Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume; lineare Complexe und Strahlensysteme in denselben

Konrad Zindler in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Februar 1892.)

Einleitung.

Neben der Untersuchung arithmetischer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension, d. h. Systemen beliebig vieler unabhängiger Veränderlichen haben sich in den letzten Jahrzehnten synthetische Methoden zur Behandlung von Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension herausgebildet. Manche Autoren gehen hiebei stillschweigend oder ausdrücklich von gewissen Analogien mit unserem Raum aus (so Herr Veronese, »Behandlung der proj. Verhältnisse der Räume etc.«, Math. Ann., XIX, der auch neuestens in seinem Werke »Fondamenti di Geometria« dieselbe Begründungsweise festgehalten hat). Andere Autoren legen gegenwärtig mit Recht darauf Werth, in unserem Raume lineare Systeme geometrischer Gebilde aufzufinden, in denen man eine solche synthetische Geometrie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten entwickeln kann, so namentlich Herr Reye, der in seinen Abhandlungen »Über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel etc.« (Journ. für Math., Bd. 104, 106, 107) bis zu fünfzehnfachen linearen Mannigfaltigkeiten gekommen ist, nämlich zur Gesammtheit aller räumlichen Systeme, welche zu einem collinear sind. Besonders dann werden solche Mannigfaltigkeiten unentbehrlich sein (cf. die Anmerkung im letzten Paragraph dieser Abhandlung), wenn man die sogenannte mehrdimensionale Geometrie auf die gewöhnliche Geometrie anwenden will, und gerade dies hat sich als sehr interessant und fruchtbar erwiesen (cf. die fundamentale Abhandlung Herrn Veronese's a. a. O.).

Auf rein analytischem Wege ist der Nachweis solcher Mannigfaltigkeiten bisher kaum erbracht worden. Zwar pflegt man, an gewisse Determinanteneigenschaften anknüpfend, zu sagen, dass zum Beispiel sämmtliche algebraische ebene Curven n^{ten} Grades ein lineares System bilden, allein unter den Formen n^{ten} Grades werden stets definite sein (auch wenn n ungerade ist, sind sämmtliche Formen niedrigeren Grades unter denen n^{ten} Grades als Specialfälle enthalten), und man kann nicht ohneweiters behaupten, dass ihnen überhaupt etwas Geometrisches entspricht, eine Schwierigkeit, die erst durch Herrn Kötter's Werk »Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven« zu weichen scheint. Vor Erscheinen dieses Werkes konnte man also jedenfalls nicht die Existenz linearer geometrischer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension behaupten. Es ist aber werthvoll (cf. Reye, Journ. für Math., Bd. 107, S. 163), solche lineare Systeme zu besitzen, deren sämmtliche Elemente reell sind und nicht zum Theil selbst wieder anderweitig interpretirt werden müssen.

Vorliegende Abhandlung beabsichtigt, in unserem Raume lineare geometrische Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension nach einem systematischen Verfahren zu bilden. Hiebei wird vom fünfstufigen linearen System der linearen Complexe ausgegangen, in welchem zwischen den Complexen und Complexgeweben geradeso eine reciproke Beziehung aufgestellt werden kann, wie zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes. Diese Beziehung führt in ähnlicher Weise wie hier zu Nullsystemen und damit verbundenen Complexen, deren Elemente jedoch Complexbüschel statt Strahlen sind. Es zeigt sich, dass die vierzehnstufige Mannigfaltigkeit dieser Complexe wieder linear ist, und dass sich dieses Verfahren unter Erhaltung der Linearität des neuen Gebietes fortgesetzt wiederholen lässt. Die Elemente jedes Complexes eines neuen Gebietes sind Büschel von Complexen des nächst früheren Gebietes. So kann man zu linearen Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension gelangen, in denen die Geometrie der Lage und namentlich die

Methoden des Projicirens und Schneidens entwickelt werden können. Vermöge einer in jedem Gebiet durchführbaren Abbildung der dreistufigen linearen Systeme desselben auf den Punktraum sind diese Methoden auch zur Untersuchung des Punktraumes verwendbar. Die Methoden des Projicirens und Schneidens in Räumen beliebiger Dimension können so auf Vorgänge zurückgeführt werden, die sich vollständig in unserem gewöhnlichen Raume abspielen.

Dabei werden sich auch mehrere Sätze über lineare Complexe und Strahlensysteme in linearen Mannigfaltigkeiten höherer (ungerader) Dimension ergeben.

§. 1. Ein Fundamentalsatz über lineare Mannigfaltigkeiten.

Herr Reye hat bewiesen, dass die fünfstufige Mannigfaltigkeit der linearen Complexe des Raumes linear ist, und zwar synthetisch bis einschliesslich zu den dreistufigen »Complexgebüschen« (Geom. der Lage, 1880, II, Anhang), des Weiteren analytisch (Journ. für Math., Bd. 95). Der Beweis lässt sich durch einen allgemeinen Satz[1] über geometrische Mannigfaltigkeiten, der auch später noch zur Verwendung kommen wird, abkürzen.

Eine Mannigfaltigkeit R_n irgendwelcher Elemente R_0 pflegt man linear zu nennen, wenn sie folgende Eigenschaften hat:[2]

---

[1] Herr E. Kötter hat ähnliche Schlüsse, wie die zum Beweise dieses Satzes verwendeten, im §. 81 seiner »Grundzüge einer rein geometrischen Theorie etc.« zur Ableitung seiner Sätze über Involutionsnetze angewandt und bemerkt, dieselben liessen sich auf alle linearen Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Auch Herr Reye gebraucht einige dieser Schlüsse in »Über lineare Mannigfaltigkeiten .....«, I, z. B. §. 3, Art. 7; §. 6, Art. 29 (Journ. für Math., Bd. 104). Endlich hat Herr Veronese in seinen »Fondamenti« (cf. namentlich S. 458 f.) die Grundeigenschaften der nach seiner Methode construirten mehrdimensionalen Räume mit fast denselben Mitteln bewiesen, nur dass er sich eben Punkte (eventuell »ausserhalb« unseres Raumes) als Elemente aller dieser Räume vorstellt. Da ich den Satz selbst, der am Schlusse dieses Paragraphen formulirt ist, nirgends ausdrücklich ausgesprochen finde, habe ich mir erlaubt, auch seinen Beweis, obwohl sich dessen Bestandtheile an den genannten Orten vorfinden, zu entwickeln.

[2] Wir bezeichnen durch grosse lateinische Buchstaben stets lineare Mannigfaltigkeiten, deren Dimension (ausgenommen im §. 2) durch den unteren Index angezeigt wird. Wir nennen dieselben der üblichen Weise auch

ersteren in einem R_{p-2}, so wäre derselbe schon durch diese $p-1$ Punkte bestimmt und enthielte $R_0^{(p+1)}$; also enthielte auch R_{p-1} den Punkt $R_0^{(p+1)}$. Überhaupt sind dann auch je k der $p+1$ Punkte $(k<p)$ unabhängig.

Jedes durch $R_0^{(p+1)}$ und k Punkte von R_{p-1} definirte Gebilde R_k $(k \leqq p-1)$ liegt ganz in R_p, weil das durch die k Punkte definirte R_{k-1} ganz in R_{p-1} liegt. Also liegt auch das durch die nach eben Gesagtem unabhängigen Punkte $R_0^{(2)}$, $R_0^{(3)}$, . . $R_0^{(p+1)}$ definirte Q_{p-1} ganz in R_p. Definiren wir durch Q_{p-1} und $R_0^{(1)}$ einen Q_p, so liegt dieser nach 3 a) ganz in R_p; vertauschen wir die Rollen von R_p und Q_p, so folgt auch das Umgekehrte; also sind R_p und Q_p identisch; d, h.:

4 b. Weist man in einem durch $p+1$ Punkte definirten Raum R_p die bevorzugte Rolle von $R_0^{(p+1)}$ irgend einem anderen dieser Punkte zu, so wird dadurch derselbe Raum definirt.

Durch Combination von 4 a) und 4 b) folgt der vollständige Satz 4) auch für p. Denn seien $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, . . $S_0^{(p+1)}$ $p+1$ unabhängige Elemente eines durch $R_0^{(1)}$, $R_0^{(2)}$, . . $R_0^{(p+1)}$ definirten Raumes R_p, so ist der durch die S_0 definirte Raum S_p mit R_p identisch, weil man zum Beispiel zunächst $R_0^{(p+1)}$ durch $S_0^{(p+1)}$ ersetzen, hierauf die ausgezeichnete Rolle von $S_0^{(p+1)}$ einem anderen der noch übrigen p Elemente R_0 zuweisen kann worauf man wieder dieses durch ein anderes der übrigen p Elemente S_0 ersetzt u. s. f., bis alle R_0 durch die S_0 ersetzt sind.

5. Jedes durch $k+1$ Punkte von R_p bestimmte R_k $(k \leqq p)$ liegt vollständig in R_p; denn man kann sich R_p (nach 4) für p) so bestimmt denken, dass die $k+1$ Punkte unter den Definitionspunkten erscheinen.

Es seien in einem R_p ein beliebiges R_{p-1} gegeben und ein R_k $(k \leqq p-1)$, welches nicht ganz in R_{p-1} liegt. Wir denken uns R_k durch $k+1$ unabhängige Punkte definirt, von denen R_0 ein ausserhalb R_{p-1} gelegener sei, den wir mit den k übrigen $R_0^{(1)}$, $R_0^{(2)}$, . . $R_0^{(k)}$ durch Gerade verbinden. Jede derselben schneidet, wie sich beim Beweis von 3 a) ergab, R_{p-1} in einem Punkte. Diese k Punkte $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, . . . $T_0^{(k)}$ sind unabhängig (denn lägen sie in einem T_{k-2}, so wäre durch dieses und R_0 ein T_{k-1} bestimmt, in welchem auch die $k+1$ Punkte R_0, $R_0^{(1)}$, . . . $R_0^{(k)}$

enthalten wären); sie bestimmen also einen R_{k-1}, welcher sowohl in R_{p-1}, als auch in R_k liegt, deren Schnitt aber auch vollständig ausmacht, weil sonst R_k vollständig in R_{p-1} läge. Also:

In einem R_p schneidet ein R_k ($k \leqq p-1$) ein R_{p-1}, wenn es nicht ganz im letzteren liegt, in einem R_{k-1}.

Es seien jetzt R_i und R_k in R_p gelegen ($i, k < p-1$); um zum vollständigen Satz 6) für p zu gelangen, denken wir uns durch R_i ein R_{p-1} in R_p gelegt, welches R_k nicht vollständig enthält [nach Voraussetzung in 6)] und daher von ihm in einem R_{k-1} geschnitten wird. R_i und R_{k-1} können in keinem R_{p-2} liegen, weil sonst R_i und R_k in einem R_{p-1} lägen; ihr Schnitt ist also nach 6) für $p-1$ ein R_{i+k-p}; dieser ist zugleich der Schnitt von R_i und R_k. 6) gilt also auch für p.

Da diese Schlüsse auch schon für $p-1=2$ anwendbar sind,[1] so gelten 3) bis 6) bis $m=n$, so lange überhaupt ausserhalb eines R_p noch ein Element R_0 gefunden werden kann, um einen R_{p+1} zu construiren.

Man kann dies in folgenden Fundamentalsatz zusammenfassen:

Wenn durch je zwei Elemente (»Punkte«) einer n-stufigen Mannigfaltigkeit R_n irgend welcher Elemente R_0 in eindeutiger (in den Einzelfällen anzugebender) Weise eine einstufige Mannigfaltigkeit R_1 der Elemente (eine »Gerade«) definirt wird, ferner die Gesammtheit R_2 der Elemente, welche durch eine R_1 und einen ausserhalb liegenden Punkt R_0 als Inbegriff der auf den Verbindungsgeraden zwischen R_0 und allen Punkten von R_1 liegenden Punkte definirt ist, die Eigenschaft hat, dass jedes durch zwei Punkte von R_2 definirte R_1 vollständig R_2 angehört, und zwei

[1] Herr Veronese beweist (Fondamenti, p. 299 f.) schon von der Ebene, dass sie durch je drei ihrer Punkte ebenso bestimmt ist, wie durch die drei definirenden. Da sich aber der Beweis auf metrische Relationen stützt, ist er nicht ohne weiters auf jede lineare Mannigfaltigkeit übertragbar, und es scheint vielmehr von den Voraussetzungen im Fundamentalsatz nichts entbehrt werden zu können, um die Schlussweise dieses Paragraphen für eine Mannigfaltigkeit beginnen zu können, in der man keinen Distanzbegriff hat.

verschiedene in R_2 liegende R_1 ein Element gemeinsam haben; so reicht dies dazu hin, dass R_n, wie vielstufig es auch sei, linear ist, d. h. die Eigenschaften 3)—6) (S. 4) besitzt.

Wenn 1) und 2) von irgend einer Mannigfaltigkeit bewiesen sind, so folgen hiemit auch die übrigen fundamentalen Sätze über lineare Mannigfaltigkeiten, die wir verwenden werden, und die zum Beispiel von Herrn Veronese (Math. Ann., 19: »Behandlung der proj. Verh. etc.,« Einleitung, 1 und »Fondamenti di Geometria,« p. 510 f.) und von Herrn Schubert (Math. Ann., 26: »Die n-dimensionalen Verallg. der fund. Anzahlen unseres Raumes«, §. 2) entwickelt wurden.

§. 2. Die Linearität der fünffachen Mannigfaltigkeit der linearen Complexe des Raumes.

Wir wollen den Beweis der Linearität der fünffachen Mannigfaltigkeit der linearen Complexe hier zum Theil nochmals in der Art entwickeln, wie wir die Verallgemeinerung auf die später zu behandelnden linearen Complexe in einem beliebigen R_{2q+1} vollziehen werden.

Wir denken uns zwei verschiedene Complexe Γ', Γ'' gegeben (etwa durch je ein räumliches Fünfeck), wodurch auch ein Strahlensystem Ψ definirt ist als die Gesammtheit der den Complexen gemeinsamen Strahlen. Zu jedem Punkte und zu jeder Ebene kann der incidente Strahl von Ψ construirt werden, wesshalb auch Ψ als vollständig gegeben zu betrachten ist. Zunächst können wir zur Kenntniss der etwaigen singulären Punkte des Raumes, durch welche ein ganzes Büschel von Ψ geht, folgendermassen gelangen: Der Punktreihe auf einem Strahl l von Ψ entsprechen in Bezug auf Γ' und Γ'' zwei projective Ebenenbüschel, deren Doppelebenen ganze Büschel von Ψ enthalten; ihre Träger sind die den Doppelebenen entsprechenden Punkte auf l; es können also folgende Fälle eintreten:

1 *a.* Die Ebenenbüschel sind identisch; jeder Punkt auf l ist singulär.

1 *b.* Die beiden Doppelebenen fallen zusammen.

2. Es sind zwei getrennte Doppelebenen vorhanden.

3. Es sind keine reellen Doppelebenen vorhanden.

Im Falle 1 a) gehören alle Strahlen zu Ψ, welche l schneiden und in der dem Schnittpunkte entsprechenden Ebene liegen, ausserdem aber keiner; denn wäre l_1 ein solcher (der l nicht schneiden könnte), so hätten alle Punkte von l_1 und daher überhaupt alle Punkte des Raumes in Bezug auf Γ' und Γ'' dieselbe Nullebene, weil durch jeden Punkt in den zwei Ebenen, welche ihn mit l und l_1 verbinden, je ein Strahl von Ψ ginge; es liegen also auch keine singulären Punkte ausser l.

Im Falle 1 b) sei λ die Doppelebene und L der ihr entsprechende Punkt auf l. Sei l_1 ein anderer Strahl von Ψ, welcher l nicht schneide; dann ist der Schnittpunkt $(\lambda, l_1) \equiv L_1$ singulär mit $(l_1, L) \equiv \lambda_1$ als zugeordneter Ebene, und zwar der einzige singuläre Punkt auf l_1; denn die einem zweiten entsprechende Doppelebene müsste l in einem ebenfalls singulären Punkte schneiden. Auf irgend einem dritten Strahle l_2 sind die Schnittpunkte mit λ und λ_1 singuläre Punkte; da es aber nur einer sein kann, muss jeder Schnittpunkt L_2 eines beliebigen l_2 mit λ auf LL_1 liegen; von letzterem Strahl ausgehend, können wir dieselbe Betrachtung wie in 1 a) machen, womit wir also auf den früheren Fall zurückgekommen sind.

2. Auf jedem anderen Strahl l_1 sind auch zwei getrennte singuläre Punkte vorhanden, nämlich die Schnittpunkte L_1, L_1' mit den singulären Ebenen λ, λ' durch l; auch wenn l_1 und l sich schneiden, muss auf l_1 ausser dem Schnittpunkt, weil sonst Fall 1) vorhanden wäre, noch ein zweiter singulärer Punkt liegen. Wenn L, L' die λ, λ' auf l entsprechenden Punkte sind, so sind den Punkten L_1, L_1' die Ebenen $(l_1, L) \equiv \lambda_1$ und $(l_1, L') \equiv \lambda_1'$ zugeordnet. Die singulären Punkte L_2, L_2' eines dritten Strahles l_2 können sowohl als Schnitt mit λ, λ' als mit λ_1, λ_1' gefunden werden. Desshalb muss der in λ liegende Punkt L_2 auf $L'L_1$ liegen; auf LL_1 kann er nämlich nicht liegen, weil sonst auf diesem Strahl drei singuläre Punkte lägen (Fall 1); analog liegt L_2' auf LL_1'; alle singulären Punkte des Raumes liegen also auf zwei sich kreuzenden Geraden u, v; und alle singulären Ebenen gehen durch diese Geraden.

3. Nach dem Bisherigen können auch auf keinem anderen Strahl von Ψ singuläre Punkte liegen; kein Strahl von Ψ schneidet einen anderen.

Diese drei Fälle sind wirklich alle möglich; denn man kann Γ', Γ'' durch zwei räumliche Fünfecke $A'B'C'D'E'$ und $A'B'C''D'E''$ fixiren, welche die Punkte $A'B'D'$ gemein haben und ausserdem die A', B' entsprechenden Nullebenen α', β'. Der Ebene $A'B'D' \equiv \zeta'$ entsprechen dann in Bezug auf Γ' und Γ'' die beiden Schnittpunkte Z' und Z'' von $A'B'$ mit den beiden Ebenen δ' und δ'', welche D' zugeordnet sind; und man kann die Fünfecke so wählen, dass Z', Z'' zusammenfallen oder nicht und auch im ersten Falle die übrigen Stücke so wählen, dass $\Gamma'\Gamma''$ verschieden werden; hiedurch erhält man die Fälle 1) und 2). Um 3) zu erhalten, ordnen wir den Punkten A' und B' bezüglich Γ' dieselben Ebenen α', β' wie früher zu; bezüglich Γ'' jedoch seien A' und β', B' und α' einander entsprechend. Dann kann man die Fünfecke noch so wählen, dass die durch $A'B'Z'$ und $B'A'Z''$ bestimmten projectiven Punktreihen keine reellen Doppelpunkte haben. Da sie involutorisch sind, genügt hiezu, dass sie gleichlaufend sind.

Wir setzen voraus, Ψ habe reelle Axen u, v; sind keine solchen vorhanden, so gelten die nachfolgenden Schlüsse genau ebenso, nur dass die Singularitäten, auf die wir auch Rücksicht zu nehmen haben, gar nicht auftreten. Wir wählen einen Punkt P, dessen Nullebenen $\varepsilon', \varepsilon''$ in Bezug auf Γ', Γ'' verschieden sind; dann ist deren Schnittlinie s der einzige durch P gehende Strahl von Ψ Bezüglich jedes Complexes, welcher Ψ enthält, muss die Nullebene von P durch s gehen. Wir wählen eine dritte Ebene ε durch s, welche zunächst weder u noch v enthalte, und suchen einen Complex Γ, welcher Ψ enthält, und in welchem P und ε einander als Nullpunkt und Nullebene zugeordnet sind. Jedem Punkt Q von ε ausserhalb s muss in Γ, falls es einen gibt, die Verbindungsebene $\varkappa$ von P mit dem einzigen Strahl q von Ψ, der durch Q geht, als Nullebene zugeordnet werden. Die Gesammtheit der Strahlen aller Büschel $(Q, \varkappa)$ nennen wir Ω. Für einen Punkt R ausserhalb ε suchen wir alle Punkte in ε, die einen Strahl von Ω durch R senden. Legen wir durch die Gerade RP eine Ebene α, so enthält sie einen Strahl a von Ψ

dessen Durchstosspunkt A mit ε die Ebene α in Γ zur Nullebene haben muss; somit schickt A und kein anderer Punkt der Schnittlinie (α, ε) einen Strahl von Ω durch R. Die Strahlen von Ψ, welche RP schneiden, bilden eine Regelschaar $\mathfrak{R}$, zu welcher auch s gehört. Der Ort der Punkte A für alle Ebenen α des Büschels RP ist also diejenige Gerade g, welche das Hyperboloid, auf dem $\mathfrak{R}$ liegt, ausser s noch mit ε gemein hat. Wenn die Verbindungsebene (g, R) ist, bilden also die durch R gehenden Strahlen von Ω das Büschel (R, ρ). Nur die Verbindungsstrahlen t eines Punktes R mit dem Schnitt $(g, s) \equiv S$ gehörten von diesen Büscheln noch nicht zum System Ω; wir nehmen sie aber jetzt, sowie den Strahl s selbst, in dasselbe auf. Auch falls RP von einer Axe v in T geschnitten wird, ist der Ort der Punkte A eine Gerade, nämlich die Schnittlinie von (T, u) und ε. Endlich ist durch Ω jetzt auch jedem Punkte von s eine Ebene zugeordnet: Jeder Punkt R schickt einen Strahl t von Ω durch einen Punkt S von s. Beschreibt R die Reihe PR, so dreht sich ρ um g; alle Punkte von PR, daher alle Punkte der Ebene $(s, R) \equiv \sigma$ schicken durch denselben Punkt S und keinen anderen von s einen Strahl von Ω. S und σ ordnen wir einander zu, womit ausnahmslos j e d e m Punkte des Raumes eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet ist, welche die durch den Punkt gehenden Strahlen von Ω enthält, und umgekehrt, wie aus den dualen Betrachtungen folgt. Ω ist also sicher der gesuchte Complex Γ, sobald jene Zuordnung überhaupt einer Reciprocität angehört. Hiezu genügt es, zu zeigen, dass jeder geraden Punktreihe h des Raumes ein projectiver Ebenenbüschel zugeordnet ist: Ist h kein Strahl von Ψ, so ergibt sich dies so: Für alle Punkte von h kann man die Ebene (P, h) als Ebene α benützen. In ihr liege der Strahl a von Ψ, welcher ε in A schneidet. $\mathfrak{R}'$ sei die h zugeordnete Regelschaar von Ψ Dann werden die den Punkten von h zugeordneten Ebenen durch Projection von $\mathfrak{R}'$ aus A erhalten, bilden also, da A auf einem Strahle von $\mathfrak{R}'$ liegt, ein zur Reihe h projectives Büschel. Zugleich ergibt sich, dass, falls der Punkt (h, ε) mit A zusammenfällt, also h zu Ω gehört, h selbst der Träger des Büschels ist. Falls h zu Ψ gehört, können wir die seinen Punkten zugeordneten Ebenen auch finden, indem wir es mit einem Ebenenbüschel zum Schnitt bringen, dessen Träger h' sich selbst entspricht (zu Ω gehört), und jeden Schnittpunkt mit dem entsprechenden Punkt von h' verbinden. Also ist Ω der gesuchte Complex Γ. Da das Verfahren der Gewinnung von Ω auch eindeutig ist, ergibt sich, dass es einen und nur einen regulären linearen Complex gibt, welcher Ψ enthält, und in welchem P und ε einander als Nullpunkt und Nullebene entsprechen.

Wenn ε eine Axe u von Ψ enthält und wir den Satz aufrecht erhalten wollen, dass jedes Strahlbüschel, von dem zwei Strahlen zu einem Complex gehören, ganz demselben angehört, so wäre allen Punkten der Ebene ε sie selbst als Nullebene zuzuordnen. Jeder Ebene α, welche u in A schneidet, müsste A als Nullpunkt zugeordnet werden, weil die Strahlen (α, ε) und der durch A gehende in α liegende Strahl von Ψ in den zu definirenden Complex aufzunehmen sind. Wir gelangen so zu einem Liniensystem, welches Ψ enthält und aus allen eine Gerade u schneidenden Strahlen besteht. Solche »singulären« Complexe wollen wir in die Mannigfaltigkeit der früher durch Nullsysteme definirten aufnehmen; dann entspricht jeder durch s gehenden Ebene ε ein Complex, welcher Ψ enthält. Es ist jedoch nachzusehen, ob die neuen Gebilde auch das Gesetz 1) des §. 1 befolgen. Zwei singuläre Complexe Σ_1, Σ_2, deren Axen u_1, u_2 sich schneiden, definiren ebenfalls eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von (singulären) Complexen, welche alle Σ_1 und Σ_2 gemeinsamen Strahlen enthalten; deren Axen füllen nämlich das Büschel (u_1, u_2). Im Falle zweier allgemein gelegener singulärer Complexe oder eines singulären und eines regulären Complexes folgt die Richtigkeit von 1) des §. 1 daraus, dass auch in diesen Fällen das beiden Complexen gemeinsame Strahlensystem aus allen zwei Gerade schneidenden Strahlen besteht [eventuell wie Ψ in 1) beschaffen ist].

Die Gesammtheit der regulären und singulären Complexe bildet also eine Mannigfaltigkeit, für welche 1) des §. 1 gilt, wobei zugleich die Complexe eines Büschels lückenlos auf das Ebenenbüschel um jeden Strahl s des Trägers Ψ abgebildet sind, und ebenso natürlich dual auf die Punktreihe s durch die Nullpunkte einer festen Ebene π durch s bezüglich aller Complexe des Büschels. Über die Giltigkeit von 2) des §. 1 cf. Reye, Geom. der Lage, II, Anh. (1880). Des weiteren folgt dann die Linearität der Mannigfaltigkeit der linearen Complexe aus dem Fundamentalsatz über lineare Mannigfaltigkeiten (§. 1).

Um das in der Einleitung angedeutete Verfahren zur Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension durchführen zu können, werden zunächst gewisse Untersuchungen so geführt, als ob wir schon lineare Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension besässen; die Ergebnisse werden dann zu Schlüssen von n auf $n+k$ combinirt werden.

§. 3. Begründung der Collineation in R_n.

Definitionen: Unter einem Feld S_i in einer linearen Mannigfaltigkeit R_n $(i \leqq n)$ verstehen wir den linearen Raum S_i sammt allen in ihm liegenden Punkten und linearen Räumen niedrigerer Dimension (den »Elementen« des Feldes), unter einem Bündel (S_i, S_k), wobei $i < k \leqq n$, den Raum S_i sammt allen durch ihn gehenden linearen Räumen höherer Dimension (den »Elementen« des Bündels), welche zugleich in S_k liegen.

Zwei Felder S_m und S'_m $(2 \leqq m \leqq n)$ in R_k heissen collinear auf einander bezogen, wenn zwischen ihren Elementen eine gegenseitig eindeutige Zuordnung hergestellt ist, welche folgende Eigenschaften hat:

I. Jedem Elemente R_k von S_m entspricht ein R'_k von S'_m, und umgekehrt.

II. Wenn R_k und R_h von S_m einen R_i gemein haben, so haben R'_k und R'_h von S'_m denjenigen R'_i gemein, welcher R_i entspricht $(k, h = 0, 1, 2, \ldots m-1)$.

Die Möglichkeit der collinearen Beziehung geht zunächst für $m \leqq n-1$ daraus hervor, dass man durch das Verfahren des Projicirens und Schneidens, welches sich auf jede lineare Mannigfaltigkeit übertragen lässt, collineare Felder erhalten kann.

Es soll gezeigt werden:

1. Zwischen je zwei Räumen S_m und S'_m eines linearen Raumes R_n $(2 < m \leqq n)$ kann man eine collineare Beziehung auf folgende Art herstellen:

1 *a*. Zwei Feldern A_{m-1}, B_{m-1} von S_m werden zwei beliebige Felder A'_{m-1}, B'_{m-1} von S'_m beziehungsweise collinear so zugeordnet, dass den Elementen des gemeinschaftlichen Feldes S_{m-2} von A_{m-1} und B_{m-1} sowohl als Elementen des einen wie des anderen der letzteren beiden Felder die Elemente des gemeinschaftlichen Feldes S'_{m-2} von A'_{m-1} und B'_{m-1} collinear zugeordnet sind.

1 *b*. Einem R_i von S_m $(i = 1, 2, \ldots m-1)$ wird ein R'_i von S'_m nach folgender Regel zugeordnet: R_i schneidet A_{m-1} in einem $R^{(a)}_{i-1}$, B_{m-1} in einem $R^{(b)}_{i-1}$, S_{m-2} im Allgemeinen in einem R_{i-2}, welchem nach 1 *a*) in S'_{m-2} ein R'_{i-2} entspricht, durch welches auch die den Elementen $R^{(a)}_{i-1}$, $R^{(b)}_{i-1}$ nach 1 *a*) entsprechenden $R'^{(a)}_{i-1}$, $R'^{(b)}_{i-1}$ gehen; letztere lassen sich also durch einen R'_i verbinden, welchen wir dem R_i zuordnen wollen. Hiedurch sind allen R_i von S_m $(i = 1, 2, \ldots m-1)$ R'_i von S'_m und umgekehrt zugeordnet, mit Ausnahme jener, welche S_{m-2} in einem R_{i-1} oder S'_{m-2} in einem R'_{i-1} schneiden, weil dann das Verfahren versagt.

2 *a*. Die bisherige Zuordnung befolgt das Gesetz II für $k, h = 1, 2, \ldots m-1$, und auch allen Elementen eines Bündels (R_0, S_m) entsprechen (insoweit ihnen bisher überhaupt Elemente von S'_m zugeordnet sind), lauter Elemente in S'_m, die durch einen Punkt R'_0 gehen.

1 *c*. Wir setzen die Zuordnung fort, indem wir einem R_0 von S_m das R'_0 des Satzes 2 *a*) zuweisen, wodurch jedem Punkte von S_m ein Punkt von S'_m gegenseitig eindeutig zugeordnet ist.

1 *d*. Wir vollenden endlich die Zuordnung, indem wir in einem R_i $(i > 0)$, welcher S_{m-2} in einem R_{i-1} schneidet, einen Punkt P_0 ausserhalb R_{i-1} wählen und den durch die diesen entsprechenden Elemente P'_0 und R'_{i-1} bestimmten Raum R'_i dem R_i zuordnen. Diese Zuordnung ist von der Wahl des Punktes P_0 unabhängig.

2 *b*. Das Gesetz II gilt jetzt ausnahmslos, d. h. auch für jene Elemente, denen früher (2 *a*) noch keine zugeordnet waren.

3. Jede Collineation $\mathfrak{C}$ zwischen S_m und S'_m lässt sich auf die in 1 *a*)...1 *d*) angegebene Weise erhalten; und wenn in $\mathfrak{C}$ zwei Feldern C_{m-1}, D_{m-1} die Felder C'_{m-1}, D'_{m-1} entsprechen,

so ist die durch die letzteren vier Gebilde nach 1) definirte Collineation $\mathfrak{C}'$ mit $\mathfrak{C}$ identisch.[1]

4. Durch Zuordnung von $m+2$ Punkten $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, \ldots P_0^{(m+2)}$, von denen je $m+1$ unabhängig sind, von S_m zu $m+2$ eben solchen $Q_0^{(1)}, Q_0^{(2)}, \quad Q_0^{(m+2)}$ von S'_m ist eindeutig eine Collineation $\mathfrak{C}$ zwischen S_m und S'_m definirt. Durch zwei andere Gruppen von je $m+2$ allgemein gelegenen Punkten, welche in $\mathfrak{C}$ einander zugeordnet sind, ist dieselbe Collineation definirt.

5. Wenn zwei Felder F_m und F'_m in einem S_{m+1} collinear so aufeinander bezogen sind, dass alle Elemente des Schnittfeldes F_{m-1} entsprechend gemeinschaftlich sind, so liegen sie perspectivisch, d. h. jedes R_i lässt sich mit seinem entsprechenden R'_i durch einen S_{i+1} verbinden, und alle diese S_{i+1} gehen durch einen Punkt C_0.

Wir wollen die Anwendbarkeit dieser Definitionen und die Richtigkeit der Sätze für alle Paare S_m und S'_m in R_n bis $m = p-1$ $(p-1 \geqq 2)$, oder, wie wir kürzer sagen, »für $p-1$« voraussetzen und sie dann auch «für p« beweisen.

Das Verfahren $1a$) und $1b$) lässt sich unter dieser Voraussetzung auch für p durchführen, und es ist zunächst $2a$) für p zu beweisen:

Wenn R_k und R_h einen R_i gemeinsam haben, so haben die Schnitträume $R_{k-1}^{(a)}$ $R_{h-1}^{(a)}$ von R_k und R_h mit A_{p-1} den Schnittraum $R_{i-1}^{(a)}$ von R_i mit A_{p-1} gemein. Analog haben bei analogen Bezeichnungen $R_{k-1}^{(b)}$ und $R_{h-1}^{(b)}$ den $R_{i-1}^{(b)}$ gemein. Wenn nun II) für $p-1$ gilt, so haben die entsprechenden $R_{k-1}'^{(a)}$ und $R_{h-1}'^{(a)}$ denjenigen $R_{i-1}'^{(a)}$ gemeinsam, welcher $R_{i-1}^{(a)}$ entspricht; analog haben $R_{k-1}'^{(b)}$ und $R_{h-1}'^{(b)}$ den $R_{i-1}'^{(b)}$ gemeinsam. Nun ist R'_i als Verbindungsraum von $R_{i-1}'^{(a)}$ und $R_{i-1}'^{(b)}$ definirt, liegt also sowohl im Verbindungsraum von $R_{k-1}'^{(a)}$ und $R_{k-1}'^{(b)}$, als auch von $R_{h-1}'^{(a)}$ und $R_{h-1}'^{(b)}$, d. i. sowohl in R'_k als R'_h. Dies gilt für $i = 1, 2, . \quad p-2$.

Ferner werden durch einen Bündel R_0 die Felder A_{p-1}, B_{p-1} perspectiv-collinear zugeordnet, so dass die Elemente von

---

[1] Begründet man für die Ebene und den Raum die Collineation nach Möbius, so ist das Bedürfniss nach diesem Satze um so grösser; ihm hat in diesem Falle Herr Blasius in seiner Abhandlung »Beitrag zur geometrischen Krystallographie« (Annalen der Physik und Chemie, Bd. XLI, 1890, S. 544 f.) Rechnung getragen.

S_{p-2} entsprechend gemeinschaftlich sind. Es werden daher auch A'_{p-1}, B'_{p-1} collinear aufeinander bezogen, so dass die Elemente von S'_{p-2} entsprechend gemeinschaftlich sind. Nach 5) für $p-1$ liegen also A'_{p-1} und B'_{p-1} in S'_m perspectiv, und allen Elementen durch R_0 werden Elemente durch das Perspectivitätscentrum R'_0 zugeordnet, womit auch der zweite Theil von 2 *a*) bewiesen ist und 1 *c*) auch für p in Kraft tritt. Falls R_0 in A_{p-1} oder B_{p-1} liegt, werden diese Felder zwar nicht collinear bezogen, dann folgt aber das zu Beweisende unmittelbar aus der Zuordnungsregel.

Die Zuordnung 1 *d*) ist jetzt auch für p anwendbar, und um ihre Unabhängigkeit von der Wahl des Punktes P_0 zunächst für eine den S_{p-2} in einem Punkte R_0 schneidende Gerade G_1 zu zeigen, legen wir durch G_1 eine Ebene E_2 in S_p, welche mit S_{p-2} nur den Punkt R_0 gemein hat. Allen Punkten der Ebene E_2 entsprechen Punkte der entsprechenden Ebene E'_2, wie aus 2 *a*), welches auch schon für p bewiesen ist, hervorgeht. Wir wählen auf G_1 zwei Punkte P_0, P^*_0; wären nun die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte P'_0, P'^*_0 mit R'_0 nicht identisch, so ginge die in E'_2 liegende Verbindungslinie $P'_0 P'^*_0$ nicht durch R'_0 und könnte daher S'_{p-1} überhaupt nicht schneiden; ihr entspräche daher in S_p eine S_{p-2} nicht schneidende Gerade, auf welcher auch P_0, P^*_0 liegen müssten; diese beiden liegen aber auf der S_{p-2} schneidenden Geraden G_1. Es folgt zugleich, dass der Incidenzsatz II für Punkte und Gerade ($k, h = 0, 1$) jetzt ausnahmslos gilt, auch für die durch die neue Zuordnung hinzugetretenen Elemente.

Nehmen wir in einem R_i, welches S_{p-2} in einem R_{i-1} schneidet, zwei Punkte P_0, P^*_0 an, so wird R_{i-1} von deren Verbindungslinie G_1 in einem Punkte R_0 geschnitten, welchem R'_0 entspreche. Nun wird das R'_i, welches nach 1 *d*) aus R'_{i-1} und P'_0 erhalten wird, ebenso aus R'_{i-1} und der Geraden $R'_0 P'_0$ erhalten R'^*_i wird aus R'_{i-1} und der Geraden $R'_0 P'^*_0$ erhalten, ist also mit R'_i identisch, weil die beiden Geraden nach dem eben Bewiesenen identisch sind. Die Zuordnung 1 *d*) ist also von der Wahl des Punktes P_0 unabhängig, und der Incidenzsatz II gilt jetzt ausnahmslos zunächst für Punkte und irgendwelche andere Elemente, dann aber auch für beliebige Elemente, weil ich mir das Schnittgebilde derselben durch eine Anzahl unabhängiger Punkte bestimmt denken kann. Die Aufstellung der Collineation ist also auch für p vollendet.

Nach II) kann man in einer Collineation zu einem Elemente R_i das entsprechende auch finden, wenn man zu irgendwelchen $i+1$ unabhängigen Punkten von R_i die entsprechenden kennt, deren Verbindungsraum R'_i dem R_i entspricht. Die ursprüngliche Zuordnungsregel 1 b) können wir als Specialfall hievon auffassen, indem wir die $i+1$ Punkte auf die Felder A_{p-1} und B_{p-1} vertheilt denken; ebenso gut können sie aber auch in den Schnittgebilden von R_i mit zwei anderen Feldern C_{p-1}, D_{p-1} angenommen werden, welche also zunächst für die nach 1 b) aus C_{p-1}, D_{p-1}, C'_{p-1}, D'_{p-1} erhaltbaren Elemente dieselbe Zuordnung liefern, dann aber auch für die anderen Elemente, deren Zuordnung sich auf die durch 1 b) erhaltenen stützt.

Daraus folgt der zweite Theil des Satzes 3), und da in einer beliebigen Collineation $\mathfrak{C}$ nach ihren Definitionseigenschaften I und II auch zwei beliebige Paare entsprechender Felder collinear so aufeinander bezogen sind, dass sie die Bedingung in 1 a) erfüllen, so hätte man, falls sie $p-1^{\text{ter}}$ Dimension sind, $\mathfrak{C}$ aus ihnen erhalten können.

Beweis von 4): Durch p der Punkte $P_0^{(1)}$, $P_0^{(2)}$, $\ldots P_0^{(p)}$ ist ein Feld A_{p-1} bestimmt, auf welches das durch die p entsprechenden Punkte bestimmte Feld A'_{p-1} collinear so bezogen werden muss, dass die p Punktepaare entsprechende sind, und ausserdem dem Schnittpunkt von $P_0^{(p+1)} P_0^{(p+2)}$ mit A_{p-1} der Schnittpunkt von $Q_0^{(p+1)} Q_0^{(p+2)}$ mit A'_{p-1} entspricht, was nach 4) für $p-1$ eindeutig möglich ist. Thut man dasselbe mit einer anderen Gruppe von p Punkten, bei welcher zunächst nur ein Punkt durch einen anderen ersetzt wurde, so erhält man vier Felder A_{p-1}, A'_{p-1}, B_{p-1}, B'_{p-1}, welche den Bedingungen 1 a) genügen, weil das gemeinschaftliche Schnittfeld S_{p-2} von A_{p-1} und B_{p-1} schon allein durch die gemeinschaftlichen $p-1$ Punkte der beiden Gruppen bestimmt ist. Die vier Felder bestimmen also eine Collineation; diese ist dann nach 3) von der Wahl der Gruppen unabhängig, wesshalb sie auch eindeutig durch die $p+2$ Punktepaare bestimmt ist.

5. Nehmen wir in F_p und F'_p zwei entsprechende A_{p-1} und A'_{p-1} an, so haben sie ihre Schnittfelder mit F_{p-1} entsprechend gemeinschaftlich, liegen daher nach 5) für $p-1$ perspectiv mit dem Centrum A_0. Zwei andere Felder B_{p-1}, B'_{p-1} liegen auch perspectiv mit dem Centrum B_0. Nun liegt auch das Schnittfeld S_{p-2} von A_{p-1} und B_{p-1} mit dem Schnittfeld S'_{p-2} von A'_{p-1} und B'_{p-1} nach 5) für $p-2$ perspectiv. Mit deren Perspectivitätscentrum C_0 müssen A_0 und B_0 zusammenfallen. Es gilt also 5) auch für p.

§. 4. Begründung der Reciprocität in R_n.[1]

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zwei lineare Felder } S_m \text{ und } S'_m \\ \text{Ein Bündel } (A_0, R_m) \text{ und ein Feld } R'_{m-1}\end{array}\right\} \text{ in einem } R_n$$

heissen reciprok aufeinander bezogen, wenn zwischen ihren Elementen eine gegenseitig eindeutige Zuordnung hergestellt ist, welche folgende Eigenschaften hat:

I. Jedem $R_k \left\{\begin{array}{l}\text{von } S_m \\ \text{des Bündels } (A_0, R_m)\end{array}\right\}$ entspricht ein R'_{m-k-1} $\left.\begin{array}{l}\text{von } S'_m \\ \text{von } R'_{m-1}\end{array}\right\}$, und umgekehrt ($k = 0, 1, 2, \ldots m-1$).

II. Wenn R_k und R_h $\left\{\begin{array}{l}\text{von } S_m \\ \text{des Bündels } (A_0, R_m)\end{array}\right\}$ einen R gemeinsam haben, so liegen R'_{m-k-1} und R'_{m-h-1} in demjenigen $R'_{m-i-1} \left\{\begin{array}{l}\text{von } S'_m \\ \text{von } R'_{m-1}\end{array}\right\}$, welches R_i entspricht ($k, h = 0, 1, 2, \ldots m-1$).

Es soll nun gezeigt werden:

1. Zwischen je zwei Räumen S_m und S'_m von R_n $(2 < m \leqq n)$ lassen sich reciproke Beziehungen aufstellen, sobald sich zwischen den S_2 desselben solche aufstellen lassen; und zwar erhält man eine Reciprocität, wenn man

1 *a.* zwei Bündel (A_0, S_m), (B_0, S_m) und zwei Felder A'_{m-1} und B'_{m-1} von S'_m beziehungsweise reciprok so bezieht, dass den gemeinschaftlichen Elementen der Bündel A_0 und B_0, welche

---

[1] Herr Veronese hat in seiner Abhandlung, Math. Ann., XIX, »Behandlung der projectivischen Verhältnisse ....«, Art. 15 die Begründung der reciproken Beziehung in R_n angedeutet; es wird jedoch, namentlich mit Rücksicht auf die Elemente, für welche die allgemeine Zuordnungsregel versagt, nicht überflüssig sein, eine solche Begründung wirklich durchzuführen.

ein Bündel (S_1, S_m) bilden, sowohl als Elementen des einen wie des anderen Bündels die Elemente des gemeinschaftlichen Feldes S'_{m-2} von A'_{m-1} und B'_{m-1} entsprechen.

1 *b*. Wenn man ferner jedem R_i von S_m $(i = 0, 1, 2, \ldots m-2)$ ein R'_{m-i-1} nach folgender Regel zuordnet: R_i bestimmt mit A_0 ein $R^{(a)}_{i+1}$, mit B_0 ein $R^{(b)}_{i+1}$, denen in A'_{m-1}, B'_{m-1} zwei Elemente $R'^{(a)}_{m-i-2}$, $R'^{(b)}_{m-i-2}$ entsprechen. Und zwar können $R^{(a)}_{i+1}$, $R^{(b)}_{i+1}$ durch einen beiden Bündeln A_0 und B_0 gemeinschaftlichen R_{i+2} verbunden werden, welchen ein beiden Feldern A'_{m-1} und B'_{m-1} gemeinsamer R'_{m-i-3} entspricht, durch den sowohl $R'^{(a)}_{m-i-2}$ als auch $R'^{(b)}_{m-i-2}$ gehen. Die beiden letzteren können also durch einen R'_{m-i-1} verbunden werden, welcher dem R_i zugeordnet werde. Hiemit sind die Elemente R_i von S_m und R'_{m-i-1} von S'_m $(i = 0, 1, 2, \ldots m-2)$ gegenseitig eindeutig zugeordnet, mit Ausnahme jener von S^m, welche mit der Geraden $A_0 B_0 \equiv S_1$ einen von A_0 und B_0 verschiedenen Punkt gemein haben, und jener von S'_m, welche sich mit S'_{m-2} durch einen von A'_{m-1} und B'_{m-1} verschiedenen Q_{m-1} verbinden lassen, weil dann die Regel versagt.

2 *a*. Die bisherige Zuordnung befolgt das Gesetz II (für $k, h = 0, 1, 2, \ldots m-2$) und auch allen Elementen R_i eines Feldes R_{m-1} in S_m sind (soweit ihnen überhaupt Elemente schon zugewiesen sind) Elemente R'_{m-i-1} eines und desselben Bündels R'_0 von S'_m zugeordnet.

1 *c*. Wir setzen die Zuordnung fort, indem wir jedem R_{m-1} von S_m das R'_0 des Satzes 2 *a*) zuweisen, womit alle R_{m-1} von S_m und alle R'_0 von S'_m gegenseitig eindeutig zugeordnet sind.

1 *d*. Wir vollenden endlich die Zuordnung, indem wir einem R_i von S_m, welcher mit S_1 den Punkt P_0 gemein habe, ein R'_{m-i-1} nach folgender Regel zuordnen: R_i bestimmt mit S_1 einen R_{i+1}, welchem ein R'_{m-i-2} des Feldes S'_{m-2} entspricht; wir legen ferner durch R_i einen R_{m-1}, welcher mit S_1 nur den Punkt P_0 gemein hat; diesem entspricht in S'_m ein Punkt R'_0 ausserhalb S'_{m-2}. Den Verbindungsraum R'_{m-i-1} von R'_{m-i-2} und R'_0 ordnen wir R_i zu. Diese Zuordnung ist von der Wahl des R_{m-1} unabhängig.

2 *b*. Das Gesetz II gilt jetzt ausnahmslos, auch für die neuen Zuordnungen.

3. Jede Reciprocität $\mathfrak{R}$ zwischen S_m und S'_m lässt sich auf die in 1 a) bis 1 d) angegebene Weise erhalten, und wenn in $\mathfrak{R}$ zwei Bündeln C_0 und D_0 zwei Felder C'_{m-1} und D'_{m-1} entsprechen, so ist die durch die vier letzten Gebilde nach 1) definirte Reciprocität mit $\mathfrak{R}$ identisch.

4. Durch Zuordnung von $m+2$ Punkten von S_m, von denen je $m+1$ unabhängig sind, zu $m+2$ ebenfalls allgemeinen R'_{m-1} von S'_m ist eindeutig eine Reciprocität zwischen S_m und S'_m definirt. Durch zwei Gruppen von je $m+2$ anderen der durch diese Reciprocität einander zugeordneten Elemente ist dieselbe Reciprocität definirt.

5. Sobald zwei Felder S_m und S'_m reciprok auf einander bezogen werden können, können auch ein Bündel (A_0, S_{m+1}) und ein Feld S'_m reciprok bezogen werden, indem man S'_m auf ein Schnittfeld S_m des Bündels reciprok bezieht und dann statt der Elemente von S_m ihre Verbindungselemente mit A_0 substituirt.

Wir wollen die Anwendbarkeit dieser Definitionen und die Richtigkeit dieser Sätze wieder für alle S_m und S'_m bis $m = p-1$ oder »für $p-1$« voraussetzen und sie dann auch »für p« beweisen ($p-1 \geqq 2$).

Dann ist zunächst die Zuordnung 1 a) auch für p durchführbar. Denn ein Bündel (A_0, S_p) und ein Feld A'_{p-1} können nach 5) für $p-1$ reciprok bezogen werden, indem man ein Schnittfeld A_{p-1} des Bündels reciprok auf A'_{p-1} bezieht, was so geschehen kann, dass einem beliebigen Bündel (S_0, A_{p-1}) ein beliebiges Feld $p-2$ ter Dimension von A'_{p-1} entspricht. Daher können, wenn wir für S_0 den Schnittpunkt von S_1 mit dem Hilfsfeld A_{p-1} nehmen, (A_0, S_p) und A'_{p-1}, und ebenso (B_0, S_p) und B'_{p-1} so reciprok bezogen werden, dass dem gemeinschaftlichen Bündel (S_1, S_p) in beiden Fällen das gemeinsame Feld S'_{p-2} entspricht.

Es ist jetzt die Regel 1 b) auch für p anwendbar, weil bei derselben nur Sätze für $p-1$ zur Verwendung kommen, und daher zunächst 2 a) für p zu beweisen:

Nach den Bezeichnungen von 1 b) enthalten sowohl

$$R^{(a)}_{k+1} \text{ als } R^{(a)}_{h+1} \text{ den Raum } R^{(a)}_{i+1}.$$

Also sind nach den Sätzen über reciproke Beziehung von Bündel und Feld für $p-1$ sowohl

$$R'^{(a)}_{p-k-2} \text{ als } R'^{(a)}_{p-h-2} \text{ in } R'^{(a)}_{p-i-2}$$

enthalten. Ebenso enthalten, beziehungsweise sind enthalten

$$R^{(b)}_{k+1} \quad \text{und } R^{(b)}_{h+1} \quad \text{den Raum } R^{(b)}_{i+1}$$
$$R'^{(b)}_{p-k-2} \text{ und } R'^{(b)}_{p-h-2} \text{ im Raume } R'^{(b)}_{p-i-2}.$$

Nun ist R'_{p-i-1} als Verbindungsraum von $R'^{(a)}_{p-i-2}$ und $R'^{(b)}_{p-i-2}$ definirt; in demselben sind also sowohl der Verbindungsraum von $R'^{(a)}_{p-k-2}$ und $R'^{(b)}_{p-k-2}$, als auch von $R'^{(a)}_{p-h-2}$ und $R'^{(b)}_{p-h-2}$ enthalten, d. h. die Räume R'_{p-k-1} und R'_{p-h-1}.

Ferner werden durch ein Feld R_{p-1}, welches weder A_0 noch B_0 enthalte, diese beiden Bündel collinear bezogen, so dass sie das Bündel (S_1, S_p) entsprechend gemein haben; es werden daher auch A'_{p-1} und B'_{p-1} von S'_p so collinear bezogen, dass sie das Feld S'_{p-2} entsprechend gemein haben. A'_{p-1} und B'_{p-1} liegen also perspectiv nach 5) des §. 3.[1]

Durch deren Perspectivitätscentrum R'_0 gehen alle Elemente, welche den Elementen von R_{p-1} zugeordnet sind. Wenn R_{p-1} durch A_0 oder B_0 geht, werden diese Bündel zwar nicht collinear bezogen, aber das zu Beweisende folgt dann unmittelbar nach den früheren Zuordnungsregeln. Also gilt 2 *a*) und es kann 1 *c*) auch für p in Kraft treten.

Die Zuordnung 1 *d*) ist auch für p anwendbar, und um ihre Unabhängigkeit von der Wahl des R_{p-1} zunächst für einen R_{p-2}, welcher mit S_1 den Punkt P_0 gemein habe, zu beweisen, nehmen wir in R_{p-2} einen T_{p-3} an, welcher P_0 nicht enthalte

---

[1] Wir benützen hier und der Einfachheit halber auch später die Theorie der Collineation für die Begründung der Reciprocität; desshalb wurde jene vorausgeschickt, wenn auch bei Begründung der Reciprocität für p nur Sätze über Collineation für $p-1$ verwendet werden, und desshalb die Theorie der Collineation, wie bekannt, als in der Theorie der Reciprocität enthalten betrachtet werden kann. Trotzdem ist es nicht überflüssig, die Begründung der Collineation besonders zu entwickeln, weil sich in einer Mannigfaltigkeit, von der man nur weiss, dass sie linear ist, jedenfalls Collineationen aufstellen lassen, was man von den Reciprocitäten nicht ohne weiters behaupten kann (§. 5).

und daher S_1 überhaupt nicht schneidet. Allen R_{p-1}, welche durch T_{p-3} gehen, werden, wie aus II), das in diesem Falle auch schon für p erwiesen ist, hervorgeht, in S'_p Punkte entsprechen, die in der T_{p-2} entsprechenden Ebene T'_2 liegen, und zwar hat T'_2 mit S'_{p-2} nur denjenigen Punkt Q'_0 gemein, welcher dem Verbindungsraum Q_{p-1} von T_{p-3} mit S_1 entspricht. Wir wählen nun durch R_{p-2} in S_p zwei Räume R_{p-1} und R^*_{p-1}, welche von S_1 nur den Punkt P_0 enthalten. Da sie auch T_{p-3} enthalten, so liegen die entsprechenden Punkte R'_0 und R'^*_0 in T'_2. R'_1 und R'^*_1, welche dem R_{p-2} je nach der Wahl von R_{p-1} oder R^*_{p-1} entsprechen, sind nach 1 *d*) definirt als die Verbindungsgeraden von Q'_0 mit R'_0, beziehungsweise R'^*_0. Wären diese beiden Geraden nicht identisch, so ginge die in T'_2 liegende Gerade $R'_0 R'^*_0 \equiv G'_1$ nicht durch Q'_0 und schnitte daher S'_{p-2} überhaupt nicht. Ihr entsprechender G_{p-2} in S_p hätte daher mit S_1 keinen Punkt gemein. Durch G_{p-2} müssten auch R_{p-1} und R^*_{p-1} gehen, was aber nicht der Fall ist, da der Schnittraum R_{p-2} dieser beiden mit S_1 den Punkt P_0 gemein hat. Es folgt zugleich, dass der Incidenzsatz II für die R_{p-1} und R_{p-2} in S_p und die Punkte und Geraden in S'_p ausnahmslos gilt, auch für die neuen Zuordnungen.

Nehmen wir durch einen R_i $(i < p-2)$, welcher mit S_1 den Punkt P_0 gemein habe, in S_p zwei Räume R_{p-1} und R^*_{p-1} an, welche ebenfalls S_1 nicht enthalten, so schneiden sich diese in einem G_{p-2}, welcher R_i enthält und mit S_1 nur P_0 gemein hat. Ihm entspricht nach dem eben Bewiesenen eine bestimmte Gerade G'_1, welche sowohl R'_0 als R'^*_0 enthält und S'_{p-2} in demjenigen Q'_0 trifft, welcher dem Verbindungsraume Q_{p-1} von G_{p-2} und S_1 entspricht. Dem Verbindungsraum R_{i+1} von R_i und S_1 entspreche R'_{p-i-2} in S'_{p-2}, er enthält auch Q'_0, weil R_{i+1} in Q_{p-1} enthalten ist. Nun sind R'_{p-i-1} und R'^*_{p-i-1}, welche dem R_i je nach der Wahl von R_{p-1} oder R^*_{p-1} entsprechen, nach 1 *d*) definirt als Verbindungsräume von R'_{p-i-2} mit R'_0, beziehungsweise R'^*_0, werden also auch als Verbindungsräume von R'_{p-i-2} mit G_1 erhalten, sind also identisch. Zugleich folgt, dass der Incidenzsatz II jetzt ausnahmslos gilt, zunächst zwischen den R_{p-1} und beliebigen Elementen von S_p einerseits und den Punkten und beliebigen Elementen von S'_p anderseits, dann aber auch zwischen beliebigen Elementen, weil man sich einen R_i als Schnittraum von $p-i$ Räumen R_{p-1} in S_p denken kann, durch deren entsprechende $p-i$ Punkte R'_{p-i-1} bestimmt ist. Hiemit ist also eine gegenseitig eindeutige Zuordnung aller Elemente der Felder S_p und S'_p, welche die Eigenschaften I und II ausnahmslos besitzt, vollendet. Dieser Beweis ist von $p-1=2$ an anwendbar; daher:

III. Die Möglichkeit, zwei Felder S_p $(p>2)$ in R_n reciprok aufeinander zu beziehen (und auch den R_p auf sich selbst), ist auf die Möglichkeit, zwei S_2 (zwei »Ebenen«) in R_n reciprok zu beziehen, zurückgeführt.

Nach 5) gilt Ähnliches für die reciproke Beziehung von Bündeln und Feldern.

Nach II) sind in jeder Reciprocität $\mathfrak{R}$ zwischen S_p und S'_p ein Bündel A_0 und sein entsprechendes Feld A'_{p-1} reciprok aufeinander bezogen; wählen wir noch ein zweites Bündel B_0 und sein entsprechendes Feld B'_{p-1}, so ist die Reciprocität $\mathfrak{R}^*$, welche wir aus diesen vier Gebilden nach 1) erhalten, mit $\mathfrak{R}$ identisch. Ordnen wir nämlich in S'_p je zwei Elemente, welche auf dasselbe Element von S_p durch die beiden Reciprocitäten bezogen werden, einander zu, so ist S'_p so collinear auf sich selbst bezogen, dass zwei Felder A'_{p-1} und B'_{p-1} den beiden collinearen Systemen entsprechend gemeinsam sind. Die Collineation ist also identisch, und es kann die beliebige Reciprocität $\mathfrak{R}$ auch durch das Verfahren 1) erhalten werden. Ebenso kann der zweite Theil von 3) bewiesen werden.

Um 4) zu beweisen, wählen wir einen der Punkte $R_0^{(1)}$ und den entsprechenden $R'^{(1)}_{p-1}$. Das Bündel $(R_0^{(1)}, S_p)$ und $R'^{(1)}_{p-1}$ können [nach den Sätzen 4) und 5) für $p-1$] und müssen so reciprok aufeinander bezogen werden, dass jedem der $p+1$ Strahlen $R_0^{(1)} R_0^{(i)}$ das Schnittfeld von $R'^{(1)}_{p-1}$ und $R'^{(i)}_{p-1}$ zugeordnet wird. Thuen wir mit zwei anderen entsprechenden Elementen dasselbe, so erhalten wir zwei Bündel und zwei entsprechende Felder, welche der Bedingung in 1 a) genügen, und daher eine Reciprocität liefern, in welcher die gegebenen Zuordnungen verwirklicht sind. Nach 3) ist die Reciprocität von der Wahl der beiden Punkte R_0 unabhängig.

§. 5. Über die Möglichkeit der Reciprocität in linearen Mannigfaltigkeiten; das Gesetz der Dualität.

Nachdem die Möglichkeit, zwischen je zwei S_p in R_n $(p>2)$ eine Reciprocität herzustellen, auf die Möglichkeit zurückgeführt ist, dies für zwei ebene zweifache Mannigfaltigkeiten der betreffenden Elemente zu thun, und nachdem Staudt in seiner »Geometrie der Lage« (Art. 129—133, nach deren Vorbild die vorhergehenden Beweise gemacht wurden) für Punktebenen (und auch für den Punktraum) reciproke Beziehungen aufgestellt hat, könnte man meinen, dass sich die dort angegebenen Verfahren auf jede lineare zweistufige Mannigfaltigkeit übertragen lassen, dass somit die Möglichkeit der Reciprocität für beliebige lineare Mannigfaltigkeiten nachgewiesen sei, und dass sich überhaupt die reine Geometrie der Lage in jede Mannigfaltigkeit irgendwelcher Elemente, von der man nur weiss, dass sie linear ist, übertragen lasse. Dies lässt sich nicht ohneweiters behaupten. Denn beim Beweis des Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage, der bei Aufstellung der Reciprocität in der Ebene benöthigt wird, spielt auch der topologische Begriff des »Getrenntseins« zweier Punktepaare einer geraden Punktreihe eine wesentliche Rolle, und dieser Begriff ist mit der Linearität einer Mannigfaltigkeit noch nicht mitgegeben.

Wohl aber ist die Möglichkeit der Reciprocität in einer Mannigfaltigkeit R_n verbürgt, wenn sich ihre ebenen zweifachen Mannigfaltigkeiten R_2 auf die Punktebene so abbilden lassen, dass jedem R_0 von R_2 ein Punkt der Ebene und allen R_0 eines R_1 in R_2 die Punkte einer Geraden in der Ebene entsprechen, weil man dann die zwei Abbildungen zweier R_2 reciprok aufeinander beziehen kann, wodurch diese selbst reciprok bezogen sind. Wir haben uns reciproke Beziehungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten S_p und S'_p derselben Elemente vorgestellt; die Definition der Reciprocität (und Collineation) ist natürlich nicht hierauf beschränkt, sondern ebenso gut auf eine lineare Mannigfaltigkeit S_p gewisser Elemente (z. B. Kugeln, $p \leqq 4$) und eine gleichstufige lineare Mannigfaltigkeit S_p anderer

Elemente (z. B. linearer Complexe) anwendbar,[1] und auch die Möglichkeit einer solchen Reciprocität ist nach §. 4 durch die Möglichkeit bedingt, ein S_2 und ein S'_2 reciprok zu beziehen. Oder es genügt auch die Möglichkeit der collinearen Beziehung zwischen zwei verschiedenartigen zweistufigen Gebilden und der reciproken Beziehung zwischen zwei gleichartigen zweistufigen in einem der beiden Gebiete. In letzterer Form wird eigentlich in der Theorie der Mannigfaltigkeiten der linearen Complexe die Möglichkeit der Aufstellung reciproker Beziehungen im Complexraume nachgewiesen; denn die früher erwähnte Abbildungsbedingung auf die Ebene ist ein solcher Fall. Die Bedingung lässt sich noch allgemeiner auch so aussprechen:

1. Die Felder der linearen Mannigfaltigkeit E_{n_0} der Elemente E_0 und die gleichstufigen Felder der linearen Mannigfaltigkeit E'_{n_1} anderer Elemente E'_0 lassen sich jedenfalls reciprok aufeinander beziehen, wenn eine dritte lineare Mannigfaltigkeit E''_{n_2} von Elementen E''_0 gefunden werden kann, deren E''_2 sich reciprok aufeinander und collinear sowohl auf die E_2 als E'_2 beziehen lassen.

---

[1] Die Reciprocität in R_n lässt sich nach dieser Auffassung als Collineation zwischen R_n als Mannigfaltigkeit von R_0 und R_n als Mannigfaltigkeit von R_{n-1} betrachten. Man wird sie so auch definiren und also (umgekehrt wie gewöhnlich) die Theorie der Reciprocität auf die der Collineation zurückführen können, da man unabhängig von der Theorie der Reciprocität weiss, dass R_n auch als Mannigfaltigkeit von R_{n-1} linear ist, sobald es als Mannigfaltigkeit von R_0 linear ist. Zwei R_{n-1} in R_n bestimmen nämlich ein einfach unendliches Büschel von R_{n-1}, welche durch den Schnittraum Q_{n-2} hindurchgehen; dasselbe wird auch erhalten durch Verbindung des Trägers mit einer denselben nicht schneidenden Punktreihe. Drei R_{n-1} definiren eine zweistufige Mannigfaltigkeit von R_{n-1}, welche die Eigenschaft 2) des §. 1 besitzt; denn man erhält die Gesammtheit aller durch ein Q_{n-3} gehender R_{n-1} auch durch Verbindung des Q_{n-3} mit den Geraden eines ebenen Feldes, welches Q_{n-3} nicht schneidet. Dies genügt nach §. 1 zur Linearität von R_n auch als Mannigfaltigkeit von R_{n-1}. Hieraus allein folgt natürlich ebenso wenig wie früher die Möglichkeit der reciproken Beziehung in R_n. Als Mannigfaltigkeit von R_i $(0 < i < n-1)$ wird R_n im Allgemeinen nicht linear sein; bekanntlich ist schon der Punktraum, als Mannigfaltigkeit seiner Geraden betrachtet, nicht linear.

Wenn in R_n (wie bei der Mannigfaltigkeit der linearen Complexe) jeder R_1 (jedes Complexbüschel) nach einem angegebenen, wenn auch vieldeutigen Verfahren sich auf eine gewöhnliche Punktreihe abbilden lässt, und ausserdem je zwei verschiedene nach diesem Verfahren gewonnene Abbildungen desselben R_1 projectiv sind (wie z. B. die Nullpunktreihen desselben Complexbüschels bezüglich zweier beliebigen Ebenen), so gruppiren sich die vier Punkte, durch welche vier R_0 von R_1 (vier Complexe des Büschels) abgebildet werden, zu zwei Paar getrennten, und zwar ist, wenn bei einer Abbildung die den Elementen $R_0^{(1)}$, $R_0^{(2)}$ entsprechenden Punkte das eine durch die beiden anderen getrennte Paar bilden, dies bei jeder anderen Abbildung auch der Fall. Nun erst kann man vermöge dieses Umstandes auch in der Mannigfaltigkeit R_n das »Getrenntsein« zweier Elemente R_0 durch zwei andere auf demselben R_1 definiren, sowie den Projectivitätsbegriff auch für einstufige lineare Gebilde übertragen.

Wenn man von einer Verwandtschaft bloss weiss, dass jedem Elemente R_0 von R_n ein R_{n-1} gegenseitig eindeutig zugeordnet ist, dass ferner allen Elementen eines G_1 alle Räume eines Büschels (G_{n-2}, R_n) zugeordnet sind, so reicht dies hin, um zu wissen, dass diese Zuordnung einer Reciprocität angehört: dem G_1 können wir nämlich G_{n-2} zuordnen. Denken wir uns ferner eine Ebene E_2 durch G_1 und einen Punkt P_0 ausserhalb G_1 bestimmt, so schneiden sich P_{n-1} und G_{n-2} in einem E_{n-3}; durch diesen müssen die entsprechenden Räume aller Geraden gehen, welche P_0 mit einem Punkt von G_1 verbinden, daher auch alle R_{n-1}, welche allen Punkten von E_2 entsprechen, daher auch alle H_{n-2}, welche beliebigen Geraden von E_2 entsprechen. Wir können also E_2 und E_{n-3} einander zuordnen; zugleich sind das Feld E_2 und das Bündel E_{n-3} reciprok bezogen. In dieser Weise können wir weiter schliessen, ähnlich wie beim Beweis des Fundamentalsatzes über lineare Mannigfaltigkeiten, nur dass hier das Schlussverfahren, da wir die Kenntniss der Linearität von R_n schon voraussetzten, um eine Stufe früher einsetzen konnte.

Wenn in einem R_n sich reciproke Beziehungen aufstellen lassen, gilt in ihm das Gesetz der Dualität, und zwar entsprechen einander Elemente, deren Indices sich zu $n-1$ ergänzen.[1] Aus jedem Satz lässt sich durch reciproke Abbildung der in ihm vorkommenden Gebilde ein anderer ableiten. So entstehen aus bekannten Sätzen über die Regelschaar durch duale Übertragung die folgenden, die wir benöthigen werden:

---

1 Nachdem zum Beispiel durch die §§. 1 und 2 der ersten der Abhandlungen »Über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel etc.« Herrn Reye's (Journal für Math., Bd. 104) in Verbindung mit dem Fundamentalsatz über lineare Mannigfaltigkeiten bewiesen ist, dass die siebenstufige Mannigfaltigkeit sämmtlicher Ebenenbüschel des Raumes, welche zu einem projectiv sind, linear ist, und nachdem sich ihre zweifachen linearen Mannigfaltigkeiten, die »linearen Congruenzen projectiver Ebenenbüschel« collinear auf die Punktebene abbilden lassen, folgt sofort, dass in diesem Gebiete das Gesetz der Dualität herrscht (a. a. O. Bd. 106, S. 46), und zum Beispiel »der lineare Complex projectiver Ebenenbüschel« sich selbst entsprechend ist. Dass nämlich die collineare Abbildung der Punktebene und der linearen Congruenz projectiver Ebenenbüschel möglich ist, geht daraus hervor, dass man beiderseits die einstufigen linearen Gebilde nach einem bestimmten (wenn auch vieldeutigen) Verfahren (nämlich durch die Leitstrahlen der Axenschaar der Ebenenbüschel) so beziehen kann, dass je zwei Abbildungen derselben einstufigen Mannigfaltigkeit von Ebenenbüscheln projectiv sind, was genügt, um das oberwähnte Verfahren Staudt's in diesem Gebiet nachahmen zu können.

Analog folgt die Giltigkeit des Gesetzes der Dualität für die eilfstufige Mannigfaltigkeit der collinearen Bündel, da sich die cubische Fläche (Reye, Geometrie der Lage, II, Vortr. 24) so auf die Ebene abbilden lässt, dass jeder Geraden der Ebene eine Raumcurve dritter Ordnung entspricht, sich somit die »Netze collinearer Bündel« reciprok aufeinander beziehen lassen.

Da die homologen Ebenen der ∞^1 Räume eines »Raumbüschels« $|\Sigma_1|$ collinearer räumlicher Systeme (Journal für Math., Bd. 104, S. 218) je einen Ebenenbüschel des mit dem Raumbüschel verbundenen dreistufigen Systems projectiver Ebenenbüschel bilden, ist auch eine Abbildung der Raumbüschel, welche die verlangte Eigenschaft hat, auf die Punktreihen gegeben. Es lassen sich daher nach Staudt auch im zweistufigen Gebiet collinearer Räume Reciprocitäten aufstellen, womit die Bedingungen für die Aufstellung weiterer Reciprocitäten und für die Giltigkeit des Gesetzes der Dualität erfüllt sind.

Die Möglichkeit der collinearen Beziehung der R_2 irgend einer Mannigfaltigkeit auf die Ebenen des Punktraumes liess sich ohne gewisse topologische Begriffe für R_2 nicht mehr auf die Beziehung der einstufigen Gebilde beiderseits zurückführen. Wenn aber die letztere Beziehung, wie in diesen eben angedeuteten Fällen, anderweitig durch ein Verfahren ermöglicht wird, welches die wesentliche Eigenschaft hat, dass je zwei nach ihm erhaltbare Abbildungen auf gewöhnliche Punktreihen projectiv sind, so ersetzt dies natürlich vollkommen die Bedingungen des Satzes 1).

2. Zwei projectiv Büschel (T_{n-2}, R_n)[1] und (T'_{n-2}, R_n) erzeugen als Gesammtheit der Schnitträume, welche je ein P_{n-1} des Büschels mit seinem entsprechenden P'_{n-1} gemein hat, eine einstufige Mannigfaltigkeit (eine »Raumschaar« $\mathfrak{R}_{n,\,n-2}$) von Räumen Q_{n-2}, die alle demjenigen Bündel (Q_{n-4}, R_n) angehören, welches durch T_{n-2} und T'_{n-2} bestimmt wird. Drei Räume n—2ter Dimension des Bündels (Q_{n-4}, R_n), von denen keine zwei sich durch einen R_{n-1} verbinden lassen, definiren ebenfalls eine Raumschaar als Gesammtheit aller Räume Q_{n-2} (der »Räume« von $\mathfrak{R}_{n,\,n-2}$), welche mit jedem der drei gegebenen sich durch einen R_{n-1} verbinden lassen. Mit jeder Raumschaar $\mathfrak{R}_{n,\,n-2}$ ist eine andere $\mathfrak{R}'_{n,\,n-2}$ desselben Bündels verbunden, so dass durch je drei Räume der einen die andere definirt wird. Jeder Raum der einen Schaar $\mathfrak{R}$ lässt sich mit jedem der anderen $\mathfrak{R}'$ (mit jedem »Leitraum« von $\mathfrak{R}$) durch einen R_{n-1} verbinden, aber keine zwei Räume derselben Schaar.

3. Legt man durch einen Raum einer Schaar $\mathfrak{R}_{n,\,n-2}$ des Bündels (Q_{n-4}, R_n) einen P_{n-1}, so wird derselbe von den Räumen derselben Schaar in Räumen Q_{n-3} geschnitten, welche ein Büschel (Q_{n-4}, Q'_{n-2}) bilden, wobei Q'_{n-2} der in P_{n-1} liegende Leitraum der Schaar ist.

Hat man in einem R_n eine Regelschaar $\mathfrak{R}_{3,1}$, und wird der Raum Q_3, den sie bestimmt, von einem P_{n-1} in einer Ebene geschnitten, die durch einen Strahl der Schaar geht, so wird P_{n-1} von den Strahlen der Schaar in einer geraden Punktreihe geschnitten; also dual:

4. Die Räume einer Schaar $\mathfrak{R}_{n,\,n-2}$ des Bündels (Q_{n-4}, R_n) werden aus einem Punkte P_0 eines Raumes Q_{n-2} der Schaar, der nicht im Träger des Bündels liegt, durch einen Büschel (Q'_{n-2}, R_n) projicirt, dessen Träger Q'_{n-2} der durch den Verbindungsraum von P_0 und Q_{n-4} gehende Raum der Leitraumschaar von $\mathfrak{R}$ ist.

Wir werden von dualen Sätzen meist nur den einen ausdrücklich anführen.

---

[1] Im Falle der Einstufigkeit eines Bündels gebrauchen wir auch den Ausdruck »Büschel« mit Beibehaltung der §. 3 eingeführten Bezeichnung.

§. 6. Die Nullsysteme und linearen Complexe in R_{2q+1}.

Wir setzen jetzt eine lineare Mannigfaltigkeit R_n irgendwelcher Elemente voraus, wobei $n = 2q+1$ eine ungerade Zahl $\geqq 5$ sei, und nehmen ferner an, dass je zwei ihrer R_2 sich aufeinander reciprok beziehen lassen. Wir wählen $n+2$ Punkte $R_0^{(1)}, R_0^{(2)}, \ldots R_0^{(n+2)}$, von denen je $n+1$ unabhängig seien (dies schliesst in sich, dass auch wenn $k < n+1$, je k unabhängig sind; aber nicht umgekehrt), denken uns deren Symbole in einem Schema cyklisch angeordnet und ordnen jedem $R_0^{(\lambda)}$ denjenigen Raum $R_{n-1}^{(\lambda)}$ zu, welcher durch $R_0^{(\lambda)}$ und die auf jeder Seite im Schema benachbarten q Punkte bestimmt ist, oder, was dasselbe ist, denjenigen Raum $R_{n-1}^{(\lambda)}$, welcher durch alle $n+2$ Punkte mit Ausnahme von $R_0^{\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right)}$, $R_0^{\left(\lambda+\frac{n+3}{2}\right)}$ bestimmt ist, wobei die Indices modulo $n+2$ zu nehmen sind. Dann ist auch jeder Punkt $R_0^{(\lambda)}$ in allen zugeordneten Räumen R_{n-1} mit Ausnahme von $R_{n-1}^{(\lambda+q+1)}$, $R_{n-1}^{(\lambda+q+2)}$ enthalten; wäre er nämlich auch in einem dieser enthalten, so wären $n+1$ der Punkte nicht unabhängig. $R_0^{(\lambda)}$ ist also der einzige gemeinsame Punkt der Räume $R_{n-1}^{(\lambda)}$ und der beiderseits benachbarten q. Es liegen also auch die $n+2$ Räume $R_{n-1}^{(\lambda)}$ allgemein, und wird daher durch obige Zuordnung nach §. 4 und 5 eine Reciprocität $\mathfrak{R}$ definirt. In derselben entspricht der Geraden $R_0^{(\lambda)} R_0^{(\lambda+1)} \equiv G_1^{(\lambda)}$ derjenige Raum $G_{n-2}^{(\lambda)}$, welcher durch alle Punkte R_0 mit Ausnahme von $R_0^{(\lambda+q+1)}$, $R_0^{(\lambda+q+2)}$, $R_0^{(\lambda+q+3)}$ definirt ist; $G_1^{(\lambda)}$ ist also in seinem entsprechenden $G_{n-2}^{(\lambda)}$ ganz enthalten. Es liegen also auch alle Punkte von $G_1^{(\lambda)}$ in den in der Reciprocität ihnen entsprechenden Räumen. Ebenso findet man, dass der durch $i+1$ aufeinander folgende $(i < q)$ der Punkte R_0 definirte $G_i^{(\lambda)}$, wobei (was nur Sache der Bezeichnung ist), falls $i+1$ ungerade ist, beiderseits von $R_0^{(\lambda)}$ gleichviel der Punkte R_0 liegen sollen, falls jedoch gerade, in aufsteigender Richtung um einer mehr in seinem entsprechenden $G_{n-i-1}^{(\lambda)}$ ganz enthalten ist, und dass ein $G_q^{(\lambda)}$ in $\mathfrak{R}$ sich selbst entspricht. Desshalb liegen alle Punkte eines $G_i^{(\lambda)}$ $(i = 0, 1, \quad q;\ \lambda = 1, 2, \quad n+2)$ in ihren entsprechenden Räumen. Es lässt sich zeigen, dass dies auch für $i > q$ gilt. Nehmen wir an, es gelte für die $G_{i-1}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n+2)$, so sind in einem $G_i^{(\lambda)}$, je nachdem i gerade oder ungerade ist, die beiden Räume $G_{i-1}^{(\lambda-1)}$ und $G_{i-1}^{(\lambda)}$ oder $G_{i-1}^{(\lambda)}$ und $G_{i-1}^{(\lambda+1)}$ enthalten. $G_i^{(\lambda)}$ wird von $G_{n-i}^{(\lambda+q)}$ oder $G_{n-i}^{(\lambda+q+1)}$ in einem einzigen Punkte Q_0 geschnitten, weil sonst alle $n+2$ Punkte R_0 schon in einem Raume $n-1^{\text{ter}}$ Dimension lägen. Q_0 kann aus demselben Grunde in keinem jener beiden G_{i-1} enthalten sein und liegt als Punkt eines G_{n-i}, weil $n-i \leqq q$, in seinem entsprechenden Raum. Auf jedem Strahl durch Q_0 in $G_i^{(\lambda)}$ liegen drei Punkte, die mit ihren entsprechenden Räumen incident sind, nämlich Q_0 und die Schnittpunkte mit jenen beiden G_{i-1}. Die Punktreihe auf dem Strahle liegt also mit ihrem entsprechenden Raumbüschel perspectiv, und alle Punkte von $G_i^{(\lambda)}$ liegen in ihren entsprechenden Räumen (für die Punkte im Verbindungsraum von Q_0 mit dem Schnittraume der beiden G_{i-1} folgt es, nachdem es für alle anderen Punkte von $G_i^{(\lambda)}$ bewiesen ist). Nachdem der Satz für $G_q^{(\lambda)}$ gilt, gilt er auch bis einschliesslich zu den $R_{n-1}^{(\lambda)}$. Endlich lässt sich durch jeden Punkt des Raumes R_n ein Strahl legen, der drei der Räume $R_{n-1}^{(\lambda)}$ in verschiedenen Punkten schneidet; also liegt der betrachtete Punkt in seinem entsprechenden Raum.[1]

Die Reciprocität $\mathfrak{R}$ hat also die Eigenschaft, dass jeder Punkt des ersten Systems in R_n in seinem entsprechenden Raume des zweiten Systems in R_n liegt, und heisse desshalb ein Nullsystem.[2] Sie·ist auch

[1] Dieser Beweis lässt sich auch für R_3 geben anstatt das üblichen mit Verwendung der Ordnungsflächen eines Polarsystems.

[2] Herr Bordiga vermeinte im Art. 5 seiner Abhandlung »Complessi e istemi lineari di raggi.....« (Atti del R. Ist. Veneto, Dec. 1885), Nullsysteme in R_n (auch für gerade n) zu definiren, indem er ebenfalls $n+2$ Punkte R_0 mit denselben Bedingungen annahm, aber jedem Eckpunkte $R_0^{(\lambda)}$ eines solchen einfachen $n+2$-Eckes denjenigen Raum zuordnete, welcher durch alle Punkte R_0 mit Ausnahme von $R_0^{(\lambda-2)}, R_0^{(\lambda-3)}$ bestimmt ist. Der Ebene $R_0^{(\lambda-1)} R_0^{(\lambda)} G_0^{(\lambda+1)} \equiv G_2^{(\lambda)}$ entspricht nach dieser Zuordnung der Raum $G_{n-3}^{(\lambda)}$, welcher durch alle Punkte R_0 mit Ausnahme von $R_0^{(\lambda-\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, 4)$ bestimmt ist. Jene Ebene hat also mit ihrem entsprechenden Raume die Gerade $R_0^{(\lambda)} R_0^{(\lambda+1)}$ gemein, ohne ganz in ihm zu liegen (weil $R_0^{(\lambda-1)}$ nicht in ihm liegt), was den Sätzen, die Herr Bordiga selbst a. a. O., Art. 1, über die Nullsysteme aufgestellt hat (die man auch hier sogleich citirt findet), widerspricht. Durch diese Zuordnung wird also kein Nullsystem definirt. Versucht man allgemeiner, dem Punkt $R_0^{(\lambda)}$ den

involutorisch. Zunächst entspricht nämlich dem Raume $R_{n-1}^{(\lambda)}$, als Raum des ersten Systems aufgefasst, der Schnittpunkt der n Räume R_{n-1}, welche den n Punkten R_0 entsprechen, durch welche $R_{n-1}^{(\lambda)}$ definirt ist, das ist der Punkt $R_0^{(\lambda)}$, jetzt als Punkt des zweiten Systems aufgefasst. Der Geraden $G_1^{(\lambda)}$ entspricht nun als Gerader jedes Systems derselbe Raum $G_{n-2}^{(\lambda)}$; um zu zeigen, dass auch sämmtlichen Punkten dieser Geraden derselbe Raum doppelt entspricht, ist dies ausser von den Punkten $R_0^{(\lambda)}$ und $R_0^{(\lambda+1)}$ noch von einem dritten Punkte der Geraden zu zeigen nothwendig. Dies sieht man von ihrem Schnittpunkte mit dem durch die übrigen n Punkte R_0 definirten $R_{n-1}^{(\lambda+q)}$ ein, welchem in beiden Systemen der Verbindungsraum von $G_{n-2}^{(\lambda)}$ mit $R_0^{(\lambda+q)}$ entspricht. Ebenso wird gezeigt, dass in einer durch drei aufeinander folgende Punkte $R_0^{(\lambda-1)}$, $R_0^{(\lambda)}$, $R_0^{(\lambda+1)}$ definirten Ebene $G_2^{(\lambda)}$, welcher derselbe Raum $G_{n-3}^{(\lambda)}$ doppelt entspricht, ausser den Punkten der beiden Geraden $R_0^{(\lambda+1)}\,R_0^{(\lambda)}$ und $R_0^{(\lambda)}\,R_0^{(\lambda+1)}$ noch der Schnittpunkt $\underset{\sim}{Q}_0$ von $G_2^{(\lambda)}$ mit dem durch die übrigen $n-1$ Punkte R_0 definirten Raum ($\underset{\sim}{Q}_0$ kann in keiner der beiden Geraden liegen), und daher überhaupt alle Punkte der Ebene die Eigenschaft haben, dass ihnen in beiden Systemen derselbe Raum entspricht, u. s. w.: Ganz analog, wie früher die Incidenz jedes Punktes mit seinem entsprechenden Raume gezeigt wurde, kann dies jetzt von der involutorischen Lage geschehen. Es ist desshalb unnöthig, den Raum R_n doppelt aufzufassen.

Raum aller R_0 mit Ausnahme von $R_0^{(\lambda-k)}$, $R_0^{(\lambda-k-1)}$ zuzuordnen, so überzeugt man sich, dass der durch $R_0^{(\lambda)}$, $R_0^{(\lambda+1)}$, $R_0^{(\lambda+k)}$ definirte Raum mit seinem entsprechenden, im Falle $k = \frac{n+1}{2}$, einen Raum $k-1^{\text{ter}}$ Dimension, aber nicht mehr, gemein hat; also nur im Falle $k = \frac{n+1}{2}$ liefert die Zuordnung wirklich ein Nullsystem. Für gerades n folgt auf ähnliche Weise, dass sich durch ein einfaches $n+2$-Eck überhaupt kein Nullsystem definiren lässt, was gut mit der analytischen Thatsache übereinstimmt, dass eine schiefsymmetrische Determinante ungeraden Grades, auf welche man bei solchen Problemen unter Anwendung homogener Coordinaten stösst, verschwindet. Für den Fall $n = 4$ hat schon Herr E. Kötter (cf. das Referat im Jahrb. der Fortschr. der Math., Bd. 18, 1886) bemerkt, dass die Zuordnung zu keinem Nullsystem führt.

Über diese Nullsysteme und damit zusammenhängende lineare Complexe hat Herr Bordiga a. a. O., Art. 1—4, 8 folgende Sätze bewiesen:

1. Eine Gerade G_1 hat mit ihrem entsprechenden G_{n-2} entweder keinen Punkt gemein oder ist ganz in ihm enthalten.

2. Überhaupt ist ein Raum G_m $(1 < m \leqq q)$, wenn er mit seinem entsprechenden G_{n-m-1} einen H_{m-1} gemein hat, ganz in ihm enthalten.

3. Von den Strahlen, welche durch einen Punkt P_0 gehen, dem P_{n-1} entspreche, liegen alle und nur jene in ihren entsprechenden Räumen, welche zugleich in P_{n-1} liegen (dual. Von den Räumen G_{n-2}, welche in P_{n-1} liegen, enthalten alle und nur jene, welche zugleich durch P_0 gehen, ihre entsprechenden Strahlen).

Solche Strahlen, welche in ihren entsprechenden Räumen liegen, mögen Leitstrahlen des Nullsystems heissen, und die Gesammtheit der Leitstrahlen eines Nullsystems heisse ein linearer Complex.

4. Wenn m Strahlen eines Complexes in einem Punkte P_0 zusammenlaufen und einen Raum R_m bestimmen, so gehören alle Geraden in R_m durch P_0 dem Complex an (R_m liegt nämlich jedenfalls in P_{n-1}).

5. Wenn H_1 kein Leitstrahl des Nullsystems ist, so schneidet jeder Complexstrahl, welcher H_1 trifft, auch den entsprechenden H_{n-2}, und jede Gerade, welche H_1 und H_{n-2} trifft, ist Leitstrahl. (Auch wenn H_1 als Leitstrahl in H_{n-2} enthalten ist, sind alle Geraden durch H_1 in H_{n-2} Leitstrahlen, aber in diesem Falle sind hiemit noch nicht alle H_1 schneidenden Complexstrahlen erschöpft.)

6. Durch zwei lineare Complexe in R_n ist als Gesammtheit der Strahlen, welche beiden gemeinsam sind, ein Strahlensystem definirt, von welchem die durch einen Punkt des Raumes gehenden im Allgemeinen eine $n-3$-stufige Mannigfaltigkeit bilden, die einen linearen Q_{n-2} ausfüllt.

7 Durch $n-1$ Paare H_1, H_{n-2} ist ein Nullsystem vollkommen bestimmt.

Diese Sätze werden wir im Folgenden als $(B, 1)$, $(B, 7)$ citiren. Zu 7) kann bemerkt werden, dass die $n-1$ Paare nicht unabhängig sind; sondern je zwei G_1, G_{n-2} und H_1, H_{n-2} müssen die Bedingung erfüllen, dass alle Geraden, welche G_1, H_1 und G_{n-2} schneiden, auch H_{n-2} schneiden. Jene Geraden bilden eine Regelschaar, welche durch G_1, H_1 und die Schnittgerade ihres Raumes mit G_{n-2} bestimmt ist; auch H_{n-2} muss durch einen Leitstrahl dieser Regelschaar gehen.

In einem Nullsystem gibt es (wie sich schon aus der Bestimmung durch ein $n+2$-Eck gezeigt hat) auch, abgesehen von den Geraden, überhaupt Räume $L_p \left(1 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2}\right)$, welche in ihren entsprechenden enthalten sind, solche sollen Leiträume heissen. Ebenso sollen alle Räume $G_p \left(\frac{n-1}{2} \leqq p < n\right)$ heissen, in welchen ihre entsprechenden enthalten sind. Alle in einem Leitraume $L_p \left(p \leqq \frac{n-1}{2}\right)$ liegenden oder durch einen Leitraum $L_p \left(p \geqq \frac{n-1}{2}\right)$ gehenden Räume sind ebenfalls Leiträume. Für die aus Nullsystemen entspringenden geometrischen Gebilde wollen wir folgende Bezeichnungen einführen: Die Gesammtheit aller h Nullsystemen in R_n gemeinsamen Leiträume gleicher Dimension k bezeichnen wir mit einem grossen griechischen Buchstaben und drei Indices, wovon der erste die Dimension n des Raumes, in welchem das betreffende Gebilde enthalten ist, der zweite die Dimension k der Elemente (Leiträume), aus welchen es besteht, der dritte die Anzahl h der Nullsysteme, durch welche es definirt ist, angibt; der erste Index ist immer ungerade. Das lineare Strahlensystem im gewöhnlichen R_3 würde hienach z. B. mit $\Psi_{3,1,2}$ bezeichnet werden; die Regelschaar kann als $\Psi_{3,1,3}$ aufgefasst werden. Wenn der letzte Index oder die letzten beiden Indices zugleich eins sind, werden wir sie häufig fortlassen. Von $\Psi_{n,1,n-1}$ geht durch jeden Punkt im Allgemeinen ein Strahl (cf. Bordiga a. a. O., Art. 9). Überhaupt füllen die durch einen Punkt gehenden Strahlen von $\Psi_{n,1,k}$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ im Allgemeinen einen linearen Raum $n-k^{\text{ter}}$ Dimension, nämlich denjenigen, in welchem sich die k Nullräume des Punktes schneiden.

Wo nichts Anderes bemerkt ist, sind zwei durch denselben grossen lateinischen Buchstaben bezeichnete Räume, deren Indices sich zu $n-1$ ergänzen, immer in einem Nullsystem von R_n entsprechende Räume.

§. 7. Sätze über die linearen Complexe in R_n und die Systeme von Leiträumen $\Psi_{n,i,1}$.

Ein $\Psi_{n,1,1}$, welches durch ein Nullsystem $\mathfrak{N}$ definirt sei, bildet eine aus der $2n-2$-fachen Strahlenmannigfaltigkeit des R_n herausgehobene $2n-3$-fache Mannigfaltigkeit. Fassen wir einen Strahl L_1 von Ψ_n auf, so sind alle durch L_1 gehenden, in L_{n-2} liegenden Ebenen L_2 nach (B, 2) Leitebenen von $\mathfrak{N}$, weil ihre L_{n-3} in L_{n-2} liegen und durch L_1 gehen. Durch L_1 können keine anderen Leitebenen gehen, und durch eine Gerade, welche nicht Leitstrahl ist, gehen überhaupt keine Leitebenen. Durch jeden Strahl von $\Psi_{n,1}$ geht also eine $n-4$-fache Mannigfaltigkeit von Ebenen, welche dem durch dasselbe Nullsystem definirten $\Psi_{n,2}$ angehören. Ganz ebenso folgt:

1. Falls L_i $(i<q)$ ein Element von $\Psi_{n,i,1}$ ist, sind alle Räume L_{i+1}, welche durch L_i gehen und in L_{n-i-1} liegen, Leiträume, und dies sind auch alle Leiträume L_{i+1}, welche durch L_i gehen.

Durch jedes Element L_i von $\Psi_{n,i}$ $(i<q)$ geht also eine $n-2i-2$-fache Mannigfaltigkeit von Elementen L_{i+1} des durch $\mathfrak{N}$ definirten $\Psi_{n,i+1}$ Schliesslich geht durch jedes L_{q-1} ein einfaches Büschel in $\mathfrak{N}$ sich selbst entsprechender L_q. Wenn p_m die Dimension der Mannigfaltigkeit der Leiträume L_m ist, so ist

$$p_i = p_{i-1} + n - 3i,$$

weil durch jeden L_{i-1} eine $n-2i$-stufige Mannigfaltigkeit von L_i geht, in einem L_i jedoch selbst eine i-stufige Mannigfaltigkeit von L_{i-1} enthalten ist; also:

2. $\Psi_{n,i,1}$ ist eine $(i+1)\left(n-\frac{3i}{2}\right)$-stufige Mannigfaltigkeit von Räumen L_i; insbesondere ist $\Psi_{n,q,1}$ eine $\frac{(n+1)(n+3)}{8}$-stufige Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{N}$ sich selbst entsprechender Räume.

Legen wir durch einen Leitraum L_i $(i < q)$ einen in L_{n-i-1} nicht enthaltenen H_{i+1}, so liegt H_{n-i-2} in L_{n-i-1} und enthält nicht L_i, schneidet dasselbe aber in einem S_{i-1}, welchen H_{i+1} und H_{n-i-2} gemeinsam haben; d. h.:

3. Ein durch einen Leitraum L_i $(i<q)$ gehender Raum H_{i+1} hat im Allgemeinen (d. h. wenn er nicht selbst Leitraum ist) mit seinem entsprechenden die nach $(B, 2)$ überhaupt noch mögliche Maximalincidenz.[1]

Wir wollen jetzt die Arten von Räumen R_m, welche je nach ihrer Incidenz mit ihren entsprechenden auftreten können, ermitteln und sagen, ein Raum R_m habe die Incidenzzahl τ oder die Incidenz τ $(0 \leqq \tau \leqq m)$, wenn er mit seinem entsprechenden einen linearen Raum von der Dimension τ (für $\tau = 0$ einen Punkt) gemein hat; hat er gar keinen Punkt gemein, so heisse er ohne Incidenz oder Incidenzzahl. Wir können uns natürlich auf $m \leqq q$ beschränken.

Von Strahlen R_1 gibt es $(B, 1)$ zwei Arten: mit der Incidenz 1 und ohne Incidenz. Nehmen wir einen Strahl G_1 letzterer Art an, so schneidet eine beliebige durch ihn gehende Ebene E_2 den G_{n-2} in einem Punkte M_0. E_{n-3} ist der Schnittraum von G_{n-2} und M_{n-1}, geht also ebenfalls durch M_0; also:

4. Es gibt zwei Arten Ebenen: mit der Incidenz 2 (die Leitebenen) und mit der Incidenz 0.

M_0 ist zugleich der Nullpunkt des Verbindungsraumes (E_2, E_{n-3}) und der Träger desjenigen Strahlbüschels von Ψ_n, welches in E_2 liegt. Dass jede Ebene mit ihrem entsprechenden Raume einen Punkt gemein hat, hätte man auch auf andere Weise erschliessen können, z. B. aus 3), weil in jeder Ebene Leitstrahlen liegen; durch jeden Punkt P_0 derselben kann nämlich ein solcher als Schnitt mit P_{n-1} erhalten werden. Zu jedem Strahle des Büschels (M_0, E_2) wird der entsprechende Raum durch Verbindung mit E_{n-3} gefunden; also:

---

[1] Es gibt also z. B. stets R_q, die ohne mit ihren entsprechenden R_q zusammenzufallen, dieselben in einem R_{q-2} schneiden, entgegen der Behauptung Herrn Bordiga's, ein R_q habe mit seinem entsprechenden entweder keinen Punkt gemein, oder falle mit ihm zusammen (a. a. O. Art. 1, Schluss); wenn q gerade ist, hat sogar, wie sich bald zeigen wird, jeder R_q mit seinem entsprechenden (mindestens) einen Punkt gemein.

5. Alle Strahlen, welche E_2 und E_{n-3} schneiden, gehören zu Ψ_n, und alle Ebenen, welche je einen Strahl der Büschel (M_0, E_2) und (M_0, E_{n-3}) verbinden, gehören (nach 1) zu $\Psi_{n,2}$.

Für den letzteren Theil des Satzes gilt auch folgende Umkehrung: Jede Leitebene, welche eine Ebene E_2 in einer Geraden schneidet, schneidet auch E_{n-3} in einer Geraden.

Wir betrachten die durch E_2 gehenden Räume H_3; die in M_{n-1} liegenden haben mit E_{n-3} eine Gerade S_1 gemein, durch welche auch H_{n-4} geht, wobei S_1 und der Verbindungsraum $(H_3, H_{n-4}) \equiv S_{n-2}$ einander zugeordnet sind. Die nicht in M_{n-1} liegenden H_3 kann man sich durch E_2 und einen ausserhalb M_{n-1} liegenden Strahl T_1 des Bündels (M_0, R_n) bestimmt denken. T_{n-2} liegt in M_{n-1} und geht nicht durch M_0. H_{n-4} hat also als Schnittraum von E_{n-3} und T_{n-2} mit H_3 keinen Punkt gemeinsam. Durch Betrachtung der durch eine Leitebene gehenden Räume dritter Dimension werden ebenfalls zwei Arten geliefert, nämlich die erstere nochmals und die Leiträume L_3; folglich:

6. Es gibt drei Arten von Räumen H_3: mit den Incidenzen 3, 1 und ohne Incidenz.

7. Letztere werden von Ψ_n in einem regulären Complex geschnitten, diejenigen mit der Incidenz 1 in einem singulären.

Wählen wir nämlich vier unabhängige Punkte $P_0^{(1)}, \ldots P_0^{(4)}$ in H_3, so ist jeder gemeinsame Punkt Q_0 der vier Ebenen, in denen H_3 von $P_{n-1}^{(1)}, \ldots P_{n-1}^{(4)}$ geschnitten wird, auch gemeinsamer Punkt dieser vier Räume P_{n-1}, durch welche zugleich H_{n-4} bestimmt wird. Also hat H_3 mit H_{n-4} diesfalls einen Punkt Q_0 und daher (nach 6) eine ganze Gerade S_1 gemein, welche Axe des singulären Complexes ist, in welchem H_3 von Ψ_n geschnitten wird, weil alle Ebenen des Büschels (S_1, H_3) Leitebenen sind, und ausserdem in H_3 kein Strahl von Ψ_n liegen kann, wenn H_3 nicht selbst Leitraum ist. Wenn jedoch H_3 ohne Incidenz ist, so folgt, dass die Schnittebenen, welche, wie soeben, fünf allgemeinen seiner Punkte entsprechen, ebenfalls allgemein sind. Der hiedurch definirte reguläre lineare Complex Γ_3 ist jener, in welchem H_3 von Ψ_n geschnitten wird. Zu einem

Element des Feldes H_3 findet man das entsprechende durch Verbindung seines in Bezug auf Γ_3 conjugirten mit H_{n-4}. Also gilt, wenn H_3 keine Incidenz hat:

8. Alle Strahlen, welche H_3 und H_{n-4} schneiden, sind Leitstrahlen, alle Ebenen, welche einen Leitstrahl des einen dieser Räume mit einem Punkte des anderen verbinden, sind Leitebenen. Die Räume T_3, welche je eine Gerade von H_3 und H_{n-4} verbinden, haben die Incidenz 3, 1 oder keine, je nachdem beide oder eine oder keine Gerade Ψ_n angehört. Jeder Leitraum L_3, welcher H_3 in einer Geraden schneidet, schneidet auch H_{n-4} in einer Geraden.

Hat jedoch H_3 die Incidenz 1, so entspricht jeder Ebene des Büschels (S_1, H_3) ihr Verbindungsraum mit H_{n-4}. Also sind alle Räume L_3, welche durch je eine Ebene der Bündel (S_1, H_3) und (S_1, H_{n-4}) definirt sind, Leiträume. Dadurch sind auch alle Leiträume dritter Dimension erschöpft, welche H_3 in einer Ebene schneiden.

Den Raum, welchen ein Raum mit seinem entsprechenden gemein hat, nennen wir Incidenzraum des betreffenden Raumes. Der Incidenzraum und der Verbindungsraum zweier entsprechender Räume sind einander entsprechend. Das mit einem linearen Complex Ψ_m verbundene Nullsystem bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_m$; dann lässt sich bezüglich der Arten von Räumen H_m, welche in einem Nullsystem $\mathfrak{N}_n$ auftreten können, wobei $m \leqq \frac{n-1}{2}$ zeigen:

I. Wenn m ungerade ist, gibt es $\frac{m+3}{2}$ Arten von Räumen H_m; und zwar treten alle ungeraden Incidenzzahlen $\leqq m$ auf und Räume ohne Incidenz. Wenn m gerade ist, gibt es $\frac{m+2}{2}$ Arten, und zwar treten alle geraden Incidenzzahlen $\leqq m$ einschliesslich der Null auf.

II. Durch einen Raum H_{m-1}, dessen Incidenzraum I_τ sei, gehen zwei Arten von Räumen H_m: Die des Bündels $(H_{m-1}, I_{n-\tau-1})$ haben die Incidenz $\tau+1$, die übrigen die Incidenz $\tau-1$, wobei für $\tau=0$ an Stelle der letzteren die ohne Incidenz treten. Durch die Räume H_{m-1} ohne Incidenz (falls solche vorhanden sind) gehen nur Räume H_m mit der Incidenz Null. Umgekehrt liegen in jedem Raume H_m, mit Ausnahme der Leiträume und derer ohne Incidenz zwei Arten von Räumen nächst niedrigerer Dimension.

Wir setzen diese Sätze für $m=0, 1, 2, \ldots p-1$ oder »für $p-1$« voraus und beweisen sie dann für p. Sämmtliche Arten von Räumen H_p werden jedenfalls erhalten, wenn man die durch sämmtliche Arten von Räumen K_{p-1} gehenden H_p betrachtet.

Ein K_{p-1} habe den Incidenzraum I_ω, wobei nach 1) für $p-1$ ω zugleich mit $p-1$ gerade oder ungerade ist. Ein Raum H_p des Bündels $(K_{p-1}, I_{n-\omega-1})$ schneidet K_{n-p} in einem $I_{\omega+1}$. H_p kann als Verbindungsraum von K_{p-1} und $I_{\omega+1}$ aufgefasst werden. Sein entsprechender geht als Schnitt von K_{n-p} und $I_{n-\omega-2}$ ebenfalls durch $I_{\omega+1}$, weil letzterer als Leitraum (cf. 1) ganz in $I_{n-\omega-2}$ liegt. $I_{\omega+1}$ gehört also dem Incidenzraume von H_p an, macht denselben aber auch vollständig aus, weil ein Incidenzraum $I_{\omega+2}$ von H_p den K_{p-1} in einem $R_{\omega+1}$ schneiden müsste, der auch Incidenzraum von K_{p-1} wäre. Liegt der durch K_{p-1} gehende H_p nicht im Bündel $(K_{p-1}, I_{n-\omega-1})$, so kann man sich denselben immer noch durch K_{p-1} und einen Raum $Q_{\omega+1}$ des Bündels (I_ω, R_n) bestimmt denken. $Q_{n-\omega-2}$ liegt in $I_{n-\omega-1}$ und enthält nicht I_ω, schneidet aber denselben in einem Raume $I_{\omega-1}$, welcher auch dem H_{n-p-1} als dem Schnittraume von K_{n-p} und $Q_{n-\omega-2}$ angehört und den vollständigen Incidenzraum von H_p ausmacht. Diese Schlüsse gelten für $\omega=0, 1, \ldots p-1$. Hat jedoch K_{p-1} keinen Incidenzraum, so schneidet ein durch ihn gehender H_p den K_{n-p} in einem einzigen Punkte M_0, welcher der ganze Incidenzraum von H_p ist. Es gilt also II) auch für p, woraus von selbst auch I) für p folgt. Da diese Sätze für $p=1, 2, 3$ vorher bewiesen wurden, gelten sie allgemein.

III. Die in einem Raume H_m ohne Incidenz enthaltenen Strahlen von Ψ_n bilden selbst einen linearen Complex Ψ_m. Zu jedem Element von H_m findet man sein in $\mathfrak{R}_n$ entsprechendes, indem man sein in $\mathfrak{R}_m$

entsprechendes mit H_{n-m-1} verbindet. Der Incidenzraum eines Elementes von H_m in Bezug auf $\mathfrak{N}_m$ ist auch der ganze Incidenzraum in Bezug auf $\mathfrak{N}_n$. Diese Sätze gelten auch für $n > m > q$.

Wählen wir nämlich in H_m $m+2$ Punkte $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, \ldots P_0^{(m+2)}$, von denen je $m+1$ unabhängig seien, so schneiden die Räume $P_{n-1}^{(1)}, P_{n-1}^{(2)}, \quad P_{n-1}^{(m+2)}$ den H_m in $m+2$ Räumen $Q_{m-1}^{(1)}, \ldots Q_{m-1}^{(m+2)}$ von denen keine $m+1$ durch einen Punkt R_0 gehen. Denn da H_{n-m-1} durch die entsprechenden $m+1$ Räume P_{n-1} als deren Schnitt vollkommen bestimmt ist, wäre R_0 gemeinschaftlicher Punkt von H_m und H_{n-m-1}. Die Elemente P_0 und Q_{m-1} bestimmen also in H_m ein Nullsystem $\mathfrak{N}_m$, dasselbe welches auch durch das Feld H_m mit dem Schnitt des reciproken Bündels (H_{n-m-1}, R_n) gebildet wird, und dessen linearer Complex der Ort der Strahlen von Ψ_n ist, welche in H_m liegen. Einem Punkte P_0 in H_m entspricht in Bezug auf $\mathfrak{N}_m$ ein Raum P_{m-1} welcher auch in P_{n-1} enthalten ist. Da der Verbindungsraum (P_{m-1}, H_{n-m-1}) schon die gehörige Dimension hat, ist er der Raum P_{n-1}. Da man sich ein Element in H_m durch eine Anzahl unabhängiger Punkte bestimmt denken kann, folgt der analoge Satz für beliebige Elemente von H_m. Diese Schlüsse sind von der Bedingung $m \leqq q$ unabhängig.

IV Alle Strahlen, welche durch je einen Punkt von H_m und H_{n-m-1} bestimmt sind, sind Leitstrahlen; überhaupt sind alle Räume Leiträume, welche durch je einen Leitraum von $\mathfrak{N}_n$ in H_m und H_{n-m-1} bestimmt sind, gleichviel ob letztere beiden einen Incidenzraum besitzen oder nicht, und ob die beiden Bestimmungsräume den Incidenzraum oder einander (im Incidenzraum) schneiden oder nicht. Wenn überhaupt I_{ω_1} der Incidenzraum bezüglich $\mathfrak{N}_n$ eines beliebigen Elementes P_i von H_m ist, und I_{ω_2} der Incidenzraum eines Elementes Q_k von H_{n-m-1}, so gehört der Verbindungsraum von I_{ω_1} und I_{ω_2} dem Incidenzraume des Verbindungsraumes von P_i und Q_k an.

In einem H_m $(m \leqq q)$ mit dem Incidenzraume I_ω liegen Räume H_{m-1} mit der Incidenz $\omega \pm 1$; folglich Räume H_{m-2}, mit den Incidenzen ω, $\omega \pm 2$; folglich, wenn k eine gewisse Grenze nicht überschreitet, Räume H_{m-k} mit den Incidenzen $\omega, \omega \pm 2$, $\omega \pm 4, \ldots \omega \pm k$ oder $\omega \pm 1, \omega \pm 3, \ldots \omega \pm k$, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Bezüglich des steigenden Theiles der Reihe lässt sich der Schluss fortsetzen, bis $\omega + k = m - k$ geworden ist; in fallender Richtung stösst man zum erstenmal, wenn $k = \omega + 1$ geworden ist, auf Räume ohne Incidenz. Also:

V Wenn H_m $(m \leqq q)$ die Incidenz ω hat, so kommen in ihm Leiträume bis einschliesslich zur Dimension $\frac{m+\omega}{2}$, aber keine höherer Dimension, vor. Räume ohne Incidenz gibt es darin nur solche, deren Dimension $\leqq m - \omega - 1$ (und natürlich ungerade) ist. Diese Formeln gelten auch noch für Räume H_m ohne Incidenz, wenn man $\omega = -1$ setzt. Von Räumen R_i kommen dann und nur dann alle Arten, die es in R_n gibt, auch in H_m vor, wenn $i \leqq m - \omega$ ist.

Die Räume G_m in R_n bilden eine $(m+1)(n-m)$-stufige Mannigfaltigkeit, die Räume G_{s+1} eines Bündels (G_s, M_t) eine $t-s-1$-stufige. Es sei G_k ein Raum mit der Incidenz 0. Dann bilden also die Räume G_{k+1} mit der Incidenz 1, weil jeder auf $k+1$-fach unendliche Weise nach II) erhalten werden kann, und die G_k mit der Incidenz Null, sowie die G_k überhaupt, eine $(k+1)(n-k)$-fache Mannigfaltigkeit bilden, eine $(k+1)(n-k)+n-2k-3$-fache Mannigfaltigkeit. Wenn $s_{k,\omega-1}$ die Stufigkeit der Mannigfaltigkeit der $G_{k+\omega-1}$ mit der Incidenz $\omega - 1$ ist, so ist

$$s_{k,\omega} = s_{k,\omega-1} + n - 2k - 3\omega,$$

also

$$s_{k,\omega} = (k+1)(n-k) + \omega(n-2k) - 3\frac{\omega(\omega+1)}{2}$$

Setzen wir $\omega + k = i$, so erhalten wir:

VI. Die Räume G_i eines Nullsystems in R_n mit der Incidenz ω bilden eine $\left\{(n-i+\omega)(i+1) - \omega(i-\omega) - \frac{3\omega(\omega+1)}{2}\right\}$-stufige Mannigfaltigkeit.

Diese Formel liefert, wie es sein muss, $(i+1)(n-i)$ für $\omega = 0$ und die schon in 2) erhaltene Zahl für $\omega = i$. Sie gilt auch für die Räume ohne Incidenz, wenn man $\omega = -1$ setzt, da sie diesfalls $(i+1)(n-i)$ liefert.

Dem Satz V) lässt sich an die Seite stellen:

VII. Wenn H_m $(m \geqq q)$ die Incidenz ω hat, so gehen durch ihn Leiträume der Dimension $\frac{1}{2}(n+m-\omega-1)$, aber keine niedrigerer Dimension. Die Räume ohne Incidenz, welche durch H_m gehen, haben mindestens die Dimension $m+\omega+1$. Von Räumen H_i gehen alle Arten, die überhaupt in R_n vorkommen, auch durch H_m, wenn $i \geqq m+\omega$ ist.

Durch einen H_m $(m \geqq q)$ mit dem Incidenzraume I_ω gehen nämlich Räume H_{m+1} mit den Incidenzen $\omega \pm 1$, folglich Räume H_{m+2} mit den Incidenzen ω, $\omega \pm 2$ etc. Bezüglich der Reihe nach oben ist zu bemerken, dass H_{m+k} das erstemal Leitraum sein kann, wenn $m+k = n-(\omega+k)-1$ geworden ist; im fallenden Theil der Reihe lässt sich der Schluss fortsetzen, bis $k = \omega+1$ geworden ist, wo man zum erstenmal auf Räume ohne Incidenz stösst.

§. 8. Die singulären Complexe in R_n.

Die singulären Complexe eines R_3 einer linearen Mannigfaltigkeit, die mindestens fünfstufig ist, treten nach §. 7, 7 auch auf als Schnitte eines Complexes Ψ_5, wenn R_3 im zugehörigen Nullsystem $\mathfrak{N}_5$ die Incidenz 1 hat. Analog wollen wir die in einem S_m $(m < n)$ mit der Incidenz τ enthaltenen Strahlen von Ψ_n einen singulären Complex nennen und mit $\Sigma_m(\tau)$ bezeichnen. Es wird sich nämlich zeigen, dass die Natur dieses Complexes von n unabhängig ist. Wenn die zur Untersuchung vorliegende lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ die Dimension d hat, und wenn n die Zahl d oder $d-1$ bedeutet, je nachdem d ungerade oder gerade ist, so können wir also vorläufig singuläre Complexe nur in Räumen von $\mathfrak{M}$ mit höchstens der Dimension $n-1$ definiren und hier nur die $\Sigma_{n-1}(0)$, in den Räumen R_{n-2} nur die $\Sigma_{n-2}(1)$, in den R_{n-3} die $\Sigma_{n-3}(0)$ und $\Sigma_{n-3}(2)$ etc., weil z. B. die R_{n-3} eines $\mathfrak{N}_n$ keine anderen Incidenzen als 0 und 2 besitzen können. Erst für einen Raum $R_{\frac{n-1}{2}}$ oder niedrigerer Dimension haben wir in $\mathfrak{M}$ hinreichend hohe Mannigfaltigkeiten zur Verfügung, um durch Aufstellung von

Nullsystemen in denselben dem betreffenden Raume eine beliebige, mit I) des §. 7 verträgliche Incidenz geben zu können.

In einem S_m des R_n mit dem Incidenzraum I_τ kommen Räume $H_{m-\tau-1}$ ohne Incidenz vor (nach §. 7, V; $m-\tau-1$ ist nämlich immer ungerade); es sind zugleich alle jene, welche mit I_τ keinen Punkt gemein haben (dies gilt ebenso für $m>q$). Ein solcher $H_{m-\tau-1}$ wird von Ψ_n in einem regulären Complex Γ geschnitten. Verbinden wir einen selbst entsprechenden Raum L_σ von $\Gamma\left(\sigma=\frac{1}{2}(m-\tau-2)\right)$ mit I_τ durch einen Raum der Dimension $\sigma+\tau+1=\frac{m+\tau}{2}$, so ist dieser ein Leitraum $L_{\frac{m+\tau}{2}}$ in $\mathfrak{R}_n$; denn sein entsprechender ist der Schnittraum von $I_{n-\tau-1}$ und $L_{n-\sigma-1}$, welche beide sowohl durch L_σ als I_τ gehen. Wenn nun $m\leqq q=\frac{n-1}{2}$, so ist $\tau\leqq m$; wenn $m>q$, ist $\tau\leqq n-m-1$, also jedenfalls

$$\frac{m+\tau}{2}\leqq q,$$

alle Elemente eines Feldes $L_{\frac{m+\tau}{2}}$ sind also selbst Leiträume.

a) Umgekehrt werden alle Leiträume $L_{\frac{m+\tau}{2}}$ in S_m durch Verbindung von I_τ mit allen L_σ eines Γ erhalten.

Denn jeder $L_{\frac{m+\tau}{2}}$ muss $H_{m-\tau-1}$ in einem R_σ schneiden, und dieser muss Leitraum in Γ sein. Wir haben so einen Überblick über sämmtliche Strahlen von $\Sigma_m(\tau)$. Es kann nämlich ausser allen Strahlen aller Räume $L_{\frac{m+\tau}{2}}$ kein Strahl von Ψ_n in S_m enthalten sein. Denn alle Strahlen, welche I_τ schneiden, gehören ohnehin zu Ψ_n, und durch einen, welcher I_τ nicht schneidet, lässt sich ein $H_{m-\tau-1}$ legen, welcher I_τ nicht schneidet und den man als den obigen zur Bestimmung des singulären Complexes verwendeten betrachten kann. Ein $\Sigma_m(m-2)$ besteht (nach §. 7, 1) aus allen Strahlen von S_m, welche I_{m-2} schneiden und aus keinen anderen, weil sonst alle Ebenen in S_m durch einen der letzteren Leitebenen wären, und schliesslich überhaupt alle Strahlen von S_m Leitstrahlen. Also:

I. Ein $\Sigma_m(m)$ besteht aus allen Strahlen des Feldes S_m; ein $\Sigma_m(m-2)$ aus allen Strahlen von S_m, welche I_{m-2} schneiden. In allen übrigen Fällen ist ein singulärer Complex $\Sigma_m(\tau)$ vollkommen bestimmt durch einen Raum I_τ und einen regulären Complex $\Gamma_{m-\tau-1}$, dessen Raum mit I_τ keinen Punkt gemein hat; er besteht aus den Strahlen der Verbindungsräume aller in $\Gamma_{m-\tau-1}$ sich selbst entsprechenden Räume mit I_τ.

Zum Beispiel werden alle in einem P_4 eines $\mathfrak{N}_5$ enthaltenen Leitebenen erhalten durch Projection der Leitstrahlen eines linearen Complexes eines R_3 in P_4, welcher dessen Nullpunkt P_0 nicht enthält, aus diesem Nullpunkt. Das System dieser Leitebenen wird von jedem anderen nicht durch P_0 gehenden R_3 in P_4 ebenfalls in einem regulären linearen Complex geschnitten.

Den Satz I) kann man nun auch als Definition der singulären Complexe annehmen, wodurch die Eingangs des Paragraphen erwähnten Beschränkungen wegfallen: Man kann jetzt in R_n, auch wenn von den Elementen des R_n überhaupt keine höheren Mannigfaltigkeiten als R_n vorhanden sind, in einem S_m alle $\Sigma_m(\tau)$ erhalten ($m \leqq n$) durch Annahme eines I_τ und eines $\Gamma_{m-\tau-1}$ in S_m, wenn nur m und τ den Bedingungen von §. 7, I genügen, d. h. wenn nur $m-\tau$ gerade ist. Dann tritt natürlich an Stelle der früheren Definition der Satz: Ein S_m mit der Incidenz τ in $\mathfrak{N}_n$ wird von Ψ_n in einem singulären Complex $\Sigma_m(\tau)$ geschnitten.

Mit einem singulären Complex $\Sigma_m(\tau)$ in S_m ist kein Nullsystem, wie mit einem regulären verbunden; sondern, wenn wir immer noch jedem Punkte denjenigen Raum zuordnen, welcher von allen durch ihn gehenden Strahlen von $\Sigma_m(\tau)$ erfüllt wird, so hat diese Zuordnung folgende Eigenschaften:

1. Jedem Punkte von I_τ ist der ganze Raum S_m zugeordnet.

2. Jedem anderen Punkte P_0 von S_m ist ein Raum P_{m-1} zugeordnet, der auf folgende Weise gefunden wird: Durch P_0 kann man sich jenen $H_{m-\tau-1}$ gelegt denken, durch dessen $\Gamma_{m-\tau-1}$ nebst I_τ der $\Sigma_m(\tau)$ bestimmt ist. P_{m-1} ist der Verbindungsraum vom im Γ dem P_0 entsprechenden $P_{m-\tau-2}$ mit I_τ.

3. Den Punkten einer I_τ schneidenden Geraden G_1 ist derselbe Raum zugeordnet. Es seien P_0 und Q_0 zwei Punkte von G_1 (vom Schnittpunkt mit I_τ verschieden), und S_1 ein Strahl von Σ durch P_0; dann ist die Ebene $(S_1, G_1) \equiv E_2$ Leitebene, folglich auch das ganze Büschel (Q_0, E_2) zu Σ gehörig; also die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes von S_m mit P_0 und Q_0 gehören beide zu Σ, oder keine. Aus 3) folgt:

4. Allen Punkten eines Raumes $L_{\tau+1}$ des Bündels (I_τ, S_m) (mit Ausnahme der in I_τ selbst gelegenen Punkte) ist derselbe Raum zugeordnet, den man als zugeordneten des (einzigen) Schnittpunktes von $L_{\tau+1}$ mit $H_{m-\tau-1}$ nach 2) findet, auch bei einem und demselben festgehaltenen $\Gamma_{m-\tau-1}$.

5. Den Punkten P_0 einer I_τ nicht schneidenden Geraden H_1 sind die Räume P_{m-1} eines projectiven Büschels (H_{m-2}, S_m) zugeordnet, dessen Träger H_{m-2} man findet, indem man die Schnittgerade K_1 des Verbindungsraumes $V_{\tau+2}$ von H_1 und I_τ mit $H_{m-\tau-1}$ aufsucht und das zu K_1 bezüglich $\Gamma_{m-\tau-1}$ conjugirte Element $K_{m-\tau-3}$ mit I_τ verbindet.

6. Überhaupt sind den Punkten P_0 eines I_τ nicht schneidenden Feldes H_k die Räume P_{m-1} eines Bündels (H_{m-k-1}, S_m) zugeordnet: Feld und Bündel sind perspectiv-reciprok bezogen. Den Träger H_{m-k-1} findet man, indem man H_k und I_τ durch einen Raum $V_{k+\tau+1}$ verbindet, dessen Schnittraum K_k mit $H_{m-\tau-1}$ aufsucht und seinen bezüglich $\Gamma_{m-\tau-1}$ entsprechenden $K_{m-\tau-k-2}$ mit I_τ verbindet, oder auch, indem man von $k+1$ unabhängigen Punkten des H_k die entsprechenden Räume zum Schnitt bringt.

I_τ nennen wir den Axenraum oder auch, wenn er eine Gerade ist, die Axe des singulären Complexes.

Es lässt sich in gewissem Sinne umkehren:

7 Wenn ein Strahlensystem Θ in S_m folgende Eigenschaften besitzt: *a)* Alle einen Raum I_τ schneidenden Strahlen gehören zu Θ; *b)* alle durch einen ausserhalb I_τ liegenden Punkt P_0 gehenden Strahlen von Θ erfüllen einen P_{n-1}, welcher I_τ enthält; *c)* allen Punkten P_0 eines I_τ schneidenden Strahles ist auf diese Weise derselbe Raum P_{n-1} zugeordnet (nur dem Schnittpunkte der ganze R_n); *d)* die allen Punkten eines I_τ nicht schneidenden Strahles zugeordneten Räume bilden

ein zur Punktreihe projectives lineares Büschel; — so ist Θ ein singulärer linearer Complex mit dem Axenraum I_τ, d. h. lässt sich auch nach I) erhalten.

Wählen wir nämlich einen Raum H_k, wobei $k = m - \tau - 1$, welcher I_τ nicht schneidet, so schneidet der P_{n-1} jedes Punktes P_0 in H_k diesen selbst in einem P_{k-1}, enthält ihn aber nicht, weil sich sonst auch H_k und I_τ schnitten. Jeder geraden Punktreihe in H_k ist ein lineares Büschel von Räumen P_{k-1} zugeordnet, nämlich dasjenige, in welchem H_k vom Büschel der Eigenschaft *d)* geschnitten wird. Die in H_k enthaltenen Strahlen von Θ bilden also nach §. 5 (Mitte) einen regulären linearen Complex; dieser bestimmt mit I_τ nach I) einen singulären Complex Σ, welcher mit Θ identisch ist. Denn es folgt aus den Eigenschaften *a)*. . *d)*, dass auch in Θ allen Punkten jedes Raumes R_i, welcher den I_τ in einem R_{i-1} schneidet, somit auch allen Punkten eines $R_{\tau+1}$, welcher I_τ enthält, derselbe Raum zugeordnet ist. Auch Θ ist also nur durch Angabe des I_τ und des Complexes in H_k vollkommen bestimmt, da durch die Verbindungsräume $R_{\tau+1}$ von I_τ mit sämmtlichen Punkten von H_k der S_m erschöpft wird.

§. 9. Dimension der Mannigfaltigkeit der linearen Complexe in R_n.

Wenn von einem Nullsystem $\mathfrak{N}_n$ eine Gerade H_1 ohne Incidenz und der entsprechende Raum H_{n-2} sammt dem darin enthaltenen Schnittcomplex Γ_{n-2} von Ψ_n gegeben sind, so ist dadurch in jedem P_{n-1} schon eine Gerade bestimmt, auf welcher der Nullpunkt P_0 von P_{n-1} bezüglich $\mathfrak{N}_n$ liegen muss. P_{n-1} schneide H_1 in H_0, H_{n-2} in M_{n-3}, welchem bezüglich Γ_{n-2} der Nullpunkt M_0 entspreche; dann ist M_0H_0 jene Gerade. In M_{n-3} liegen nämlich Leiträume $L_{\frac{n-3}{2}}$ von Γ_{n-2}, welche alle durch M_0 gehen müssen (nach §. 7, V für $\omega = 0$ und §. 8, Satz *a*). Durch Verbindung dieser Leiträume mit H_0 entstehen Leiträume L_q von $\mathfrak{N}_n$ (nach §. 7, IV). Alle Leiträume L_q in P_{n-1} müssen durch P_0 gehen (ebenfalls nach §. 8, *a)* für $\tau = 0$). M_0H_0 ist nun die einzige Gerade, durch welche alle bisher bekannten Leiträume L_q in P_{n-1} gehen; auf ihr muss daher P_0

liegen. Wenn P_{n-1} durch H_1 oder H_{n-2} geht, wo diese Betrachtung versagt, ist P_0 ohnehin schon bekannt; im ersteren Falle ist es M_0, in letzterem H_0. Um $\mathfrak{N}_n$ und damit Ψ_n vollständig zu bestimmen, wählen wir zu einer Geraden K_1, welche weder H_1 noch H_{n-2} schneidet, den entsprechenden Raum K_{n-2}; derselbe muss nach der Bemerkung zu $(B, 7)$ in §. 6 durch einen Leitstrahl T_1 der durch H_1, K_1 und H_{n-2} bestimmten Regelschaar $\mathfrak{R}$ gehen, ausserdem aber folgende Bedingung erfüllen: Der Verbindungsraum V_3 von H_1 und K_1, in welchem $\mathfrak{R}$ liegt, schneide H_{n-2} in der Geraden W_1. V_{n-4} ist der Schnitt von H_{n-2} und W_{n-2}, also der dem W_1 in Bezug auf Γ_{n-2} entsprechende Raum. Jeder Geraden von V_3 muss ein Raum entsprechen, der durch V_{n-4} geht. Nachdem T_1 angenommen ist, ist also K_{n-2} als Verbindungsraum von T_1 und V_{n-4} vollkommen bestimmt. Durch H_1, H_{n-2}, Γ_{n-2}, K_1, K_{n-2} ist nun auch $\mathfrak{N}_n$ vollständig bestimmt. Es werde nämlich P_{n-1} von K_1 in K_0, von K_{n-2} in N_{n-3} geschnitten. Dann ist der Verbindungsraum (K_0, N_{n-3}) Leitraum, weil er im Nullraum (K_0, K_{n-2}) von K_0 liegt; er muss also als in P_{n-1} gelegen nach dem dualen Satz von $(B, 3)$ in §. 6 auch P_0 enthalten; sein Schnitt mit M_0H_0 ist also der Nullpunkt von P_{n-1}.

Jedes der Gebilde H_1, K_1, H_{n-2} kann auf $2n-2$-fach unendliche Weise in R_n angenommen werden, oder auf $4q$-fache in R_{2q+1}. Wenn δ_q die Dimension der Mannigfaltigkeit der linearen Complexe in R_{2q+1} ist, so schliesst die Annahme von Γ_{n-2} eine δ_{q-1}-fach unendliche Willkür in sich. Hierauf ist K_{n-2} nur mehr einfach-unendlich willkürlich. Ein und derselbe Complex kann aber auf $8q$-stufige Weise in dieser Art bestimmt werden: nämlich durch Wahl von H_1 und K_1 ist das übrige, wenn der Complex gegeben ist, bestimmt. Also:

$$\delta_q = \delta_{q-1} + 4q + 1,$$

$$\delta_1 = \qquad 4 \cdot 1 + 1.$$

$$\delta_q = 2q^2 + 3q,$$

oder wenn wir die Formel für n umschreiben, indem wir $q = \frac{n-1}{2}$ und $\delta_q = \varepsilon_n$ setzen:

1. Die linearen Complexe in R_n bilden eine $=\left\{\frac{n-1}{2}.(n+2)\right\}$-stufige Mannigfaltigkeit.[1]

10. Die durch zwei lineare Complexe in R_n definirten Strahlensysteme; ihre singulären Punkte.

Wir nehmen in R_n zwei verschiedene Nullsysteme $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ an, mit denen die (regulären) Complexe Ψ, Ψ' verbunden seien; das System der beiden Complexen gemeinsamen Strahlen heisse Φ. Einem Punkte P_0 von R_n ist im Allgemeinen ein Raum

---

1 Wir wollen dieses Resultat für R_5 noch auf anderem Wege bestätigen Zunächst lässt sich die Zahl ε_3 so ermitteln: In R_3 lässt sich ein einfaches Fünfeck auf fünfzehnstufige Weise annehmen. Ein und derselbe lineare Complex lässt sich jedoch auf zehnstufige Weise durch ein solches bestimmen, nämlich die erste Seite lässt sich als Leitstrahl dreistufig, jede der folgenden drei zweistufig, die letzte einstufig wählen. Also $\varepsilon_3 = 5$. Bei Vornahme der analogen Abzählung für R_5 ist darauf zu achten, dass hier das Definitionssiebeneck des §. 6 kein beliebiges Leitstrahlensiebeneck mehr ist, sondern die Eigenschaft hat, dass die Verbindungsebene je zweier aufeinander folgender Seiten eine Leitebene ist. Man kann überhaupt die durch ein einfaches $n+2$-Eck zur Bestimmung von Ψ_n gegebenen Stücke auch auffassen als eine cyklische Folge von $n+2$ Leiträumen L_q, von denen jeder die beiden benachbarten in einem L_{q-1} schneidet. In Ψ_5 kann nun von einer solchen Folge von sieben Leitebenen $L_2^{(1)}, L_2^{(2)}, \ldots L_2^{(7)}$ eine $L_2^{(4)}$ sechsstufig gewählt werden (§. 7, 2). Jede ihrer Schnittgeraden $S_1^{(3)}$, $S_1^{(5)}$ mit $L_2^{(3)}$, beziehungsweise $L_2^{(5)}$ kann auf zweistufige Weise gewählt werden, worauf $L_2^{(3)}$ noch eine beliebige Ebene des Büschels $(S_1^{(3)}, S_3^{(3)})$ sein kann (§. 7, 1). Auch $L_2^{(2)}$ und $L_2^{(6)}$ können noch je dreifach unendlich gewählt werden. $L_2^{(1)}$ muss bereits die Bedingung erfüllen $L_2^{(6)}$ in einem Punkte zu schneiden; nachdem also ihre Schnittlinie T_1 mit $L_2^{(2)}$ angenommen ist, ist sie fixirt, weil sie durch den Schnittpunkt Q_0 von T_3 mit $L_2^{(6)}$ gehen muss. Schliesslich kann $L_2^{(7)}$ durch Q_0 in Q_4, dem Verbindungsraume von $L_2^{(6)}$ und $L_2^{(1)}$, einfach unendlich angenommen werden, weil überhaupt die Leitebenen, welche zwei in einem R_4 mit der Incidenz 0 liegende, sich nur in einem Punkte (dem Incidenzpunkte) schneidende Leitebenen in je einer Geraden schneiden, eine einstufige Mannigfaltigkeit bilden (cf. §. 8, den Absatz nach I), und zwar ist dieselbe das der Regelschaar bezüglich R_4 duale Gebilde und wird auch von jedem R_3 des R_4, welcher nicht durch den Incidenzpunkt geht, in einer Regelschaar geschnitten. Ein und derselbe lineare Complex kann also in R_5 auf $6+4.3+2+1$-fach unendliche Weise durch eine solche Folge von sieben Leitebenen bestimmt werden. Ein $n+2$-Eck kann in R_n auf $n(n+2)$-stufige Weise gewählt werden, nämlich die erste Seite $2n-2$-fach, jede der n folgenden n-fach, die letzte zweifach unendlich. Also $\varepsilon_5 = 35-21 = 14$.

Q_{n-2} bezüglich Φ als Schnittraum der beiden P_0 entsprechenden Räume P_{n-1} und P'_{n-1} zugeordnet, indem alle Strahlen des Bündels (P_0, Q_{n-2}) zu Φ gehören. Fallen jedoch die beiden Nullräume eines Punktes S_0 zusammen, so heisse derselbe ein singulärer Punkt von Φ; dann gehört das ganze Strahlbündel (S_0, S_{n-1}) zu Φ. Wir wollen uns zunächst über das Vorkommen singulärer Punkte auf einer Geraden G_1 unterrichten:

1. G_1 sei in keinem der beiden Nullsysteme Leitstrahl.

a) Die beiden bezüglich $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ entsprechenden Räume G_{n-2} und G'_{n-2} haben nur einen R_{n-4} gemein; dann liegt auf G_1 kein singulärer Punkt.

Denn würden für einen Punkt von G_1 die beiden Verbindungsräume mit G_{n-2} und G'_{n-2}, welche nach $(B, 5)$ die Nullräume sind, zusammenfallen, so lägen G_{n-2} und G'_{n-2} im selben R_{n-1} und hätten einen R_{n-3} gemein. Die beiden Büschel von Nullräumen sind durch G_1 selbst projectiv bezogen; die den Punkten von G_1 bezüglich Φ zugeordneten Räume Q_{n-2} bilden daher (§. 5) eine Raumschaar $\mathfrak{R}_{n,\, n-2}$.

b) G_{n-2} und G'_{n-2} haben einen R_{n-3} gemein; auf G_1 liegt ein und nur ein singulärer Punkt.

Der Schnittpunkt S_0 von G_1 mit dem einzigen R_{n-1}, durch welchen sich G_{n-2} und G'_{n-2} verbinden lassen, ist singulär, weil alle Strahlen des Bündels (S_0, R_{n-1}) sowohl G_{n-2} als G'_{n-2} schneiden, also beiden Complexen angehören. Jedem anderen Punkte von G_1 ist der Verbindungsraum mit R_{n-3} bezüglich Φ zugeordnet; die Räume Q_{n-2} bilden also diesfalls ein lineares Büschel.

c) G_{n-2} und G'_{n-2} fallen zusammen; alle Punkte von G_1 sind singulär.

2. G_1 ist in einem Nullsystem $\mathfrak{N}$ Leitstrahl, auf G_1 liegt kein singulärer Punkt.

Denn G_{n-2}, welches G_1 enthält, und G'_{n-2} liegen allgemein; liessen sie sich nämlich durch einen R_{n-1} verbinden, so müssten sich in demselben auch G_1 und G'_{n-2} schneiden.

3. G_1 ist ein Strahl von Φ; dann können auf G_1 keiner oder einer, oder zwei, oder alle Punkte singulär sein.

Wenn G'_{n-2} mit G_{n-2} zusammenfällt, können alle angeführten Fälle eintreten, weil die Doppelpunkte der beiden dem

Büschel (G_{n-2}, R_n) entsprechenden Nullpunktreihen singulär sind. Wenn G_{n-2} und G'_{n-2} sich durch einen R_{n-1} verbinden lassen, liegt auf G_1 dann ein singulärer Punkt, wenn die beiden Nullraumbüschel (G_{n-2}, R_n) und (G'_{n-2}, R_n), welche beide auf die Punktreihe G_1 projectiv bezogen sind, den Raum R_{n-1} entsprechend gemein haben. Wenn G_{n-2} und G'_{n-2} allgemein liegen, besitzt G_1 keinen singulären Punkt.

4. Wenn $i+1$ unabhängige Punkte eines Raumes F_i von R_n singulär sind, so fallen die beiden entsprechenden Räume F_{n-i-1} und F'_{n-i-1} zusammen. Denn jeder ist durch die den $i+1$ Punkten im betreffenden Nullsystem entsprechenden Räume bestimmt.

5. Wenn $i+2$ allgemeine Punkte von F_i $(i<n)$ singulär sind, so sind alle singulär. Denn das Feld F_i ist in jedem Nullsystem nach 4) auf dasselbe Bündel (F_{n-i-1}, R_n) reciprok bezogen; die in F_i dadurch definirte Collineation ist aber identisch.

Wir definiren: p Räume $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots C_{k_p}$ in R_m, welche die Bedingung erfüllen

$$\Sigma_p + p - 1 \leqq m, \qquad a)$$

wobei

$$\Sigma_p = \sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda,$$

heissen unabhängig, wenn sie in keinem Raume von niedrigerer als der Dimension $\Sigma_p + p - 1$ enthalten sind.[1]

Hat man p unabhängige Räume, so sind auch je q $(q<p)$ von ihnen unabhängig; ihr Verbindungsraum wird von keinem der Gruppe der $p-q$ übrigen und auch von keinem Verbindungsraum einer Anzahl Räume dieser Gruppe geschnitten. Hat man $r-1$ unabhängige Räume, so kann man, solange die Bedingung $a)$ erfüllt bleibt, einen r^{ten} wählen, welcher mit den $r-1$ gegebenen ein System von r unabhängigen Räumen bildet. Man braucht nur einen C_{k_r} zu wählen, welcher mit dem Verbindungsraum

[1] Diese Definition enthält die von p unabhängigen Punkten für $p \leqq m+1$ in sich; in der That gibt es $m+2$ unabhängige Punkte in R_m nicht mehr. Aus ähnlichen Gründen ist auch für die allgemeinere Definition die Beschränkung $a)$ sachgemäss.

der $r-1$ gegebenen keinen Punkt gemein hat. Zwei unabhängige Räume sind solche, welche keinen Punkt gemein haben; man kann also von zweien ausgehend folgeweise einen 3., 4.,...p^{ten} eines Systems unabhängiger Räume wählen, bis $\Sigma_p+p-1=m$ geworden ist.

Wir nennen $V^{(i)}$ den Verbindungsraum aller p unabhängigen Räume mit Ausnahme von C_{k_i}. q Räume mit den Dimensionen $d_1, d_2, \ldots d_q$ schneiden sich in R_m im Allgemeinen in einem Raum R_d, wobei

$$d=\sum_{\lambda=1}^{q} d_\lambda-(q-1)m \qquad \ldots b)$$

(cf. Veronese, Math. Ann., XIX, p. 164). Nehmen wir nun q der Räume $V^{(i)}$, so sind wir sicher, dass diese Formel wirklich gilt, d. h. dass nicht Specialfälle auftreten können, in welchen die q Räume eine höhere Incidenz haben. Denn sonst würde man, wenn man diesen höheren Schnittraum der q Räume $V^{(i)}$ mit dem Schnittraum der $p-q$ übrigen Räume $V^{(i)}$ zum Schnitt brächte, unter abermaliger Anwendung dieser Gleichung finden, dass alle p Räume $V^{(i)}$ (mindestens) einen Punkt gemein haben. Sie können aber keinen Punkt gemein haben; denn dieser wäre auch der Schnittpunkt des Schnittraumes von irgend $p-1$ Räumen $V^{(i)}$, unter welchen $V^{(\lambda)}$ fehle, das ist von C_{k_λ} mit $V^{(\lambda)}$ gegen die Voraussetzung der Unabhängigkeit der p Räume $C_{k_1}, \ldots C_{k_p}$.

Bevor wir die Untersuchung der singulären Punkte des Strahlensystems Φ wieder aufnehmen, müssen wir folgenden Satz beweisen:

6. Wenn in R_m p unabhängige Räume C_{k_λ} $(\lambda=1,2,\ldots p)$ gegeben sind, für welche

$$\sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda+p-1=m$$

ist, so lässt sich durch jeden Punkt S_0, welcher in keinem der Verbindungsräume von je $p-1$ der C liegt, ein und nur ein Raum D_{p-1} legen, welcher jeden der p gegebenen Räume in einem Punkte schneidet.

Es sei $W^{(i)}$ der Verbindungsraum von S_0 mit $V^{(i)}$; er hat die Dimension $\Sigma_p - k_i + p - 1$. Die p Räume $W^{(i)}$ schneiden sich nach *b)* in einem D_{p-1}, welcher der gesuchte ist. Denn betrachten wir den Schnitt sämmtlicher $W^{(i)}$ mit Ausnahme eines einzelnen $W^{(\lambda)}$, so hat er die Dimension $k_\lambda + p - 1$; in ihm ist sowohl D_{p-1} als der Verbindungsraum (S_0, C_{k_λ}) enthalten. Letztere beide schneiden sich also in einer Geraden, welche durch S_0 geht und C_{k_λ} in einem Punkte schneidet. Es lässt sich bemerken, dass die p Schnittpunkte von D_{p-1} mit den C und der Punkt S_0 eine Gruppe von $p+1$ Punkten in D_{p-1} bilden, von denen je p unabhängig sind. Zunächst sind t Punkte, von denen je einer in einem C liegt, unabhängig ($t \leqq p$); denn lägen sie in einem R_{t-2}, so wäre dieser durch $t-1$ derselben schon bestimmt. Der Verbindungsraum der entsprechenden $t-1$ Räume C enthielte R_{t-2} und hätte daher mit dem letzten Raum C einen Punkt gemein. Je $p-1$ jener p Schnittpunkte in D_{p-1} definiren also einen Raum D_{p-2}; S_0 liegt ausserhalb desselben, weil überhaupt ausserhalb jedes $V^{(i)}$ gelegen. D_{p-1} ist also durch S_0 und je $p-1$ der Schnittpunkte mit den C vollkommen bestimmt.

Wir nennen $\mathfrak{S}$ die Gesammtheit der singulären Punkte des Strahlensystems Φ. Dann gilt:

7. Wenn zwei lineare Mannigfaltigkeiten T_k und T_h ganz zu $\mathfrak{S}$ gehören und einen Punkt Q_0 gemein haben, so gehört ihr ganzer Verbindungsraum T_{k+h} zu $\mathfrak{S}$.

Zunächst gehört nämlich nach 5) jede Ebene zu $\mathfrak{S}$, welche durch je einen Strahl der Bündel (Q_0, T_k) und (Q_0, T_h) definirt wird. Durch solche Ebenen lässt sich aber der Raum T_{k+h} erschöpfen.

Wenn S_0 ein singulärer Punkt ist, entspricht ihm in Bezug auf $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ derselbe S_{n-1}. Verbinden wir einen ausserhalb S_{n-1} etwa noch vorhandenen singulären Punkt mit S_0 durch eine Gerade, so sind nach 1) deren sämmtliche Punkte singulär. Dies lässt sich auch so ausdrücken:

8. Wenn S_0 ein beliebiger singulärer Punkt ist, und man hebt den Raum höchster Dimension S_k heraus, welcher durch S_0 geht und ganz zu $\mathfrak{S}$ gehört, so liegen alle übrigen Punkte von $\mathfrak{S}$ in S_{n-1}. Man kann sofort weiter behaupten, dass sie auf S_{n-k-1} beschränkt sind. Denn der Satz gilt für jeden Punkt

von S_k; fasst man $k+1$ unabhängige derselben ins Auge, so müssen im Schnittraum der entsprechenden Nullräume, welcher eben der sowohl in $\mathfrak{N}$ als $\mathfrak{N}'$ entsprechende Raum S_{n-k-1} ist, alle Punkte von $\mathfrak{S}$ ausser S_k liegen. Wir nennen S_k den zu S_0 gehörigen singulären Theilraum.

Zu $S_0^{(1)}$ gehöre der singuläre Theilraum $S_{k_1}^{(1)}$, zu einem Punkte $S_0^{(2)}$ ausserhalb $S_{k_1}^{(1)}$ der $S_{k_2}^{(2)}$; dann kann im Verbindungsraum $U_{k_1+k_2+1}^{(2)}$ der beiden singulären Theilräume kein weiterer singulärer Punkt liegen; denn durch einen solchen liesse sich nach 6) eine Gerade legen, welche beide Theilräume schnitte, auf welcher also drei, daher alle Punkte singulär wären. Es würde also der Verbindungsraum der Geraden mit jedem Theilraum und schliesslich der ganze Raum $U^{(2)}$ zu $\mathfrak{S}$ gehören. Diese Schlüsse lassen sich, wenn noch ein $S_0^{(3)}$ ausserhalb $U^{(2)}$ vorhanden ist, fortsetzen; überhaupt: Hat man λ singuläre Theilräume $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots S^{(\lambda)}$ herausgehoben, deren Indicessumme $k_1+k_2+\ldots+k_\lambda = \sigma_\lambda$ sei, so liegt im Verbindungsraum $U^{(\lambda)}$ der λ von einander, wie wir voraussetzen, unabhängigen Theilräume, welcher die Dimension $\sigma_\lambda+\lambda-1$ hat, kein weiterer singulärer Punkt. Denn durch einen solchen liesse sich nach 6) ein Raum $D_{\lambda-1}$ legen, welcher sämmtliche Theilräume in je einem Punkte schnitte. Von den $\lambda+1$ singulären Punkten, welche in $D_{\lambda-1}$ bekannt sind, sind je λ unabhängig, wie ebenfalls gezeigt wurde. Also gehörte $D_{\lambda-1}$ und schliesslich ganz $U^{(\lambda)}$ zu $\mathfrak{S}$. Ein weiterer singulärer Theilraum $S^{(\lambda+1)}$ kann also $U^{(\lambda)}$ nicht schneiden. Die Eigenschaft unabhängig zu sein, bleibt also auch für die $\lambda+1$ Räume $S^{(1)}, \ldots S^{(\lambda+1)}$ erhalten. Überhaupt sind die Voraussetzungen dieses Beweises und des Satzes 6) erfüllt, wenn sie für die nächst niedrigere Zahl λ vorausgesetzt werden. Man kann also das Verfahren fortsetzen, solange ausserhalb des letztgewonnenen $U^{(\lambda)}$ noch singuläre Punkte vorkommen. Da bei jedem Schritte des Verfahrens, selbst wenn ein Theilraum $S_{k_\lambda}^{(\lambda)}$ nur aus dem singulären Punkte $S_0^{(\lambda)}$ selbst bestehen sollte, die Dimension von $U^{(\lambda)}$ wächst, so muss es, spätestens wenn die Dimension von U gleich n geworden ist, eintreten, dass ausserhalb U keine singulären Punkte mehr liegen. Also:

9. $\mathfrak{S}$ besteht nur aus einer Anzahl unabhängiger linearer Räume $S_{k_1}, S_{k_2}, \ldots S_{k_p}$. In »unabhängiger« ist enthalten, dass die Gleichung besteht:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda + p - 1 \leqq n$$

(cf. auch §. 12, Schluss).

Nur für den Fall, dass sämmtliche im Beweisverfahren auftretende Theilräume $S_{k_\lambda}^{(\lambda)}$ einzelne Punkte sein sollten, wird U wenn man bis zu $n+1$ singulären Punkten gekommen ist, mit R_n selbst identisch, und in diesem Falle lässt sich, was das zum Beweis von 9) Gesagte betrifft, nicht schliessen, dass in U keine weiteren singulären Punkte vorhanden sind. Denn auch $D_{\lambda-1}$ wird diesfalls mit R_n identisch, und auf R_n selbst lässt sich offenbar der Satz 5) nicht anwenden. Aber dieser Fall ist schon durch 8) ausgeschlossen. Denn im Nullraum jedes der $n+1$ singulären Punkte müssten alle übrigen liegen.[1]

Jedem der Theilräume des Satzes 9) und auch jedem Verbindungsraume V einer Anzahl solcher entspricht bezüglich beider Nullsysteme derselbe Raum. Im entsprechenden von V müssen alle übrigen Theilräume, wie aus 8) folgt, enthalten sein, welche in V nicht enthalten sind. Also:

9 *b*. Ein Theilraum von $\mathfrak{S}$ ist in beiden oder keinem der zwei Nullsysteme Leitraum, und:

10. Wenn ein Leitraum L_q zu $\mathfrak{S}$ gehört, so gehört ausserdem kein Punkt in R_n zu $\mathfrak{S}$ ($n = 2q+1$).

Wenn man zwei Punkte zweier verschiedener singulärer Theilräume durch eine Gerade verbindet, so gehört dieselbe nach 8) zu Φ; verbindet man drei Punkte, von denen jeder in einem anderen Theilraume von $\mathfrak{S}$ liegt, zu einer Ebene, so ist dieselbe gemeinsame Leitebene beider Nullsysteme, weil in

---

[1] Diese Ergänzung war nothwendig, weil es sonst bloss nach dem Beweisverfahren von 9) nicht ausgeschlossen gewesen wäre, dass zum Beispiel in R_3 eine Raumcurve dritter Ordnung der Ort $\mathfrak{S}$ sein könnte. Auch in diesem Falle wäre für jeden Punkt der Curve nur er selbst nach der Definition der zugehörige singuläre Theilraum; analog für R_n.

derselben drei gemeinsame Leitstrahlen liegen, die ein eigentliches Dreieck bilden.

11. Wählt man aus $i+1$ verschiedenen singulären Theilräumen je einen Punkt, so definiren diese (cf. wegen der Unabhängigkeit Beweis zu 6) einen Raum L_i, welcher die Eigenschaft hat, dass seine sämmtlichen Elemente L_k ($k \leqq q$, falls $i > q$ wäre) gemeinsame Leiträume sind.

Setzt man diesen Satz für $i = k-1$ voraus, so folgt er auch für $i = k$. In einem R_k, welcher nicht Leitraum ist, kann nämlich schon von einem Nullsystem höchstens (wenn R_k die Incidenz $k-2$ besitzt) ein lineares Büschel von Leiträumen L_{k-1} enthalten sein. In L_i des Satzes 11) sind aber sogar $i+1$ Räume L_{i-1} vorhanden, von denen keine drei in einem Büschel enthalten sind (cf. den Anfang des §. 6), und welche die Eigenschaft des Satzes 11) haben; dieselbe kommt also auch L_i zu. Da aber schon in einem Nullsysteme Felder L_i, deren sämmtliche Elemente Leitelemente sind, nur für $i \leqq q$ vorkommen, so folgt, dass i die Zahl q nicht überschreiten kann, d. h.:

12. $\mathfrak{S}$ besteht aus höchstens $q+1$ getrennten (linearen) Theilräumen.

Wenn ein H_i weder in $\mathfrak{N}_n$ noch in $\mathfrak{N}'_n$ eine Incidenz hat, so wird er von den Complexen Ψ_n und Ψ'_n in zwei regulären Complexen Γ_i und Γ'_i geschnitten, deren gemeinsames Strahlensystem Δ sein möge. Jeder Punkt in H_i der für Φ singulär ist, ist auch für Δ singulär; die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. Jedoch:

13. Wenn einem H_i ohne Incidenz bezüglich beider Nullsysteme derselbe Raum H_{n-i-1} entspricht, so ist jeder singuläre Punkt des gemeinsamen Strahlensystems der beiden Schnittcomplexe in H_i auch singulärer Punkt von Φ (und umgekehrt).

Dies folgt aus §. 7, III.

§. 11. Die singulären Punkte eines Strahlensystems $\Psi_{5,1,2}$.

Wir wollen, um ein reichhaltigeres Beispiel als den R_3 vor Augen zu haben, vollständig ermitteln, aus was für Theilmannigfaltigkeiten der Ort $\mathfrak{S}_5$ für ein Strahlensystem zweier linearer Complexe in R_5 bestehen kann und knüpfen hiebei an

§. 9 an. Wir nehmen zwei Räume H_1 und H_3 als in beiden Nullsystemen entsprechend an; dann sind alle Punkte von H_1 singulär; alle übrigen Punkte von $\mathfrak{S}_5$ liegen nach §. 10, 8 in H_3 und sind nach §. 10, 13 zugleich die sämmtlichen singulären Punkte $\mathfrak{S}_3$ des Strahlensystems der beiden Schnittcomplexe Γ_3 und Γ_3' in H_3, welche bei der Fixirung des §. 9 beliebig angenommen werden können. Sie können sogar identisch angenommen werden, ohne dass die beiden Nullsysteme $\mathfrak{N}_5$ und $\mathfrak{N}_5'$ identisch werden; da auch sonst alle vorkommenden Fälle von $\mathfrak{S}_3$ bekannt sind, so gelangen wir zur Kenntniss folgender in R_5 möglicher Fälle:

I. $\mathfrak{S}_5$ kann aus einer oder drei Geraden bestehen, von denen keine Leitstrahl ist;[1]

II. aus zwei Geraden, von denen die eine Leitstrahl ist;

III. aus einer Geraden und einem H_3.

Ausserdem wird uns durch §. 10, 10) nahe gelegt:

IV $\mathfrak{S}_5$ kann aus einer Ebene bestehen, welche Leitebene ist.

In der That erhalten wir diesen Fall auf folgende Art: Wir bestimmen $\mathfrak{N}$ nach §. 6 durch ein einfaches Siebeneck $P_0^{(1)}P_0^{(2)}\,..P_0^{(7)}$, $\mathfrak{N}'$ durch ein ebensolches $P_0^{(1)}Q_0^{(2)}P_0^{(3)}P_0^{(4)}P_0^{(5)}$ $Q_0^{(6)}P_0^{(7)}$, welches also mit dem ersten fünf Eckpunkte gemein hat. Die zwei übrigen wählen wir so: Wenn wir den einer Seite $P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}$ in $\mathfrak{N}$ entsprechenden Raum, also den durch sie selbst und die beiden anstossenden definirten mit $P_3(i, i+1)$ bezeichnen, so schneidet $P_3(7, 1)$ die Ebene $P_0^{(3)}P_0^{(4)}P_0^{(5)} = L_2$ in einem (auf keiner Seite des Dreiecks $P_0^{(3)}P_0^{(4)}P_0^{(5)}$ liegenden) Punkt L_0. Die Schnittlinie von $P_3(3, 4)$ und $P_3(7, 1)$ ist $L_0P_0^{(2)}$. Als $Q_0^{(2)}$ wählen wir nun einen beliebigen Punkt in $P_3(3, 4)$, nur keinen in der Ebene L_2 oder auf der Geraden $L_0P_0^{(2)}$ gelegenen;

[1] Nach §. 10, 9b ist es überflüssig, hinzuzufügen, in welchem Nullsystem ein singulärer Theilraum Leitraum sei oder nicht. Man könnte hier und öfter versucht sein, von imaginären linearen Räumen zu reden; dies können wir jedoch nicht thun, da wir noch keine der Staudt'schen analoge Theorie der »imaginären Elemente« in R_n besitzen. Es ist nämlich zu erwarten, dass man sich veranlasst sehen würde, desto mehr Arten imaginärer Räume R_k in R_{2q+1} einzuführen, je näher k an q gelegen ist.

er bestimmt mit der Ebene $L_0 P_0^{(7)} P_0^{(1)}$ einen Raum Q_3, welcher $P_3(4, 5)$ in einer Geraden schneidet, auf welcher wir $Q_0^{(6)}$ wählen. In der gemeinschaftlichen Leitebene L_2 entspricht nun den vier Punkten $P_0^{(3)} P_0^{(4)} P_0^{(5)}$ und L_0 in beiden Nullsystemen derselbe Raum. Es entsprechen nämlich den Geraden $P_0^{(3)} P_0^{(4)}$ und $P_0^{(4)} P_0^{(5)}$ auch in $\mathfrak{N}'$ die Räume $P_3(3, 4)$ und $P_3(4, 5)$; als deren Verbindungsraum ist der Nullraum von $P_0^{(4)}$ bestimmt. Der Nullraum von $P_0^{(3)}$ ist auch in $\mathfrak{N}'$ durch $P_3(3, 4)$ und $P_0^{(1)}$ vollkommen bestimmt; symmetrisch der von $P_0^{(5)}$. Dem Punkte L_0 entspricht in $\mathfrak{N}$ der Verbindungsraum von L_2 und $P_0^{(1)} P_0^{(7)}$. Letzterer Geraden entspricht in $\mathfrak{N}'$ der Raum Q_3, weil er auch die beiden anstossenden Seiten enthält. Dem Schnittpunkte (L_2, Q_3), d. i. wieder dem Punkte L_0 entspricht in $\mathfrak{N}'$ also ebenfalls der Verbindungsraum von L_2 und $P_0^{(1)} P_0^{(7)}$. Die collineare Beziehung des Bündels (L_2, R_5) auf sich selbst oder auch des Feldes L_2 auf sich selbst, von der §. 10), 5 die Rede war, ist also identisch. Die Nullsysteme sind aber verschieden, weil der Seite $P_0^{(7)} P_0^{(1)}$ verschiedene Räume entsprechen. Q_3 ist nämlich von $P_3(7, 1)$ verschieden, weil er mit $P_3(3, 4)$ eine (ebenfalls durch L_0 gehende) von $L_0 P_0^{(2)}$ verschiedene Schnittlinie hat. Auch der Fall IV ist also möglich.

Nehmen wir an, in $\mathfrak{S}_5$ komme eine Ebene E_2 vor, welche ihre entsprechende E_2' nur in einem Punkte E_0 schneide, so können wir in E_2 eine Gerade C_1 nicht durch E_0 annehmen, welcher in beiden Nullsystemen derselbe Raum C_3 entspricht, der mit E_2 nur den Punkt E_0 gemein hat. Da E_0 auch für das Schnittstrahlensystem in C_3 singulär ist, besitzt dasselbe eine ganze durch E_0 gehende singuläre Gerade S_1, welche nach §. 10, 13 auch zu $\mathfrak{S}_5$ gehört. Der Verbindungsraum (E_2, S_1) ist ein Theilraum von $\mathfrak{S}_5$; wir erhalten also keinen neuen Fall, sondern kommen auf III) zurück. Aus einem Leitraum L_3 kann $\mathfrak{S}_5$ nicht bestehen, weil in ihm gemeinsame Leitebenen voll singulärer Punkte enthalten wären; aus einem Raume R_4 (was durch den Satz §. 10, 9 noch nicht ausgeschlossen wäre) auch nicht, aus demselben Grunde, oder auch weil durch jeden regulären Punkt Strahlen gehen, auf denen kein singulärer Punkt liegt, nämlich diejenigen, welche bloss in einem Nullsystem Leitstrahlen sind (§. 10, 2). (Ebenso wenig kann in R_n

$\mathfrak{S}_n$ aus einem R_{n-1} bestehen oder aus einem Leitraum L_k, wenn $k > q$).

1. Durch einen regulären Punkt P_0 von R_5 geht im Allgemeinen eine einzige gemeinsame Leitebene L_2 beider Nullsysteme.

Als Leitebene von $\mathfrak{N}$ muss nämlich L_2 in P_4 liegen, als Leitebene von $\mathfrak{N}'$ in P'_4, kann also nur im Schnittraum Q_3 liegen. Dieser ist in beiden Systemen Leitraum; seine (durch P_0 gehenden) entsprechenden Geraden seien Q_1 und Q'_1. Die Leitebenen in Q_3 von $\mathfrak{N}$ sind die Ebenen des Büschels (Q_1, Q_3), die die von $\mathfrak{N}'$ die des Büschels (Q'_1, Q_3). L_2 ist also die Verbindungsebene (Q_1, Q'_1). Nur wenn diese beiden Geraden zusammenfallen, geht ein ganzes Büschel gemeinsamer Leitebenen durch P_0.

Durch einen singulären Punkt S_0 gehen im Allgemeinen ∞^2 gemeinsame Leitebenen. Nehmen wir nämlich in S_4 einen R_3 an, welcher S_0 nicht enthält, so sind die Verbindungsebenen von S_0 mit den Strahlen des Schnittsystems von $\Psi_{5,1,2}$ mit R_3 die durch S_0 gehenden gemeinsamen Leitebenen.

a) Unter ihnen gibt es immer solche, welche nur den Punkt S_0 gemein haben.

Nur wenn die Schnittcomplexe in R_3 identisch sind, gehen durch S_0 ∞^3 gemeinsame Leitebenen. Aus 1) folgt:

2. $\Psi_{5,2,2}$ ist (abgesehen von einem später zu erwähnenden Specialfall) eine dreistufige Mannigfaltigkeit.

Wenn L_2 eine gemeinsame Leitebene ist, ist das Bündel (L_2, R_5) in jedem Nullsystem reciprok auf das Feld L_2 bezogen; dieses ist daher collinear auf sich selbst bezogen. Wir sagen, in zwei verschiedenen Leitebenen habe die Collineation dieselbe »Charakteristik«, wenn die Anzahl, Dimension und Incidenzeigenschaften der sich selbst entsprechenden Elemente dieselben sind.[1] Es lässt sich zeigen:

3. In zwei Leitebenen, die sich nicht schneiden, hat die Collineation stets dieselbe Charakteristik.

---

[1] Dieser Ausdruck ist, wie ich aus der Abhandlung Herrn Bertini's »Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque« (Rendiconti del R. Ist. Lombardo, Vol. XX) entnehme, von Herrn Segre eingeführt; den Inhalt der meisten übrigen einschlägigen Abhandlungen konnte ich nur aus den Referaten in den »Fortschritten der Mathematik« entnehmen.

Jeder sich selbst entsprechenden Geraden G_1 der Collineation einer gemeinsamen Leitebene L_2 entspricht in beiden Systemen derselbe Raum G_3; dieser schneidet jede andere gemeinsame Leitebene L'_2, welche L_2 nicht schneidet, in nur einem Punkte C_0, welcher singulär ist, weil ihm in beiden Systemen der Verbindungsraum der beiden gemeinsamen Leitebenen (C_0, G_1) und L'_2 durch ihn entspricht. Jedem selbstentsprechenden Punkte D_0 der Collineation in L_2 entspricht in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ derselbe D_4, welcher L'_2 (nur) in einer Geraden C_1 schneidet. C_1 ist in der Collineation von L'_2 selbst entsprechend, weil ihr in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ der Verbindungsraum der zwei gemeinsamen Leitebenen durch sie, die wir kennen, entspricht, nämlich L'_2 und (C_1, D_0), welche ebenfalls gemeinsame Leitebene ist, da in ihr das gemeinsame Leitstrahlenbüschel durch D_0 und ausserdem der gemeinsame Leitstrahl C_1 liegt. Jeder selbstentsprechenden Geraden in L_2 entspricht also ein selbstentsprechender Punkt in L'_2 und umgekehrt. Da aber das System sich selbst entsprechender Elemente bei allen Charakteristiken in sich dual ist, so hat die Collineation in allen Leitebenen, welche eine bestimmte L_2 nicht schneiden, dieselbe Charakteristik und auch in den schneidenden L''_2, sobald sich zu L_2 und L''_2 eine dritte finden lässt, welche keine schneidet. Es müssen nämlich, wenn zwischen den selbstentsprechenden Elementen in L_2 gewisse Incidenzrelationen auftreten (zum Beispiel wenn die Collineation nur einen Doppelpunkt und eine Doppelgerade hat, die incident sind), im Bündel (L_2, R_5) nach den Grundgesetzen der Reciprocität die dualen Incidenzrelationen vorhanden sein und sich daher auf jeden Schnitt L'_2 dieses Bündels dual übertragen, wodurch aber, wie soeben bemerkt, die Charakteristik nicht geändert wird.

In den Fällen I und III, in denen H_1 die jedenfalls auftretende Gerade von $\mathfrak{S}_5$ sei (wenn es drei sind, eine beliebige derselben), sind alle Verbindungsebenen der Punkte von H_1 mit den Strahlen des gemeinsamen Strahlensystems von Γ_3 und Γ'_3 gemeinsame Leitebenen. Das System dieser Verbindungsebenen heisse Λ; es ist auch das v o l l s t ä n d i g e System gemeinsamer Leitebenen. Denn in jeder solchen L_2 muss mindestens ein singulärer Punkt S_0 vorkommen; liegt derselbe auf H_1, muss L_2 im Verbindungsraum (S_0, H_3) liegen und gehört daher zu Λ; liegt S_0 (Fall III) in H_3, so beherrschen wir durch ι, III den Raum S_4 und finden, dass L_2 ebenfalls zu Λ gehört.

Im Falle IV sei S_2 die Leitebene voll singulärer Punkte; dann sind alle Ebenen, welche S_2 in einer Geraden T_1 schneiden und in T_3 liegen, gemeinsame Leitebenen, und es gibt keine anderen; denn es ginge durch jeden Punkt P_0 einer solchen L_2 noch eine zweite gemeinsame Leitebene L_2', nämlich die Verbindungsebene mit der dem Raume (P_0, S_2) entsprechenden Geraden. Falls nun L_2' und S_2 keinen Punkt gemein haben, ist P_0 der einzige gemeinsame Punkt von L_2 und L_2' und wäre daher singulär. Hätte aber L_2 mit S_2 einen Punkt S_0 gemein, so müsste sie in S_4 liegen; legen wir durch S_2 einen Raum R_3, welcher mit S_4 nur die Ebene S_2 gemein hat, so geht R_1 nicht durch S_0; es liessen sich also Leitebenen finden, welche, falls L_2 nur den Punkt S_0 mit S_2 gemein hätte, L_2 nicht schneiden, was zu einem Widerspruch mit 3) führt.

Im Falle IV ist die Collineation auf S_2 eine identische, in jeder anderen gemeinsamen Leitebene eine perspective, deren Centrum und Axe incident sind; in III) ist sie immer eine perspective mit getrenntem Centrum und Axe; in I) entspricht die Charakteristik dem regulären Falle der Collineation; In II) besitzen die den Leitstrahl von $\mathfrak{S}_5$ enthaltenden gemeinsamen Leitebenen eine perspective Collineation, alle übrigen zwei sich selbst entsprechende Punkte und zwei ebensolche Gerade, von welchen derjenige Punkt, welcher der Schnittpunkt der beiden Geraden ist, auf dem Leitstrahl von $\mathfrak{S}_5$ liegt. Es erübrigt aber als mögliche Charakteristik noch der Fall, dass die beiden Kegelschnitte, welche zur Bestimmung der selbstentsprechenden Elemente einer Collineation in einer Ebene führen, sich in einem Punkte dreipunktig aneinander schmiegen (Staudt, Beiträge, Art. 301); in diesem Falle bestehen die selbstentsprechenden Elemente aus einem Punkte und einer Geraden, welche incident sind. Da, wie sogleich gezeigt werden wird, blosse Punkte als singuläre Theilräume nicht vorkommen können, muss dieser Charakteristik der einzige nach früheren Ergebnissen (namentlich §. 10, 9) noch nicht ausgeschlossene und bisher noch nicht aufgetretene Fall entsprechen, nämlich:

V $\mathfrak{S}_5$ kann aus einer einzigen Geraden bestehen, welche Leitgerade ist.

In jedem P_4 gibt es (mindestens) eine gemeinsame Leitebene (dual zu 1). Bloss aus einzelnen Punkten (es könnten nach §. 10, 12 höchstens drei sein) kann also $\mathfrak{S}_5$ nicht bestehen. Denn ein singulärer Punkt muss mindestens in jeder gemeinsamen Leitebene liegen, und es gibt P_4, welche keinen der einzelnen Punkte enthalten. Es muss also mindestens eine singuläre Theilgerade G_1 vorhanden sein; ist dieselbe Nichtleitsrahl, so sind die möglichen Fälle in I bis III erschöpft. Ist dieselbe Leitstrahl, so müssen alle übrigen singulären Punkte nach, §. 10, 8 in G_3, welcher G_1 enthält, liegen. Wären es noch zwei isolirte, so müsste ihre Verbindungslinie nach §. 10, 1, weil in keinem Nullsystem Leitstrahl, zu $\mathfrak{S}$ gehören (Fall II). Wäre es noch ein isolirter S_0, so entspräche dem Strahl S_0T_0, wobei T_0 ein Punkt von G_1 ist, nach §. 10, 4 in beiden Systemen derselbe Raum; durch ihn ginge also ein ganzes Büschel gemeinsamer Leitebenen, von welchen eine beliebige L_2, mit Ausnahme der Ebene (S_0, G_1) selbst, nur die Gerade S_0T_0 mit G_3 gemein hat. Wählen wir einen P_4, welcher G_3 in einer weder durch T_0 noch S_0 gehenden Ebene schneidet, so kann nur deren Schnittpunkt mit G_1 der (einzige) singuläre Punkt in der gemeinsamen Leitebene L'_2 von P_4 sein. Wenn L_2 und L'_2 sich nicht schneiden, widerspricht dies 3), wenn sie sich in einem Punkte schneiden, wäre dieser singulär. Punkte können also als Theilräume von $\mathfrak{S}_5$ nicht auftreten.

Dass der Fall V möglich ist, folgt daraus, dass man Nullsysteme $\mathfrak{N}_5$ und $\mathfrak{N}'_5$ aufstellen kann, in welchen die Collineation einer gemeinsamen Leitebene eine beliebige ist, was ähnlich wie die Möglichkeit von IV) gezeigt wird: Es sei wieder L_2 die Verbindungsebene dreier den zwei Siebenecken $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}'_7$, durch welche wir beziehungsweise $\mathfrak{N}_5$ und $\mathfrak{N}'_5$ bestimmen wollen, gemeinsamer aufeinander folgender Eckpunkte $P_0^{(3)}$, $P_0^{(4)}$, $P_0^{(5)}$. $\mathfrak{E}'_7$ vervollständigen wir beliebig. Dann können wir erreichen, dass den vier Punkten $P_0^{(3)}$, $P_0^{(4)}$, $P_0^{(5)}$, L_0 (in derselben Bedeutung wie bei IV), welche in $\mathfrak{N}'_5$ schon ihre bestimmten Nullräume haben, in $\mathfrak{N}_5$ vier beliebige allgemeine Räume des Bündels (L_2, R_5) zugeordnet werden. $P_4^{(3)}$, $P_4^{(4)}$, $P_4^{(5)}$ wählen wir nämlich in diesem Bündel beliebig, ebenso einen Raum R_4, welchen wir dem Punkt L_0 zuordnen wollen; zu diesem Zwecke denken wir uns R_4 durch L_2 und eine L_2 nicht schneidende Gerade Q_1 bestimmt, deren Schnittpunkte mit $P_4^{(3)}$ und $P_4^{(5)}$ wir beziehungsweise als $P_0^{(1)}$ und $P_0^{(7)}$ von $\mathfrak{C}_7$ wählen. $P_0^{(2)}$ wählen wir in $P_3(3, 4)$, $P_0^{(6)}$ in der Schnittlinie des durch L_0, $P_0^{(2)}$, Q_1 bestimmten Raumes Q_3 mit $P_3(4, 5)$. Dann entspricht in $\mathfrak{N}_5$ dem Punkt L_0 als Schnittpunkt von L_2 und Q_3 der beliebig gewählte Raum (L_2, Q_1). Die collineare Beziehung des Bündels (L_2, R_5) auf sich selbst, und natürlich auch des Feldes L_2 auf sich selbst, kann daher als eine beliebige betrachtet werden. Im Fall V kommen auch gemeinsame Leitebenen vor, in welchen die Collineation eine perspective ist, deren Centrum und Axe incident sind.

Im Fall III ist eine Gerade, auf welcher beide Nullpunkte eines P_4 liegen müssen, schon durch H_1, H_3 und Γ_3 allein bestimmt; ihr entspricht in beiden Systemen derselbe Raum. Dual entspricht einem Schnittraum Q_3 der zwei Nullräume eines Punktes in beiden Systemen dieselbe Gerade. In III) geht also durch jeden regulären Punkt und liegt in jedem regulären P_4 ein ganzes Büschel gemeinsamer Leitebenen. Dies hätte man auch daraus schliessen können, dass diesfalls $\Psi'_{5,2,2}$ eine vierstufige Mannigfaltigkeit ist; in allen übrigen Fällen ist es eine dreistufige. In IV) schneiden sich je zwei gemeinsame Leitebenen (im Allgemeinen in einem Punkte). I) ist als der reguläre Fall zu betrachten, alle übrigen als Specialfälle.

Im Falle $\mathfrak{S}_5$ aus drei getrennten Geraden A_1, B_1, C_1 besteht, welche Axen heissen mögen, besteht $\Psi'_{5,2,2}$ aus den alle drei Geraden schneidenden Ebenen; es ist das eigentliche Analogon des linearen Strahlensystems in R_3. Jeder Axe entspricht der Verbindungsraum der beiden andern, $A_3 \equiv (B_1, C_1)$ u. s. w. jedem Strahl, welcher zwei Axen schneidet, in beiden Systemen der Verbindungsraum mit der dritten. Durch jeden regulären Punkt der drei Räume A_3, B_3, C_3 geht ein lineares Büschel gemeinsamer Leitebenen, weil sich durch jeden solchen Punkt eine Gerade legen lässt, welche zwei der Axen schneidet. Durch jeden ausserhalb dieser Räume gelegenen Punkt geht nur e i n e gemeinsame Leitebene; es ist dies die einzige Ebene (§. 10, 6), welche alle drei Axen schneidet. Jeder Verbindungsebene eines Punktes einer Axe mit einer zweiten Axe entspricht in beiden Systemen die Verbindungsebene desselben Punktes mit der dritten Axe.

$\Psi_{5,2,2}$ enthält nur fünffach unendlich viele Strahlen des sechsstufigen Systems $\Psi_{5,1,2}$. Überhaupt sind, während durch ein $\Psi_{n,i,1}$ auch alle übrigen $\Psi_{n,k,1}$ $\left(i, k \leqq \frac{n-1}{2}\right)$ gegeben sind, durch ein $\Psi_{n,i,2}$ $\left(i \leqq \frac{n-1}{2}\right)$ die $\Psi_{n,k,2}$, wenn $k<i$, noch nicht mitgegeben.

§. 12. Die durch zwei lineare Complexe in R_n definirten Systeme; ihre singulären Punkte (Schluss).

Manche Sätze des vorigen Paragraphen lassen sich mit ähnlichen Mitteln für R_n erweitern: Zunächst ermitteln wir, wie viel gemeinsame sich selbst entsprechende Räume L_q zweier Nullsysteme $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ in R_n im Allgemeinen durch einen Punkt R_0 gehen. Ein solcher L_q muss jedenfalls im Schnittraum R_{n-2} der beiden Nullräume von R_0 liegen und daher dessen beide entsprechende R_1 und R'_1, also deren Verbindungsebene R_2 enthalten. R_2 hat als entsprechende R_{n-3} und R'_{n-3} welche beide in R_{n-2} liegen und in deren Schnittraum R_{n-4} L_q enthalten sein muss, u. s. w. Wir nennen die Aufsuchung von R_{n-1}, R'_{n-1} und R_{n-2} den ersten Schritt; die von R_1, R'_1 und R_2 den zweiten; die von R_{n-3}, R'_{n-3} und R_{n-4} den dritten u. s. w.

Wir nehmen an, man habe beim k^{ten} Schritt einen R_k $\left(k<\frac{n-1}{2}\right)$ erhalten, welcher gemeinsamer Leitraum sei, und man wisse, dass jeder gemeinsame L_q durch R_0 auch R_k enthalten müsse, ferner dass seine beiden entsprechenden R_{n-k-1} und R'_{n-k-1} im selben R_{n-k} enthalten seien. Dann lässt sich schliessen, dass jeder L_q im Schnittraum R_{n-k-2} von R_{n-k-1} und R'_{n-k-1} liegen muss; jeder L_{k+1} von L_q, der R_k enthält, muss nämlich gemeinsamer Leitraum sein und als solcher nach §. 7, 1 sowohl dem Bündel (R_k, R_{n-k-1}) als dem Bündel R_k, R'_{n-k-1}) angehören. Da sich L_q durch solche L_{k+1} erschöpfen lässt, muss er ganz in jenem Schnittraum R_{n-k-2} liegen, dessen Gewinnung den $k+1$ten Schritt abschloss. Dem R_{n-k-2} müssen als durch L_q gehend zwei Räume R_{k+1} und R'_{k+1} in L_q entsprechen, welche auch beide durch R_k gehen. Beim $k+2$ten Schritt erhalten wir also als deren Verbindungsraum einen R_{k+2}, welcher gemeinsamer Leitraum ist, durch den alle L_q gehen müssen, und dessen beide entsprechende in R_{n-k-2} enthalten sind. Die Voraussetzungen, die wir für das Ergebniss des $k$ten Schrittes gemacht haben, bleiben also auch für den $k+2$ten erfüllt. 2 ist eine solche Zahl k, daher sind auch alle folgenden gerade. Durch den $q$ten Schritt erhalten wir den gesuchten L_q, und zwar, wenn q gerade ist, als Verbindungsraum zweier Räume R_{q-1} und R'_{q-1}, welche demselben R_{q+1} entsprechen; wenn q ungerade ist, als Schnittraum zweier Räume R_{q+1} und R'_{q+1}, welche demselben R_{q-1} entsprechen. Also:

1. Durch jeden Punkt von R_n geht im Allgemeinen (und zwar wenigstens) ein Element L_q eines $\Psi_{n,q,2}$; letzteres ist also im Allgemeinen (und zwar wenigstens) eine $q+1$-stufige Mannigfaltigkeit.

Wenn es sich nach dem $i$ten Schritte ereignet, dass dem letztgewonnenen Raum in beiden Systemen derselbe Raum entspricht, so bricht das Verfahren ab. Es sei zunächst i gerade; dann wurde durch den $i$ten Schritt ein gemeinsamer Leitraum R_i erhalten. Wählen wir in R_{n-i-1} einen H_{n-2i-2}, welcher R_i nicht schneidet, so wird in ihm von den beiden Nullsystemen je ein regulärer Complex Γ und Γ' bestimmt. Die gemeinsamen Leiträume L_q, welche durch R_i gehen, sind nach §. 8. Die Verbindungsräume von R_i mit den gemeinsamen Leiträumen L_σ von Γ und Γ', wobei $\sigma = \frac{n-2i-3}{2}$. Die Mannigfaltigkeit der L_σ hat nach 1) im Allgemeinen die Dimension $\frac{n-2i-1}{2}$. Dies ist also auch die Dimension der Mannigfaltigkeit der durch R_0 gehenden gemeinsamen L_q. Insbesondere folgt für $i=0$:

2. Durch jeden singulären Punkt von R_n geht eine Mannigfaltigkeit gemeinsamer selbst entsprechender Räume, welche im Allgemeinen (und zwar wenigstens) $\frac{n-1}{2}$ stufig ist.

Wenn i ungerade ist, gilt ganz dasselbe. Die Ableitung gilt für $i = 0, 1, 2, \ldots q-2$, das Ergebniss aber auch für $i = q-1$; denn diesfalls folgt unmittelbar aus §. 7, 1, dass die durch R_i, daher die durch R_0 gehenden gemeinsamen Leiträume L_q ein lineares Büschel bilden. Es gibt also in R_n, was das Durchgehen gemeinsamer selbstentsprechender Räume betrifft, $q+1$ Arten von Punkten, wovon die singulären eine ausmachen; die regulären nennen wir 1., 2.,... q^{ter} Art, je nachdem jenes Verfahren nach dem 1., 2.,... q^{ten} Schritt abbricht.

Nehmen wir $q+1$ unabhängige Gerade $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \ldots C^{(q+1)}$ in R_n an und ordnen jeder $C_1^{(i)}$ den durch alle übrigen bestimmten Raum $C_{n-2}^{(i)}$ zu, so kann diese Zuordnung in einem Nullsystem auftreten. Denn die Bedingung, an welche je zwei Paare der $n-1$ Paare des Satzes $(B, 7)$ (cf. §. 6) gebunden sind, ist hier erfüllt. Da aber ein Nullsystem durch $q+1$ Paare C_1, C_{n-2} noch nicht fixirt ist, so gibt es verschiedene Nullsysteme, welche die obige Zuordnung gemeinsam haben. Für zwei $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ derselben sind also die angenommenen $q+1$ Geraden die singulären Theilräume von $\mathfrak{S}_n$; ausser diesen kommen nämlich nach §. 10, 9 keine singulären Punkte vor.

Einen Verbindungsraum von irgend welchen k der $q+1$ Geraden bezeichnen wir mit $V(k)$; er hat die Dimension $2k-1$; die $V(q)$ sind also mit den C_{n-2} identisch. Einem R_{k-1}, welcher je einen Punkt von k der Geraden verbindet, und welcher nach §. 10, 11 gemeinsamer Leitraum ist, entspricht in beiden Systemen sein Verbindungsraum mit dem durch die übrigen Geraden definirten $V(q+1-k)$. Nimmt man auf jeder Geraden je einen Punkt, so ist der Verbindungsraum selbstentsprechender gemeinsamer Leitraum; dass es ausser diesen keine andern gibt, wird aus 7) dieses Paragraphen folgen. Also:

3. Das System $\Psi_{n,q,2}$ besteht aus allen alle $q+1$ singulären Theilgeraden schneidenden Räumen der Dimension q.

Durch jeden Punkt von R_n, der in keinem $V(q)$ liegt, geht nach §. 10, 6 ein einziger gemeinsamer Leitraum L_q; alle Punkte des R_n, mit Ausnahme der in den $V(q)$, liegenden sind also regulär q^{ter} Art. Durch jeden Punkt eines $V(q)$, der aber nicht zugleich in einem niedrigeren V liegt, lässt sich ein einziger gemeinsamer im betreffenden $V(q)$ enthaltener Leitraum L_{q-1} legen, welchem sein Verbindungsraum mit der in $V(q)$ nicht enthaltenen Geraden C_1 entspricht, jeder solche Punkt ist also regulär von der $q-1$ Art. Überhaupt:

4. Jeder in einem $V(k)$, jedoch keinem niedrigeren V gelegene Punkt ist regulär von der $k-1$ten Art. ($k = 2, 3, . q$).

$V(k)$ wird nämlich nach §. 7, III) von jedem System in einem regulären Complex geschnitten. Die k Theilgeraden in $V(k)$ sind also auch das vollständige System der singulären Punkte des durch die beiden Schnittcomplexe Π und Π' definirten Strahlensystems. Durch einen Punkt P_0 des Satzes 4) geht also ein einziger gemeinsamer Leitraum L_{k-1} von Π und Π'; diesem entspricht sein Verbindungsraum mit den $q+1-k$ übrigen Geraden, welche selbst einen $V'(q+1-k)$ definiren. Um die durch L_{k-1} gehenden gemeinsamen Leiträume L_q von $\mathfrak{N}_n$ und $\mathfrak{N}'_n$ zu finden, können wir als die Complexe Γ und Γ' des Absatzes zwischen 1) und 2) die in $V'(q+1-k)$ enthaltenen Schnittcomplexe nehmen, deren System Λ selbstentsprechender gemeinsamer Leiträume (der Dimension $q-k$) bekannt ist, da es durch die $q+1-k$ singulären Theilgeraden vollkommen bestimmt ist.

Die sämmtlichen durch L_{k-1} gehenden gemeinsamen L_q erhalten wir durch Verbindung von L_{k-1} mit allen Individuen des Systems Λ; sie bilden also nach 1) eine $q-k+1$stufige Mannigfaltigkeit. Andere als diese L_q können durch P_0 nicht gehen, weil jeder L_q die k Geraden, welche $V(k)$ definiren, in je einem Punkte schneiden muss, den $V(k)$ selbst also in einem R_{k-1}, welcher jener einzige durch P_0 gehende L_{k-1} sein muss. Daraus folgt 4).

Dieser Fall, dass $\mathfrak{S}_n$ aus $q+1$ singulären Theilgeraden, von denen keine Leitstrahl ist, besteht, oder, wie wir kürzer sagen, dieser »Fall von $\mathfrak{S}_n$« hätte auch erhalten werden können, indem wir von zwei Complexen nach §. 9 ein Paar H_1 und H_{n-2} entsprechender Elemente gemeinsam angenommen hätten, ferner die beiden Schnittcomplexe Γ_{n-2} und Γ'_{n-2} in H_{n-2} so, dass ihr entsprechendes $\mathfrak{S}_{n-2}$ aus q Theilgeraden besteht. Der Fall ist also auf denselben Fall von $\mathfrak{S}_{n-2}, \ldots$ schliesslich auf den Fall zurückgeführt, dass ein lineares Strahlensystem in R_3 reelle getrennte Brennlinien besitzt. Überhaupt folgt aus §. 10, 13:

5. Alle Fälle von $\mathfrak{S}_n$, in denen (mindestens) ein Nicht-Leitstrahl H_1 als singuläre Theilgerade vorkommt, erhält man, wenn man H_1 mit den Systemen $\mathfrak{S}_{n-2}$ aller Fälle von $\mathfrak{S}_{n-2}$ überhaupt combinirt.

Es lässt sich auch der allgemeinere Satz beweisen:

6. Alle Fälle von $\mathfrak{S}_n$, in denen unter den singulären Theilräumen ein Raum S_k ohne Incidenz vorkommt, sind bekannt, wenn alle Fälle von $\mathfrak{S}_{n-k-1}$ überhaupt bekannt sind.

Nehmen wir nämlich von einem Complex Ψ_n zwei entsprechende Räume H_k und H_{n-k-1} ohne Incidenz an, sowie die beiden Schnittcomplexe Θ_k und Θ_{n-k-1} in diesen Räumen, so lässt sich, ähnlich wie in §. 9, zeigen, dass dadurch für jeden P_{n-1} in R_n eine Gerade bestimmt ist, auf welcher sein Nullpunkt liegen muss: P_{n-1} schneide die beiden Räume beziehungsweise in D_{k-1} und E_{n-k-2}; dann ist die Verbindungslinie G_1 des Nullpunktes D_0 von D_{k-1} bezüglich Θ_k und des Nullpunktes von E_{n-k-2} bezüglich Θ_{n-k-1} jene Gerade. Dem Verbindungsraum V von D_{k-1} und E_{n-k-2} entspricht nämlich nach §. 7, III) die Gerade G_1. Da P_{n-1} durch V geht, muss auf ihr sein Nullpunkt liegen. Enthält jedoch P_{n-1} einen der Räume H, so ist sein Nullpunkt der Nullpunkt des Schnittes mit dem andern Raum.

Da durch diese Annahmen ein Nullsystem noch nicht fixirt ist, so gibt es verschiedene Nullsysteme, welche obige Annahmen gemeinsam haben; für je zwei derselben machen (§. 7, III) die beiden Räume H_k und H_{n-k-1} das System $\mathfrak{S}_n$ aus. Sind jedoch in zwei Nullsystemen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ nur die Zuordnung H_k und H_{n-k-1} und die Schnittcomplexe in einem (H_k) dieser Räume identisch, so kommen wir auf den Satz 6). Dann gehört nämlich H_k zu $\mathfrak{S}_n$. Wenn Θ_{n-k-1} und Θ'_{n-k-1} die beiden Schnittcomplexe in H_{n-k-1} sind, so gehört ausserdem zu $\mathfrak{S}_n$ nach §. 10, 13 nur noch das zu diesen beiden Complexen gehörige $\mathfrak{S}_{n-k-1}$. Kommt nun in $\mathfrak{S}_{n-k-1}$ ein Nicht-Leitstrahl als Theilraum vor, so hätten wir diesen Fall schon aus 5) erhalten können; wenn aber nicht, so kommen wir auf neue Fälle.

Der Fall, dass $\mathfrak{S}_n$ aus $q+1$ oder weniger Geraden besteht, von denen keine Leitstrahl ist, wird auch in R_n als regulärer Fall zu betrachten sein, alle übrigen als Specialfälle, und als sehr specielle Fälle diejenigen, wo $\mathfrak{S}_n$ aus zwei Theilräumen besteht, deren Dimension sich zu $n-1$ ergänzt. Dann kann (wenn diese Summe aus 1 und $n-2$ entsteht) die Dimension der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}_n$ die Maximalzahl $n-2$ erreichen, während $\mathfrak{S}_n$ im Allgemeinen die einfache Mannigfaltigkeit der (höchstens) $q+1$ Geraden ist. Wenn beide Schnittcomplexe Θ_k und Θ_{n-k-1} identisch sind, ist jeder Verbindungsraum eines selbstentsprechenden Raumes von Θ_k und eines ebensolchen von Θ_{n-k-1} gemeinsamer selbstentsprechender Raum L_q von $\mathfrak{N}_n$ und $\mathfrak{N}'_n$. Die Dimension der Mannigfaltigkeit der L_q kann also diesfalls nach §. 7, 2 auf

$$\frac{1}{8}\left[(k+1)(k+3)+(n-k)(n-k+2)\right],$$

also für $k=1$ auf $\frac{1}{8}(n^2+7)$ anwachsen, während sie im Allgemeinen bloss $\frac{1}{2}(n+1)$ war. Ebenso wie im Fall III von R_5 (§. 11 gegen Schluss), kann man schliessen, dass hier alle Punkte ausserhalb der beiden singulären Theilräume regulär erster Art sind.

In jedem gemeinsamen selbstentsprechenden Raume L_q zweier Nullsysteme ist nach §. 10, 4 eine Collineation definirt, und es lässt sich zeigen:

7 In einem System Σ sich nicht schneidender gemeinsamer selbstentsprechender Räume hat die Collineation dieselbe Charakteristik.

Es sei L_q ein Raum des Systems Σ. Wir fassen das Bündel (L_q, R_n) auf; jedem selbstentsprechenden Punkte L_0 der Collineation in L_q entspricht ein gemeinsamer Nullraum L_{n-1} jenes Bündels, welcher mit irgend einem anderen Raume M_q von Σ einen M_{q-1} (aber nicht mehr) gemein hat. Dem letzteren entspricht in beiden Systemen der Verbindungsraum von M_q mit L_0. M_{q-1} ist also selbstentsprechender Raum der Collineation in M_q. Und umgekehrt muss jeder solche M_{q-1} aus einem singulären Punkte L_0 von L_q erhalten werden können. Denn sein gemeinsam entsprechender M_{q+1} schneidet L_q (nur) in einem Punkte, welchem in beiden Systemen der Verbindungsraum (L_q, M_{q-1}) entspricht. Das System der selbstentsprechenden M_{q-1} der Collineation in M_q ist also nach den Grundgesetzen der Reciprocität dual zum System der selbstentsprechenden Punkte der Collineation in L_q. Alle Räume M_q, M'_q, M''_q,. des Systems Σ ausser L_q haben also Systeme in der Collineation selbstentsprechender Räume $q-1$ter Dimension mit unter einander gleicher Charakteristik. Ebenso hätte man, wenn man von den selbstentsprechenden Räumen L_{q-1} der Collineation in L_q ausgegangen wäre, erhalten: Alle Räume M_q, M'_q,... von Σ ausser L_q haben Systeme selbstentsprechender Punkte mit gleicher Charakteristik. Wenn wir nun M_q an Stelle von L_q setzen, so folgt, dass auch die Räume L_q, M'_q, M''_q,. Collineationen mit gleicher Charakteristik haben; daher hat auch L_q gleiche Charakteristik mit allen übrigen. Zugleich folgt, dass das System selbstentsprechender Elemente in sich dual ist.

Aus 7) können wir nun den Beweis entnehmen, dass das System Λ sämmtlicher, alle $q+1$ singulären Theilgeraden (cf. Satz 3) schneidenden Räume L_q auch das vollständige System $\Psi_{n,q,2}$ ist. Wäre nämlich noch ein gemeinsamer selbstentsprechender M_q vorhanden, der nicht zu Λ gehört, so müsste er, wenn kein Widerspruch mit 7) entstehen soll, sämmtliche Räume des Systems Λ schneiden. Dies ist unmöglich, sobald gezeigt ist, dass die durch sämmtliche Punkte von M_q gehenden Räume von Λ höchstens eine q-stufige Mannigfaltigkeit bilden. Fassen wir zunächst die Punkte von M_q auf, die in seinen Schnitträumen mit den $V(k)$ liegen: Ein solcher Schnittraum S_k kann höchstens die Dimension $k-1$ haben, da $V(k)$ von Ψ_n und Ψ'_n in zwei regulären Complexen geschnitten wird, und schon in einem solchen keine Räume höherer Dimension vorkommen, deren sämmtliche Elemente Leitelemente sind. Nach 4) geht nun durch jeden Punkt von $V(k)$ eine $\frac{n-2(k-1)-1}{2}$-stufige Mannigfaltigkeit von Λ (cf. Ableitung von 2), durch sämmtliche Punkte von S_k also höchstens eine q-stufige. Auch durch die ausserhalb jedes $V(q)$ gelegenen Punkte von M_q geht eine im Ganzen höchstens q-stufige Mannigfaltigkeit aus Λ; denn durch jeden einzelnen Punkt geht ein einziger Raum von Λ. M_q kann also nicht sämmtliche Räume des $q+1$-stufigen Systems Λ schneiden.

Wenn das System $\Psi'_{n,q,2}$ so beschaffen ist, dass sich zu je zwei beliebigen Elementen desselben ein drittes finden lässt, welches keines der beiden ersten schneidet, so gilt der Satz ausnahmslos: »Die Collineation in allen Elementen von $\Psi'_{n,q,2}$ hat dieselbe Charakteristik«.[1] Wir haben jedoch schon bei R_5 gesehen, dass er nicht gilt in jenen Fällen, in denen unter den singulären Theilräumen von $\mathfrak{S}_5$ Leitelemente vorkommen (Fälle II, IV, V; §. 11).

Wenn unter den singulären Theilräumen von $\mathfrak{S}_5$ solche mit Incidenz vorkommen, so lässt sich die Begrenzung für die Summe ihrer Dimensionen, welche in §. 10, 9 angegeben wurde, noch weiter herabdrücken: Hat ein singulärer Theilraum S_{k_λ} den Incidenzraum I_{ω_λ}, so müssen (nach §. 10, 8) alle übrigen Theilräume von $\mathfrak{S}_n$, daher auch deren Verbindungsraum V in $S_{n-k_\lambda-1}$ liegen, ohne dass V und I_{ω_λ} sich schneiden können (wegen §. 10, 6). V kann also höchstens die Dimension $d = n-k_\lambda-1-(\omega_\lambda+1)$ haben, und für die übrigen in V enthaltenen singulären Theilräume muss die Formel §. 10, 9 noch gelten, wenn man rechts d statt n setzt. Kommt in V noch ein singulärer Theilraum mit einer Incidenz vor, so lässt sich dieser Schluss wiederholen: Jeder S_{k_λ} mit der Incidenz ω_λ drückt die mögliche Dimensionssumme der singulären Theilräume um $\omega+1$ herab. So gelangt man an Stelle der Begrenzung von §. 10, 9 zur weitergehenden Relation:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{p} \omega_\lambda + 2p - 1 \leqq n,$$

in welcher für die Räume ohne Incidenz $\omega = -1$ zu setzen ist, und welche, wenn kein Raum eine Incidenz hat, in die frühere

---

[1] Über die Collineation in R_q cf. Segre, Sulla theoria e sulla classif. delle omografie etc. (Mem. della R. Acc. dei Lincei, Ser. 3a, XIX.) — Veronese, Math. Ann. XIX, p. 182. — Bertini, Costruzione delle omografie etc. (Rendiconti del R. Ist. Lomb. XX, p. 650.)

übergeht. Die Dimension eines Leitraums zählt also sozusagen doppelt im Vergleich zu einem Theilraum ohne Incidenz gleicher Dimension.

In jedem R_i, welchem in beiden Nullsystemen derselbe R_{n-i-1} entspricht, ist eine Collineation dadurch definirt, dass das Feld R_i auf das Bündel R_{n-i-1} zweimal reciprok bezogen ist.

§. 13. Das Büschel linearer Complexe in R_n.

Wir nehmen in R_n zwei lineare Complexe Ψ', Ψ'' an, deren gemeinsames Strahlensystem Φ heisse. P_0 sei ein regulärer Punkt, P'_{n-1} und P''_{n-1} seine beiden Nullräume, Q_{n-2} deren Schnittraum. Wir wollen alle linearen Complexe Ψ aufsuchen, welche das System Φ enthalten. Da das Bündel (P_0, Q_{n-2}) der Ort der durch P_0 gehenden Strahlen von Φ ist, so muss der Nullraum von P_0 für jeden solchen Ψ durch Q_{n-2} gehen. Wir nehmen einen Raum P_{n-1} des Büschels (Q_{n-2}, R_n), welcher von P'_{n-1} und P''_{n-1} verschieden ist, und versuchen einen linearen Complex Ψ zu construiren, welcher Φ enthält, und in welchem P_0 und P_{n-1} einander als Nullpunkt und Nullraum zugeordnet sind. Betrachten wir einen Strahl G_1 des Bündels (P_0, P_{n-1}), der nicht in Q_{n-2} liegt, also weder Ψ' noch Ψ'' angehört. Falls auf demselben ein singulärer Punkt S_0 liegt, muss dessen für Ψ' und Ψ'' gemeinsamer Nullraum S_{n-1}, auch für Ψ Nullraum von S_0 sein. Aber auch G_1, welcher in S_{n-1} nicht enthalten ist, müsste im zu findenden Ψ liegen. Ein regulärer Complex mit den verlangten Eigenschaften ist also unmöglich, sobald in P_{n-1} ausserhalb Q_{n-2} ein singulärer Punkt vorkommt. Es lässt sich jedoch zeigen, dass dies im Allgemeinen nicht stattfindet. Wenn S_1 eine Gerade in R_n voll singulärer Punkte wäre, welche Q_{n-2} nicht schneidet, so hätte die Ebene $(P_0, S_1) \equiv E_2$ mit Q_{n-2} nur den Punkt P_0 gemein. Es kann aber auf den Schnittlinien (E_2, P'_{n-1}) und (E_2, P''_{n-1}), weil sie nur je einem der beiden Φ definirenden Complexe angehören, kein singulärer Punkt liegen (§. 10, 2). Also muss jede Gerade S_1, deren sämmtliche Punkte singulär sind, mit Q_{n-2} (mindestens) einen Punkt gemein haben. Daraus folgt:

1. Jeder Theilraum S_k des Systems $\mathfrak{S}_n$ der singulären Punkte von Φ schneidet Q_{n-2} (wenn er

nicht ganz darin liegt) in einem S_{k-1}, lässt sich daher mit Q_{n-2} durch einen R_{n-1} verbinden.

In Verbindung mit §. 10, 12) folgt hieraus:

2. Nur eine endliche Anzahl (höchstens $q+1 = \frac{n+1}{2}$) Räume P_{n-1} des Büschels (Q_{n-2}, R_n) enthalten ausserhalb Q_{n-2} singuläre Punkte.

Dies gilt für jeden einem beliebigen regulären Punkt zugeordneten Raum Q_{n-2}. Wir betrachten zunächst den regulären Fall, dass P_{n-1} ausserhalb Q_{n-2} keinen singulären Punkt enthält.

Die Räume, welche den Punkten von G_1 bezüglich Φ zugeordnet sind, bilden (§. 10, 1a) eine Raumschaar $\mathfrak{R}_{n,\, n-2}$. Jedem Punkt G_0 von G_1 ist der Verbindungsraum des durch ihn gehenden Raumes der Schaar mit G_1 als Nullraum in Ψ zuzuordnen. Die den Punkten von G_1 so zugeordneten Nullräume bilden ein lineares Büschel (§. 5, 4), weil man die Zuordnung auch als Projection der Raumschaar aus irgend einem Punkt von G_1 auffassen kann. Hiemit hat jeder Punkt von P_{n-1} ausserhalb Q_{n-2} seinen Nullraum erhalten, weil sich jeder solche mit P_0 durch eine den Bedingungen genügende Gerade G_1 verbinden lässt.

Die Gesammtheit der durch alle diese Punkte gehenden, in ihren zugeordneten Räumen liegenden Strahlen nennen wir Ω. Das System Ω enthält seiner Entstehungsweise nach mindestens alle jene Strahlen von Φ, deren Schnittpunkt mit P_{n-1} ausserhalb Q_{n-2} liegt und auch jene, welche ganz in P_{n-1}, aber nicht in Q_{n-2} liegen. Wir wollen jetzt alle Punkte von P_{n-1} aufsuchen, welche einen Strahl von Ω durch einen beliebig ausserhalb P_{n-1} angenommenen festen Punkt R_0 schicken: Wir verbinden R_0 mit P_0 durch die Gerade H_1; es liege auf H_1 zunächst kein singulärer Punkt. Dann entspricht der Punktreihe H_1 bezüglich Φ nach §. 10, 1a) eine Raumschaar $\mathfrak{R}$; P_{n-1} enthält einen Raum Q_{n-2} derselben, wird daher (§. 5, 3) von den übrigen Räumen der Schaar $\mathfrak{R}$ in einem linearen Büschel $\mathfrak{B}$ von Q_{n-3} geschnitten, welches den in P_{n-1} liegenden Leitraum Q'_{n-2} der Schaar ausfüllt. Q'_{n-2} geht nicht durch P_0, weil H_1 in keinem Raum der Schaar $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Jeder Punkt T_0 von Q'_{n-2} (ausserhalb Q_{n-2}) hat, weil durch ihn ein Raum jenes linearen Büschels geht, die Eigenschaft, dass es einen Punkt auf H_1 gibt, dessen bezüglich Φ zugeordneter Raum H_{n-2} durch T_0 geht. Daher schneidet auch der dem T_0 in Φ zugeordnete Raum die H_1, und der in Ψ vorher zugeordnete enthält als Verbindungsraum mit P_0 die ganze Gerade H_1. T_0R_0 gehört also zu Ω. Die Punkte von Q'_{n-2} sind also jene in P_{n-1}, welche einen Strahl von Ω durch R_0 senden. Alle Strahlen von Ω, welche durch R_0 gehen, sind im Verbindungsraum $(R_0, Q'_{n-2}) \equiv R_{n-1}$ enthalten. Der Punktreihe H_1 ist hiemit durch Ω das lineare Büschel von Räumen zugeordnet, welches durch ihre Verbindung mit Q'_{n-2} entsteht. Es liege jetzt auf H_1 ein singulärer Punkt S_0 (mehr als einer kann nach §. 10, 1, 2 nicht auf H_1 liegen) mit dem gemeinsamen Nullraum S_{n-1}, welcher P_{n-1} in S_{n-2} schneide. Alle Punkte von S_{n-2} (ausserhalb Q_{n-2}) senden Strahlen von Ω durch R_0, und keine anderen in P_{n-1}; denn die Räume H_{n-2}, welche diesfalls der Punktreihe H_1 bezüglich Φ zugeordnet sind, bilden (§. 10, 1 b) ein lineares Büschel, dessen Träger im Schnitt von Q_{n-2} und S_{n-1}, also ganz in S_{n-2} liegt. Alle Strahlen von Ω durch R_0 liegen daher im Verbindungsraum (R_0, S_{n-2}). Jedem Punkte R_0 von R_n ausserhalb Q_{n-2} ist also durch Ω ein durch ihn gehender Raum R_{n-1} zugeordnet. Indem wir zum System Ω überhaupt alle Strahlen jedes solchen Bündels (R_0, R_{n-1}) hinzunehmen, erweitern wir dasselbe zum System Ω'; es kommen nämlich jene Strahlen neu hinzu, welche P_{n-1} innerhalb Q_{n-2} schneiden. Von den durch R_0 gehenden Strahlen von Φ enthielt schon Ω alle, welche P_{n-1} ausserhalb Q_{n-2} schneiden; da durch diese das ganze Bündel (R_0, R_{n-2}) derselben vollständig bestimmt ist, liegt es in R_{n-1}, und Ω' enthält daher mindestens alle Strahlen von Φ, welche nicht ganz in Q_{n-2} liegen. Schliesslich wird durch Ω' auch jedem Punkte U_0 von Q_{n-2} ein Raum U_{n-1} zugeordnet. Ein Punkt R_0 schickt die Verbindungsstrahlen mit dem Raum (Q_{n-2}, Q'_{n-2}) durch Q_{n-2}. Beschreibt R_0 die Punktreihe P_0R_0, so beschreibt R_{n-1} das Büschel (Q'_{n-2}, R_n). Wenn also e i n Punkt der Reihe P_0R_0 (ausser P_0) einen Strahl durch U_0 schickt, so thuen es alle Punkte der Reihe. Wenn daher E_2 eine beliebige Ebene durch

U_0P_0 ist, die nicht in Q_{n-2} liegt, so gehört vom Büschel (U_0, E_2) entweder einer oder alle Strahlen zu Ω'. Die durch U_0 gehenden Strahlen von Ω' füllen also jedenfalls einen linearen Raum U_k (ausgenommen dessen Schnittraum mit Q_{n-2}), welcher den dem U_0 bezüglich Φ zugeordneten U_{n-2} enthält, weil die Strahlen des Bündels (U_0, U_{n-2}) zu Ω' gehören (ausgenommen die in Q_{n-2} liegenden). Ausserdem gehen durch U_0 Strahlen von Ω', welche nicht zu Φ gehören; also $k = n-1$.

Wir vervollständigen endlich das System Ω' zum System Ω'', indem wir alle Strahlen der Bündel (U_0, U_{n-1}) aufnehmen (es kommen neu hinzu die in Q_{n-2} liegenden). Schon Ω' enthielt alle Strahlen des Bündels (U_0, U_{n-2}) ausserhalb Q_{n-2}; da durch diese das Bündel vollkommen bestimmt ist, liegt es in U_{n-1}, und Ω'' enthält daher alle Strahlen von Φ. Durch Ω'' wird auch jedem Punkt R_0 von R_n ein durch ihn gehender Raum R_{n-1} zugeordnet; Ω'' ist also sicher der gesuchte Complex Ψ, sobald jene Zuordnung überhaupt eine Reciprocität ist. Hiezu genügt es (nach §. 5, Mitte) nachzuweisen, dass den Punkten einer Geraden R_1 die Räume eines Büschels (R_{n-2}, R_n) zugeordnet sind. R_1 sei zunächst kein Strahl von Φ und werde mit P_0 durch die Ebene E_2 verbunden; in dieser liege der Strahl L_1 von Φ, welcher P_{n-1} in D_0 schneide. Das ganze Büschel (D_0, E_2) gehört zu Ω'', jedoch nur ein Strahl desselben zu Φ. Wenn also R_0 irgend ein Punkt von R_1 ist, liegt D_0 nicht im K_{n-2}, welches dem Punkt R_0 bezüglich Φ zugeordnet ist. R_{n-1} wird daher durch Verbindung von K_{n-2} mit D_0 gefunden, da D_0 einen Strahl von Ω'' durch R_0 schickt. Die den Punkten R_0 von R_1 zugeordneten Räume R_{n-1} werden also auch durch Projection der mit der Geraden R_1 verbundenen Raumschaar $\mathfrak{R}_{n, n-2}$ aus D_0 erhalten, welcher Punkt selbst in einem Raum der Schaar liegt, nämlich demjenigen, welcher dem Schnittpunkt (L_1, R_1) entspricht. Die R_{n-1} bilden mithin nach §. 5, 4) ein lineares Büschel. Wenn D_0 mit dem Schnittpunkt (R_1, P_{n-1}) zusammenfällt, also R_1 zu Ω'' gehört, so ist R_1 in allen Räumen R_{n-1}, daher im Träger des Büschels enthalten. Wir haben hiebei den regulären Fall im Auge gehabt; wenn jedoch in E_2 ein ganzes Büschel von Φ liegt (dessen Träger dann nicht auf R_1 liegen kann, zufolge der Voraussetzung, dass R_1 kein Strahl von Φ

sei), so kann man einen beliebigen Strahl desselben als L_1 und dessen Durchstosspunkt mit P_{n-1} als D_0 nehmen. Wenn auf R_1 ein singulärer Punkt liegt, ist der Beweis noch einfacher, indem dann die Schaar von R_{n-2} in einen Büschel ausartet, der aus D_0 durch einen Büschel von R_{n-1} projicirt wird. Liegt endlich R_1 in P_{n-1}, so entsteht die Gesammtheit der seinen Punkten entsprechenden R_{n-1} durch Projection der mit R_1 verbundenen Raumschaar $\mathfrak{R}_{n,\,n-2}$ aus P_0, bildet daher ebenfalls ein lineares Büschel, da P_0 selbst in einem Raume der Schaar liegt, und zwar in demjenigen, welcher zum Schnittpunkt (Q_{n-2}, R_1) gehört.

Es gehöre nun R_1 zu Φ. In einer Ebene E_2 liegt im Allgemeinen nur ein Strahl von Φ, nämlich der Verbindungsstrahl der Centra der Strahlbüschel von Ψ' und Ψ'', welche nach §. 7, 4 u. f. in E_2 liegen. Wir legen also durch R_1 eine Ebene E_2, in welcher R_1 der einzige Strahl von Φ ist. Allen übrigen geraden Punktreihen von E_2 entsprechen lineare Raumbüschel, deren Träger alle denjenigen E_{n-3} enthalten, welcher schon durch drei (ausserhalb R_1 liegende) Punkte von E_2 bestimmt ist; es gilt nämlich ganz dasselbe, wie für den E_{n-3} und E_2 des §. 5 (Mitte); auch der irgend einem Punkte $R_0^{(1)}$ von R_1 zugeordnete Raum muss, da man $R_0^{(1)}$ als Punkt einer von R_1 verschiedenen Reihe betrachten kann, durch E_{n-3} gehen. Zwei solche Punkte $R_0^{(1)} R_0^{(2)}$ bestimmen durch ihre entsprechenden Räume einen R_{n-2}, durch welchen auch die Räume aller übrigen Punkte von R_1 gehen müssen; wäre es nämlich mit einem $R_{n-1}^{(3)}$ welchem $R_0^{(3)}$ auf R_1 entspreche, nicht der Fall, so wäre durch $R_{n-1}^{(1)} R_{n-1}^{(3)}$ ein von R_{n-2} verschiedener R'_{n-2} bestimmt, welchem eine bestimmte durch $R_0^{(1)}$ gehende von R_1 verschiedene Punktreihe in E_2 entspräche, auf welcher also $R_0^{(3)}$ nicht liegen könnte.

Ω'' ist somit der gesuchte lineare Complex Ψ. Und da das Verfahren der Gewinnung von Ω'' eindeutig war, folgt:

3. Wenn zwei reguläre lineare Complexe gegeben sind und Q_{n-2} der Schnittraum der beiden Nullräume eines regulären Punktes P_0 ist, so entspricht jedem Raum P_{n-1} des Büschels (Q_{n-2}, R_n), eine endliche Anzahl (höchstens $q+1$) ausgenommen, ein regulärer linearer Complex, welcher das gemeinsame Strahlensystem beider gegebener Complexe enthält, und in

welchem P_0 und P_{n-1} einander als Nullpunkt und Nullraum entsprechen.

Schliesslich betrachten wir noch einen Raum P_{n-1} des Büschels Q_{n-2}, welcher einen singulären Theilraum S_k enthält, und suchen nach denselben Principien wie früher einen (jetzt singulären) Complex zu construiren, welcher Φ enthält. Auf jedem Verbindungsstrahl G_1 von P_0 mit einem Punkt S_0 von S_k ausserhalb Q_{n-2} ist S_0 der einzige singuläre Punkt. Die Räume, welche den Punkten von G_1 bezüglich Φ zugeordnet sind, bilden (§. 10, 1, *b*) ein lineares Büschel, dessen Träger R_{n-3} als Schnitt der Q_{n-1} von P_0 und des S_{n-1} von S_0 bestimmt ist, also in P_{n-1} liegt. In keinem Raum dieses Büschels liegt G_1 selbst, welcher Strahl auch in den Complex aufzunehmen ist. Jedem Punkt von G_1 ist also P_{n-1} als Nullraum zuzuordnen, mithin jedem Punkt des Verbindungsraumes $(P_0, S_k) \equiv V$ Wenn G_1 eine Gerade des Bündels (P_0, P_{n-1}) ausserhalb V ist und ausserhalb Q_{n-2}, so liegt auf ihr kein singulärer Punkt, und es gelten für sie genau dieselben Betrachtungen, wie im regulären Fall. Hiemit haben alle Punkte A_0 von P_{n-1} ausserhalb Q_{n-2} ihre zugeordneten Räume A_{n-1} erhalten. Die Gesammtheit der Strahlen der Bündel (A_0, A_{n-1}) nennen wir Θ. In das System Θ sind auch (cf. Anfang dieses Paragraphen) alle S_k schneidenden Strahlen aufzunehmen. Für eine Gerade H_1 des Bündels (P_0, R_n) ausserhalb P_{n-1} gilt dasselbe wie im regulären Falle, ob nun ein singulärer Punkt auf ihr liegt oder nicht. Den Punkten R_0 von R_n ist also, wie im regulären Fall, durch Θ ein linearer Raum zugeordnet, und wenn wir wie dort die analogen Ergänzungen vornehmen, um (*B*, 4) in §. 6 zu erfüllen, so ist Θ ein singulärer linearer Complex; es folgt nämlich die Eigenschaft *c)* in §. 8, 7) für Θ geradeso aus *a)* wie in §. 8, 3), und *d)* ergibt sich aus Betrachtung einer allgemeinen Geraden des Raumes, für welche dasselbe gilt wie für die R_1 des regulären Falles.

Dass Θ ein singulärer linearer Complex ist, wird durch folgenden Satz bestätigt:

4. Durch einen regulären und einen singulären Complex in R_n ist in derselben Weise wie in 3) ein Büschel regulärer linearer Complexe definirt, welches

nur eine endliche Anzahl (höchstens $q+1$) singuläre enthält (darunter natürlich den gegebenen).

Es sei Ψ_n der reguläre und Σ_n mit dem Axenraum J_τ der singuläre Complex, Z das System der den beiden gemeinsamen Strahlen. Die durch irgend einen Punkt des Raumes gehenden Strahlen von Z werden nach §. 8, 2) im Allgemeinen ebenfalls einen R_{n-2} ausfüllen, nur für einen singulären Punkt (dessen Definition ebenso lautet wie beim Strahlensystem zweier regulärer Complexe) einen R_{n-1}. Zu den singulären Punkten gehören jedenfalls alle von J_τ. Nach §. 8, 5) ist einer geraden Punktreihe G_1, welche J_τ nicht schneidet, auch bezüglich Σ_n ein lineares Büschel zugeordnet, mit dessen Träger G_1 entweder keinen oder alle Punkte gemein hat, wie hervorgeht, wenn man sich den Raum des Bestimmungscomplexes $\Gamma_{n-\tau-1}$ von Σ_n (§. 8) durch G_1 gelegt denkt. Der Begriff des Leitstrahls lässt sich daher auch bei singulären Complexen auf Gerade übertragen, welche den Axenraum nicht schneiden, überhaupt der Begriff der Incidenz und des Incidenzraumes auf Räume, welche den Axenraum nicht schneiden. Auf solche Gerade und Räume lassen sich daher die Beweise der Sätze 1) bis 5) in §. 10, auch wenn einer der Complexe singulär ist, wörtlich übertragen (cf. §. 8, insbesondere §. 8, 6), ebenso des Satzes §. 10, 7. Es kann nämlich nicht vorkommen, dass ein den Axenraum schneidender Raum zum System $\mathfrak{S}$ der singulären Punkte von Z gehört. Denn den Punkten einer schneidenden Geraden sind bezüglich Ψ_n lauter verschiedene, bezüglich Σ_n aber derselbe Raum zugeordnet. Beide Räume T_k und T_h des Satzes §. 10, 7 sind also solche, auf welche §. 10, 5) anwendbar ist, weil auch der Verbindungsraum T_{k+h} den Axenraum nicht schneiden kann; durch einen Punkt des Schnittraumes liessen sich nämlich Gerade legen, welche sowohl T_k, als T_h in je einem Punkte T_0, T'_0 schnitten; es ist aber unmöglich, dass sowohl T_0, als T'_0 auf der Geraden singulär sind, weil diesen beiden Punkten bezüglich Ψ_n verschiedene, bezüglich Σ_n derselbe Raum entspricht. Wenn S_0 ein singulärer Punkt von Z ausserhalb J_τ ist, welchem in beiden Complexen S_{n-1} zugeordnet sei, so liegt J_τ in S_{n-1}. Alle Strahlen des Bündels (S_0, R_n) ausserhalb S_{n-1} sind desshalb solche, auf welche sich §. 10, 1 anwenden lässt. Es gilt also §. 10, 8) auch für die singulären Punkte von Z ausserhalb J_τ. Daher:

5. Der Satz §. 10, 9) gilt auch für das Strahlensystem eines regulären und eines singulären Complexes.

Bei Übertragung des Beweises hat man nämlich von einem singulären Punkt $S_0^{(1)}$ ausserhalb J_τ auszugehen (ist kein solcher vorhanden, so ist nichts mehr zu beweisen) und auch als die folgenden Punkte $S_0^{(2)}$, $S_0^{(3)}, \ldots$ immer solche ausserhalb J_τ zu nehmen. Zu den so gefundenen singulären Theilräumen ist dann J_τ als letzter hinzuzufügen. J_τ kann keinen der Verbindungsräume U des dortigen Beweises schneiden, zunächst den $U^{(2)}$ nicht, aus demselben Grunde, wie bei Übertragung von §. 10, 7 für T_{k+h} angegeben; dann aber auch den $U^{(3)}$ nicht, u. s. w. Endlich lässt sich ein regulärer Punkt von Z wählen, welchem Q_{n-2} zugeordnet sei; dann gelten die Sätze 1) und 2) dieses Paragraphen ebenso wie für den Fall des Strahlensystems zweier regulärer Complexe; denn auch J_τ lässt sich mit Q_{n-2} durch einen P_{n-1} verbinden, nämlich den Nullraum des gewählten Punktes bezüglich Σ, in welchem beide liegen müssen. Hiemit sind von Z alle Eigenschaften nachgewiesen, welche zum Aufbau des Complexbüschels benützt wurden, woraus 4) folgt, und aus diesem:

6. Das gemeinsame Strahlensystem eines regulären und eines singulären Complexes kann auch erhalten werden als gemeinsames System zweier regulärer Complexe, ist also von den §. 10 und 12 betrachteten nicht verschieden.

Nimmt man statt Z das System zweier singulärer Complexe, deren Axenräume keinen Punkt gemein haben, so kommt man zum selben Ergebniss; jedoch werden uns die Sätze 4) und 6) genügen.

Es ist jetzt zu zeigen:

7 Ein nach 3) oder 4) bestimmtes Complexbüschel $\mathfrak{B}$ ist durch zwei andere seiner Complexe ebenso bestimmt wie durch die zwei ursprünglichen.

Es seien Ψ', Ψ'' die ursprünglichen wie anfangs dieses Paragraphen. Hätte man als Raum P_{n-1} des Büschels (Q_{n-2}, R_n) einen der Räume P'_{n-1} oder P''_{n-1} selbst gewählt, so hätte man, da das Verfahren der Bildung von Ψ eindeutig war, auf Ψ'

beziehungsweise Ψ'', zurückkommen müssen. Es seien Γ' und Γ'' zwei andere Complexe des Büschels $\mathfrak{B}$ mit dem gemeinsamen Strahlensystem Δ, in welchem Φ enthalten ist. Γ' und Γ'' bestimmen jedenfalls auch ein Complexbüschel $\mathfrak{B}'$, in welchem dem Raume P'_{n-1} des Büschels Q_{n-2} ein Complex Γ entspricht. Dieser muss, weil er Δ, mithin Φ enthält, mit Ψ' identisch sein. Ebenso muss der in $\mathfrak{B}'$ dem P''_{n-1} entsprechende Complex mit Ψ'' identisch sein. Ψ' und Ψ'' enthalten Δ; es ist also auch umgekehrt Δ in Φ enthalten, und daher beide identisch; somit sind auch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ identisch.

8. Wie ein Complexbüschel auf die Räume des Büschels (Q_{n-2}, R_n) abgebildet ist, so ist es auch dual auf eine gerade Punktreihe in jedem regulären R_{n-1}, d. h. dessen Nullpunkte bezüglich der beiden definirenden Complexe verschieden sind, abgebildet, nämlich auf die Verbindungslinie dieser Nullpunkte.

§. 14. Die Linearität der Mannigfaltigkeit der linearen Complexe in R_n.

Wählen wir in R_n einen (regulären oder singulären) Complex $\Gamma^{(0)}$ und einen regulären $\Gamma^{(1)}$, so bestimmen diese ein Complexbüschel $\mathfrak{B}$, welches auf die Verbindungslinie B_1 der Nullpunkte irgend eines regulären Raumes R_{n-1} abgebildet ist. Wählen wir einen dritten regulären Complex $\Gamma^{(2)}$, welcher $\mathfrak{B}$ nicht angehört, so bestimmt er mit j e d e m Complex des Büschels $\mathfrak{B}$ ein Complexbüschel $\mathfrak{B}^{(x)}$. Alle diese Büschel sind abgebildet auf alle Verbindungslinien aller Punkte von B_1 mit dem Nullpunkte N_0 des allgemeinen R_{n-1} bezüglich $\Gamma^{(2)}$, also auf eine Ebene E_2 in R_{n-1}. Die Gesammtheit der Complexe aller dieser Büschel nennen wir $\mathfrak{C}$; sämmtliche Complexe von $\mathfrak{C}$ sind auf sämmtliche Punkte von E_2 eindeutig abgebildet. In jedem $\mathfrak{B}^{(x)}$ liegt nur eine endliche Anzahl singulärer Complexe. Die in $\mathfrak{C}$ gelegenen singulären Complexe bilden daher nur eine einstufige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$; ihre Abbildung in E_2 heisse $\mathfrak{m}_1$. Wählen wir in zwei verschiedenen jener Büschel je einen Complex $\Gamma^{(x)}$ und $\Gamma^{(y)}$, bezüglich deren die Nullpunkte von R_{n-1} X_0 und Y_0 seien, so bestimmen $\Gamma^{(x)}$ und $\Gamma^{(y)}$, wenn nicht beide singulär sind, jedenfalls ein Complexbüschel, welches bezüglich R_{n-1} auf die Punktreihe $X_0 Y_0$ von E_2 abgebildet ist. $\mathfrak{C}$ ist also auf E_2 so abgebildet, dass jeder geraden Punktreihe in E_2, mindestens wenn sie nicht durch zwei Punkte, die beide $\mathfrak{m}_1$ angehören, bestimmt ist, ein Complexbüschel in $\mathfrak{C}$ entspricht und analog umgekehrt. Wenn nun $\mathfrak{m}_1$ keine gerade Linie enthält, so kann jede Punktreihe in E_2 durch zwei Punkte bestimmt gedacht werden, von denen mindestens einer ausserhalb $\mathfrak{m}_1$ liegt; es ist also $\mathfrak{C}$ auf E_2 collinear abgebildet (§. 5). Dies folgt aber auch, wenn $\mathfrak{m}_1$ gerade Linien enthält; da es nur eine endliche Anzahl sein kann, so entspricht ihnen ein Theil von $\mathfrak{M}_1$, dessen Elemente sich in die collineare Abbildung aller übrigen einfügen (cf. die Schlussweise von S. 289). Aus der collinearen Abbildung folgt, dass je zwei Complexe von $\mathfrak{C}$, ob regulär oder singulär, ein Complexbüschel von $\mathfrak{C}$ bestimmen; $\mathfrak{C}$ ist also eine lineare zweistufige Mannigfaltigkeit, ein »Complexbündel«.

1. Je drei Complexe von R_n, von denen höchstens einer singulär ist, und welche nicht demselben Büschel angehören, bestimmen ein Complexbündel.

Um endlich die Voraussetzung §. 1, 1 für die Gesammtheit $\mathfrak{M}$ der regulären und singulären Complexe von R_n vollständig nachzuweisen, dass nämlich je zwei beliebige Complexe von R_n ein Complexbüschel bestimmen, braucht man nur zu bemerken, dass sich je zwei beliebige Complexe $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ in ein solches Complexbündel $\mathfrak{C}$ bringen lassen. Wählen wir nämlich einen regulären Complex Γ, welcher mit $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ zwei verschiedene Complexbüschel bestimmt und nehmen in jedem derselben einen regulären Complex $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ an, so bestimmen Γ, $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ ein Complexbündel, welches $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ enthält. Also auch zwei singuläre und ein regulärer Complex bestimmen ein Complexbündel, welches durch drei reguläre Complexe bestimmt werden kann. Überhaupt ist schon in 1) ausgesprochen, dass auch der Satz §. 1, 2 für $\mathfrak{M}$ im Allgemeinen gilt; um zu beweisen, dass er ausnahmslos gilt, gehen wir (analog wie soeben) noch um eine Stufe weiter, nämlich zur Bildung dreifach unendlicher linearer Complexmannigfaltigkeiten der »Complexgebüsche«. Wählen wir nämlich ein Complexbündel und ausserhalb desselben einen regulären Complex Γ und einen allgemeinen R_{n-1}, so ist die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ sämmtlicher Complexe aller Büschel, welche Γ mit allen Complexen des Bündels verbinden, auf die sämmtlichen Punkte eines Raumes R_3 in R_{n-1} abgebildet, nämlich desjenigen, welcher die Ebene E_2, auf die das Bündel abgebildet ist, mit dem Nullpunkt von R_{n-1} bezüglich Γ verbindet. Diese Abbildung ist collinear; dies folgt durch dieselben Schlüsse, wie früher, und wie in den Beweisen des §. 1. Je drei beliebige, nicht demselben Büschel angehörige Complexe von $\mathfrak{G}$ bestimmen also ein Complexbündel,[1] also auch drei beliebige Complexe von R_n überhaupt, welche nicht im selben Büschel liegen, da je drei solche in einem linearen Complexgebüsch auftreten können. Wählen wir nämlich einen vierten (regulären) Complex, welcher mit den drei gegebenen drei verschiedene Büschel bestimmt, die auch nicht im selben Bündel liegen, und nehmen in jedem der Büschel einen regulären Complex an, so bestimmen die vier regulären Complexe ein lineares Gebüsch, in welchem auch die drei gegebenen enthalten sind. Es folgt also (§. 1 und 5):

2. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der linearen (regulären und singulären) Complexe in R_n $(n = 2q+1)$ ist selbst linear, und in ihr lassen sich Reciprocitäten aufstellen.

Die Dimension ε_n dieser Mannigfaltigkeit ist schon §. 9 angegeben.

---

[1] Wenn man den Satz des Herrn Klein, dass eine Mannigfaltigkeit M_{3+1} linear ist, wenn durch jedes ihrer Elemente mehr als zwei ihr ganz angehörige lineare Räume R_3 gehen (Math. Ann., Bd. 28, S. 547) in unserem Fall anwenden dürfte, so könnte man z. B. unter Zuziehung des nach §. 1 folgenden Satzes, dass jedes durch zwei Complexe von $\mathfrak{G}$ definirte Büschel ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, sofort schliessen, dass die durch vier reguläre Complexe nach dem Verfahren des §. 1 definirte dreifache Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ linear ist, weil durch jedes ihrer Elemente sogar unendlich viele lineare zweifache gehen, nämlich mindestens alle jene Complexbündel, welche durch das Element selbst und noch zwei reguläre Complexe von $\mathfrak{G}$ definirt sind (nach 1 des Textes). Allein beim Beweise dieses Satzes (cf. Segre, Math. Ann., Bd. 30, S. 308) wird die Voraussetzung gemacht, welche wir hier nicht machen können, dass die Mannigfaltigkeit, von welcher die Linearität zu beweisen ist, in einer mindestens um eins höheren linearen Mannigfaltigkeit enthalten ist. Falls jedoch der Satz des Herrn Klein unter allen Umständen richtig ist, kann natürlich der Beweis der Linearität von $\mathfrak{M}$ vereinfacht werden.

3. Die singulären Complexe in R_n bilden innerhalb $\mathfrak{M}$ eine $\varepsilon_n - 1$stufige Mannigfaltigkeit $q+1$ter Ordnung.

Zwei singuläre Complexe, deren Axenräume sich schneiden, bestimmen ein Büschel, welches nur singuläre Complexe enthält; ebenso besteht ein Bündel nur aus singulären Complexen, wenn die Axenräume dreier seiner singulären Complexe, welche keinem Büschel angehören, einen Punkt (oder mehr) gemein haben, u. s. w.

§. 15. Gewinnung linearer geometrischer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension.

Die linearen Complexe des Raumes bilden (§. 2) eine lineare fünffache Mannigfaltigkeit $M_5^{(1)}$, deren zweifache $M_2^{(1)}$ sich collinear auf die Ebene abbilden lassen. In $M_5^{(1)}$ lassen sich daher (§. 5) Reciprocitäten und Nullsysteme aufstellen. Die mit letzteren verbundenen linearen Complexe in $M_5^{(1)}$ bilden (§. 9) eine 14fache Mannigfaltigkeit $M_{14}^{(2)}$, welche (§. 14) linear ist, und deren zweifache $M_2^{(2)}$ sich collinear zunächst auf die $M_2^{(1)}$ abbilden lassen, dann aber auch, da sich diese auf die Ebene collinear abbilden lassen, auf die Ebene. In $M_{14}^{(2)}$ lassen sich daher Reciprocitäten aufstellen. Wählt man in $M_{14}^{(2)}$ eine lineare Mannigfaltigkeit ungerader Dimension, am günstigsten eine $M_{13}^{(2)}$, so lassen sich in dieser Nullsysteme und lineare Complexe aufstellen, die im Falle der günstigsten Wahl eine lineare 90fache Mannigfaltigkeit $M_{90}^{(3)}$ bilden, deren zweifache $M_2^{(3)}$ sich collinear zunächst auf die $M_2^{(2)}$, dann aber auch auf die $M_2^{(1)}$ und schliesslich auf die Ebene abbilden lassen. Es lassen sich daher in $M_{90}^{(3)}$ und allen $M_k^{(3)}$ $(k < 90)$ Reciprocitäten aufstellen u. s. w. Folgende Tabelle gibt nach §. 9 die Dimension der Mannigfaltigkeit der linearen Complexe in R_n für die ersten ungeraden Zahlen:

$n = 3$	5	7	9	11	13	15	...
$\varepsilon_n = 5$	14	27	44	65	90	119	

Wir nennen die Bildung der Mannigfaltigkeit $M_5^{(1)}$ der Complexe des Raumes den ersten »Schritt« des Verfahrens zur

Gewinnung linearer Mannigfaltigkeiten höherer Dimension, die Aufstellung der Mannigfaltigkeit $M_{14}^{(2)}$ der linearen Complexe in $M_5^{(1)}$ den zweiten Schritt, die Aufstellung der $M_{90}^{(3)}$ in irgend einer $M_{13}^{(2)}$ von $M_{14}^{(2)}$ den dritten Schritt, u. s. w. Wenn man beim λ^{ten} Schritt eine d_λ-fache lineare Mannigfaltigkeit gewonnen hat, so hat man, um in der Bildung höherer Mannigfaltigkeiten möglichst rasch weiter zu kommen, die nächste Complexbildung, wenn d_λ ungerade ist, in $M_{d_\lambda}^{(\lambda)}$ selbst, wenn gerade, in $M_{d_\lambda-1}^{(\lambda)}$ vorzunehmen. $d_{\lambda+1}$ erhielte man aus obiger (hinreichend weit geführten) Tabelle als diejenige Zahl der unteren Zeile, welche unter d_λ, beziehungsweise $d_\lambda - 1$ der oberen Reihe steht. Die Elemente von $M_k^{(2)}$ $(k \leqq 14)$ sind lineare Complexe, deren Strahlen Büschel gewöhnlicher linearer Complexe sind; solche mögen einfach iterirte Complexe heissen. Die Elemente von $M_k^{(3)}$ $(k \leqq 90)$, die »zweifach iterirten Complexe«, sind lineare Complexe in $M_{13}^{(2)}$, deren Strahlen Büschel einfach iterirter Complexe sind u. s. w. Wenn d_λ die Dimension der durch den λ^{ten} Schritt bei den günstigsten Annahmen nach diesem Verfahren gewinnbaren Mannigfaltigkeiten bezeichnet, ist also:

$$d_1 = 5, \quad d_2 = 14, \quad d_3 = 90, \quad d_4 = 4004, \quad d_5 = 8014005, \ldots$$

Wenn d_λ, welches immer eins der ε_{II} ist, ungerade ist, so ist

$$d_{\lambda+1} = \frac{d_\lambda - 1}{2}(d_\lambda + 2),$$

wenn gerade, so

$$d_{\lambda+1} = \frac{d_\lambda - 2}{2}(d_\lambda + 1).$$

Die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender d_λ wachsen sehr rasch. Selbst wenn immer der ungünstigere Fall einträte, dass d_λ gerade wäre, so hätte man als Verhältniss zweier aufeinanderfolgender Differenzen:

$$\frac{d_{\lambda+1} - d_\lambda}{d_\lambda - d_{\lambda-1}} = \frac{1}{2}(d_\lambda + d_{\lambda-1} - 1).$$

Nachdem man so in unserem Raume lineare Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension erhalten kann, deren zweifache lineare auf die Ebene collinear abbildbar sind, lässt sich die ganze synthetische Geometrie mehrdimensionaler Räume, soweit sie nur Geometrie der Lage ist, in diese Mannigfaltigkeiten übertragen. Namentlich lassen sich die Methoden des Projicirens und Schneidens Herrn Veronese's in diesen ebenso entwickeln, wie in dem nach Analogie unseres dreidimensionalen construirten n-dimensionalen Raum,[1] ohne jedoch dabei den festen

[1] Die Kreise einer Ebene ε bilden eine lineare dreidimensionale Mannigfaltigkeit (cf. Reye, Synth. Geom. der Kugeln etc.). Nachdem man sämmtliche Kreise eines Kreisbündels mit einem Kreise von ε ausserhalb des Bündels durch Büschel verbunden hat (was das Analogon der Construction des Raumes aus Ebene und Punkt ist), gibt es keinen Kreis in ε mehr, welcher nicht schon in der Gesammtheit jener Büschel enthalten wäre. Wollte man nun ausser dieser Gesammtheit noch einen Kreis annehmen, um (analog wie Herr Veronese einen vierdimensionalen Raum aus dem dreidimensionalen und einem Punkt »ausserhalb« desselben construirt, Fondamenti, p. 457) eine vierfache lineare Kreismannigfaltigkeit zu construiren, so wäre man schon auf dem Holzweg, weil ein Kreis ausser der Ebene mit einem der Ebene ε kein Kreisbüschel bestimmt. Man sieht an diesem Beispiel, an welchem wir die Analogie verfolgen konnten, weil wir Kreise ausserhalb ε noch thatsächlich besitzen, wie bedenklich schon vom geometrischen Standpunkt die Annahme und Verwerthung eines Punktes »ausserhalb unseres Raumes« ist, ganz abgesehen von erkenntnisstheoretischen Fragen, die hier nicht erörtert werden sollen. Soviel kann man allerdings gelten lassen, dass die nach der principiellen Auffassung Herrn Veronese's geführten Untersuchungen den Sinn haben: Wenn wir einen mehrdimensionalen Raum hätten, welcher die analogen Gesetze des dreidimensionalen befolgte, so würden in ihm diese und diese Sätze gelten. Dies zu wissen reicht aber nicht hin, sobald man aus den Untersuchungen der mehrdimensionalen Geometrie Sätze für unseren Raum ableiten will. Da muss man eben solche höheren linearen Mannigfaltigkeiten wirklich besitzen, welche das Substrat jener Untersuchungen bilden können, und welche dann, wie im Text angegeben, verwerthet werden. Ich will hiemit keine Angriffe gegen die synthetische Geometrie mehrdimensionaler Räume an und für sich richten, sondern suche im Gegentheil dazu beizutragen, den Werth derselben bei anderer Begründung oder Auslegung auch in den Augen solcher Mathematiker zu heben, welche sich bisher gegen sie durchaus ablehnend verhielten, indem ich mich den Bestrebungen jener Geometer anschliesse, welche, wie namentlich Herr Reye (cf. dessen Abhandlungen im Journ. für Math., Bde. 104, 106, 107), lineare Mannigfaltigkeiten unseres Raumes aufsuchen, denen man die Geometrie mehrdimensionaler Räume, soweit sie nicht metrische Relationen betrifft, interpretiren kann.

Boden der gewöhnlichen Geometrie zu verlassen. Hat man nun in einer solchen linearen Mannigfaltigkeit R_n gewisser Elemente irgend welche Ergebnisse gefunden, so kann man dieselben bis in die R_3 derselben Elemente projiciren und hierauf die collineare Abbildung von R_3 auf den Punktraum vornehmen (welche nach §. 5 möglich ist, weil sich R_2 auf die Ebene collinear abbilden lässt), wodurch man Sätze für den Punktraum gewinnt. Wenn man einmal weiss, dass dieses Verfahren durchführbar ist, kann man sich derselben schematischen Vorstellungen wie Veronese (Fondamenti, p. 612, Anm.) bedienen, als ob man in der Geometrie der Lage unmittelbar aus irgend einem Raum in den dreidimensionalen projiciren könnte. So kann man derartige, mitunter sehr abstracte Untersuchungen sogar durch eine gewisse räumliche Anschauung unterstützen.

Aber in beliebigen linearen Mannigfaltigkeiten von unendlich fernen Elementen oder metrischen Relationen zu reden, hat zunächst keinen Sinn. Wenn es jedoch z. B. in einer solchen M_n eine einzige irgendwie ausgezeichnete lineare Mannigfaltigkeit M_{n-1} gibt (was aber in den bisher untersuchten Beispielen nicht der Fall zu sein scheint), so kann dieselbe die Rolle der unendlich fernen Ebene unseres Raumes spielen, und man wird alle Sätze der n-dimensionalen Geometrie der Lage, in welchen unendlich ferne und parallele Elemente vorkommen, in diese Mannigfaltigkeit M_n übertragen können. Man wird auch das Anwendungsgebiet der Methoden des Projicirens und Schneidens auf die Geometrie des Punktraumes erweitern können, indem man auch Sätze über unendlich ferne und parallele Elemente erhalten kann. Für letzteren Zweck ist übrigens der Besitz einer solchen Mannigfaltigkeit M_n mit einer ausgezeichneten M_{n-1} nicht einmal nothwendig, indem man irgend einer willkürlich herausgegriffenen M_{n-1} von M_n eine ausgezeichnete Rolle zuweisen kann. Man kann dann, wenn man einen M_3 auf den Punktraum abbildet, die Collineation so aufstellen, dass der Schnitt des M_3 mit dem festgewählten M_{n-1} der unendlich fernen Ebene des Raumes entspricht.

Das Verfahren der iterirten Complexbildung lässt sich nicht nur vom Punktraum ausgehend beginnen, sondern von jeder linearen, mindestens dreistufigen Mannigfaltigkeit des Raumes, deren lineare zweistufige sich collinear auf die Ebene abbilden lassen. Wenn z. B. R_{15} die lineare Mannigfaltigkeit sämmtlicher räumlicher Systeme bedeutet, welche zu einem collinear sind, so bilden die linearen Complexe in R_{15}, deren Strahlen also die »Raumbüschel« Herrn Reye's sind, eine 119fache Mannigfaltigkeit (cf. Tabelle S. 295). Bildet man die einfach iterirten Complexe dieses Gebietes, so kommt man zu einer 7139 stufigen linearen Mannigfaltigkeit u. s. w.