r_3 + r_1}{2} - \frac{r_3 - r_1}{2}$ und $\frac{r_3 + r_1}{2} + \frac{r_3 - r_1}{2}$ und nach Potenzen von $r_3 - r_1$ zu entwickeln.

Man kann dann weiters im Nenner ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit $\mu_3 r_3^{-3}$ vernachlässigen, wodurch die Berechnung von μ_1 und μ_3 entfällt, und erhält:

$$\frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} = \frac{4}{3} \frac{\theta_2 (\theta_3 - \theta_1)}{(r_3 + r_1)^3} + 4 \theta_1 \theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4}$$

$$\xi = \frac{4}{3} \cdot \frac{\theta_2 (\theta_3 - \theta_1)}{(r_3 + r_1)^3} + 4 \theta_1 \theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4} + \frac{1}{\rho'_1 p_3} \frac{R_1 \sin (L_2 - L_1)}{\sin (L_2 - P_3)}$$

$$\left[\frac{4}{3} \theta_2 (\theta_3 - \theta_1) \left\{ \frac{1}{(r_3 + r_1)^3} - \frac{1}{(R_3 + R_1)^3} \right\} + 4 \theta_1 \theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4} \right]. \quad 17^*)$$

Nach dem Eingangs Gesagten glaube ich aber nicht, dass bei ersten Bahnbestimmungen das Einbeziehen der Glieder höherer Ordnung, trotzdem es, wie man sieht, sehr wenig Mühe verursacht, häufiger wird angewendet werden. Hingegen wird es sich empfehlen, bei späteren Bahnverbesserungen oder bei definitiven Bahnbestimmungen, um sich für die Vergleichung der Beobachtungen zunächst ein möglichst gutes Elementensystem abzuleiten, gleich von dem eben entwickelten Werthe von M auszugehen.

Bei kurzen Zwischenzeiten wird durch das Einbeziehen der Glieder höherer Ordnung M sich im Allgemeinen so wenig ändern, dass es in der Regel nicht nöthig sein wird, die Rechnung mit dem neuen Werthe von M zu wiederholen: man wird Differentialformeln anwenden können. Hierbei kommen folgende Gleichungen in Betracht:

$$r_1^2 = \rho_1'^2 \sec^2 \beta_1 - 2 R_1 \rho_1' \cos (\lambda_1 - L_1) + R_1^2$$

$$r_3^2 = M^2 \rho_1'^2 \sec^2 \beta_3 - 2 M R_3 \rho_1' \cos (\lambda_3 - L_3) + R_3^2$$

$$s^2 = h^2 \rho_1'^2 + 2 \rho_1' g [\cos (G - \lambda_1) - M \cos (G - \lambda_3)] + g^2$$

$$h^2 = M^2 \sec^2 \beta_3 - 2 M [\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_3 + \cos (\lambda_3 - \lambda_1)] + \sec^2 \beta_1$$

$$6 \theta_2 = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen g , G und h , sowie die anderen, zur Erleichterung der Berechnung nach Olbers' Methode gewöhnlich eingeführten Hilfsgrössen werde ich, um Wiederholungen zu vermeiden, erst später, bei der Zu-

sammenstellung der Formeln anführen, und bemerke daher hier nur, dass g und G weder M noch auch ρ'_1 enthalten.

Die Differentiation nach M und ρ'_1 liefert nach einigen einfachen Reductionen:

$$dr_1 = \sin \mathfrak{S}_1 \sec \beta_1 d\rho'_1$$

$$dr_3 = \sin \mathfrak{S}_3 \sec \beta_3 (M d\rho'_1 + \rho'_1 dM)$$

$$ds = h \cos \gamma d\rho'_1 + \frac{\rho'_1}{s} [\rho'_1 (h \sin \zeta \cdot \operatorname{tg} \beta_3 + h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3)) - g \cos (G - \lambda_3)] dM.$$

Substituirt man diese Werthe in die Relation:

$$(dr_1 + dr_3 + ds) \sqrt{r_1 + r_3 + s} - (dr_1 + dr_3 - ds) \sqrt{r_1 + r_3 - s} = 0$$

und führt man überdies, was im Allgemeinen etwas bequemer ist, ein

$$\frac{d(\log \rho'_1)}{d \log M} = \frac{M}{\rho'_1} \left(\frac{d\rho'_1}{dM} \right),$$

so erhält man schliesslich:

$$\frac{d(\log \rho'_1)}{d(\log M)} = - \frac{M}{s}$$

$$s \sin \mathfrak{S}_3 \sec \beta_3 \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2} + \rho'_1 [h \sin \zeta \cdot \operatorname{tg} \beta_3 + h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3)] - g \cos (G - \lambda_3)$$

$$h \cos \gamma + (\sin \mathfrak{S}_1 \sec \beta_1 + M \sin \mathfrak{S}_3 \sec \beta_3) \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2}$$

$$\sin \kappa = \frac{s}{r_1 + r_3} \quad \dots 18)$$

Die Berechnung dieses Coëfficienten gestaltet sich viel einfacher als es auf den ersten Anblick den Anschein hat, weil die meisten der darin vorkommenden Grössen, so auch namentlich $h \sin \zeta$ und $h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3)$ bereits in den vorhergehenden Rechnungen vorkommen.

Zur Ermittlung einer Kometenbahn nach diesen Vorschriften hat man, vollständig zusammengestellt, folgende Formeln durchzurechnen.

Man kann dann weiters im Nenner ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit $\mu_3 r_3^{-3}$ vernachlässigen, wodurch die Berechnung von μ_1 und μ_3 entfällt, und erhält:

$$\frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} = \frac{4}{3} \frac{\theta_2 (\theta_3 - \theta_1)}{(r_3 + r_1)^3} + 4 \theta_1 \theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4}$$

$$\xi = \frac{4}{3} \frac{\theta_2 (\theta_3 - \theta_1)}{(r_3 + r_1)^3} + 4 \theta_1 \theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4} + \frac{1}{\rho'_1 p_3} \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{\sin(L_2 - P_3)} \left. \vphantom{\frac{4}{3}} \right\} 17^*)$$

$$\left[\frac{4}{3} \theta_2 (\theta_3 - \theta_1) \left\{ \frac{1}{(r_3 + r_1)^3} - \frac{1}{(R_3 + R_1)^3} \right\} + 4 \theta_1 \theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4} \right]$$

Nach dem Eingangs Gesagten glaube ich aber nicht, dass bei ersten Bahnbestimmungen das Einbeziehen der Glieder höherer Ordnung, trotzdem es, wie man sieht, sehr wenig Mühe verursacht, häufiger wird angewendet werden. Hingegen wird es sich empfehlen, bei späteren Bahnverbesserungen oder bei definitiven Bahnbestimmungen, um sich für die Vergleichung der Beobachtungen zunächst ein möglichst gutes Elementensystem abzuleiten, gleich von dem eben entwickelten Werthe von M auszugehen.

Bei kurzen Zwischenzeiten wird durch das Einbeziehen der Glieder höherer Ordnung M sich im Allgemeinen so wenig ändern, dass es in der Regel nicht nöthig sein wird, die Rechnung mit dem neuen Werthe von M zu wiederholen: man wird Differentialformeln anwenden können. Hierbei kommen folgende Gleichungen in Betracht:

$$r_1^2 = \rho_1'^2 \sec^2 \beta_1 - 2 R_1 \rho_1' \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1^2$$

$$r_3^2 = M^2 \rho_1'^2 \sec^2 \beta_3 - 2 M R_3 \rho_1' \cos(\lambda_3 - L_3) + R_3^2$$

$$s^2 = h^2 \rho_1'^2 + 2 \rho_1' g [\cos(G - \lambda_1) - M \cos(G - \lambda_3)] + g^2$$

$$h^2 = M^2 \sec^2 \beta_3 - 2 M [\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_3 + \cos(\lambda_3 - \lambda_1)] + \sec^2 \beta_1$$

$$6 \theta_2 = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen g , G und h , sowie die anderen, zur Erleichterung der Berechnung nach Olbers' Methode gewöhnlich eingeführten Hilfsgrössen werde ich, um Wiederholungen zu vermeiden, erst später, bei der Zu-

sammenstellung der Formeln anführen, und bemerke daher hier nur, dass g und G weder M noch auch ρ'_1 enthalten.

Die Differentiation nach M und ρ'_1 liefert nach einigen einfachen Reductionen:

$$dr_1 = \sin \vartheta_1 \sec \beta_1 d\rho'_1$$

$$dr_3 = \sin \vartheta_3 \sec \beta_3 (M d\rho'_1 + \rho'_1 dM)$$

$$ds = h \cos \gamma d\rho'_1 + \frac{\rho'_1}{s} [\rho'_1 (h \sin \zeta \cdot \operatorname{tg} \beta_3 + h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3)) - g \cos (G - \lambda_3)] dM.$$

Substituirt man diese Werthe in die Relation:

$$(dr_1 + dr_3 + ds) \sqrt{r_1 + r_3 + s} - (dr_1 + dr_3 - ds) \sqrt{r_1 + r_3 - s} = 0$$

und führt man überdies, was im Allgemeinen etwas bequemer ist, ein

$$\frac{d(\log \rho'_1)}{d \log M} = \frac{M}{\rho'_1} \left(\frac{d\rho'_1}{dM} \right),$$

so erhält man schliesslich:

$$\frac{d(\log \rho'_1)}{d(\log M)} = - \frac{M}{s}$$

$$s \sin \vartheta_3 \sec \beta_3 \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2} + \rho'_1 [h \sin \zeta \cdot \operatorname{tg} \beta_3 + h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3)] - g \cos (G - \lambda_3)$$

$$h \cos \gamma + (\sin \vartheta_1 \sec \beta_1 + M \sin \vartheta_3 \sec \beta_3) \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2}$$

$$\sin \kappa = \frac{s}{r_1 + r_3} \quad \dots 18)$$

Die Berechnung dieses Coëfficienten gestaltet sich viel einfacher als es auf den ersten Anblick den Anschein hat, weil die meisten der darin vorkommenden Grössen, so auch namentlich $h \sin \zeta$ und $h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3)$ bereits in den vorhergehenden Rechnungen vorkommen.

Zur Ermittlung einer Kometenbahn nach diesen Vorschriften hat man, vollständig zusammengestellt, folgende Formeln durchzurechnen.

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \cos \theta = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \sin \theta = \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \cos \theta = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \sin \theta = \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

V

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \cos \theta &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \sin \theta &= \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

VI

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \cos \theta &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \sin \theta &= \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

III

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \theta &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d}{dt} \sin \theta &= \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \theta &= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d}{dt} \sin \theta &= \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

I

VI.

$$\eta = \frac{2\theta_2}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} \quad s = \frac{2\theta_2\mu}{\sqrt{r_1 + r_3}}$$

$$\sin \gamma = \frac{A}{s} \quad u = s \cos \gamma$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{u + c_1}{f_1 B_1} \quad r_1 = B_1 \sec \vartheta_1$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_3 = \frac{u + c_3}{f_3 B_3} \quad r_3 = B_3 \sec \vartheta_3$$

$$\varrho'_1 = \frac{u + g \cos \varphi}{h}$$

$$\varrho'_3 = M \varrho'_1.$$

μ ist mit dem Argumente η aus Encke's Tafel zur Erleichterung der Berechnung der Euler'schen (Lambert'schen) Gleichung zu entnehmen.

VII.

Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung.

$$\sin z = \frac{s}{r_3 + r_1}$$

$$\frac{d(\log \varrho'_1)}{d(\log M)} = + \frac{M}{s}$$

$$\frac{g \cos(G - \lambda_3) - \varrho'_1 [h \sin \zeta \operatorname{tg} \beta_3 + h \cos \zeta \cos(H - \lambda_3)] - s \sin \vartheta_3 \sec \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{h \cos \gamma + (\sin \vartheta_1 \sec \beta_1 + M \sin \vartheta_3 \sec \beta_3) \operatorname{tg} \frac{z}{2}}$$

$$\zeta = \frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} +$$

$$+ \frac{1}{\varrho'_1} \frac{R_1 \sin(J_2 - L_1)}{p_3 \sin(L_2 - P_3)} \left[\frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} - \frac{\mu_1 R_1^{-3} - \mu_3 R_3^{-3}}{1 + \mu_3 R_3^{-3}} \right].$$

Hier ist ζ bis Grössen vierter Ordnung einschliesslich streng genau. Begnügt man sich mit einer Genauigkeit bis auf Grössen dritter Ordnung oder ist θ_3 nahe gleich θ_1 , so hat man einfacher:

$$\xi = \frac{4}{3} \frac{\theta_2(\theta_3 - \theta_1)}{(r_3 + r_1)^3} + 4\theta_1\theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4} + \frac{1}{\rho'_1} \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{p_3 \sin(L_2 - P_3)}$$

$$\left[\frac{4}{3} \theta_2(\theta_3 - \theta_1) \left\{ \frac{1}{(r_3 + r_1)^3} - \frac{1}{(R_3 + R_1)^3} \right\} + 4\theta_1\theta_3 \frac{r_3 - r_1}{(r_3 + r_1)^4} \right]$$

$$d(\log M) = \log(1 + \xi).$$

Zieht man es vor, statt die Differentialformeln zu benützen, mit dem verbesserten M die Rechnung von neuem durchzuführen, so bleiben dabei die Gleichungssysteme I bis III unverändert. Die weiteren Formeln, mittelst denen aus ρ'_1 und ρ'_3 die Elemente berechnet werden, sind zu bekannt, um noch hergesetzt zu werden.

Auch beim Ausnahmefall stösst das Mitnehmen höherer Potenzen der Zwischenzeiten auf keinerlei Schwierigkeiten, wenn man die Grundgleichung des Kometenproblems in der Form 10), die ich ihr gegeben habe, verwendet. Wie ich nämlich in meiner schon einmal angezogenen Abhandlung „Über die Bestimmung von M bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn“ gezeigt habe, ist es beim Eintreten des Ausnahmefalles am zweckmässigsten, dem willkürlichen Winkel Π den Werth zu ertheilen:

$$\Pi = \frac{1}{2}(P_1 + P_3) \pm 90^\circ$$

Es resultirt dann nach 10) für:

$$M = \frac{n_1}{n_3} \frac{p_1}{p_3}$$

$$m = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3} \right) \frac{R_1 \cos \left[L_1 - \frac{1}{2}(P_1 + P_3) \right]}{p_1 \cos \frac{1}{2}(P_3 - P_1)} -$$

$$\left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{N_2}{N_3} \right) \frac{R_2 \cos \left[L_2 - \frac{1}{2}(P_1 + P_3) \right]}{p_1 \cos \frac{1}{2}(P_3 - P_1)}$$

$$\rho'_3 = M\rho'_1 + m.$$

Wollte man hier wieder bis auf Grössen vierter Ordnung gehen, so würde die Berechnung von m bereits zu weitläufig, um eine allgemeine Anwendung finden zu können. Da überdies die

Nach allen diesen Abkürzungen resultirt für m :

$$m = \frac{2\varrho_1\varrho_2(R_3+R_1)}{p_1 \cos \frac{1}{2}(P_3-P_1)} \left[K \left\{ \cos W - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_3} \sin W \sin \frac{1}{2}(L_2-L_1) \right\} + \frac{\varrho_1-\varrho_3}{\varrho_2} \frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^2} \cos W \right] \quad \dots 19)$$

$$K = \frac{1}{(r_3+r_1)^3} - \frac{1}{(R_3+R_1)^3}$$

$$W = \frac{1}{2}(L_1+L_2-P_1-P_3).$$

Wie man beim Ausnahmefall sich auf eine einfache Weise einen genäherten Werth von M verschaffen kann, habe ich in meiner bereits mehrfach citirten Abhandlung ausführlich erörtert; ich beschränke mich daher hier darauf, zu erwähnen, dass, wenn man mit w einen Winkel von 10° bezeichnet und setzt:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sin w}{\sin(w+P_1-P_3)} \\ M' &= \frac{\varrho_1}{\varrho_3} \frac{p_3}{p_1} \cdot u \\ M'' &= \frac{\varrho_1}{\varrho_3} \frac{p_3}{p_1} \frac{1}{u} \end{aligned} \right\} \dots 20)$$

M' oder M'' ein sehr genäherter Werth von M ist, und zwar der grössere oder kleinere davon, je nachdem:

$$\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \cos(L_2-P_3) \geq 0. \quad \dots 20^*)$$

Erkennt man nicht sofort aus anderen Überlegungen, ob $r_2 \leq R_2$, d. h. ob der Komet näher oder weiter von der Sonne absteht als die Erde, dann hat man die Rechnung sowohl mit M' als auch M'' bis auf r_1 und r_3 fortzuführen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: [100_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Weiss E.

Artikel/Article: [Über die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. 1132-1150](#)