Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen

(Nachtrag)

von

O. Stolz in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. November 1891.)

In der Sitzung am 16. Mai 1890 legte ich der kaiserl. Akademie eine Abhandlung mit dem nämlichen Titel vor,[1] in welcher ein von L. Scheeffer zum Nachweise der Extreme von Functionen zweier Veränderlichen ersonnenes Verfahren erläutert und verallgemeinert wurde. Nunmehr bin ich in der Lage, ein anderes demselben Zwecke dienliches Verfahren darlegen zu können, welches auf einem von Herrn L. Barbera in Bologna ausgesprochenen Gedanken beruht und vielleicht als einfacher bezeichnet werden darf. Um die beiden Methoden ins richtige Licht zu setzen, erscheint es passend, noch mit einer Bemerkung auf die Scheeffer'sche zurückzukommen. Sie betrifft einen Satz, welcher in meiner soeben erwähnten Arbeit zwar mehrfach angewendet, aber weder ausdrücklich ausgesprochen, noch begründet ist.

1. Betrachten wir zunächst eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen $xy: f(x, y)$, so ist zur Ergänzung des a. a. O. in Nr. 3 Gesagten noch der folgende Satz hervorzuheben:

„Nachstehendes gibt die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu an, dass der Werth $f(0, 0)$ ein Maximum (Minimum)[2] ist. Man bestimme die obere (untere) Grenze der stetigen

---

[1] Veröffentlicht im 99. Bande dieser Sitzungsberichte, S. 495.

[2] Unter „Maximum" (Minimum) wird hier immer ein „eigentliches" verstanden. So heisst $f(0,0)$ ein Maximum von $f(x, y)$, wenn eine positive Zahl δ sich so bestimmen lässt, dass für $r < \delta$ stets $f(x, y) - f(00) <$ ist. Vergl. a. a. O., S. 495.

Function $f(x, y)$ unter der Voraussetzung, dass x^2+y^2 gleich einer Constanten $r^2 (r>0)$ sei. Sie werde durch die Werthe $x = \varphi_2(r)$, $y = \psi_2(r)$ {beziehungsweise $x = \varphi_1(r)$, $y = \psi_1(r)$} erreicht, so dass diese obere und untere Grenze beziehungsweise durch

$$f(\varphi_2(r), \psi_2(r)) = f_2(r) \qquad f(\varphi_1(r), \psi_1(r)) = f_1(r)$$

dargestellt werden. Dann hat selbstverständlich jede der vier Functionen $\varphi_1(r)$, $\psi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\psi_2(r)$ für $\lim r = +0$ den Grenzwerth 0. Gibt es nun eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit, dass wenn nur die positive Zahl r kleiner als δ ist,

$$f_2(r) - f(0, 0) < 0 \qquad (f_1(r) - f(0, 0) > 0)$$

ausfällt, so ist der Werth $f(0, 0)$ ein Maximum (Minimum) der Function $f(x, y)$ an der Stelle $x = 0$, $y = 0$.“

Dass unter der Voraussetzung, dass $f(x, y)$ in einem den Punkt $x = 0$, $y = 0$ umschliessenden Gebiete stetig ist, die obere Grenze dieser Function für alle jene Werthsysteme xy, wofür $x^2+y^2 = r^2$ ist, in einer Stelle $x = \varphi_2(r)$, $y = \psi_2(r)$ erreicht werde, ist schon a. a. O. S. 498 bemerkt. Soll nun $f(0, 0)$ ein Maximum sein, d. h. soll es eine solche positive Zahl δ geben, dass wenn nur $x^2+y^2 < \delta^2$ ist, $f(x, y) - f(0, 0)$ negativ ausfällt, so muss für $r < \delta$ auch

$$f_2(r) - f(0, 0) < 0 \tag{a}$$

sein; man braucht ja nur $x = \varphi_2(r)$, $y = \psi_2(r)$ zu setzen. Besteht umgekehrt für die Werthe von r kleiner als δ die Relation (a), so ergibt sich daraus, indem $f(x, y) \leqq f_2(r)$ für $x^2+y^2 = r^2$ ist, dass für $0 < r < \delta$

$$f(x, y) - f(0, 0) < 0,$$

$f(0, 0)$ somit ein Maximum ist.

Aus dem obigen Satze fliesst sofort als nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass der Werth $f(0, 0)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum von $f(x, y)$ ist, nachstehendes Verhalten der oberen und unteren Grenze $f_2(r)$, $f_1(r)$. „Es müssen, wenn für r eine beliebige Grenze δ festgesetzt wird, Werthe r', r''

beide kleiner als δ, vorhanden sein, wofür

$$f_1(r') \leqq f(0, 0) \leqq f_2(r'') \qquad (b)$$

ist." — Weiteres lässt sich zur Charakterisirung des zuletzt erwähnten Falles im Allgemeinen nicht angeben. „Weiss man aber von der Existenz einer solchen positiven Zahl α, dass weder $f_1(r)$, noch $f_2(r)$ für einen positiven Werth von r, der kleiner als α ist, den Werth $f(0, 0)$ annimmt,[1] so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass $f(0, 0)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum von $f(x, y)$ ist, in dem Vorhandensein einer solchen positiven Zahl δ, dass wenn nur

$$0 < r < \delta$$

ist,

$$f_1(r) < f(0, 0) < f_2(r)$$

ist." Dieser Satz geht vermittelst der bemerkenswerthen Eigenschaft der Functionen $f_1(r)$, $f_2(r)$, dass jede für alle Werthe von r im Intervalle $(0, \alpha)$ stetig ist, aus der Relation (b) unmittelbar hervor.[2]

Dass aber $f_1(r)$ (sowie $f_2(r)$) für jeden Werth von r zwischen 0 und α stetig ist, erweist sich als eine Folgerung aus dem Umstande, dass $f(x, y)$ als Function von x, y für alle Werthsysteme x, y, wofür $x^2+y^2 \leqq \alpha^2$ ist, stetig sein soll. Demnach lässt sich bekanntlich einer jeden positiven Zahl ε eine andere $\varkappa$ so zuordnen, dass $|f(x', y') - f(x, y)|$ stets kleiner als ε ist, wenn nur xy, $x'y'$ zwei Punkte innerhalb des Kreises $x^2+y^2 = \alpha^2$ bedeuten, deren Abstand $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$ kleiner als $\varkappa$ ist. Setzen wir hier

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \qquad x' = r'\cos\varphi \quad y' = r'\sin\varphi,$$

---

[1] Für $r = 0$ sind bis jetzt $f_1(r)$ und $f_2(r)$ nicht definirt; es liegt freilich nahe, $f_1(0) = f_2(0) = f(0, 0)$ zu setzen.

[2] Da man immerhin $\delta < \alpha$ annehmen kann, so ist $f_1(r)$ im Intervalle $(0, \delta)$ von r eine stetige Function von r. $f_1(r')$ ist kleiner als $f(0, 0)$; sollte es nun einen Werth von r, kleiner als δ, geben, wofür $f(r) > f(0, 0)$ ist, so müsste auch ein solcher vorhanden sein, wofür $f(r) = f(0, 0)$ ist. Dergleichen Werthe von r soll es aber nicht geben, folglich muss $f(r)$ für alle Werthe von r, kleiner als δ, kleiner als $f(0, 0)$ sein.

so brauchen wir nur $|r'-r|<\varkappa$ zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung ist mithin

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)-\varepsilon<f(r'\cos\varphi, r'\sin\varphi)<f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)+\varepsilon,$$

woraus, wenn wir uns

$$r'\cos\varphi=\varphi_1(r') \qquad r'\sin\varphi=\psi_1(r')$$

gesetzt denken, sich weiter ergibt, dass

$$f_1(r)-\varepsilon<f_1(r') \quad \text{oder} \quad -\varepsilon<f_1(r')-f_1(r)$$

ist. Setzt man umgekehrt $r\cos\varphi=\varphi_1(r)$, $r\sin\varphi=\psi_1(r)$, so gelangt man zur Relation

$$f_1(r')<f_1(r)+\varepsilon \quad \text{oder} \quad f_1(r')-f_1(r)<\varepsilon.$$

Demnach ist $|f_1(r')-f_1(r)|$ stets kleiner als ε, wenn nur $|r'-r|$ kleiner als $\varkappa$ ist. D. i. $f_1(r)$ ist eine stetige Function der Veränderlichen r für jeden besonderen Werth derselben, dessen Betrag unter α liegt.

Der letzte Satz ist, ohne desselben ausdrücklich zu erwähnen, a. a. O. S. 497 benützt. Wird nämlich eine ganze Function $G_n(xy)$ vorgelegt, welche an der Stelle $x=0$, $y=0$ verschwindet und ausserdem der Bedingung entspricht, dass für $0<r<\delta$ sowohl $|g_1(r)|$, als $|g_2(r)|$ grösser als $c'r^n$ ist, so kann weder $g_1(r)$, noch $g_2(r)$ innerhalb des Intervalles $(0, \delta)$ verschwinden, folglich auch keine der beiden Functionen wegen ihrer Stetigkeit ihr Zeichen wechseln. Da nun im Falle, dass $G_n(00)=0$ weder Maximum, noch Minimum von $G_n(xy)$ ist, Werthe $r'r''$, beide kleiner als δ, vorhanden sind, wofür $g_1(r')<0<g_2(r'')$, so muss für alle Werthe von r kleiner als δ $g_1(r)<0<g_2(r)$ sein.

Die unmittelbare Anwendung des eingangs dieser Nummer aufgeführten Satzes würde in dem gewöhnlich vorliegenden Falle dass $f(x, y)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von x und y fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, in der Regel nur unnöthige Weitläufigkeiten veranlassen. Scheeffer's neuer Gedanke besteht ja gerade darin, die Frage nach einem Extremum der Function $f(x, y)$ dadurch zu erledigen, dass der in Rede stehende Satz nur für eine aus den Anfangsgliedern der Entwickelung von $f(x, y)$ gebildete ganze Function $G_n(x, y)$ in Anspruch genommen wird.

2. Nach Barbera[1] ist der Werth $f(0,0)$ ein totales Maximum, wenn das partiale Maximum der Function $f(x,y)$ in Beziehung auf die Veränderliche x allein, welches unter der Voraussetzung, dass y einen festen, aber willkürlichen Werth annimmt, eintritt und einem Werthe $x = \psi(y)$, der für $y = 0$ verschwindet, entspricht, d. i. die Function $f(\psi(y), y)$ für den Werth $y = 0$ ein Maximum erreicht. Dieser Gedanke führt ebenfalls auf eine vollkommen befriedigende Lösung der Aufgabe, die Extreme der Function $f(x, y)$ zu bestimmen. Dabei ist es jedoch bequemer, das Maximum (Minimum) von $f(x, y)$ an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ in der Art zu definiren, dass die Existenz einer solchen positiven Zahl δ verlangt wird, dass für alle Systeme von Werthen x, y, deren absolute Beträge kleiner als δ sind (ausgenommen $x = 0$, $y = 0$),

$$f(x,y)-f(0,0)<0 \quad (>0) \tag{1}$$

ausfällt. $f(x, y)$ soll in einem den Punkt $x = 0$, $y = 0$ umschliessenden Gebiete eine stetige Function von xy sein.

Wir haben dann die folgende Reihe von Sätzen:

1) „Als nothwendig dazu, dass $f(0, 0)$ ein Maximum (Minimum) von $f(x, y)$ ist, erweist sich das Vorhandensein einer positiven Zahl δ von der folgenden Beschaffenheit. Man denke sich $x \gtrless 0$ und seinem Betrage nach kleiner als δ. Wenn dann die obere (untere) Grenze von $f(x, y)$ bei constantem x unter der Voraussetzung, dass y das Intervall $(-x, x)$ nicht verlässt, durch den Werth $y = \varphi(x)$ erreicht wird (wobei $\lim\limits_{x=0} \varphi(x) = 0$ ist),[2] so ist $f(x, \varphi(x))$ stets kleiner (grösser) als $f(0, 0)$."

„Ähnliches muss gelten hinsichtlich der oberen (unteren) Grenze von $f(x, y)$ bei constantem y und Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$, welche durch den Werth $x = \psi(y)$ erreicht werden.

---

[1] Teoria della integrabilità delle funzioni e dei massimi e minimi degli integrali definiti, Bologna, 1890, p. 147 und Introduzione allo studio di Calcolo, ibidem 1881, p. 417.

[2] Für $x = 0$ ist $\varphi(x)$ bis jetzt nicht definirt; es liegt indess nahe, $\varphi(0) = 0$ zu setzen.

2) „Hinreichend dazu, dass $f(0, 0)$ ein Maximum (Minimum) von $f(x, y)$ ist, erscheint das Zutreffen beider unter 1) aufgeführten Bedingungen. Demnach ist $f(0, 0)$ Maximum, wenn es eine solche positive Zahl δ gibt, dass sowohl für

$$0 < |x| < \delta \qquad f(x, \varphi(x)) < f(0, 0), \tag{2}$$

als auch für

$$0 < |y| < \delta \qquad f(\psi(y), y) < f(0, 0) \tag{3}$$

ist."

Diese beiden Sätze ergeben sich auf ähnliche Weise wie die entsprechenden in Nr. 1. Man bedenke nur, dass wenn $f(x, \varphi(x))$ die obere Grenze von $f(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$ mit Einschluss seiner Grenzen vorstellt, alsdann für jedes diesen Bedingungen genügende Werthsystem xy

$$f(x, y) \leqq f(x, \varphi(x))$$

sein muss. Demnach folgt aus der Relation (2) unmittelbar die entsprechende in (1), jedoch nur für alle Werthsysteme xy, welche die Bedingungen

$$0 < |y| \leqq |x| < \delta$$

befriedigen, während das Umgekehrte unmittelbar erhellt. Soll die Relation (1) in vollem Umfange, d. i. für alle Systeme xy, wofür $|x| < \delta$ und $|y| < \delta$ ist, bestehen, so muss zur Relation (2) noch (3) treten.

Nunmehr bezeichnen $f(x, \varphi_1(x))$ die untere, $f(x, \varphi_2(x))$ die obere Grenze von $f(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$. Dessgleichen sei $f\{\psi_1(y), y\}$ die untere, $f\{\psi_2(y), y\}$ die obere Grenze von $f(x, y)$ bei constantem y und Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$.

3) „Dazu, dass $f(0, 0)$ kein Minimum von $f(x, y)$ ist, ist nothwendig und hinreichend, dass jeder positiven Zahl δ sich entweder eine Zahl x', deren Betrag kleiner als δ ist, so zuordnen lässt, dass

$$f(x', \varphi_1(x')) \leqq f(0, 0) \tag{a}$$

ist oder eine Zahl y', deren Betrag kleiner als δ ist, so, dass

$$f(\psi_1(y'), y'') \leqq f(0, 0) \tag{b}$$

ist."

„Dazu, dass $f(0, 0)$ kein Maximum von $f(x, y)$ ist, ist nothwendig und hinreichend, dass jeder positiven Zahl δ sich entweder eine Zahl x'', deren Beitrag kleiner als δ ist, so zuordnen lässt, dass

$$f(x'', \varphi_2(x'')) \geqq f(0, 0) \tag{c}$$

ist oder eine Zahl y'', deren Betrag kleiner als δ ist, so, dass

$$f(\psi_2(y''), y'') \geqq f(0, 0) \tag{d}$$

ist."

„Das Zutreffen der beiden soeben erwähnten Bedingungen erweist sich als nothwendig und hinreichend dazu, dass $f(0, 0)$ weder ein Minimum, noch ein Maximum von $f(x, y)$ bildet."

4) „Wenn für eine Function $f(x, y)$, wofür der Werth $f(0, 0)$ kein Extremum ist, z. B. die durch die Ungleichungen *(a)* und *(d)* bei Weglassung des Zeichens $=$ dargestellten Bedingungen erfüllt sind — und man weiss noch, dass eine positive Zahl δ sich so angeben lässt, dass weder $f(x, \varphi_1(x))$ für einen von Null verschiedenen Werth von x im Intervalle $(-\delta, \delta)$, noch $f(\psi_2(y), y)$ für einen von Null verschiedenen Werth von y im Intervalle $(-\delta, \delta)$ gleich $f(0, 0)$ ist; dann muss für jeden Werth von x, dessen Betrag kleiner als δ ist, $f(x, \varphi_1(x)) < f(0, 0)$ und für jeden Werth von y, dessen Betrag kleiner als δ ist, $f(\psi_2(y), y) > f(0, 0)$ sein."

Der letzte Satz ergibt sich aus dem Umstande, dass $f(x, y)$ eine für alle Punkte eines Rechteckes, dessen Mittelpunkt der Punkt $x = 0$, $y = 0$ ist, stetige Function von x und y sein soll, durch ähnliche Betrachtungen wie der entsprechende Satz in Nr. 1.

3. Wir wollen die vorstehenden Sätze zunächst zur Entscheidung der Frage benützen, ob für eine ganze Function $G(x, y)$ von x, y, welche für $x = 0$ und $y = 0$ verschwindet, der Werth $G(0, 0) = 0$ ein Extremum bildet oder nicht. Dann sind vor Allem zu ermitteln die untere und obere Grenze von $G(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$. Sie mögen mit $G(x, \varphi_1(x))$ und $G(x, \varphi_2(x))$ bezeichnet werden, da beide je einem Werthe der Function gleich sein müssen. Die jene Grenzen liefernden Werthe von $y : y = \varphi_1(x)$ und $y = \varphi_2(x)$ fallen entweder innerhalb des Intervalles $(-x, x)$ oder auf einen seiner Endwerthe $y = -x$ und $y = x$. Da $G(x, y)$

unter den gemachten Voraussetzungen eine stetige, mit einer Ableitung begabte Function von y ist, so muss im ersteren Falle $\varphi_1(x)$, sowie $\varphi_2(x)$ eine der Auflösungen der Gleichung $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$ nach y sein. Hiebei ist es gestattet, für $|x|$ eine beliebige positive Zahl α von vorneherein als obere Grenze festzusetzen. Da $\lim \varphi_1(x)$ und $\lim \varphi_2(x)$ für $\lim x = 0$ Null sind, so müssen sich demnach $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ im Falle, dass sie zwischen $-x$ und x liegen, unter denjenigen nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von x fortschreitenden Reihen befinden, welche für y in die ganze Function $\frac{\partial G}{\partial y}$ gesetzt, sie identisch zum Verschwinden bringen und dabei selbst für $x = 0$ verschwinden, d. h. kein constantes Glied enthalten. Bezeichnet man dieselben der Reihe nach mit $P_1(x)$, $P_2(x)$ so hat man nun zu bilden die Ausdrücke

$$G(x, -x),\ G(x, x),\ G(x, P_1(x)),\ G(x, P_2(x)) \qquad (4)$$

Die willkürliche Zahl α darf man sich aber kleiner als 1 und weiter so klein denken, dass man aus den Anfangsgliedern der Reihen (4) zu erkennen im Stande ist, welche unter ihnen für die positiven und welche für die negativen Werthe von x, deren Betrag kleiner als α ist, das kleinste Resultat liefert, also als $G(x, \varphi_1(x))$ anzusehen ist. Es sei z. B. $x > 0$. Dann haben wir nun diejenigen der Reihe (4) zu betrachten, deren Anfangsglieder negativ sind. Hat x in diesen Gliedern durchaus verschiedene Exponenten, so ist $G(x, \varphi_1(x))$ diejenige der Reihen, worin der Exponent am kleinsten ist. Kommt dieser grösste Exponent in den Anfangsgliedern mehrerer der Reihen (4) vor, so erscheint $G(x, \varphi_1(x))$ als diejenige darunter, worin der Coëfficient des ersten Gliedes algebraisch am kleinsten ist. Sollten in den Anfangsgliedern zweier Reihen sowohl die Exponenten von x den grössten, als auch die Coëfficienten den kleinsten Werth besitzen, so wird das erste Paar von Gliedern, worin sich die beiden Reihen von einander unterscheiden, die Entscheidung bringen, welche von ihnen bei gehöriger Kleinheit von x den kleineren Werth liefert. Sind aber die Anfangsglieder aller Reihen (4) positiv, so kann man gleichwohl ähnlich verfahren, nur sind jetzt jene davon herauszuheben, in welchen der Exponent des ersten Gliedes am grössten ist u. s. w. Ist endlich einer der Ausdrücke in der Reihe (4) gleich Null, während alle übrigen mit positiven Gliedern beginnen, so ist $G(x, \varphi_1(x)) = 0$. Die entsprechende Betrachtung ist anzustellen unter der Voraussetzung, dass x negativ ist.

Auf ähnliche Art wird der Ausdruck $G(x, \varphi_2(x))$ und weiter, indem man die Gleichung $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$ nach x auflöst, wodurch die Reihen $x = Q_1(y), Q_2(y)$ sich ergeben mögen, und die Ausdrücke

$$G(-y, y),\ G(y, y),\ G(Q_1(y), y),\ G(Q_2(y), y)$$

bildet, $G(\psi_1(y), y)$, sowie $G(\psi_2(y), y)$ gefunden, und zwar sowohl für positive, als negative y.

Sind aber die vier Functionen $G(x, \varphi_1(x))$ u. s. w. ermittelt, so lassen sich die Sätze der vorigen Nummer zur Anwendung bringen.[1]

Um Beispiele zur Erläuterung der soeben gegebenen Vorschriften zu erhalten, braucht man nur die Gleichungen von solchen Curven $G(x, y) = 0$ anzuschreiben, welchen der Anfangspunkt der Coordinaten als isolirter Punkt, und zwar auf einer oder mehreren reellen Tangenten angehört.[2] Jede, die linke Seite einer derartigen Gleichung bildende ganze Function von x, y hat im Punkte $x = 0$, $y = 0$ ein Extremum. Z. B. ist

$$G(x, y) = y^4 + x^6 + y\,\Phi_5(x, y) + \Phi_7(x, y) + \Phi_8(x, y) + \qquad (5)$$

worin $\Phi_n(xy)$ eine beliebige homogene Function n^{ter} Dimension von x, y bedeutet, so ist $G(x, y) = 0$ eine Curve, wozu der Punkt $x = 0$, $y = 0$ als isolirter auf der Tangente $y = 0$ gehört. $G(0, 0)$ ist ein Extremum von $G(xy)$, und zwar, da $G(x, 0)$ für alle Werthe von x von hinlänglich kleinem Betrage positiv ist, ein Minimum. Dasselbe lässt sich auch mit Hilfe der vorstehenden Bemerkungen nachweisen, wenn nur genügend viele Glieder von (5) bekannt sind. Es sei z. B. vorgelegt

$$G(x, y) = y^4 + x^6 - 108\,x^5 y - x^8,$$

---

[1] Ist z. B. $G(x, \varphi_1(x)) = 0$ und $G(\psi_1(y), y) \geqq 0$, so ist der Werth $G(o, o) = 0$ ein uneigentliches Minimum von $G(x, y)$.

[2] Sind die Tangenten der Curve im isolirten Punkte $x = 0$, $y = 0$ paarweise complex-conjugirt, so lässt sich der Satz, dass $G(x, y)$ in ihm ein Extremum erreicht, schon mit Hilfe der Bemerkung, dass die Glieder niedrigster Ordnung eine definite Form bilden, beweisen.

so dass

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 4(y^3 - 27x^5) \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 2\{3x - 270y - 4x^3\}x^4$$

ist. $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$ liefert die Wurzel $y = 3x^{\frac{5}{3}}$ und es sind

$$G(x, -x) = x^4 + 109x^6 - x^8 \qquad G(x, x) = x^4 - 107x^6 - x^8;$$

dagegen ist

$$G(x, 3x^{\frac{5}{3}}) = x^6 \mp 27x^{\frac{20}{3}} - x^8,$$

je nachdem x positiv oder negativ ist. Demnach ist, mag x positiv oder negativ sein,

$$G(x, \varphi_1(x)) = G(x, 3x^{\frac{5}{3}}),$$
$$G(x, \varphi_2(x)) = G(x, -x).$$

Die Gleichung $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$ hat die Wurzeln

$$x = 0 \qquad x = 90y + \ldots = Q(y).$$

Es ist nunmehr

$$G(-y, y) = y^4 + 109y^6 - y^8 \qquad G(y, y) = y^4 - 107y^6 - y^8$$
$$G(0, y) = y^4 \qquad G(Q(y), y) = y^4 - 18.90^5 y^6 + \ldots;$$

also hat man bei positivem und negativem y

$$G(\psi_1(y), y) = G(Q(y), y \qquad G(\psi(y), y) = G(-y, y).$$

Mithin ist, wenn nur $|x|$ gehörig klein ist,

$$G(x, \varphi_1(x)) > 0$$

und wenn nur $|y|$ gehörig klein ist,

$$G(\psi_1(y), y) > 0.$$

Somit ist der Werth $G(0, 0) = 0$ in der That ein Minimum von $G(xy)$.

4. Die unmittelbare Anwendung der Sätze von Nr. 3 auf eine vorgelegte Function $f(x, y)$ würde in der Regel zu über-

flüssigen Rechnungen führen. Es genügt vielmehr im Falle, dass $f(x, y) - f(0, 0)$ sich in eine nach positiven ganzen Potenzen von x und y fortschreitende Reihe entwickeln lässt, diese Sätze auf eine aus den Anfangsgliedern dieser Entwickelung gebildete ganze Function anzuwenden. Wir haben analog dem grundlegenden Scheeffer'schen Satze (a. a. O. Nr. 1) auch hier den folgenden Satz.

„Es sei

$$f(x, y) - f(0, 0) = G_n(x, y) + R_n(x, y),$$

worin G_n die Gesammtheit aller vorhandenen Glieder der n ersten Dimensionen in Bezug auf x und y, $R_n(x, y)$ den Rest der Reihe, d. i. die Gesammtheit der Glieder von höherer als n^{ter} Dimension bedeutet."

„Lassen sich dann ein Index n und positive Zahlen c' und δ so bestimmen, dass wenn $|x| < \delta$ ist, die obere und untere Grenze von $G_n(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$ ihrem Betrage nach grösser sind als $c'|x|^n$ und wenn $|y| < \delta$ ist, die obere und untere Grenze von $G_n(x, y)$ bei constantem y und bei Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$ ihrem Betrage nach grösser sind als $c'|y|^n$; — so haben die beiden Functionen

$$f(x, y) \qquad G_n(x, y)$$

an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ zugleich entweder ein Maximum oder ein Minimum, oder weder ein Maximum, noch ein Minimum."

Gegenüber den Ausführungen a. a. O. erscheint es hier nicht mehr nothwendig, auf den Beweis dieses Hauptsatzes näher einzugehen. Nur das sei bemerkt, dass im Falle, dass $G_n(0, 0) = 0$ weder ein Maximum, noch ein Minimum von $G_n(x, y)$ darstellt, jedenfalls entweder die untere Grenze $G_n(x, \overline{\varphi}_1(x))$ für alle Werthe von x, deren Betrag kleiner als δ ist, oder die untere Grenze $G_n(\overline{\psi}_1(y), y)$ für alle Werthe von y, deren Betrag kleiner als δ ist, negativ sein muss, während jedenfalls entweder die obere Grenze $G_n(x, \overline{\varphi}_2(x))$ für die nämlichen Werthe von x oder die obere Grenze $G_n(\overline{\psi}_2(y), y)$ für die nämlichen Werthe von y positiv ist. Es geht dies aus dem 4. Satze in Nr. 2 hervor, da zufolge der im obigen Satze aufgestellten Forderung weder eine der Grenzen

$G_n(x, \bar\varphi_1(x))$ und $G_n(x, \bar\varphi_2(x))$ für einen von Null verschiedenen Werth von x im Intervalle $(-\delta, \delta)$, noch eine der Grenzen $G_n(\bar\psi_1(y), y)$ und $G_n(\bar\psi_2(y), y)$ für einen von Null verschiedenen Werth von y im Intervalle $(-\delta, \delta)$ verschwinden kann.

So hat z. B. nach Nr. 3 jede Function

$$b+y^4+x^6-108\,x^5y-x^8+R_8(x, y)$$

im Punkte $x=0$, $y=0$ ein Minimum. Noch einfacher wäre dieselbe Behauptung für jede Function

$$b+y^{2k}+x^{2k+2}+R_{2k+2}(x, y) \qquad (k=1, 2. \, .)$$

zu erweisen.

Der vorstehende Satz lässt im Falle, dass der Werth $G_n(0,0)=0$ kein Extremum von $G_n(x, y)$ bildet, eine naheliegende Erweiterung zu. Dann kann nämlich sowohl eine der beiden unteren Grenzen $G_n(x, \bar\varphi_1(x))$ und $G_n(\bar\psi_1(y), y)$, als auch eine der beiden oberen $G_n(x, \bar\varphi_2(x))$ und $G_n(\bar\psi_2(y), y)$ verschwinden, und zwar nicht allein nur für die positiven oder nur für die negativen Werthe der bezüglichen Veränderlichen, welche dem Betrage nach klein genug sind, sondern auch für alle.

„Lassen sich zwei positive Zahlen c', δ so bestimmen, dass von den beiden unteren Grenzen $G_n(x, \bar\varphi_1(x))$ und $G_n(\bar\psi_1(y), y)$ wenigstens eine und diese mindestens für alle positiven oder für alle negativen Werthe der bezüglichen Veränderlichen x oder y, welche dem Betrage nach kleiner als δ sind, negativ, und zwar kleiner als $-c'|x|^n$, beziehungsweise $-c'|y|^n$ ist und dass von den beiden oberen Grenzen $G_n(x, \bar\varphi_2(x))$ und $G_n(\psi_2(y), y)$ wenigstens eine und diese mindestens für die soeben genannten Werthe der bezüglichen Veränderlichen x oder y positiv, und zwar grösser als $c'|x|^n$, beziehungsweise $c'|y|^n$ ist, so haben die beiden Functionen

$$f(x, y) \qquad G_n(x, y)$$

an der Stelle $x=0$, $y=0$ kein Extremum, d. i. weder ein Maximum, noch ein Minimum.“

Beispiele eines solchen Verhaltens findet man schon, wenn man $G_n(x, y)$ eine homogene Function von xy sein lässt. Man setze z. B. $G_n(xy) = x^2-y^2$, $(x+y)^2(x-y)$ oder irgend einem Ausdrucke von der Form $(x+y)^p(x-y)^q$.

5. Die Übertragung der vorstehenden Betrachtungen auf eine Function von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ hat keine Schwierigkeit. Dabei dürfen wir annehmen, dass diese Function $f(x_1 \ldots x_m)$ in der Umgebung der Stelle $x_1 = 0 \ldots x_m = 0$ untersucht werde. Es handelt sich dann vor Allem darum, den aus allen möglichen Werthsystemen, die den Bedingungen

$$-\delta < x_r < \delta \qquad (r = 1, 2 \ldots m) \tag{6}$$

genügen, bestehenden Bereich der m-fachen Mannigfaltigkeit $x_1 \ldots x_m$ in m Theilbereiche von der folgenden Beschaffenheit zu zerlegen. Der erste von ihnen ist bestimmt durch die Ungleichungen

$$-\delta < x_1 < \delta, \quad |x_2| \leqq |x_1| \quad |x_3| \leqq |x_1| \quad \ldots |x_m| \leqq |x_1|$$

d. h. x_2 darf alle Werthe des Intervalles $(-x_1, x_1)$ annehmen, x_3 dessgleichen u. s. f. bis x_m. In derselben Art wird der zweite Theilbereich bestimmt, nämlich durch die Ungleichungen

$$|x_1| \leqq |x_2| \quad -\delta < x_2 < \delta \quad |x_3| \leqq |x_2|. \quad \ldots |x_m| \leqq |x_2|;$$

Der m^{te} und letzte endlich durch die Ungleichungen:

$$|x_1| \leqq |x_m| \quad |x_2| \leqq |x_m| \quad |x_3| \leqq |x_m|. \quad . -\delta < x_m < \delta.$$

Wir lassen zunächst x_1 constant und bestimmen die obere und untere Grenze von $f(x_1 \ldots x_m)$ bei Beschränkung der $x_2, x_3, \ldots x_m$ auf den Bereich

$$|x_2| \leqq |x_1| \quad |x_3| \leqq |x_1|. \quad |x_m| \leqq |x_1|. \tag{7}$$

Setzen wir auch hier voraus, dass die vorgelegte Function für alle Stellen eines Bereiches von der Form (6) stetig sei, so muss es eine Stelle des Bereiches (7) geben, wozu als Werth der Function $f(x_1 \ldots x_m)$ die genannte obere und eine, wozu als Werth von $f(x_1 \ldots x_m)$ die genannte untere Grenze gehört. Wenn ausserdem angenommen wird, dass $f(x_1 \ldots x_m)$ eine ganze Function von $x_1 \ldots x_m$ ist — was ja zunächst hinreicht — so befinden sich diese beiden Stellen, falls sie dem Innern des Bereiches (7) angehören, unter den Werthsystemen $x_2 \ldots x_m$, welche die $(m-1)$ Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \ldots \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \tag{7*}$$

befriedigen.[1] Jede von ihnen kann aber auch in der Begrenzung des Bereiches (7) liegen, d. i. sie kann entweder eine der 2^{m-1} Stellen

$$x_2 = \pm x_1 \quad x_3 = \pm x_1 \ldots x_m = \pm x_1$$

sein oder einem der $(m-1)2^{m-2}$ Bereiche

$$x_2 = \pm x_1 \ldots x_{r-1} = \pm x_1 \quad |x_r| < |x_1| \quad x_{r+1} = \pm x_1 \ldots x_m = \pm x_1$$
$$(r = 2, 3 \ldots m) \tag{8}$$

oder einem der $\binom{m-1}{2} 2^{m-3}$ Bereiche angehören, welche dadurch definirt sind, dass von den $m-1$ Veränderlichen $x_2 \ldots x_{m-1}$ $m-3$ constant, und zwar entweder gleich $-x_1$ oder x_1 sind, während die beiden übrigen x_r, x_s bloss an die Bedingung geknüpft sind, ihrem Betrage nach unter $|x_1|$ zu verbleiben u. s. f. Am Schlusse sind die $(m-1)2$ Bereiche

$$|x_2| < |x_1| \ldots |x_{r-1}| < |x_1| \quad x_r = \pm x_1 \quad |x_{r+1}| < |x_1| \ldots |x_m| < |x_1|$$
$$(r = 2, 3 \ldots m)$$

als solche aufzuführen, in denen eine der in Rede stehenden Stellen vorkommen kann.[2] Sollte eine von ihnen im Bereiche (8) sich befinden, so muss das noch unbekannte x_r der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = 0 \tag{9}$$

genügen, nachdem darin die Veränderlichen

$$x_2 \ldots x_{r-1} x_{r+1} \ldots x_m$$

durch die in (8) vorgeschriebenen Werthe $-x_1$ oder x_1 ersetzt sind. Von den an zweiter Stelle genannten Bereichen sind zu ermitteln die durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0, \qquad (r \gtrless s) \tag{10}$$

---

[1] Da bei Behandlung des Problems der Extreme einer Function von m Veränderlichen das entsprechende Problem für die Functionen von $1, 2, \ldots m-1$ Veränderlichen als gelöst zu betrachten ist, so hat es keinen Anstand, den im Text erwähnten Satz hier zu benützen.

[2] Die Anzahl der hier genannten Bereiche und Stellen ist 3^{m-1}.

worin man für die übrigen $m-3$ Veränderlichen je einen der Werthe $-x_1$ oder x_1 einzusetzen hat, im Vereine mit diesen bestimmten Werthsysteme $x_2 \dots x_m$ u. s. f.

Die so erhaltenen Systeme von Gleichungen (7*), (9), (10) u. s. w. versucht man nach $x_2 \dots x_m$ durch nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreitende Reihen aufzulösen, wodurch man in bekannter Weise zu den gesuchten Grenzen von $f(x_1 \dots x_m)$ bei constantem x_1 und Beschränkung der übrigen Veränderlichen auf den Bereich (7) geführt wird.

Nunmehr sind die untere und die obere Grenze von $f(x_1 \dots x_m)$ unter der Voraussetzung, dass je eine der Veränderlichen $x_2 \dots x_m$ fest bleibt und jede der übrigen auf das durch diesen constanten Werth und den ihm entgegengesetzten bestimmte Intervall eingeschränkt wird, zu ermitteln.

Nach Aufstellung dieser $2m$ Grenzen geht man zur Anwendung der Sätze über, welche den in Nr. 2 und 4 ausgesprochenen analog sind.