Beitrag zur constructiven Theorie der windschiefen Regelflächen mit zwei Leitgeraden und einem Leitkegelschnitt

Prof. **Heinrich Drasch** in Linz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. December 1891.)

Eine windschiefe Regelfläche mit zwei Leitgeraden A und B und einem Leitkegelschnitt K^2 besitzt bekanntlich in der Verbindungslinie der Schnittpunkte von A und B mit der Ebene von K^2 eine Doppelerzeugende, deren Eigenschaften mit denen der Doppelcurve, die in diesem Falle aus den zwei Doppelgeraden besteht, gewisse Ähnlichkeiten aufweisen. In den bekannten Werken über darstellende Geometrie von Herrn De la Gournerie und Dr. W Fiedler finden diese windschiefen Flächen zwar eine eingehende Behandlung, jedoch wird daselbst den Beziehungen dieser Doppelerzeugenden eine mehr untergeordnete Beachtung geschenkt, obwohl dieselben in mancher Hinsicht interessant sind und namentlich dem darstellenden Geometer Anlass zu einigen wichtigen Constructionsproblemen geben.

Ich erlaube mir daher, als Ergänzung dieser Theorie, im Folgenden auf rein geometrischer Grundlage einige Beziehungen der Doppelerzeugenden zur Fläche zu entwickeln, welche den Zusammenhang zwischen einigen Flächen dieser Gruppe etwas deutlicher hervortreten lassen und für die constructive Behandlung derselben vielleicht nützliche Verwerthung finden können.

Den Ausgangspunkt für die Betrachtung bilde die windschiefe Regelfläche mit zwei Leitgeraden A und B und einer

Leitfläche F^2 zweiter Ordnung, von welcher einige Eigenschaften, die in der Folge benöthigt werden, in gedrängter Kürze zusammengestellt werden mögen.

Artikel 1. Was zunächst den Grad dieser Fläche anbelangt, so erkennt man, dass eine beliebige Gerade G des Raumes von so vielen Erzeugenden der Fläche getroffen wird, als es Gerade gibt, die A, B und G schneiden und F^2 berühren. Alle Geraden, welche A, B und G schneiden, bilden die eine Schaar eines windschiefen Hyperboloides, welches F^2 in einer Curve vierter Ordnung erster Species schneidet. Da es nun vier Erzeugende dieser Schaar gibt, welche die Curve vierter Ordnung und desshalb auch F^2 berühren, so ist die erwähnte windschiefe Regelfläche vom vierten Grade (F^4).

Aus der Erzeugung dieser Fläche folgt unmittelbar, dass die Geraden A und B Doppelgerade sind und auf jeder derselben vier Cuspidalpunkte liegen. Die Curve, in welcher die Regelfläche F^4 die Leitfläche F^2 berührt, ist eine Curve vierter Ordnung erster Species, weil die Berührungspunkte je zweier Erzeugenden, die sich in p auf A schneiden und natürlich F^2 berühren, so liegen, dass ihre Verbindungslinie sowohl in der Ebene pB, als auch in der Polarebene von p in Bezug auf F^2 liegt, sich demnach als Schnittgerade zweier projectivischer Ebenenbüschel darstellt. Die ebenen Schnitte der Fläche F^4 sind entweder Curven vierter Ordnung mit zwei Doppel- oder Rückkehrpunkten, wobei der Doppelpunkt zugleich ein einfacher oder Doppelinflexionspunkt werden kann, oder allgemeine Curven dritter Ordnung; nach krummen Kegelschnitten kann man die Fläche nicht schneiden.

Artikel 2. Berührt nun von den zwei Leitgeraden die eine, z. B. A, die Leitfläche F^2 in einem Punkte C, so fallen zwei der Cuspidalpunkte auf A in einen einzigen zusammen und die durch C gehende Erzeugende wird zur »Doppelerzeugenden D«. Die ebenen Schnitte dieser Fläche können nun auch Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten oder mit einem Berührungsknoten, oder Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt werden; ausserdem wird jede Ebene durch die Doppelerzeugende die Fläche F^4 noch in einem Kegelschnitt schneiden. Daraus folgt aber, dass diese specielle Fläche auch erzeugt werden kann durch zwei Leitgerade A und B und einen Leitkegelschnitt K^2.

Die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte von A und B mit der Ebene von K^2 ist die Doppelerzeugende.

Artikel 3. Fasst man nun die Erzeugung durch die drei Leitelemente A, B und K^2 ins Auge, so können hauptsächlich vier Fälle unterschieden werden. Bezeichnet man nämlich die Durchschnittspunkte von A und B mit der Ebene von K^2 mit a und b, so kann die Gerade $\overline{ab}$ die Curve K^2 entweder nicht reell oder wohl reell schneiden. In letzterem Falle können a und b entweder ausserhalb oder innerhalb K^2, oder durch K^2 getrennt liegen.

Schneidet die Gerade $\overline{ab}$ K^2 nicht in reellen Punkten, so ist sie eine isolirte Doppelerzeugende; in den übrigen Fällen ist sie keine isolirte Doppelerzeugende.

Jeder dieser vier Fälle lässt sich auch durch zwei Leitgerade und eine Leitfläche F^2 darstellen, wobei etwa die Leitgerade A die Leitfläche F^2 berühren möge.

Um den ersten Fall, den einer isolirten Doppelerzeugenden zu erhalten, lege man die Gerade A z. B. an ein windschiefes Hyperboloid derart berührend an, dass mit Ausnahme des Berührungspunktes alle übrigen Punkte von A in dem äusseren Theile desselben liegen; die Gerade B wähle man so, dass sie das Hyperboloid und beide Mäntel des Asymptotenkegels schneidet.

Den Fall, in welchem a und b durch K^2 getrennt sind, erhält man z. B. durch eine Kugel, welche von A berührt und von B nicht reell geschnitten wird, wie es in der beigegebenen Figur ersichtlich ist. Um den Fall zu erhalten, in welchem a und b innerhalb K^2 liegen, lege man A und B ganz in den inneren Theil eines windschiefen Hyperboloides; um endlich den Fall zu erhalten, in welchem a und b ausserhalb K^2 liegen, lege man z. B. die Gerade A ganz in den inneren Theil eines einschaligen Hyperboloides und die Gerade B so, dass sie das Hyperboloid und beide Mäntel seines Asymptotenkegels reell schneidet.

Artikel 4. Jede durch die Doppelerzeugende D gelegte Ebene schneidet F^4 nach einem Kegelschnitt; zieht man an diesen die Tangenten in denjenigen Punkten b_1 und b_2, in welchen er die Gerade D schneidet, so sind diese die Inflexionstangenten der Fläche F^4, welche der betreffenden Ebene angehören. Durch jeden der Punkte b_1 und b_2 geht aber noch eine Inflexionstangente, weil durch jeden Punkt p der Doppelerzeugenden D zwei Berührungsebenen an F^4 möglich sind, welche man erhält, wenn man durch p den der Fläche umschriebenen Kegel zweiter Classe legt und an diesen die zwei durch D gehenden Berührungsebenen legt. In jeder Ebene durch D liegen also zwei Inflexionstangenten und ebenso gehen durch jeden Punkt auf D zwei Inflexionstangenten, woraus folgt, dass der Ort der Inflexionstangenten durch die Punkte der Doppelerzeugenden eine windschiefe Regelfläche vierten Grades ist, welche D zur Doppelgeraden besitzt.

Artikel 5. Diese Regelfläche besitzt noch eine zweite Doppelgerade, deren Construction sich in folgender Weise ergibt.

Es seien in der beigegebenen Figur die Projectionen einer Kugel und die einer Geraden A (A' erste, A'' zweite Projection) gegeben, wobei A die Kugel im Punkte C berühren möge. Eine zweite Gerade B_∞ sei die unendlich ferne Gerade der ersten Projectionsebene. Betrachtet man diese drei Gebilde als Leitelemente einer windschiefen Regelfläche, so erhält man in der Kugeltangente $D(D', D'')$ im Punkte C die Doppelerzeugende der Fläche. Die höchste Erzeugende $H(H', H'')$ und die tiefste Erzeugende $L(L', L'')$ sind die singulären Erzeugenden, längs welchen die Fläche entwickelbar ist und von den Cuspidalebenen, welche zur ersten Projectionsebene parallel sind, in allen Punkten derselben berührt wird.

Um die Schnittcurve einer beliebigen durch D gehenden Ebene A (A_1 erste, A_2 zweite Spur) mit der Regelfläche zu erhalten, genügt es, die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Erzeugenden H und L und mit einer beliebigen dritten Erzeugenden $E(E', E'')$ zu ermitteln. Sind $d(d', d'')$, $f(f', f'')$ und $m(m', m'')$ diese Schnittpunkte, so sind die Tangenten in d und f mit D parallel, und der Schnittkegelschnitt K^2 ist dadurch vollkommen bestimmt. Sind nun b_1 und b_2 die Schnittpunkte von K^2 und D, so müssen sich die Tangenten in diesen Punkten an K^2 in $F(F', F'')$, einem Punkte der Geraden $\overline{df}$ schneiden, so dass F von α, Schnittpunkt von $\overline{df}$ mit D, durch d und f harmonisch getrennt ist; denn $\overline{df}$ ist die Polare des Schnittpunktes der Geraden D und B_∞. Dreht sich nun die Ebene A um die Gerade D, so beschreibt die Gerade $\overline{df}$, weil sie beständig die drei Geraden L, D, H schneidet, ein windschiefes Hyperboloid (im Falle der Figur ein Paraboloid), der Punkt F somit eine Erzeugende der Schaar L, D, H, welche in der Figur durch $F'N'$ (erste Projection) bezeichnet ist.

Dieser soeben behandelte specielle Fall lässt sich aber auch ganz unabhängig von der Realität der singulären Erzeugenden H und L verallgemeinern. Es seien z. B. die Leitgeraden A und B und der Leitkegelschnitt K^2 in allgemeiner gegenseitiger Lage gegeben; a und b seien die Schnittpunkte von A und B mit der Ebene von K^2. Ist nun E eine beliebige Ebene durch die Doppelerzeugende $D|=\overline{ab}|$ und $(\mathfrak{K}^2)$ der Schnittkegelschnitt mit der Fläche F^4, so liegt der Pol von $\overline{ab}$ in Bezug auf $(\mathfrak{K}^2)$ in der Ebene E_1, welche durch A geht und der durch A und $\overline{ab}$ bestimmten Ebene in Bezug auf $(\mathfrak{K}^2)$ conjugirt ist. Dieser Pol liegt aber auch in der Ebene E_2, welche durch B geht und der durch B und $\overline{ab}$ bestimmten Ebene conjugirt ist in Bezug auf $(\mathfrak{K}^2)$. Er liegt somit in der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen E_1 und E_2. Für sämmtliche aus F^4 herausgeschnittenen Kegelschnitte $(\mathfrak{K}^2)$ sind aber die durch A und B gehenden Berührungsebenen constant dieselben. Sind diese imaginär, so werden sie durch zwei elliptische Ebeneninvolutionen vertreten. Man hat daher den Satz:

Der Ort der Inflexionstangenten durch die Punkte von D ist eine windschiefe Regelfläche vierten Grades mit zwei Doppelgeraden D und FN. Die Doppelgerade FN liegt mit D und mit je zwei der singulären Erzeugenden auf einem Hyperboloid und ist durch diese von jener harmonisch getrennt.

Daraus der duale Satz:

Die Polarebenen von D in Bezug auf die Kegel zweiter Classe, welche aus Punkten von D der Fläche F^4 umschrieben sind, schneiden sich in der zweiten

Doppelgeraden FN derjenigen Regelfläche, welche von den Inflexionstangenten durch D gebildet wird.

Hat die Doppelerzeugende isolirte Lage, so ist der Ort der Inflexionstangenten durch die Punkte derselben eine windschiefe Regelfläche vierten Grades mit imaginären Erzeugenden und zwei reellen Doppelgeraden.

Artikel 6. Obwohl man die Inflexionstangenten durch einen beliebigen Punkt p auf D mit Hilfe des aus p der Fläche F^4 umschriebenen Kegels zweiter Classe finden kann, so lässt sich diese Aufgabe noch in anderer Weise lösen, welche die zwei-zweideutige Beziehung zwischen Berührungsebene und Berührungspunkt etwas deutlicher zum Ausdruck bringt und für die folgenden Entwicklungen einige Bedeutung hat.

Man kann sich nämlich die Aufgabe auch so stellen, dass man nach den Ebenen durch die Doppelerzeugende D fragt, welche F^4 in Kegelschnitten schneiden, die durch einen bestimmten gegebenen Punkt auf D gehen.

Es sei in der beigegebenen Figur K^2 der durch die Ebene $A(A_1, A_2)$ des Büschels D aus F^4 herausgeschnittene Kegelschnitt in erster Projection. Die Schnittpunkte b_1 und b_2 von K^2 mit D erhält man als Doppelpunkte einer quadratischen Punktinvolution auf D, welche durch zwei Paare bestimmt ist. α' und α'' als Projectionen von m' aus d' und f' nach D ist das eine, α und α_∞ als Projectionen von f' aus d' und f' nach D das zweite. Dreht sich nun die Ebene $A(A_1, A_2)$ um die Gerade D, so beschreibt die Gerade $\overline{df}$ ein Hyperboloid mit der Leitschaar H, D, L, die Gerade $\overline{dm}$ ein Hyperboloid mit der Leitschaar H, D, E und endlich die Gerade $\overline{fm}$ ein Hyperboloid mit der Leitschaar L, D, E. Die auf diese Weise entstehenden Punktreihen $\alpha, \alpha', \alpha''$ sind also untereinander projectivisch und haben in α_∞ und C' gemeinsame Doppelpunkte. Zur Bestimmung der Doppelpunkte der durch die Paare α', α'' und α, α_∞ bestimmten Involutionen bedient man sich eines Constructionskreises OO_1O_2. Es seien nun $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, O_1$ und O_2 die Schnittpunkte der Strahlen $O\alpha, O\alpha', O\alpha'', O\alpha_\infty$ und OC' mit dem Constructionskreise.

Die Geraden $\overline{\alpha'_1\alpha''_1}$ und $\overline{O_1\alpha_1}$ schneiden sich in einem Punkte u. Projicirt man nun die Berührungspunkte der aus u an den

Kreis gezogenen Tangenten aus O nach D, so liefern diese Projectionen b_1 und b_2 die gesuchten Schnittpunkte von K^2 und D.

Dreht sich nun die Ebene A um D, so beschreiben $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1$ drei zu einander projectivische Punktreihen im Constructionskreise mit den gemeinsamen Doppelpunkten O_1 und O_2. Die Gerade $\overline{\alpha'_1 \alpha''_1}$ umhüllt daher einen Kegelschnitt, welcher den Constructionskreis in O_1 und O_2, also doppelt, berührt. Die Gerade $\overline{O_1 \alpha_1}$ beschreibt einen mit diesem Tangentenbüschel projectivischen Strahlenbüschel mit dem Centrum O_1. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist also eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt, welche hier aber in einen Kegelschnitt und in eine Gerade zerfällt, die Tangente in O_1 an den Kreis ist, weil in diese zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, während der Kegelschnitt auch den Constructionskreis in O_1 und O_2 berühren muss.

Der Ort der Punkte u ist in unserem Falle eine Hyperbel U mit der reellen Hauptaxe $O_1 O_2$. Man hat also folgenden Zusammenhang: Aus einer Büschelebene $A(A_1, A_2)$ erhält man den Punkt α, aus diesem α_1, aus diesem u, aus diesem das Berührungspunktpaar β, β_1 im Constructionskreise und aus diesem endlich das Punktpaar $b_1 b_2$, in welchem die Büschelebene F^4 berührt. Umgekehrt erhält man aus jedem Punkte d_1 in D einen Punkt δ im Constructionskreise, aus dessen Tangente die Schnittpunkte mit der Hyperbel U, aus diesem Punktpaar das betreffende Punktpaar im Constructionskreise durch den Punkt O_1, und endlich mit Hilfe von O dasjenige Punktpaar in D, durch welches die dem Punkt d_1 entsprechenden Berührungsebenen an F^4 bestimmt sind. In der Figur wurden die Berührungsebenen des Punktes d_1 in D construirt. Die Gerade $\overline{O d_1}$ trifft den Constructionskreis in δ, die Tangente in δ schneidet U in einem Punktpaar, welches mit O_1 verbunden im Kreise ein Punktpaar liefert, dessen Projectionen aus O nach D die Punkte $e, e' (= b_2)$ liefern. Diese zwei Punkte bestimmen je eine Erzeugende des Hyperboloides mit der Leitschaar H, D, L und dadurch die Berührungsebenen des Punktes d_1. In der Figur wurde der Schnitt der Ebene E (E_1 erste Spur), welche zur zweiten Projectionsebene parallel ist, mit F^4 dargestellt. Die zweite Projection der Schnittcurve besitzt in D'' einen Doppelpunkt, dessen Tangenten die Schnittlinien der Ebene E mit den durch den Punkt d_1 gehenden Berührungsebenen sind. Es wäre noch zu bemerken, dass die Punkte α, α_∞, b_1 und b_2 harmonische Lage haben und desshalb auch die Punkte im Constructionskreise, welche ihre Projectionen aus dem Centrum O sind.

Artikel 7. Es drängt sich nun die Frage auf, welche gegenseitige Lage zwei Kegelschnitte K_1^2, K_2^2 und eine Gerade B haben müssen, damit die dadurch bestimmte Regelfläche, welche im Allgemeinen vom achten Grade ist, in zwei Regelflächen vierten Grades mit je zwei Doppelgeraden zerfällt. Aus den vorausgehenden Betrachtungen folgt, dass dies der Fall sein wird, wenn durch die Gerade B zwei gemeinsame Berührungsebenen an K_1^2 und K_2^2 möglich sind und ausserdem die Gerade B die Schnittlinie D der Ebenen von K_1^2 und K_2^2 schneidet. Dass diese Bedingungen ausreichen, ergibt sich aus Folgendem.

Es sei b der Schnittpunkt von B und D und k_1, k_2 seien die Schnittpunkte einer beliebigen Ebene durch B mit K_1^2, respective K_2^2; die Gerade $\overline{k_1 k_2}$ treffe B in u. Ferner seien B' und B'' die durch B gehenden Berührungsebenen an K_1^2 und K_2^2 und c_1, c_2 die in ihnen liegenden singulären Erzeugenden. Die Geraden c_1, c_2, D bilden die eine Leitschaar eines windschiefen Hyperboloides H^2, von welchem B der anderen Schaar angehört. Nun trifft die Gerade $\overline{k_1 k_2}$ B in u, muss also folglich H^2 noch in einem zweiten reellen Punkte v schneiden, und es sei A die durch v gehende Erzeugende der Schaar, welcher auch B angehört. Denkt man sich nun durch einen der beiden Kegelschnitte, z. B. durch K_1^2 und die Geraden A und B als Leitelemente die dadurch bestimmte Regelfläche vierten Grades durchgelegt und dieselbe mit der Ebene des zweiten Kegelschnittes K_2^2 geschnitten, so wird die Schnittcurve mit dem Kegelschnitt K_2^2 drei Punkte und in zweien derselben die Tangenten gemeinsam haben, mit K_2^2 also identisch sein. Man hat daher den Satz:

Zwei Kegelschnitte und eine Gerade erzeugen als Leitelemente eine in zwei Regelflächen vierten Grades mit je zwei Doppelgeraden zerfallende Regelfläche achten Grades, wenn durch die Gerade zwei gemeinsame Berührungsebenen an die Kegelschnitte möglich sind und die Leitgerade die Schnittlinie der Kegelschnittsebenen trifft. Die Schnittgerade der Kegelschnittsebenen ist Doppelerzeugende.

Dass es zwei Regelflächen gibt, folgt aus dem Umstande, dass jede durch B gehende Ebene die Kegelschnitte K_1^2 und K_2^2 in je zwei Punkten trifft, die auf zweierlei Art zu Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche gruppirt werden können.

Artikel 8. Die Construction der zweiten Doppelerzeugenden, welche natürlich keiner Schwierigkeit unterliegt, liesse sich auch in folgender Weise durchführen, welche von der Realität der singulären Erzeugenden c_1, c_2 und der Realität der Schnittpunkte von K_1^2 und K_2^2 mit D unabhängig ist. Aus der beigegebenen Figur ersieht man nämlich, dass jeder der Kegelschnitte K_1^2 und K_2^2 auf der Geraden D je ein Punktetripel α, b_1, b_2 constituirt, wobei α stets reell ist, b_1 und b_2 conjugirt imaginär sein können. Diese beiden Tripel bilden auf dem Constructionskreis auch zwei Tripel derart, dass die Verbindungslinie $O_1\alpha_1$ und die Verbindungslinie der Projectionen von b_1 und b_2 aus O in den Constructionskreis, stets reell sind und folglich zwei reelle Punkte u liefern.[1] Ist nun O_1 die Projection des Schnittpunktes der Geraden B und D aus O in den Constructionskreis, so hat man durch die zwei Punkte u einen Kegelschnitt zu legen, welcher den Constructionskreis doppelt, und zwar einmal in O_1 berührt. Da es aber zwei solcher Kegelschnitte gibt, so werden die anderen zwei Berührungspunkte, aus O nach D projicirt, dort die Schnittpunkte der zweiten Doppelgeraden liefern, wodurch diese dann selbst bestimmt sind.

Sind die beiden singulären Erzeugenden c_1 und c_2 reell und hat man in einer durch B gehenden Ebene eine bestimmte Erzeugende $\overline{k_1 k_2}$ gezogen, so lässt sich der Schnittpunkt der zweiten Doppelgeraden A mit D auch construiren als zweiter Doppelpunkt zweier projectivischer Punktreihen auf D, welche durch zwei Paare entsprechender Punkte und einen Doppelpunkt bestimmt sind.

---

[1] Die Punkte u sind nämlich die Pole der stets reellen Verbindungsgeraden $\overline{\beta\beta_1}$ in Bezug auf den Constructionskreis.

Artikel 9. Es kann nun ebenso wie bei den Regelflächen dritter Ordnung die Frage aufgeworfen werden, ob es möglich ist, dass die beiden Leitgeraden zusammenfallen.[1] Dieser Fall tritt ein, wenn die früher genannte Erzeugende $\overline{k_1 k_2}$ das durch c_1, c_2 und D bestimmte Hyperboloid im Punkte u von B nicht schneidet, sondern in diesem Punkte berührt, wodurch der Punkt v mit u und die Doppelgerade A mit der Doppelgeraden B coincidirt. Es werden also in diesem Falle je zwei in einer durch B gehenden Ebene liegenden Erzeugenden sich in einem Punkte von B schneiden, und jede Ebene durch B ist eine Doppeltangentialebene mit zwei zusammenfallenden Berührungspunkten. Die Gerade B unterscheidet sich von den in den früheren Fällen behandelten Doppelgeraden dadurch, dass während früher die durch einen Punkt von B gehenden Erzeugenden mit B im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, jetzt für jeden Punkt in B die durch ihn gehenden Erzeugenden mit B in einer Ebene liegen. Herr De la Gournerie[2] nennt diese Gerade B gelegentlich der Betrachtung des Cylindroides (Livre VII, p. 157) »une ligne de contact«. Die Erzeugung geschieht dort unter einem wesentlich anderen Gesichtspunkt.

Es lässt sich nun aber nachweisen, dass wenn man jeder durch B gehenden Ebene den Schnittpunkt des in ihr liegenden Paares von Erzeugenden zuweist, der Ebenenbüschel und die Punktreihe zu einander projectivisch werden, wodurch die daraus entspringende Erzeugungsweise sich als specieller Fall der von Cayley angegebenen allgemeinen Erzeugungsweise darstellt.[3]

Es seien zu diesem Zwecke p_1 und p_2 die Polaren von B in Bezug auf K_1^2 und K_2^2 und b der Schnittpunkt von B mit der Ebene von K_1^2.

Projicirt man nun aus einem beliebigen Punkte x in B den Kegelschnitt K_2^2 auf die Ebene von K_1^2 nach (K_2^2), so hat man in dieser Ebene zwei Kegelschnitte K_1^2 und (K_2^2) mit gemeinsamen

---

[1] Man vergleiche in Dr. E. Weyr's Regelflächen dritter Ordnung die Bemerkungen über die Cayley'sche Fläche dritter Ordnung, S. 110.

[2] Traité de Géometrie descriptive, p. 157.

[3] Man vergleiche: »Philos. Transactions«, Jg. (1864) und Chasles' Mémoir in den »Comptes rendus« (1861).

Tangentenpaar durch b. K_1^2 und (K_2^2) kann man als zwei dieses Tangentenpaar doppelt berührende Kegelschnitte betrachten, wesshalb die zwei Berührungssehnen p_1 und (p_2) [Projection von p_2 aus x] sich in einem Punkte y schneiden müssen, der auf einer Secante von K_1^2 und (K_2^2) liegt, welche durch b geht. Eine Secante von K_1^2 und (K_2^2) muss aber durch b gehen, nämlich diejenige, welche als Spur der durch B gehenden Ebene auftritt, in welcher die durch x gehenden Erzeugenden der Fläche liegen. Die Gerade by ist aber die Projection der Geraden xy auf die Ebene von K_1^2, folglich ist xy diejenige durch x gehende Gerade, welche p_1 und p_2 schneidet. Beschreibt also eine Ebene den ganzen Büschel durch B, so beschreibt die Gerade xy ein windschiefes Hyperboloid mit der Leitschaar p_1, p_2, B, und folglich ist die Punktreihe der x projectivisch zum Ebenenbüschel durch B. Es ergibt sich hieraus folgende allgemeine Erzeugung des Cylindroides:

Ein Kegelschnitt K_1^2 und eine Gerade B erzeugen als Leitelemente eine windschiefe Regelfläche vierten Grades, wenn man B als Träger eines Ebenenbüschels und einer diesem projectivischen Punktreihe auffasst und durch jeden Punkt von B diejenigen zwei Erzeugenden zieht, welche in der entsprechenden Ebene liegen. B ist »Berührungslinie« und die Schnittgerade der Ebene von K_1^2 mit der dem Schnittpunkt von B mit der Ebene von K_1^2 entsprechenden Ebene des Büschels B ist Doppelerzeugende.

Im Zusammenhang mit den früheren Ergebnissen können wir den Satz aussprechen:

Zwei Kegelschnitte K_1^2 und K_2^2 und eine Gerade B erzeugen als Leitelemente eine in zwei Regelflächen vierten Grades mit je zwei Doppelgeraden zerfallende Regelfläche achten Grades, wenn durch B zwei gemeinsame Berührungsebenen an K_1^2 und K_2^2 möglich sind und B die Schnittlinie der Ebenen von K_1^2 und K_2^2 trifft. Von den zwei übrigen Doppelgeraden kann eine mit B zusammenfallen und mit ihr eine »Berührungslinie« bilden. Dies tritt ein, sobald ein Paar von Erzeugenden, das mit B in einer Ebene liegt, sich in B schneidet.

Durch diesen Satz ist zugleich eine interessante Beziehung zwischen zwei Kegelschnitten ausgesprochen, die demselben Ebenenpaare im nämlichen Winkelraum berührend eingeschrieben sind, so dass die Schnittgerade ihrer Ebenen die Kante des Ebenenpaares trifft, und zwar in Bezug auf die gemeinsamen Erzeugenden je zweier Kegelflächen, durch welche K_1^2 und K_2^2 aus Punkten der Kante des Ebenenpaares projicirt werden.

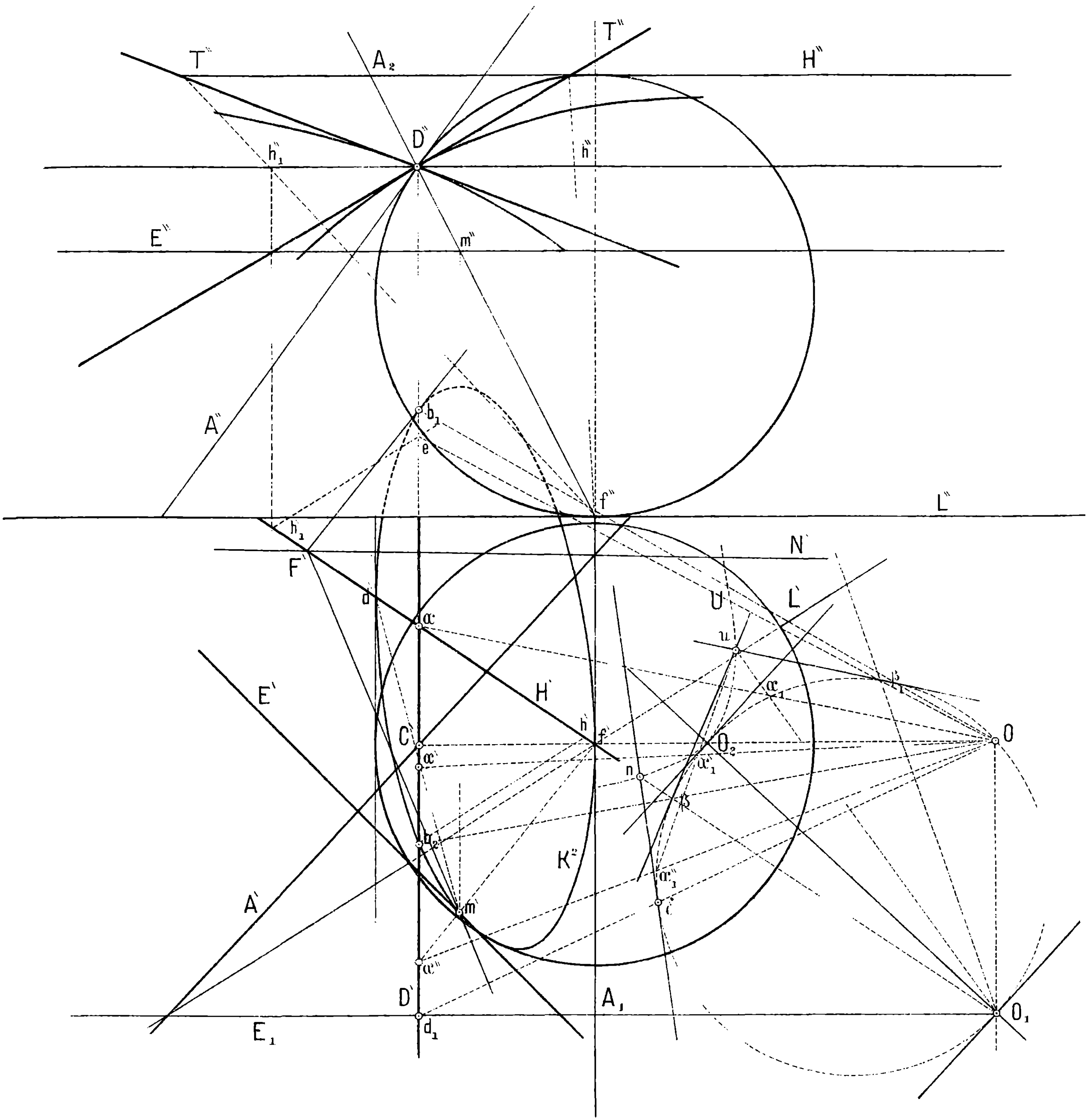
Zum Schlusse seien mir noch einige Bemerkungen gestattet, welche sich strenge genommen zwar nicht auf die Theorie dieser windschiefen Regelflächen beziehen, die aber hier vielleicht desshalb erwähnt werden dürfen, weil sie sich dem Constructeur bei der graphischen Behandlung dieser Flächen gewissermassen von selbst aufdrängen.

Sind nämlich die Geraden A und B und eine Fläche zweiter Ordnung F^2 als Leitelemente einer F^4 gegeben, so ist der ebene Schnitt von F^4 im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Projicirt man nun den räumlichen Vorgang der Schnittconstruction auf die Schnittebene, und zwar aus einem beliebigen Punkte des Raumes, so erhält man in der Schnittebene die folgenden Beziehungen:

Jeder in einer durch $B(A)$ gehenden Ebene liegende Kegelschnitt auf F^2 projicirt sich auf die Schnittebene (Projectionsebene) als Kegelschnitt, welcher die Contour von F^2 in der Schnittebene doppelt berührt und durch zwei feste Punkte geht, die sich als die Projectionen der Schnittpunkte von $B(A)$ mit F^2 darstellen. Die Projection von $A(B)$ erscheint als eine mit dem Ebenenbüschel $B(A)$ projectivische Punktreihe. Der Inbegriff aller auf diese Art erhaltenen, die Contour von F^2 doppelt berührenden Kegelschnitte kann durch den Strahlenbüschel seiner Berührungssehnen mit der Punktreihe $A(B)$ in Projectivität gesetzt werden.

Zu beachten ist hiebei nur, dass dem Strahle $B(A)$ des Sehnenbüschels in der Punktreihe $A(B)$ der Schnittpunkt von A und B zugewiesen wird. Es ergibt sich hieraus folgende Erzeugung der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten:

Es seien in einer Ebene zwei Gerade A, B und ein Kegelschnitt K^2 und auf B drei Punkte a, b, c gegeben.



T''
A₂
T''
H''
D''
h''₁
h''
E''
m''
A''
b₁
e
f''
L''
h'₁
F'
N'
d
α
U
L'
u
E'
H'
α₁
β₁
C'
h'
f'
O₂
O
α'
α'₁
n
β
b₂
K²
α''₁
A'
m'
c'
α''
D'
A₁
E₁
d₁
O₁

Wien.

Nun weise man dem Strahlenbüschel c die Punktreihe A projectivisch derart zu, dass dem Strahle $\overline{cb}$ der Schnittpunkt AB entspricht, und diesen beiden projectivischen Gebilden den Berührungssehnenbüschel der durch a und b gehenden und K^2 doppelt berührenden Kegelschnitte in der Weise, dass dieser mit dem Büschel c perspectivisch liegt. Lässt man nun jeden Strahl durch c von demjenigen Tangentenpaar schneiden, welches aus dem entsprechenden Punkt der Reihe A an den entsprechenden doppelt berührenden Kegelschnitt gezogen werden kann, so ist der Ort dieser Schnittpunkte eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

Wird das Projectionscentrum, welches früher in beliebiger Lage im Raume vorausgesetzt wurde, auf einer der Geraden A oder B angenommen, so erhält man, weil dann die Punktreihe $A(B)$ in der Projectionsebene (Schnittebene) als Punkt erscheint, eine etwas einfachere Erzeugungsweise dieser Curven vierter Ordnung.

Durch Specialisirung der Lagenverhältnisse zwischen A, B und F^2 erhält man in derselben Weise mit Hilfe doppelt berührender Kegelschnitte Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, mit Rückkehrpunkten, Berührungsknoten, ferner allgemeine Curven dritter Ordnung oder solche mit einem Doppelpunkt und Kegelschnitte.

Es dürfte hier die Bemerkung am Platze sein, dass zahlreiche Eigenschaften doppelt berührender Kegelschnitte, deren Begründung auf planimetrischem Wege manchmal ziemlich umständlich ist, sich durch die Methode der Projection oft in überraschend einfacher Weise entwickeln lassen, besonders seitdem durch die Principien der neueren Geometrie die Construction von der Realität der gegebenen Elemente ganz unabhängig gemacht wurde.