Über die allgemeinsten abwickelbaren Räume, ein Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie

Dr. **Anton Puchta,**

ö. Professor an der k. k. Universität in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Februar 1892.)

Inhalt.

§. 1. Einleitung.

Ich werde im Folgenden immer rechtwinkelige Coordinaten voraussetzen, welche ich z. B. in einem Raume von vier Dimensionen mit $x_1 x_2 x_3 x_4$ bezeichne und zu denen noch wegen der Abkürzung der Schreibweise $x_5 = 1$ tritt. Sind dann a_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ constante, so scheidet die Gleichung 1):

$$\sum_{i=1}^{i=5} a_i x_i = 0 \tag{1}$$

aus dem vierdimensionalen Raume, weil $x_1 x_2 x_3$ beliebig gewählt werden können, einen dreidimensionalen Raum aus, ich bezeichen ihn als »linearen Raum«. Tritt zu 1) noch 2)

$$\sum_{i=1}^{i=5} b_i x_i = 0, \tag{2}$$

worin die b_i ebenfalls sämmtlich constant sind, so scheiden 1) und 2) zusammengenommen einen zweidimensionalen linearen Raum aus; drei Gleichungen der Form 1) einen eindimensionalen linearen Raum und vier Gleichungen der Form 1) einen Punkt. Im gewöhnlichen Raume, d. h. wenn die Dimension des ursprünglichen Raumes $n = 3$ ist, hat man die bekannten Begriffe von Ebene, Gerade und Punkt. Allgemein ist also klar, dass für einen Raum von n Dimensionen ein System von m Gleichungen der Form 3)

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} a_i x_i = 0, \tag{3}$$

worin nach Obigem $x_{n+1} = 1$ ist, einen linearen Raum der Dimension $n-m$ ausscheidet. Sind ferner $\lambda \mu \nu \ldots$ veränderliche Parameter, so stellt die Gleichung 4)

$$\sum_{i=1}^{i=5} (\lambda a_i + \mu b_i) x_i = 0 \tag{4}$$

ein System von ∞^1 dreidimensionalen linearen Räumen dar, welche sämmtlich die zwei Ebenen — dies Wort im gewöhnlichen Sinne genommen —

$$\Sigma a_i x_i = 0 \qquad \Sigma b_i x_i = 0$$

gemeinsam haben, d. h. nach der Analogie mit dem gewöhnlichen Raume, »einen Büschel dreidimensionaler Räume« mit einer Ebene als »Axe«. Ebenso würde die Gleichung 5)

$$\sum_{i=1}^{i=5} (\lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i) x_i = 0 \tag{5}$$

∞^2 dreidimensionale lineare Räume darstellen, mit einer Geraden als »Axe«. Durch »Drehung« eines dreidimensionalen Raumes um eine Ebene, respective Gerade könnten die eben erwähnten Gebilde, wie leicht einzusehen, erzeugt werden. Hiezu träte noch im vierdimensionalen Raume die »Drehung« um einen Punkt, wodurch ∞^3 lineare dreidimensionale Räume entstünden.

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, dass z. B. ein linearer Raum von drei Dimensionen, wenn der ursprüngliche vier Dimensionen hat, durch vier Punkte x_i, y_i, z_i, t_i $i = 1, 2, \ldots 5$ gegeben ist, indem ein beliebiger Punkt desselben die Coordinaten hat:

$$\xi_i = \frac{\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i + \rho t_i}{\lambda + \mu + \nu + \rho} \qquad i = 1, \ldots 5,$$

falls die Parameter $\lambda \ldots \rho$ variiren von $-\infty$ bis $+\infty$.

Mit einer »Drehung« in einem Raume beliebiger Dimension bezeichne ich eine solche Transformation desselben, welche die Distanz zweier beliebiger Punkte invariant lässt und welche sich specialisirt nach der Natur der fix bleibenden Elemente, der »Axe«. Es folgt, was zu beweisen ich übergehe, aus dieser Definition, dass der analytische Ausdruck einer Drehung immer, d. h. in Räumen beliebiger Dimension eine orthogonale Substitution ist, wobei die Substitutionsdeterminante $+1$ in allen Räumen eine »reelle« Drehung ergibt. Sollte die letztere dagegen den Werth -1 haben, so ist sie eine »imaginäre« Drehung im Raume von n Dimensionen, dagegen eine »reelle« im Raume von $n+1$ Dimensionen. Den Beweis hievon übergehe ich. So würde man, um nur ein Beispiel anzudeuten, mit der allgemeinsten orthogonalen Substitution, welche die zwei Gleichungen 6) in 7) überführt

$$\left.\begin{aligned} \sum_{=1}^{i=5} a_i x_i &= 0 \\ \sum b_i x_i &= 0 \end{aligned}\right\} 6) \qquad \left.\begin{aligned} \lambda \Sigma a_i x_i + \mu \Sigma b_i x_i &= 0 \\ \lambda' \Sigma a_i x_i + \mu' \Sigma b_i x_i &= 0 \end{aligned}\right\} 7)$$

und wobei

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

ist, im Raume von vier Dimensionen die allgemeinste »Drehung« eines dreidimensionalen Raumes um eine Ebene als »Axe« analytisch dargestellt haben.

§. 2. Allgemeine Herleitung eines abwickelbaren Raumes von $(n-1)$ Dimensionen in einem Raume von n Dimensionen.

Es soll zunächst zur grösseren Deutlichkeit der allgemeinste abwickelbare Raum von drei Dimensionen in einem von vier Dimensionen hergeleitet werden, da sich hieraus sofort ergeben wird, wie in einem n-dimensionalen Raume der allgemeinste abwickelbare $(n-1)$ dimensionale Raum gewonnen wird. Dabei heisst ein dreidimensionaler Raum, gelegen in einem vierdimensionalen, abwickelbar, wenn er kein linearer Raum, wie Gleichung 1) in §. 1 ist und durch unendlich viele »Drehungen« um Ebenen als »Axen« successive mit einem linearen Raum der Form 1) in §. 1 zur Deckung gebracht werden kann. Ist also der abwickelbare dreidimensionale Raum in einem vierdimensionalen etwa ursprünglich durch die Gleichung α)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \qquad \alpha)$$

gegeben, so wird derselbe durch den Process der Abwickelung schliesslich völlig in einen linearen dreidimensionalen Raum etwa 1) in §. 1 hineingedreht, wobei gewisse Gebilde, auf welche wir gleich stossen werden, invariant bleiben. Nimmt man den erwähnten linearen Raum etwa als »Ebene« $\xi_4 = 0$ eines vieraxigen rechtwinkeligen Coordinatensystems, wobei das Wort Ebene hier also die Bedeutung eines linearen Raumes hat, so ist ein beliebiger Punkt des abgewickelten Raumes dann durch drei Coordinaten $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ gegeben, während derselbe Punkt im nicht abgewickelten Zustand des Raumes durch vier Coordinaten $x_1 x_2 x_3 x_4$ — $x_5 = 1$ ist nach Früherem selbstverständlich — gegeben war. Zu einem abwickelbaren dreidimensionalen Raum gelangen wir nun durch folgende Überlegung. Wie schon in §. 1 erwähnt, stellt die Gleichung 1)

$$\sum_{i=1}^{i=5} a_i x_i = 0 \qquad 1)$$

einen linearen Raum dar, wenn die Coëfficienten a_i von den Coordinaten frei sind. Denkt man sich die a_i aber als Functionen von t z. B. der Zeit, so gibt die Variation von t offenbar ∞^1 solche lineare Räume, ich will 1) kurz mit R_t bezeichnen. Sind nun a $i = 1, \ldots 5$ continuirliche Functionen von t, so haben die zwei successiven Räume R_t und R_{t+dt} eine Ebene im gewöhnlichen Sinne, d. h. einen linearen zweidimensionalen Raum gemeinsam, der durch die zwei Gleichungen 1) und 2) festgelegt ist, wobei ist:

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{d\,a_i}{d\,t} x_i = 0 \tag{2}$$

Drei benachbarte lineare Räume R_t, R_{t+dt}, R_{t+2dt} haben dann die durch 1), 2) und 3) fixirte Gerade gemeinsam, wobei wieder ist:

$$\sum \frac{d^2 a_i}{dt^2} x_i = 0. \tag{3}$$

Schliesslich haben vier benachbarte lineare Räume R_t, R_{t+dt}, R_{t+2dt} und R_{t+3dt} den durch 1), 2), 3) und 4) festgelegten Punkt gemeinsam

$$\sum \frac{d^3 a_i}{dt^3} x_i = 0, \tag{4}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass z. B. die Determinante 5) von Null verschieden ist, man es also immer mit dem allgemeinsten Falle zu thun hat:

$$\Sigma \pm a_1 \frac{da_2}{dt} \frac{d^2 a_3}{dt^2} \frac{d^3 a_4}{dt^3} \tag{5}$$

Ich will die bezeichnete Ebene, Gerade, respective den Punkt mit E_t, G_t und P_t bezeichnen, dann folgt aus 1) bis 4), dass die Coordinaten von P_t die Form haben

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{6}$$

$i = 1, \ldots 4$ mit $x_5 = 1$, d. h. dass P_t eine beliebige dreifach gekrümmte Curve durchläuft, und wenn man einen linearen Raum der Dimension 1, 2 oder 3 als »osculirend« bezeichnet, falls er so viele benachbarte Punkte als möglich mit der Curve 6) gemeinsam hat, so ergibt sich, dass R_t, E_t und G_t solche osculirende lineare Räume der Curve 6) sind, speciell also E_t die Osculationsebene und G_t die Tangente der Curve 6), und ich behaupte:

»Die Osculationsebene E_t der Curve 6) durchstreicht oder erzeugt einen abwickelbaren Raum«, also kürzer:

»Ein abwickelbarer Raum von drei Dimensionen wird stets erzeugt durch die Osculationsebene einer dreifach gekrümmten Curve.«

Die Curve 6) ist als »dreifach« gekrümmt bezeichnet, um auszudrücken, dass z. B. E_t und E_{t+dt} in dem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum R_t liegen, dagegen E_{t+dt} und E_{t+2dt} in dem davon verschiedenen linearen Raume R_{t+dt}, während bei »doppelt« gekrümmten Curven sich alle Osculationsebenen bekanntlich in demselben gewöhnlichen Raume, also auch sämmtliche Punkte der Curve 6) vorfinden. Es tritt also hier wegen der Drehung, die neu hinzutritt, eine dritte Krümmung zu den bei doppeltgekrümmten Curven vorhandenen hinzu. Einige Erläuterungen werden die Behauptung klar machen. In der That bilden zwei benachbarte lineare Osculationsräume einen unendlich kleinen »Winkel«, der bei der Drehung von R_{t+dt} um E_t auf Null reducirt wird, und die Distanzen irgend zweier Punkte in R_{t+dt} bleiben dabei unverändert oder invariant, während nach vollzogener Drehung um E_t die Verbindung von R_t und R_{t+dt} für jede weitere derartige Drehung als starr anzusehen ist. Weil ferner ein linearer Raum bei der Drehung um eine Ebene für sich genommen völlig unverändert bleibt, so blieb, weil er immer zwei benachbarte Osculationsebenen, drei benachbarte Tangenten und vier successive Punkte der Curve 6) enthält, hiebei invariant:

I. Das Bogenelement der Raumcurve 6), ich bezeichne es mit $d\lambda$,

II. der Contingenzwinkel $d\mu$, d. h. der unendlich kleine Winkel zweier successiver Tangenten, und

III. der unendlich kleine Winkel zweier successiver Osculationsebenen, welche ich mit $d\nu$ bezeichne.

Diese drei Grössen also sind als Invarianten der Abwickelung des dreidimensionalen Raumes aufzufassen. Wir können nämlich, wenn der Punkt, welcher zu $t+ndt$ gehört, mit P_n etc. bezeichnet wird, und wobei n eine positive oder negative ganze Zahl ist, behaupten, dass R_n die vier Punkte $P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}$ enthält und darum die zwei Osculationsebenen E_n und E_{n+1}, ferner wenn das Bogenelement $P_n P_{n+1}$ mit ds_n bezeichnet wird, die drei Bogenelemente ds_n, ds_{n+1}, ds_{n+2} und haben also, da ds_n die Tangente im Punkte P_n bestimmt, folgende drei Reihen osculirender Räume der Dimension 3, respective 2, respective 1

$$\begin{array}{l} .\, R_{-2}\; R_{-1}\; R_0\; R_1\; R_2 \\ \;\; E_{-2}\; E_{-1}\; E_0\; E_1\; E_2 \\ .\, ds_{-2}\, ds_{-1}\, ds_0\, ds_1\, ds_2\, . \end{array}$$

so dass also z. B. in R_0 liegen E_0 und E_1 und ebenso $ds_0\, ds_1\, ds_2$, womit die Invarianz der sub I bis III genannten Grössen evident ist. Um den Abwickelungsprocess selbst vorzunehmen, denke man sich R_1 um E_1, das ja R_0 und R_1 gemeinsam ist, gedreht durch den unendlich kleinen Winkel $\sphericalangle(R_0, R_1)$, bis derselbe auf Null reducirt ist, also R_1 in R_0 hineingedreht ist. Hierauf ist R_0 und R_1, die jetzt beide in R_0 liegen, als starr verbunden zu denken, und es wird R_2 durch Drehung von E_2 in R, d. h. in R_0 ebenfalls hineingedreht etc., bis schliesslich der ganze Raum, den die Osculationsebene der Curve 6) beim Durchlaufen der letzteren erzeugte, völlig in R_0 sich befindet, womit die Abwickelung des ursprünglichen Raumes, da auch R_{-1}, $R_{-2}\ldots$ in R_0 hineingedreht zu denken sind, vollzogen ist. Dieser ganze Process hat sein Analogon bei der Abwickelung von Flächen in eine ihrer Tangentialebenen, wobei jedoch nur die sub I und II angeführten Invarianten auftreten, wie ich dies im XCVII. Bande der Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien: »Analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen« darlegte. Es ist also dieser Process als Verallgemeinerung des Problems der Rectification von Curven und der Auffindung der kürzesten Linien auf abwickelbaren Flächen, respective in abwickelbaren Räumen aufzufassen und umgekehrt, wenn ein Raum abgewickelt ist, so sind die kürzesten Linien im ursprünglichen abwickelbaren Raume bekannt, weil durch das Übertragungsprincip, das zwischen den beiden Zuständen des Raumes vermittelt, gegeben, vergl. den eben citirten Aufsatz. Das Vorhergehende dürfte genügen, um die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes einzusehen

»Der allgemeinste abwickelbare Raum von $(n-1)$ Dimensionen in einem Raume von n Dimensionen wird erzeugt durch den osculirenden linearen Raum von $(n-2)$ Dimensionen der $(n-1)$-fach gekrümmten Curve 6')

$$x_i = \varphi_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{6'}$$

wozu $x_{n+1} = 1$ tritt.«

In der That ist dieser osculirende Raum durch $n-1$ successive Punkte der Curve 6') bestimmt und beschreibt, da er selbst die Dimension $n-2$ hat, durch seine Bewegung einen Raum von $(n-2)+1 = n-1$ Dimensionen. Dieser letztere Raum ist ferner abwickelbar, da er durch successive Drehungen um die bezeichneten osculirenden Räume in einen und denselben osculirenden linearen Raum der Dimension $n-1$ hineingedreht werden kann, wobei nach vollzogener Drehung immer sämmtliche bereits hineingedrehte osculirende Räume der Dimension $n-1$ als starr verbunden aufzufassen sind. Dass hiebei mehrfache Überdeckungen des osculirenden linearen Raumes der Dimension $n-1$ auftreten können, ist wohl selbstverständlich und findet dieser Umstand ebenfalls sein Analogon bei der Abwickelung von Flächen, vergl. den citirten Aufsatz. Bezeichnet man, um einen gleichmässigen Ausdruck zu erhalten, einen Punkt der Curve 6') als osculirendes Gebilde der Dimension Null, so dass also zwei derartige Gebilde, wenn sie aufeinanderfolgen, ein Bogenelement bestimmen, so kann man sagen:

»Bei der Abwickelung eines Raumes von $(n-1)$ Dimensionen in einem von n Dimensionen ergeben sich $(n-1)$ Invarianten, nämlich je zwei successive osculirende lineare (Räume der Curve 6') $R_{i,t}$ und $R_{i,t+dt}$, wobei i von 0 bis $n-2$ läuft, bestimmen eine Invariante, hievon ist die erste eine Strecke, nämlich das Bogenelement der Curve 6'), alle anderen sind Winkel, nämlich die unendlich kleinen Winkel zweier successiver Tangenten, Tangentialebenen, osculirenden linearen Räume der Dimensionen 3 bis $(n-2)$.

§. 3. Aufstellung des allgemeinsten abwickelbaren Raumes der Dimension 3 in einem Raume der Dimension 4.

Ich habe im Folgenden einen abwickelbaren Raum der Dimension 3 durch vier Gleichungen analytisch dargestellt, indem ich drei Parameter t, u, v einführe, von denen die rechtwinkeligen Punktcoordinaten Functionen sind. Die Elimination der Parameter gäbe natürlich eine einzige Gleichung in den Punktcoordinaten. Ich halte aber die nachstehende analytische Darstellung, weil sie, wie das Spätere zeigt, viele Vorzüge aufweist, für die wichtigere, so dass ich glaube, der Name »kanonische« Darstellung wäre für sie begründet. Durch diese Darstellung nämlich wird das Problem der Abwickelung und damit der kürzesten Linien auf die Ermittelung einer einzigen Function einer Variabelen reducirt, wie sich später herausstellen wird.

Nach §. 2 wird der allgemeinste abwickelbare Raum von drei Dimensionen durch die Osculationsebene einer dreifach gekrümmten Curve erzeugt. Es seien also $x_1 x_2 x_3 x_4$ die rechtwinkeligen Punktcoordinaten und die dreifach gekrümmte Curve gegeben durch *A)*

$$x_i = \varphi_i(t) \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{A}$$

Dann ist die Osculationsebene der »Schnitt« zweier successiver Osculationsräume, d. h. die Osculationsebene ist gegeben durch die Gleichungen *B)*

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \pm (x_1 - \varphi_1)\varphi_2'\varphi_3''\varphi_4''' &= 0 \\ \Sigma \pm (x_1 - \varphi_1)\varphi_2'\varphi_3''\varphi_4'''' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Denkt man sich jetzt die Osculationsebene *B)* und in ihr ein rechtwinkeliges Coordinatensystem u und v, wobei u mit der Tangente und v mit der Normale der Curve zusammenfällt, so behaupte ich, ist ein beliebiger Punkt der Osculationsebene gegeben durch *D)*

$$x_i = \varphi_i + \frac{\varphi_i'}{\sqrt{\Sigma \varphi_1'^2}}\, u + \frac{\frac{1}{2}\varphi_i' \frac{d\Sigma\varphi_1'^2}{dt} - \varphi_i''\Sigma\varphi_1'^2}{\sqrt{\Sigma\varphi_1'^2 \cdot \sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2}}\, v \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{D}$$

Es ist hiebei z. B.

$$\Sigma \varphi_1'^2 = \left(\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_3(t)}{dt}\right)^2 \text{etc.}$$

In der That genügen sämmtliche Punkte x_i, weil sich x_i linear mittels symmetrischer Functionen aus $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ und den zwei ersten Differentialquotienten davon aufbaut, beiden Gleichungen *B)* und die Elimination von respective u gibt zwei zu einander senkrechte Gerade, wenn u, respective gleich Null gesetzt wird, wenn man berücksichtigt, dass die zwei Geraden

$$\frac{x_1 - \varphi_1}{A_h} = \frac{x_2 - \varphi_2}{B_h} = \frac{x_3 - \varphi_3}{C_h} = \frac{x_4 - \varphi_4}{D_h} \qquad h = 1, 2$$

aufeinander senkrecht stehen, wenn man hat:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 + D_1 D_2 = 0.$$

Diese letztere Bedingung ist aber offenbar erfüllt, und weiter ist die Gerade, die durch Elimination von u bei $v = 0$ resultirt, offenbar die Tangente, womit Alles bewiesen ist.

Übrigens ist die Behauptung, wenn von u und v als Strecken auf der Tangente der Curve, respective der Normale in der Osculationsebene abgesehen wird, eigentlich selbstverständlich, da x_i nach *D)* sich aus $\varphi_i(t)$, $\varphi_i(t+dt)$ und $\varphi_i(t+2\,dt)$ linear aufbaut, also eine aus drei Punkten linear hergeleitete Mannigfaltigkeit vorstellt oder die Osculationsebene ist. Denkt man sich jetzt t, u und gleichzeitig variabel, so stellt *D)* offenbar einen beliebigen Punkt des durch die Osculationsebene erzeugten abwickelbaren Raumes dar, d. h. den abwickelbaren Raum selbst, der in der That, weil von drei Parametern abhängig, die Dimension 3 hat, und zwar ist dies die oben als kanonisch bezeichnete Darstellung desselben.

Durch Aufstellung des allgemeinsten vierdimensionalen, nicht linearen Raumes, der auf einen linearen vierdimensionalen Raum abwickelbar ist, will ich nun andeuten, wie man zu höheren Dimensionen aufsteigen kann. Der erwähnte Raum entsteht nach §. 2 durch Bewegung des linearen Osculationsraumes von drei Dimensionen bei der »vierfach« gekrümmten Curve $A')$

$$x_i = \varphi_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots 5, \; x_6 = 1. \qquad A')$$

Ganz analoge Betrachtungen zu den eben angewendeten führen sofort zu dem Resultat, dass die Gleichungen des gewünschten abwickelbaren Raumes in den vier unabhängigen Parametern tuv und w lauten werden.

$$x_i = \varphi_i + \frac{\varphi_i'}{\sqrt{\Sigma \varphi_1'^2}}\, u + \frac{\varphi_i' \Sigma \varphi_1'' \varphi_1' - \varphi_i' \, \Sigma \varphi_1'^2}{\sqrt{\Sigma \varphi_1'^2 \cdot \sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2}}\, v + (A\varphi_i' + B\varphi_i'' + C_i'' \;)w \qquad D')$$

$$i = 1, 2 \ldots 5.$$

Die noch unbestimmten Constanten A, B, C sind dabei aus dem Gleichungssystem $E')$ zu bestimmen, das ausdrückt, dass die drei Geraden u, v und w ein rechtwinkeliges Axensystem bilden, das in dem linearen Osculationsraum des Punktes t der Curve $A')$ liegt und das gebildet wird von der Tangente der Curve im Punkte t — dieses ist die Gerade u — der Normalen zur Tangente in der Osculationsebene, dies ist die Gerade und schliesslich der Normalen zu beiden erwähnten Geraden im linearen Osculationsraum der Dimension 3, dies gibt die Gerade w.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=5} \quad (A\varphi_i' + B\varphi_i'' + C\varphi_i''')^2 &= 1 \\ \sum \varphi_i' \, (A\varphi_i' + B\varphi_i'' + C\varphi_i''') &= 0 \\ \sum \varphi_i'' (A\varphi_i' + B\varphi_i'' + C\varphi_i''') &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad E')$$

Dieses mit dem linearen dreidimensionalen Osculationsraum bewegliche Coordinatensystem $tuvw\ldots$, dessen Verallgemeinerung klar sein dürfte, ist für das Weitere durchaus charakteristisch, da es zur wesentlichen Vereinfachung des Abwickelungsproblemes im weiteren Sinne dient. Um A, B, C zu gewinnen, schreibe ich das System $E')$ in folgender Form, die sich sehr leicht ergibt:

$$A\Sigma\varphi_1'\,\varphi_1' + B\Sigma\varphi_1'\,\varphi_1'' + C\Sigma\varphi_1'\,\varphi_1''' = 0$$
$$A\Sigma\varphi_1''\,\varphi_1' + B\Sigma\varphi_1''\,\varphi_1'' + C\Sigma\varphi_1''\,\varphi_1''' = 0$$
$$C[A\Sigma\varphi_1'''\varphi_1' + B\Sigma\varphi_1'''\varphi_1'' + C\Sigma\varphi_1'''\varphi_1'''] = 1$$

Aus den zwei ersten Gleichungen folgt nun sofort das Verhältniss der drei Unbekannten und aus der dritten der absolute Werth. Berechnet man also A, B und C wirklich und substituirt diese Werthe in D'), so ergibt sich der allgemeinste abwickelbare Raum von vier Dimensionen in folgender kanonischer Gestalt:

$$x_i = \varphi_i + \frac{\varphi_i'}{\sqrt{\Sigma\varphi_1'^2}}\,u + \frac{\varphi_i'\Sigma\varphi_1'\varphi_1'' - \varphi_i''\Sigma\varphi_1'^2}{\sqrt{\Sigma\varphi_1'^2 . \sum\begin{vmatrix}\varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2''\end{vmatrix}^2}}\,v +$$

$$+ \frac{\varphi_i'\,\mathrm{Adj}\,\Sigma\varphi_1'''\varphi_1' + \varphi_i''\,\mathrm{Adj}\,\Sigma\varphi_1'''\varphi_1'' + \varphi_i'''\,\mathrm{Adj}\,\Sigma\varphi_1'''\varphi_1'''}{\sqrt{\sum\begin{vmatrix}\varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2''\end{vmatrix}^2 \sum\begin{vmatrix}\varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' & \varphi_3'''\end{vmatrix}^2}}\,w \qquad i = 1, 2, \ldots 5$$

Ich will diese Gleichung mit D') bezeichnen. In ihr stellt $\mathrm{Adj}\,\Sigma\varphi_1'''\varphi_1'$ z. B. die zu $\Sigma\varphi_1'''\varphi_1'$ gehörige Unterdeterminante in der Entwickelung von

$$\sum\begin{vmatrix}\varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' & \varphi_3'''\end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix}\Sigma\varphi_1'\,\varphi_1', & \Sigma\varphi_1'\,\varphi_1'', & \Sigma\varphi_1'\,\varphi_1''' \\ \Sigma\varphi_1''\,\varphi_1', & \Sigma\varphi_1''\,\varphi_1'', & \Sigma\varphi_1''\,\varphi_1''' \\ \Sigma\varphi_1'''\varphi_1', & \Sigma\varphi_1'''\varphi_1'', & \Sigma\varphi_1'''\varphi_1'''\end{vmatrix}$$

und wobei zu beachten ist, dass z. B.

$$\Sigma\varphi_1'\varphi_1' = \left(\frac{d\varphi_1(t)}{dt}\right)^2 + \quad + \left(\frac{d\varphi_5(t)}{dt}\right)^2$$

ist, demnach z. B. auch

$$\sum\begin{vmatrix}\varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2''\end{vmatrix}^2$$

aus $\binom{5}{2} = 10$ Gliedern der Form

$$\begin{vmatrix}\varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2''\end{vmatrix}^2$$

besteht etc. Wegen der vier unabhängigen Parameter t, u, w hat der aufgestellte Raum in der That die Dimension 4, und dass er abwickelbar ist, wird für *D)* genau so gezeigt, wie es vollkommen streng für *D)* in §. 5 geschehen wird.

§. 4. Charakterisirung des Problems der Abwickelung im Allgemeinen.

Das wesentliche Moment bei der Abwickelung einer Curve — identisch mit der Rectification — oder der Abwickelung einer Fläche besteht darin, dass die unendlich kleinen Curvenelemente, welche bei der Rectification direct auftreten, oder die unendlich kleinen Curvenelemente, welche bei Abwickelung von Flächen durch Zerlegen derselben in unendlich kleine Flächenelemente sich einstellen, ihre Grösse bei dem Abwickelungsprocess beibehalten, dass aber in beiden Fällen dieselben durch die Abwickelung mit gleich grossen in einem linearen Raum, d. h. einer Geraden, respective Ebene successive zur Deckung gelangen, und zwar bei jeder unendlich kleinen Drehung des Abwickelungsprocesses, bis der letztere beendet ist. Berücksichtigt man diese Invarianz von Curvenelementen, aus der unter gewissen Umständen sofort die Invarianz von Flächenelementen und später von Volumelementen, also auch von gewissen Winkeln folgt, so kann man allgemein sagen:

»Der Process der Abwickelung besteht darin, dass durch Drehung um unendlich kleine Winkel, wobei die Länge gewisser Curvenelemente invariant bleibt, ein abwickelbarer, aber nicht linearer Raum in einen linearen Raum gleicher Dimension hineingedreht wird und hiedurch also eine conforme Abbildung des ursprünglichen Raumes I auf einen linearen Raum I' wirklich durchgeführt wird, wobei das Grössenverhältniss entsprechender Elemente gleich Eins ist.«

Diese Erklärung stimmt, wenn man das oben über »Drehung« und orthogonale Substitution Gesagte sich vergegenwärtigt, mit dem Früheren völlig überein und bei klarer Erfassung derselben hat das Nachstehende keine Schwierigkeit mehr.

§. 5. Specielle Betrachtung des Problems bei einem abwickelbaren Raum von drei Dimensionen. Nachweis, dass die Kenntniss eines einzigen particulären Integrales einer gewissen Differentialgleichung vollständig genügt, um die allgemeine Lösung sofort zu erhalten. Numerisches Beispiel.

Es sei nun ein abwickelbarer Raum der Dimension 3 gegeben, so entsteht derselbe nach Früherem durch die Bewegung der Osculationsebene einer dreifach gekrümmten Curve. Bei der Abwickelung werden dann die successiven osculirenden linearen Räume der Dimension 3 um die Osculationsebene gedreht, derart, dass schliesslich alle osculirenden linearen Räume der Dimension 3 in einem und demselben linearen Raum zu liegen kommen, worauf die Abwickelung beendet ist. Dabei übergeht die dreifach gekrümmte Curve in eine zweifach gekrümmte, indem die Osculationsebenen der ersteren nach und nach zur Deckung gelangen mit denen der letzteren, mit anderen Worten, war die ursprüngliche Curve α) und der ursprüngliche Raum I), so entsteht hieraus die Curve α') und der abgewickelte Raum I$'$), dabei haben wir also nach Früherem bei Benützung der kanonischen Formen folgende Gleichungen.

$$x_i = \varphi_i(t) \quad i=1,2,3,4 \quad \ldots\alpha) \qquad \xi_i = \psi_i(t) \quad i=1,2,3 \quad \ldots\alpha')$$

$$x_i = \varphi_i + \frac{\varphi_i'}{\sqrt{\Sigma\varphi_1'^2}}\,u + \frac{\varphi_i'\Sigma\varphi_1''\varphi_1' - \varphi_i''\Sigma\varphi_1'\varphi_1'}{\sqrt{\Sigma\varphi_1'\varphi_1'\cdot\sum\begin{vmatrix}\varphi_1' & \varphi_2'\\ \varphi_1'' & \varphi_1''\end{vmatrix}^2}}\,v \qquad i=1,2,3,4 \qquad \text{I})$$

$$\xi_i = \psi_i + \frac{\psi_i'}{\sqrt{\Sigma\psi_1'^2}}\,u + \frac{\psi_i'\Sigma\psi_1''\psi_1' - \psi_i''\Sigma\psi_1'\psi_1'}{\sqrt{\Sigma\psi_1'\psi_1'\cdot\sum\begin{vmatrix}\psi_1' & \psi_2'\\ \psi_1'' & \psi_1''\end{vmatrix}^2}}\,v \qquad i=1,2,3 \qquad \text{I}')$$

Hierin sind die $\varphi_i(t)$ als gegeben aufzufassen, $\psi_i(t)$ aber zu bestimmen, indem, während die Punkte von I und I' durch t, u, v einander zugeordnet sind, jetzt zu zeigen ist, dass jedem Curvenelement ds_I in I, welches die Punkte t, u, v und $t+dt$, $u+du$, $v+dv$ verbindet, ein gleich grosses $ds_{I'}$ in I' entspricht, welches die entsprechenden Punkte verbindet. Ist dieser Beweis dann erbracht und hiebei zugleich ein ausreichendes

System von Gleichungen für $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ und $\psi_3(t)$ hergeleitet, so ist in der That bloss die in §. 4 aufgestellte Erklärung der Abwickelung, also die Invarianz von Curvenelementen allein, festgehalten worden, und es werden sich hieraus leicht die in §. 2 unter I), II), III) bezeichneten Invarianten als Consequenzen ergeben müssen.

Darzuthun ist also jetzt, dass es möglich ist, bei völlig unabhängigem t, u und v die Gleichung zu erfüllen

$$ds_I^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = ds_I'^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2,$$

wenn I) und I') benützt werden. Diese letzte Gleichung lautet explicit:

$$\begin{aligned} &A_{11}dt^2 + A_{22}du^2 + A_{33}dv^2 + 2A_{12}\,dt\,du + 2A_{23}\,du\,dv + 2A_{31}dv\,dt = \\ &= A'_{11}dt^2 + A'_{22}du^2 + A'_{33}dv^2 + 2A'_{12}dt\,du + 2A'_{23}du\,dv + 2A'_{31}dv\,dt \end{aligned} \qquad \alpha)$$

und erfordert also, dass es möglich ist, das System der sechs Gleichungen β) durch geeignete $\psi_1\psi_2\psi_3$ gleichzeitig zu befriedigen:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= A'_{11} \\ A_{22} &= A'_{22} \\ A_{33} &= A'_{33} \\ A_{12} &= A'_{12} \\ A_{23} &= A'_{23} \\ A_{31} &= A'_{31} \end{aligned}\right\} \qquad \beta)$$

Nur wenn es möglich ist, das System der sechs Gleichungen β) auf drei Gleichungen, wegen der drei ψ, zu reduciren, ist das Problem in der bezeichneten Form überhaupt möglich. Dies trifft aber in der That zu. Zunächst nämlich lautet die Gleichung $A_{22} = A'_{22}$ so:

$$\frac{\Sigma\varphi'_1\varphi'_1}{\Sigma\varphi'_1\varphi'_1} = \frac{\Sigma\psi'_1\psi'_1}{\Sigma\psi'_1\psi'_1} \text{ oder } 1 = 1,$$

d. h. sie entfällt und ebenso ist die Gleichung $A_{33} = A'_{33}$ von selbst erfüllt. Bezeichnet man ferner $\frac{d\chi(t)}{dt}$ für einen Moment mit $D\chi(t)$, so lautet die Gleichung $A_{12} = A'_{12}$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{\varphi_i'}{\sqrt{\Sigma \varphi_1'^2}} \left[\varphi_i' + D \frac{\varphi_i'}{\sqrt{\Sigma \varphi_1'^2}} u + D \frac{\varphi_i' \Sigma \varphi_1' \varphi_1'' - \varphi_i'' \Sigma \varphi_1'^2}{\sqrt{\Sigma \varphi_1'^2 . \sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2}} v\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\psi_i'}{\sqrt{\Sigma \psi_1'^2}} \left[\psi_i' + D \frac{\psi_i'}{\sqrt{\Sigma \psi_1'^2}} u + D \frac{\psi_i' \Sigma \psi_1' \psi_1'' - \psi_i'' \Sigma \psi_1'^2}{\sqrt{\Sigma \psi_1'^2 . \sum \begin{vmatrix} \psi_1' & \psi_2' \\ \psi_1'' & \psi_2'' \end{vmatrix}^2}} v\right]$$

Wegen der Unabhängigkeit von t, u zerfällt diese Gleichung jedoch in drei Gleichungen, von denen es aber sehr leicht einzusehen ist, dass sie sämmtlich befriedigt sind, wenn nur folgende zwei Gleichungen statthaben:

$$\Sigma \varphi_i' \varphi_i' = \Sigma \psi_i' \psi_i' \qquad a)$$

$$\Sigma \varphi_i'' \varphi_i'' = \Sigma \psi_i'' \psi_i'', \qquad b)$$

denn aus ihnen folgt nach einem bekannten Determinantensatz dass z. B. auch folgende Gleichung erfüllt ist

$$\sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2 = \sum \begin{vmatrix} \psi_1' & \psi_2' \\ \psi_1'' & \psi_2'' \end{vmatrix}^2$$

wobei die linke Seite eine Summe von vier, die rechte Seite von drei analogen Gliedern ist. Ebenso folgt aus *a)* und *b)*, dass z. B. auch die Gleichung dann besteht

$$\Sigma \varphi_i'' \varphi_i''' = \Sigma \psi_i'' \psi_i''' \quad \text{oder} \quad \Sigma \varphi_i' \varphi_i''' = \Sigma \psi_i' \varphi_i''' \text{ etc.}$$

Bildet man ebenso die restirenden Gleichungen in β), so ergibt sich genau in derselben Weise, dass sämmtliche Gleichungen β) und also die fundamentale Gleichung der Abwickelung $ds_I = ds_I'$ bei beliebigen, d. h. unabhängigen Werthen der drei Parameter tuv besteht, wenn zwischen den φ_i und ψ_i nur das ausreichende und zur Bestimmung der drei ψ genügende System von Gleichungen *A)* stattfindet:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \varphi_i' \varphi_i' &= \Sigma \psi_i' \psi_i' \\ \Sigma \varphi_i'' \varphi_i'' &= \Sigma \psi_i'' \psi_i'' \\ \Sigma \varphi_i''' \varphi_i''' &= \Sigma \psi_i''' \psi_i''' \end{aligned}\right\} \qquad A)$$

Dass das System $A)$ widerspruchslos und zugleich unabhängig ist, demnach wirklich zur Bestimmung der drei ψ ausreicht, lehrt der blosse Anblick. Nach bekannten Determinantensätzen, vergl. z. B. Baltzer: »Determinanten« etc. kann $A)$ auch durch $A')$ ersetzt werden:

$$\Sigma \varphi_i' \varphi_i' = \Sigma \psi_i' \psi_i',$$

$$\sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2 = \sum \begin{vmatrix} \psi_1' & \psi_2' \\ \psi_1'' & \psi_2'' \end{vmatrix}^2 \qquad \sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' & \varphi_3''' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \\ \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_3'' \\ \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_3''' \end{vmatrix}^2 \qquad A')$$

worin z. B. die zweite Gleichung links eine Summe von sechs, rechts von vier Gliedern enthält.

Es ergab sich somit der Satz:

»Der dreidimensionale Raum I) ist in der That in I′) abgewickelt, wenn die vier φ mit den drei ψ durch die Gleichungen $A)$ oder $A')$ verknüpft sind.«

Es ist dabei zu beachten, dass aus $A')$ auch $A)$ sehr leicht sich ergibt, beide Systeme also einander äquivalent sind. Aus $A')$ aber folgt, dass auch folgende drei Grössen für I) und I′) gleiche Werthe haben, also Invarianten sind:

$$\Sigma \varphi_1' \varphi_1', \quad \frac{\sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2}{(\Sigma \varphi_1' \varphi_1')^2}, \quad \frac{\sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' & \varphi_3''' \end{vmatrix}^2 \cdot \Sigma \varphi_1' \varphi_1'}{\left\{ \sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2 \right\}^2};$$

diese drei Grössen sind jedoch, wie eine einfache Rechnung, die ich übergehe, zeigt, nichts Anderes als $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2$, respective $\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2$, respective $\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2$, in denen $d\lambda$, $d\mu$ und $d\nu$ die in §. 2 sub I) II), III) bezeichneten Invarianten vorstellen. Also haben wir jetzt umgekehrt diese Invarianz bewiesen aus der einen allgemeinen Gleichung $ds_I = ds_I'$, und es herrscht völlige Congruenz mit dem Früheren, derart, dass wir auch $A')$ und damit $A)$ hätten direct nach §. 2, wo diese Invarianz geometrisch evident dargestellt wurde, hinschreiben können. Damit sind wir aber zu einer anderen Fassung des Abwickelungsproblems gelangt, nämlich zu dem Satze:

»Die Abwickelung eines dreidimensionalen Raumes in einem vierdimensionalen ist identisch mit dem Problem: Eine Curve zu finden, bei welcher das Bogenelement und die unendlich kleinen Winkel zweier successiven Tangenten, respective Osculationsebenen gegebene Functionen einer Variabelen t sind.«

Geometrisch ist wohl wenig über dieses Problem zu sagen, ja man könnte sogar eine angenäherte Construction der Curve α') und damit des abgewickelten Raumes sofort durchführen, etwas Anderes ist aber die analytische Lösung, d. h. die rechnerische Bestimmung der drei Functionen $\psi_i(t)$. Diese nämlich scheint, wenn sie überhaupt allgemein möglich ist, in endlicher Form, bedeutende Schwierigkeiten zu bieten. Hier soll zunächst gezeigt werden, dass die Kenntniss eines der $\psi_i(t)$ ausreicht, um alle drei und damit die allgemeinsten Werthe derselben sofort angeben zu können. In der That ist eines der drei $\psi(t)$ bekannt, und bezeichnet man die linken Seiten in A), die ja gegebene Functionen sind, mit $f_1(t)$, $f_2(t)$, respective $f_3(t)$, so hat man, wenn für einen Moment statt $f_1(t)-\left(\frac{d\psi_3(t)}{dt}\right)^2$, respective $f_2(t)-\left(\frac{d^2\psi_3(t)}{dt^2}\right)^2$ kurz F_1, respective F_2 geschrieben wird, für $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ die zwei Gleichungen

$$\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)^2=F_1$$

$$\left(\frac{d^2\psi_1}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\psi_2}{dt^2}\right)^2=F_2$$

und man überzeugt sich leicht, dass diese beiden Gleichungen befriedigt werden, wenn man setzt:

$$\psi_1(t)=\int\sqrt{F_1}\sin\left(\int\frac{\sqrt{F_1F_2-\frac{1}{4}F_1'^2}}{F_1}dt\right)dt$$

$$\psi_2(t)=\int\sqrt{F_1}\cos\left(\int\frac{\sqrt{F_1F_2-\frac{1}{4}F_1'^2}}{F_1}dt\right)dt.$$

Ist also ψ_3 bekannt, so ist dies mit ψ_1 und ψ_2 ebenfalls der Fall. Berücksichtigt man ferner, dass die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ bekannt sind, z. B. sich in Baltzer's Determinanten vorfinden, sowie dass $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$ etc. bei einer orthogonalen Substitution für ξ, η und ζ invariant bleiben, so erkennt man, dass die allgemeinsten Werthe der drei ψ, welche das System *A)* befriedigen, wenn $\psi_1 \psi_2 \psi_3$ irgend welche specielle Werthe sind, gegeben sind durch *B)*

$$\left.\begin{aligned} \Psi'_1 &= \alpha_1\psi_1+\beta_1\psi_2+\gamma_1\psi_3+\delta_1 \\ \Psi'_2 &= \alpha_2\psi_1+\beta_2\psi_2+\gamma_2\psi_3+\delta_2 \\ \Psi'_3 &= \alpha_3\psi_1+\beta_3\psi_2+\gamma_3\psi_3+\delta_3 \end{aligned}\right\} \qquad B)$$

worin $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ ganz beliebige Constanten sind.

Der geometrische Grund hievon liegt zu Tage, denn ist der abzuwickelnde Raum gegeben, so ist damit auch der abgewickelte völlig bestimmt, nicht aber das Coordinatensystem $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ des letzteren, und dasselbe kann also beliebig verschoben, Bedeutung der drei δ, und beliebig gedreht werden, Bedeutung der orthogonalen Substitution, an dem starr zu denkenden abgewickelten Raum ändert sich bei diesen zwei Operationen gar nichts. Für die functionentheoretische Lösung des Abwickelungsproblemes im Allgemeinen dürfte diese Bemerkung von fundamentaler Bedeutung sein.

Ich will nun ein wirklich durchgeführtes Beispiel der Abwickelung hersetzen, die Durchführung desselben folgt später §. 8. Ich behaupte und man überzeugt sich von der Richtigkeit leicht durch Verification der Gleichung $ds_I = ds'_I$, dass der Raum 1) abgewickelt den Raum 1′) gibt, wobei ist:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos t - \frac{1}{\sqrt{5}} u \sin t + \frac{1}{\sqrt{17}} v \cos t \\ x_2 &= \sin t + \frac{1}{\sqrt{5}} u \cos t + \frac{1}{\sqrt{17}} v \sin t \\ x_3 &= \cos 2t - \frac{2}{\sqrt{5}} u \sin 2t + \frac{4}{\sqrt{17}} v \cos 2t \\ x_4 &= \sin 2t + \frac{2}{\sqrt{5}} u \cos 2t + \frac{4}{\sqrt{17}} v \sin 2t \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\sqrt{17^3}}{65}\sin\left(t\sqrt{\frac{65}{17}}\right)+\frac{17}{\sqrt{325}}u\cos\left(t\sqrt{\frac{65}{17}}\right)+\\
&\qquad\qquad\qquad +v\sin\left(t\sqrt{\frac{65}{17}}\right)\\
\xi_2 &= \frac{\sqrt{17^3}}{65}\cos\left(t\sqrt{\frac{65}{17}}\right)-\frac{17}{\sqrt{325}}u\sin\left(t\sqrt{\frac{65}{17}}\right)+\\
&\qquad\qquad\qquad +v\cos\left(t\sqrt{\frac{65}{17}}\right)\\
\xi_3 &= \frac{6}{\sqrt{65}}t \qquad\qquad +\frac{6}{\sqrt{325}}u
\end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Dass die in §. 2 sub I), II), III) berührten Grössen in der That invariant sind, ist hier ebenfalls sehr einfach zu verificiren, auch die Aufstellung der Gleichung $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ für 1) bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

§. 6. Reduction des Problems auf eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung.

Nach §. 5 besteht das Problem der Abwickelung eines dreidimensionalen Raumes in der Ermittelung der drei Functionen $\psi(t)$ aus dem System *A)*, worin die rechten Seiten gegebene Functionen von t sind:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1'^2+\psi_2'^2+\psi_3'^2 &= f_1\\
\psi_1''^2+\psi_2''^2+\psi_3''^2 &= f_2\\
\psi_1'''^2+\psi_2'''^2+\psi_3'''^2 &= f_3
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Würde man ψ_2 und ψ_3 nach der gewöhnlichen Methode eliminiren, so hätte man es mit sehr weitläufigen Formeln zu thun, die an Übersichtlichkeit viel zu wünschen liessen. Es zeigt sich aber hier der grosse Nutzen, den die Anwendung der Determinanten gewährt, da es gelingt, das Resultat der Elimination sofort, selbst im allgemeinsten Falle, wo also n Gleichungen der Form *A)* vorliegen, hinzuschreiben. Es ist selbstverständlich, dass die Schlussgleichung, der eines der ψ genügt, wegen der Symmetrie der Gleichungen *A)* immer von allen ψ befriedigt wird. Der Gedankengang, um zu dieser gewünschten Schlussgleichung zu gelangen, war bei mir folgender. Man kann entweder darauf ausgehen — um gleich alle drei ψ zu berechnen, also die volle Symmetrie zu wahren — eine Differentialgleichung irgend einer Ordnung, aber dritten Grades, wegen der drei ψ, zu bilden oder eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, deren drei particuläre Integrale die drei ψ sind. Eine kurze Überlegung lehrte mich, dass der zweite Weg der einfachere ist, ja dass man sogar die berührte Differentialgleichung dritter Ordnung als homogen annehmen kann. Es werden also gesucht die Coefficienten in der Differentialgleichung *C)*

$$\begin{vmatrix} y''' & \psi_1'''' & \psi_2'''' & \psi_3'''' \\ y'' & \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_3''' \\ y' & \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_3'' \\ y & \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \end{vmatrix} = 0. \qquad C)$$

Offenbar sind ψ_1', ψ_2' und ψ_3' particuläre Integrale derselben, ebenso wie die aus ihnen durch eine orthogonale Substitution hervorgehenden Werthe, so dass sich auch hier die allgemeinste sub *B)* in §. 5 dargestellte Lösung ergibt.

Um nun die Coefficienten von y, y', y'', respective y''' in *C)* zu berechnen, bemerke ich Folgendes. Aus *A)* ergibt sich durch Differentiation sehr einfach folgendes System von Hilfsgleichungen *B)*

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\psi_1'\psi_1' = f_1, && \Sigma\psi_1''\psi_1'' = f_2, && \Sigma\psi_1'''\psi_1''' = f_3 \\
&\Sigma\psi_1'\psi_1'' = \frac{1}{2}f_1', && \Sigma\psi_1''\psi_1''' = \frac{1}{2}f_2', && \Sigma\psi_1'''\psi_1'''' = \frac{1}{2}f_3' \\
&\Sigma\psi_1'\psi_1''' = \frac{1}{2}f_1''-f_2, && \Sigma\psi_1''\psi_1'''' = \frac{1}{2}f_2''-f_3, && \\
&\Sigma\psi_1'\psi_1'''' = \frac{1}{2}f_1'''-\frac{3}{2}f_2', && &&
\end{aligned}\right\} B)$$

Bekannt ist daher nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten sofort δ, wenn berücksichtigt wird, dass $\delta = \sqrt{\delta^2}$ ist, wobei

$$\delta = \begin{vmatrix} \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \\ \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_3'' \\ \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_3''' \end{vmatrix} = \sqrt{\begin{vmatrix} f_1, & \frac{1}{2}f_1', & \frac{1}{2}f_1''-f_2 \\ \frac{1}{2}f_1', & f_2, & \frac{1}{2}f_2' \\ \frac{1}{2}f_1''-f_2, & \frac{1}{2}f_2', & f_3 \end{vmatrix}} \qquad D)$$

Nun folgen mit einem Schlage die sämmtlichen Coefficienten in *C)*, sobald diese Gleichung mit δ multiplicirt und dividirt wird, wenn δ zuvor so geschrieben wird:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_3''' \\ 0 & \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_3'' \\ 0 & \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \end{vmatrix}$$

Die Gleichung *C)* lautet nämlich jetzt so:

$$\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} y''', & y'', & y', & y \\ \frac{1}{2}f_1'''-\frac{3}{2}f_2', & \frac{1}{2}f_1''-f_2, & \frac{1}{2}f_1', & f_1 \\ \frac{1}{2}f_2''-f_3, & \frac{1}{2}f_2', & & \frac{1}{2}f_1' \\ \frac{1}{2}f_3', & f_3, & \frac{1}{2}f_2', & \frac{1}{2}f_1''-f_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad E)$$

Die Gleichung *E)* ist in der That die gesuchte Differentialgleichung, in ihr sind also die Coefficienten von y, y', y'', respective y''' gegebene Functionen von t, und man könnte sie auch so schreiben:

$$X_0 y''' + X_1 y'' + X_2 y' + X_3 y = 0.$$

Anmerkung I. Setzt man $\frac{y'}{y} = z$, so lässt sich die letzte Gleichung sofort in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bekanntlich verwandeln, welche lautet:

$$X_0 z'' + (X_1 + 3zX_0)z' + (X_0 z^3 + X_1 z^2 + X_2 z + X_3) = 0.$$

Anmerkung II. Aus dem System *A)* und *B)* ergibt sich leicht, dass auch $\Sigma\psi_1''''\psi_1''''$, $\Sigma\psi_1^{(5)}\psi_1^{(5)}$ etc. gegebene Werthe besitzen. In der That folgt aus *D)* durch Differentiation nach t und nachfolgender Quadratur, weil δ eine durch *D)* gegebene Function ist:

$$\begin{vmatrix} \psi_1', & \psi_2', & \psi_3' \\ \varphi_1'', & \psi_2'', & \psi_3'' \\ \psi_1'''', & \psi_2'''', & \psi_3'''' \end{vmatrix}^2 = (\delta')^2 \qquad F)$$

Wird jetzt links in *F)* quadrirt durch Zeilencomposition, so ist links wegen *B)* Alles bekannt, mit Ausnahme von dem einzigen Glied $\Sigma\psi_1''''\psi_1'''' = f_4$, das sich demnach rational aus *F)* ergibt. Wie nun aus f_1, f_2 und f_3 soeben mittels *A)*, *B)*, *D)* und *F)* das f_4 berechnet wurde, ebenso ergibt sich aus f_2, f_3 und f_4 jetzt wörtlich $f_5 = \Sigma\psi_1^{(5)}\psi_1^{(5)}$, ja man hat in dem eben berechneten f_4, wenn dasselbe explicit als Function von f_1, f_2 und f_3 hingeschrieben ist, nur die Indices der drei f um eine Einheit zu erhöhen, wodurch sofort f_5 und analog f_6, f_7 etc. resultiren. Durch das Bisherige ist also das vorgelegte Problem der Abwickelung eines dreidimensionalen Raumes auf die Integration der Gleichung *E)* reducirt.

§. 7. Verallgemeinerung der bisherigen Betrachtungen, Analogie mit der Kreistheilungsgleichung.

Die Verallgemeinerung der Betrachtungen in §. 4 bis §. 6 ist so selbstverständlich, dass sie wohl mit einigen Worten abgethan werden kann. Will man nämlich einen abwickelbaren Raum von m Dimensionen, gelegen in einem solchen von $(m+1)$ Dimensionen, abwickeln auf einen linearen Raum von m Dimensionen, d. h. conform abbilden, wobei in Bezug auf letzteren das Grössenverhältniss gleich Eins, so kommt dies hinaus auf die Bestimmung von ψ_1', ψ_2', $\ldots\psi_m'$ aus dem System von Differentialgleichungen *A')*, worin die rechten Seiten gegebene Functionen von t sind:

$$\Sigma\psi_1'\psi_1' = f_1,\ \Sigma\psi_1''\psi_1'' = f_2, \ldots \Sigma\psi_1^{(m)}\psi_1^{(m)} = f_m \qquad A')$$

Leitet man durch Differentiation von *A')* das zu *B)* in §. 6 analoge System von Gleichungen her, so folgt sofort, dass die zu δ in §. 6 analoge Grösse δ eine gegebene Function von t ist, wobei man hat:

$$\delta = \begin{vmatrix} \psi'_1 & \psi'_2 & \dots \psi'_m \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \dots \psi''_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi^{(m)}_1 & \psi^{(m)}_2 & \dots \psi^{(m)}_m \end{vmatrix}$$

Durch Multiplication und Division von δ, nachdem es wie in §. 6 als Determinante $(m+1)$ten Grades geschrieben worden ist, wird nun in der linearen homogenen Differentialgleichung E) das System der Coefficienten von $y, y', y'', \dots y^{(m)}$

$$\begin{vmatrix} y^{(m)} & \psi_1^{(m+1)} & \psi_2^{(m+1)} & \dots \psi_m^{(m+1)} \\ y^{(m-1)} & \psi_1^{(m)} & \psi_2^{(m)} & \dots \psi_m^{(m)} \\ & & & \\ y' & \psi''_1 & \psi''_2 & \dots \psi''_m \\ y & \psi'_1 & \psi'_2 & \dots \psi'_m \end{vmatrix} = 0 \qquad E')$$

sofort bekannt und hiedurch also das Problem auf die Auflösung einer linearen homogenen Differentialgleichung $m$ter Ordnung, von welcher $\psi'_1 \dots \psi'_m$ particuläre Integrale sind, in der That reducirt. Es resultirt also eine Differentialgleichung der Form F' für $\psi'_1 \dots \psi'_m$:

$$X_0 y^{(m)} + X_1 y^{(m-1)} + \dots + X_{m-1} y' + X_m y = 0. \qquad F')$$

Nun springt auch sofort die Analogie des Systems A') mit den Kreistheilungsgleichungen in die Augen; denn kennt man z. B. ψ'_m in A'), so schreibt sich, wenn $f_h - \psi_m^{(h)} \psi_m^{(h)} = F_1$ gesetzt wird und die letzte Gleichung in A') übergangen wird als überflüssig, jetzt A') so:

$$\Sigma \psi'_1 \psi'_1 = F_1,\ \Sigma \psi''_1 \psi''_1 = F_2 \dots \Sigma \psi_1^{(m-1)} \psi_1^{(m-1)} = F_{m-1} \qquad A'')$$

und es existirt also für $\psi'_1, \psi'_2, \dots \psi'_{m-1}$ ein völlig analoges System von Differentialgleichungen. Es ist diese Eigenthümlichkeit des Systems A') ganz analog der Kreistheilungsgleichung $x^m - 1 = 0$ f'). Denn ist eine primitive Wurzel dieser Gleichung bekannt, so folgen bekanntlich aus ihr alle anderen Wurzeln von f') durch Potenzirung. Um aber zu einer solchen zu gelangen, muss man die Gleichung $x^{m-1} - 1 = 0$ z. B. vorher auflösen und umgekehrt, d. h. in Bezug auf F'):

»Ist die Gleichung $F')$ für m aufgelöst und ein einziges particuläres Integral von $F')$ für $m+1$ bekannt, so folgen alle übrigen particulären Integrale von $F')$ für $m+1$ und also das allgemeinste Integral für den Fall $m+1$.«

Man kann übrigens an Stelle von $A')$ ein allgemeineres System von Differentialgleichungen setzen; denn ist $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ die allgemeinste quadratische Form von den m Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_m$ mit constanten Coefficienten und ist $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$, wenn an Stelle von $x_1 \ldots x_m$ das System $\psi'_1 \psi'_2 \ldots \psi'_m$, respective $\psi''_1 \psi''_2 \ldots \psi''_m$ bis $\psi_1^{(m)} \psi_2^{(m)} \ldots \psi_m^{(m)}$ tritt, immer eine gegebene Function von t, d. h. hat man ein System von m ähnlichen Differentialgleichungen, so kann dasselbe durch eine orthogonale Substitution immer auf die Form gebracht werden, im Allgemeinen

$$\Sigma a_1 \psi'_1 \psi''_1 = f_1 \ldots \Sigma a_1 \psi_1^{(m)} \psi_1^{(m)} = f_m$$

und dieses System ist mit $A')$ identisch, wenn man setzt $\sqrt{a_1} \cdot \psi'_1 = \Psi'_1$ etc.

Anmerkung. Es liegt auf der Hand, dass das System $A')$ z. B. sofort auflösbar ist, wenn im Falle $m = 4$ etwa ψ'_3 und ψ'_4 bekannt sind etc.

§. 8. Lösung des Problems der Abwickelung für den Fall, als sämmtliche in §. 2 angegebenen Invarianten constant sind.

Sind die in §. 2 angegebenen Invarianten $\frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$ sämmtlich constant, so ergibt sich sofort, dass auch in dem System $A')$ des §. 7 die Grössen $f_1(t), f_2(t), \ldots$ sämmtlich constant sind, und durch Auflösen einer algebraischen Gleichung vom Grade m erhält man m particuläre Integrale der Differentialgleichung $E')$ oder $F')$ in §. 7 und daraus die allgemeine Lösung etc.

Es scheint jedoch, dass in dem Falle, wo die erwähnten Invarianten sämmtlich constant sind, das System $A')$ in §. 7 der Gleichung $E')$ oder $F')$ vorzuziehen ist, indem man mittels Determinanten sofort den Grad der algebraischen Gleichung wesentlich reduciren kann. Auch hier zeigt sich wieder der grosse Vortheil, den die Rechnung mit Determinanten gewährt. Bemerkt werden mag übrigens hier der Unterschied zwischen dem System $A')$ und $E')$ in §. 7 Beide definiren wohl dieselben Functionen $\psi'_1 \ldots \psi'_m$, aber in $E')$ sind diese Functionen vermöge der Eigenschaften von Determinanten bis auf constante Factoren nur bestimmt, die erst nachträglich mittels $A')$ zu berechnen sind.

Beispiel I. Es sei in $A')$ §. 7 $m = 3$, dann hat man das System α):

$$\left.\begin{aligned} \psi_1'^2 + \psi_2'^2 + \psi_3'^2 &= a_1 \\ \psi_1''^2 + \psi_2''^2 + \psi_3''^2 &= a_2 \\ \psi_1'''^2 + \psi_2'''^2 + \psi_3'''^2 &= a_3 \end{aligned}\right\} \qquad \alpha)$$

Ich suche dasselbe zu befriedigen, indem ich setze

$$\begin{aligned} \psi_1 &= at \\ \psi_2 &= b \cos ct \\ \psi_3 &= b \sin ct. \end{aligned}$$

Setzt man dann diese Werthe in α) ein und bestimmt die constanten a, b und c, so ergibt sich sehr ein folgendes System von Lösungen:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= t\sqrt{a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}} \\ \psi_2 &= \frac{\sqrt{a_2^3}}{a_3} \cos\left(t\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\right) \\ \psi_3 &= \frac{\sqrt{a_2^3}}{a_3} \sin\left(t\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\right) \end{aligned}$$

Nimmt man nun $\varphi_1 = \cos t$, $\varphi_2 = \sin t$, $\varphi_3 = \cos 2t$, $\varphi_4 = \sin 2t$, so ergibt sich $a_1 = 5$, $a_2 = 17$, $a_3 = 65$, und man erhält dann das in §. 5 gegebene Beispiel der Abwickelung des Raumes 1) auf den Raum 1').

Beispiel II. Es sei $n = 4$. Dann hat man für $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ folgendes System β):

$$\left.\begin{aligned} \psi_1'^2 + \psi_2'^2 + \psi_3'^2 + \psi_4'^2 &= a_1 \\ \psi_1''^2 + \psi_2''^2 + \psi_3''^2 + \psi_4''^2 &= a_2 \\ \psi_1'''^2 + \psi_2'''^2 + \psi_3'''^2 + \psi_4'''^2 &= a_3 \\ \psi_1''''^2 + \psi_2''''^2 + \psi_3''''^2 + \psi_4''''^2 &= a_4 \end{aligned}\right\} \qquad \beta)$$

Um dieses System aufzulösen, setze ich

$$\left.\begin{aligned} \psi_1' &= A \cos Bt \\ \psi_2' &= A \sin Bt \\ \psi_3' &= C \cos Dt \\ \psi_4' &= C \sin Dt \end{aligned}\right\} \qquad \beta')$$

Eine leichte Rechnung ergibt dann, dass B^2 und D^2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$\lambda^2(a_1 a_3 - a_2^2) - \lambda(a_1 a_4 - a_2 a_3) + (a_2 a_4 - a_3^2) = 0,$$

und dass dann A^2 und C^2 gegeben sind durch

$$A^2 = \frac{a_2 - a_1 D^2}{B^2 - D^2}, \quad C^2 = \frac{a_2 - a_1 B^2}{D^2 - B^2},$$

womit in β') Alles bekannt ist, also eine einfache Quadratur die vier ψ gibt.

Ich will, um das allgemeine Verfahren etwas näher zu charakterisiren, sowie um den Nachweis zu führen, dass die vollständige Bestimmung der ψ immer, wenn $n = 2m$, respective $n = 2m+1$ ist, eine Reduction auf eine algebraische Gleichung vom Grade m — in beiden Fällen gestattet, die erwähnten zwei Fälle in den Beispielen III und IV trennen.

Beispiel III. Es sei $n = 2m$. Dann ist das System γ) aufzulösen:

$$\left.\begin{array}{llll} \psi_1'^2 & + \psi_2'^2 & + \quad + \psi_{2m}'^2 & = a_1 \\ \psi_1''^2 & + \psi_1''^2 & + \ldots + \psi_{2m}''^2 & = a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \psi_1^{(2m)2} & + \psi_2^{(2m)2} & + \ldots + \psi_{2m}^{(2m)2} & = a_{2m} \end{array}\right\} \qquad \gamma)$$

Um γ) aufzulösen, setze ich

$$\left.\begin{aligned} \psi_{2h+1}' &= A_{h+1} \cos B_{h+1} t \\ \psi_{2h+2}' &= A_{h+1} \sin B_{h+1} t \end{aligned}\right\} \qquad \gamma')$$

$$h = 0, 1, 2, \ldots m-1.$$

Zu bestimmen sind dann die zwei Reihen von je m Unbekannten: $A_1 A_2 \ldots A_m$, $B_1 B_2 \ldots B_m$. Setzt man γ') in γ) ein, so resultiren die $2m$ Gleichungen γ''):

$$\left.\begin{array}{lllll}
A_1^2+A_2^2 & & + \quad + A_m^2 & & = a_1 \\
A_1^2B_1^2 & +A_2^2B_2^2 & + \quad + A_m^2B_m^2 & & = a_2 \\
A_1^2B_1^4 & +A_2^2B_2^4 & + \quad + A_m^2B_m^4 & & = a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
A_1^2B_1^{2m-2} & +A_2^2B_2^{2m-2} & + \quad + A_m^2B_m^{2m-2} & & = a_{2m}
\end{array}\right\} \qquad \gamma'')$$

Bildet man sich jetzt mittels $\gamma'')$ die Ausdrücke $a_2-\lambda a_1$, $a_3-\lambda a_2, \dots a_{2m}-\lambda a_{2m-1}$, so ergibt das Multiplicationstheorem der Determinanten nach sehr einfachen Reductionen die Gleichung $\gamma''')$:

$$\begin{vmatrix}
1, & a_1, & a_2, & \dots a_m \\
\lambda, & a_2, & a_3, & \dots a_{m+1} \\
\lambda^2, & a_3, & a_4, & \dots a_{m+2} \\
 & & \vdots & \vdots \\
\lambda^m, & a_{m+1}, & a_{m+2}, & \dots a_{2m}
\end{vmatrix} =$$

$$= \pm A_1^2A_2^2A_3^2 . A_m^2 (B_2^2-B_1^2)(B_3^2-B_1^2) \dots$$
$$\dots (B_m^2-B_{m-1}^2)(\lambda-B_1^2)\dots(\lambda-B_m^2) \qquad \gamma''')$$

Nun war λ eine beliebige Grösse, daher folgt aus $\gamma''')$, dass $B_1^2, B_2^2 \dots B_m^2$ die Wurzeln der Gleichung $m$ten Grades sind.

$$\begin{vmatrix}
1, & a_1, & a_2, & \dots a_m \\
\lambda, & a_2, & a_3, & \dots a_{m+2} \\
\lambda^2, & a_3, & a_4, & \dots a_{m+1} \\
 & \vdots & & \\
\lambda^m, & a_{m+1}, & a_{m+2}, & \dots a_{2m}
\end{vmatrix} = 0. \qquad \gamma'''')$$

Ist also diese letzte Gleichung aufgelöst, so sind $B_1^2, \dots B_m^2$ bekannt und $\gamma'')$ ist ein System linearer Gleichungen für $A_1^2, A_2^2, \dots A_m^2$, wodurch in $\gamma')$ Alles bekannt ist, demnach ist für diesen Fall die Reduction nachgewiesen.

Beispiel IV Ist $n = 2m+1$, so verfahre man wie in III, nur tritt hier noch hinzu $\psi_{2m+1} = A_{2m+1}$. Die ganz analoge Rechnung zeigt, dass dann die erste Gleichung in $\gamma'')$ links noch das Glied A_{2m+1}^2 enthält, die folgenden aber äusserlich ungeändert bleiben. Es ergibt sich dann $B_1^2 \dots B_m^2$ aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1, & a_2, & a_3, & \ldots a_{m+1} \\ \lambda, & a_3, & a_4, & \ldots a_{m+2} \\ \lambda^2, & a_4, & a_5, & \ldots a_{m+3} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_m, & a_{m+2}, & a_{m+3}, & \ldots a_{2m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Die $A_1^2, A_2^2, \ldots A_m^2, A_{m+1}^2$ folgen dann ebenfalls aus einem System linearer Gleichungen γ''), und somit ist auch für diesen Fall die Reduction dargethan.

§. 9. Die Differentialgleichungen für abwickelbare Räume, wenn die Dimension $n = 3$ ist. Kürzeste Linien derselben, Schlussbetrachtung.

Ist für rechtwinkelige Punktcoordinaten, $x_1 x_2 x_3$ und x_4, in einem Raume von vier Dimensionen die dreifach gekrümmte Curve, deren linearer dreidimensionaler Raum den abwickelbaren Raum erzeugt, gegeben durch

$$x_i = \varphi_i(u_1) \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

so ist der abwickelbare Raum der Dimension 3 nach §. 3, *D)* selbst, dargestellt in den drei Parametern u, u_2, u_3 selbst, darstellbar durch:

$$x_i = \varphi_i + \frac{\varphi_i'}{\sqrt{\Sigma \varphi_1'^2}} u_2 + \frac{\varphi_i' \Sigma \varphi_1' \varphi_1'' - \varphi_i'' \Sigma \varphi_1' \varphi_1'}{\sqrt{\Sigma \varphi_1' \varphi_1' \cdot \sum \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}^2}} u_3 \tag{2}$$

Man kann sich nun die Frage vorlegen: »Wenn an Stelle von 2) ein dreidimensionaler Raum durch die Gleichungen 3) gegeben ist, wobei ist

$$x_i = \psi_i(u_1, u_2, u_3) \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

wann stellt 3) einen dreidimensionalen „abwickelbaren“ Raum vor, d. h. wann ist es möglich, 3) in die kanonische Form 2) zu überführen?«

Das Kriterium hiefür ist gegeben durch zwei Differentialgleichungen, für welche x_1, x_2, x_3, x_4 als Functionen der unabhängigen Parameter u_1, u_2, u_3 aus 3) zu entnehmen sind. Wäre der Raum 3) in der Form gegeben:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = F(x_2, x_3, x_4),$$

so werden diese Formen sofort in 3) bekanntlich überführt, indem man setzt $x_2 = u_1$; $x_3 = u_2$, $x_4 = u_3$. Die betreffenden Formeln für die letzteren Darstellungen stehen jedoch der in 3) gegebenen infolge ihrer asymmetrischen Gestalt weit nach, wesshalb ich sie nicht ausführlich hersetze, sondern auf 3) mich beschränke. Auch für 3) will ich die bereits erwähnten Differentialgleichungen bloss historisch hier angeben und den Nachweis, den ich bereits für abwickelbare Räume beliebiger Dimension erbracht habe, hier nicht mittheilen, sondern bei nächster Gelegenheit publiciren, da die Auseinandersetzung desselben die vorliegende Abhandlung bedeutend vergrössern würde. Die Gleichung des osculirenden linearen Raumes der Dimension 3 im Punkte x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ für 3) lautet nämlich nach Früherem:

$$\Sigma \pm (\xi_1 - x_1) \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \frac{\partial x_4}{\partial u_4} = 0, \tag{5}$$

daher sind die Richtcosinuse p_i, $i = 1, 2, 3, 4$ der Normale zu 5) gegeben durch

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 = \frac{\partial r}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha_2} \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha_3} \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha_4}$$

und

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1,$$

wobei ist:

$$r = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_4}{\partial u_4} \end{vmatrix}$$

Bildet man sich nun mittels 3) zunächst

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_1}{\partial u_\beta} + \frac{\partial x_2}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_2}{\partial u_\beta} + \frac{\partial x_3}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_3}{\partial u_\beta} + \frac{\partial x_4}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_4}{\partial u_\beta} = e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha},$$

wobei $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ sind, so ergeben sich die sechs Grössen. $e_{11} e_{12} e_{13} e_{22} e_{23} e_{33}$ als gegebene Functionen von u_1, u_2 und u_3.

Berechnet man ferner $E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$, nach der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} p_1 + \frac{\partial^2 x_2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} p_2 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} p_3 + \frac{\partial^2 x_4}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} p_4 = E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha},$$

so sind auch $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}$ durch 3) gegebene Functionen von $u_1 u_2 u_3$. Soll nun der Raum 3) ein abwickelbarer sein, d. h. in der Form 2) auch äusserlich darstellbar sein, so müssen die $e_{\alpha\beta}$ und $E_{\alpha\beta}$ die folgenden zwei Differentialgleichungen befriedigen:

$$\begin{vmatrix} E_{11} E_{12} E_{13} \\ E_{21} E_{22} E_{23} \\ E_{31} E_{32} E_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad A)$$

$$\begin{vmatrix} E_{11} E_{12} e_{13} \\ E_{21} E_{22} e_{23} \\ E_{31} E_{32} e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} e_{12} E_{13} \\ E_{21} e_{22} E_{23} \\ E_{31} e_{32} E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} E_{12} E_{13} \\ e_{21} E_{22} E_{23} \\ e_{31} E_{32} E_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad B)$$

Ich behaupte also:

»Berechnet man mittels 3) die $e_{\alpha\beta}$ und $E_{\alpha\beta}$ und setzt die so gefundenen Werthe in *A)* und *B)* ein, so ist 3), wenn *A)* und *B)* erfüllt sind, ein abwickelbarer Raum und kann demnach in die Form 2) immer überführt werden.«

Der Beweis hiefür soll, wie schon erwähnt, und zwar gleich für Räume beliebiger Dimension n, wo an Stelle von *A)* und *B)* im Ganzen $(n-1)$ Gleichungen treten, bei nächster Gelegenheit publicirt werden, da ich ihn schon fertig besitze. Hier mag noch hinzugefügt werden, dass jeder abwickelbare Raum der Dimension 3, der also in der Form 2) immer dargestellt werden kann, in der That immer *A)* und *B)* befriedigt, d. h. dass der eben aufgestellte Satz auch umkehrbar ist, demnach in Wirklichkeit die erforderliche und auch ausreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit ergibt.

Wird nämlich $e_{\alpha\beta}$ und $E_{\alpha\beta}$, für $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ aus 2) berechnet, so gibt eine leichte Betrachtung wegen $p_1 = \frac{\partial r}{\partial \alpha_1}$ etc. nach bekannten Determinantensätzen:

$$E_{12} = 0 \quad E_{23} = 0 \quad E_{31} = 0 \quad E_{22} = 0 \quad E_{33} = 0$$

und damit sofort die Überzeugung, dass *A)* und *B)* wirklich befriedigt sind.

Vielleicht darf ich mir hier noch die Bemerkung gestatten, dass der Beweis des soeben bloss historisch erwähnten Satzes wesentlich zusammenhängt mit der Verallgemeinerung des Begriffes der »Krümmung«, wie ihn Gauss für Räume von einer, respective zwei Dimensionen, d. h. für Curven und Flächen aufgestellt hat, ja mit dieser Verallgemeinerung völlig identisch ist.

Werfen wir jetzt einen zusammenfassenden Blick auf das bisher Gesagte, so ergibt sich Folgendes:

1. Abwickelbare Räume der Dimension 1, 2, 3,... sind die Enveloppen einer einfach unendlichen (∞^1), und zwar continuirlich sich folgenden Schaar von linearen Räumen mit der Dimension 1, 2, 3,... in einem Raume der Dimension 2, 3, 4,... Also sind die abwickelbaren Räume niedrigster Dimension eine ebene Curve, eine abwickelbare Fläche, ein abwickelbarer Raum von drei Dimensionen etc.

2. In §. 5 wurde das ursprünglich geometrisch nicht vorstellbare Problem der Abwickelung eines dreidimensionalen Raumes in einem vierdimensionalen Raum geometrisch vorstellbar gemacht, indem es reducirt wurde auf die Auffindung einer gewissen Curve, von welcher das Bogenelement und die Winkel zweier successiven Tangenten, respective Osculationsebenen gegebene Functionen eines unabhängigen Parameters sind.

3. Die analytische Fassung des in 2) soeben angegebenen Problems wurde in §. 6 auf die Auflösung einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung reducirt, von der weiter gezeigt wurde, dass zur völligen Lösung des Problems die Kenntniss eines einzigen particulären Integrales ausreicht. Sind alle Invarianten constant, so wurde in §. 8 das Problem auf ein rein algebraisches reducirt, und ist dasselbe demnach als gelöst zu betrachten.

4. Durch den in diesem Paragraphen aufgestellten Satz, Gleichungen *A)* und *B)*, wurden die abwickelbaren Räume von den allgemeinen durch ein analytisches Kennzeichen völlig abgesondert.

Von der Tragweite der bisherigen Betrachtungen mag noch folgendes Beispiel eine Idee geben. Der durch die Gleichung α) gegebene Raum von drei Dimensionen ist, wie man mittels *A)* und *B)* z. B. nachweisen kann, ein abwickelbarer und kann auch durch die Gleichung festgelegt werden:

$$\{x_3^2+x_4^2-4(x_1^2+x_2^2)+3\}^3-27\{(x_3^2+x_4^2)+ \\ +2(x_1^2+x_2^2)-2x_3(x_1^2-x_2^2)-4x_1x_2x_4-1\}^2=0. \qquad \alpha)$$

Einfacher wird dies erkannt, wenn man ihn, wie leicht zu zeigen, als Enveloppe des linearen Raumes

$$x_3 \cos 2t+x_4 \sin 2t-4x_1 \cos t-4x_2 \sin t+3=0$$

nach Früherem auffasst, dann fällt er nämlich zusammen mit dem sub 1) und 1') in §. 5 gegebenen Beispiele.

Es seien nun in α) zwei Punkte $x_1'x_2'x_3'x_4'$ und $x_1''x_2''x_3''x_4''$ gegeben, verlangt wird die kürzeste in α) verlaufende Curve zwischen denselben. Diese Curve wird dann in folgender Weise, ohne jede weitere Überlegung gefunden, wenn beachtet wird, dass sie durch Abwickelung von 1) in §. 5 in eine Gerade übergeht. Ich denke mir mittels 1) in §. 5 die Werthe t', u', v', respective t'', u'', v'' berechnet, die den zwei gegebenen Punkten entsprechen. Vermöge 1') in §. 5 sind dann zwei Punkte $\xi_1'\xi_2'\xi_3'$, $\xi_1''\xi_2''\xi_3''$ im Raume von drei Dimensionen gegeben und damit die Gerade, welche sie verbindet, d. h. die Coefficienten in zwei Gleichungen

$$A_1\xi_1+B_1\xi_2+C_1\xi_3+D_1=0, \quad A_2\xi_1+B_2\xi_2+C_2\xi_3+D_2=0, \qquad \beta)$$

worin die ξ durch ihre Werthe in 1') zu ersetzen sind.

Hiedurch werden β) zwei gegebene Gleichungen zwischen t, u und v. Man kann also vermöge β) z. B. u und v als Functionen von t berechnen, sobald $\xi_1\xi_2\xi_3$ durch ihre Werthe — aus 1') in §. 5 — ersetzt werden. Führt man dann die so gefundenen Werthe von u und v in den Gleichungen 1) §. 5 ein, so ergeben dieselben sofort die kürzeste Linie zwischen den gegebenen zwei Punkten. In ganz analoger Weise könnte z. B. das isoperimetrische Problem für den Raum 1) in §. 5 gelöst werden, etwa die Auffindung jener Fläche in 1) §. 5, die bei gegebener Oberfläche das grösste Volumen einschliesst u. s. w.

Indem ich mir für eine demnächst erscheinende Abhandlung eine weitere Anwendung und Vertiefung der angestellten Betrachtungen vorbehalte, will ich, um Missverständnisse hintanzuhalten, noch bemerken, dass es mir sehr wohl bekannt ist, dass ausser den hier betrachteten abwickelbaren Räumen von drei Dimensionen in einem vierdimensionalen Raum noch andere, von ihnen wesentlich verschiedene existiren, ich will jedoch aus dem eben angegebenen Grunde später erst hierauf abschliessend eingehen und zu meiner Rechtfertigung hier historisch nur ein Beispiel anführen.

Es seien x, y, z, t rechtwinkelige Punktcoordinaten in einem vierdimensionalen Raum, ξ, η, ζ solche in einem dreidimensionalen. Dann behaupte ich ist der Raum

$$(t^2+z^2-x^2-y^2)^3-27\left\{xyz+\frac{1}{2}t(x^2-y^2)\right\}^2=0$$

abwickelbar, und zwar erfüllt er abgewickelt mit seinen reellen Punkten den ganzen Raum von drei Dimensionen, der ausserhalb des Kreiscylinders

$$\eta^2+\zeta^2=\left(\frac{15}{17}\right)^2$$

liegt. Die in diesem Aufsatze betrachteten abwickelbaren Räume zeichnen sich vor speciellen anderen, später in Erwägung zu ziehenden, durch die grössere Bewegungsfreiheit der Ebene aus, welche sie erzeugt.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 101_2a

Autor(en)/Author(s): Puchta Anton

Artikel/Article: Über die allgemeinsten abwickelbaren Räume, ein Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie. 355-388