Das allgemeine bicubische Reciprocitätsgesetz

Josef Anton Gmeiner in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1892.)

1. Die Theorie der sechsten Potenzreste befasst sich mit Zahlen von der Form $a+bj$, worin a und b reelle ganze Zahlen bedeuten, während j eine primitive sechste Einheitswurzel bezeichnet. Wir nehmen als Grundeinheit j die primitive sechste Einheitswurzel

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Alle Zahlen $a+bj$, welche weder durch $1+j$, noch durch 2 theilbar sind, nennen wir regulär, die durch $1+j$ oder durch 2 theilbaren Zahlen mögen dagegen als singuläre Zahlen bezeichnet werden. Ferner heisse eine Zahl $a+bj$ primär, wenn sie modulo 3 congruent 1 ist; dann haben die Coordinaten a und b einer jeden primären Zahl $a+bj$ die Form

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \quad \text{und} \quad b = 6\beta+3\sigma,$$

wobei α und β beliebige reelle ganze Zahlen sein können, während ρ und σ nur den Werth 0 oder den Werth 1 annehmen. Je nach den Werthen, welche ρ und σ haben, lassen sich drei Haupttypen von regulären, primären Zahlen unterscheiden. Zum ersten Haupttypus rechnen wir jene Zahlen, bei welchen $\rho = \sigma = 0$ ist, zum zweiten jene, bei welchen $\rho = 0$ und $\sigma = 1$ ist, und zum dritten endlich jene, bei welchen $\rho = \sigma = 1$ ist.

Ist $m = a+bj$ eine reguläre Zahl und $r = c+dj$ eine beliebige, zu m theilerfremde Zahl des eben definirten Zahlen-systems, so soll das Zeichen $\left(\frac{r}{m}\right)$, falls m eine Primzahl ist, den bicubischen Charakter von r bezüglich m ausdrücken, d. h. es soll

$$r^{\frac{p-1}{6}} \equiv \left(\frac{r}{m}\right) \quad (\text{mod.}\, m)$$

sein, worin p die Norm von m bedeutet. Für den Fall, dass m das Product der regulären Primzahlen $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ vorstellt, soll $\left(\frac{r}{m}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{r}{m}\right) = \left(\frac{r}{m_1}\right)\left(\frac{r}{m_2}\right)\cdots\left(\frac{r}{m_\nu}\right)$$

definirt sein. Endlich setzen wir fest, dass für jede Zahl r unseres Systems

$$\left(\frac{r}{1}\right) = 1$$

sein solle.

Das Zeichen $\left(\frac{r}{m}\right)$ nennen wir kurz das charakteristische Zeichen von r bezüglich m, und es ist nun unsere Aufgabe, eine Gleichung zwischen den charakteristischen Zeichen

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right),$$

worin $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ zwei beliebige reguläre, zu einander theilerfremde Zahlen unseres Systems sein können, aufzustellen. Dabei genügt es, wenn man nur primäre Zahlen in Betracht zieht.

Zwischen einer primären, regulären, reellen Zahl Q und jeder zu ihr theilerfremden, primären, regulären, zweigliederigen Zahl M mit der Norm P besteht die Reciprocitätsgleichung

$$\left(\frac{Q}{M}\right) = (-1)^{\frac{Q-1}{6}\cdot\frac{P-1}{6}}\left(\frac{Q}{M}\right). \tag{I}$$

Bei der Ableitung des bicubischen Reciprocitätsgesetzes zwischen zwei primären regulären zweigliederigen Zahlen sind wir genöthigt, verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nach den Haupttypen, welchen diese Zahlen angehören.

2. Es seien $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ zwei zueinander theilerfremde, reguläre, zweigliederige Zahlen des ersten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten und p_1 und p_2 ihre Normen; dann ist a_2 zu $a_2+b_2 j$ relativ prim und es besteht die Congruenz

$$a_2 j \equiv a_2+b_2 \quad (\text{mod. } a_2+b_2 j).$$

Demnach ist

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)\left(\frac{a_2}{a_2+b_2 j}\right)=\left(\frac{a_1 a_2+b_1 a_2 j}{a_2+b_2 j}\right)=\left(\frac{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)}{a_2+b_2 j}\right). \quad (1)$$

a_2 ist regulär und primär und ebenso $a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)$. Es ist daher zufolge (I)

$$\left(\frac{a_2}{a_2+b_2 j}\right)=(-1)^{\frac{p_2-1}{6}\cdot\frac{a_2-1}{6}}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_2}\right)=(-1)^{\frac{p_2-1}{6}\cdot\frac{a_2-1}{6}} j^{\frac{a_2^2-1}{6}} \quad (2)$$

und

$$\left(\frac{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)}{a_2+b_2 j}\right)=(-1)^{\frac{p_2-1}{6}\cdot\frac{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)-1}{6}}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)}\right). \quad (3)$$

Dem Ausdrucke $a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)$ kann man auch die Form $a_2(a_1+b_1)+b_1 b_2$ geben, und daraus erkennt man, dass jeder gemeinsame Theiler von a_1+b_1 und b_2 auch ein Theiler von $a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)$ ist. Aber auch umgekehrt ist jeder gemeinsame Theiler von a_1+b_1 und $a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)$ auch ein Theiler von b_2, da a_1 und b_1, also auch a_1+b_1 und b_1 zu einander theilerfremd sind.

Es sei nun t der grösste gemeinsame Theiler von a_1+b_1 und b_2, so dass

$$a_1+b_1=mt, \quad b_2=nt$$

und

$$a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)=(a_2 m+b_1 n)t$$

sein möge; dann ist t regulär, weil $a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)$ regulär ist, und wir können daher die Zahlen t und $a_2 m+b_1 n$ stets auch als primär annehmen, da $a_1 a_2 + b_1(a_2+b_2)$ selbst primär ist. Demgemäss ist

$$\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)}\right)=\left(\frac{a_2+tnj}{t(a_2 m+b_1 n)}\right)=\left(\frac{a_2+tnj}{t}\right)\left(\frac{a_2+tnj}{a_2 m+b_1 n}\right)$$

und, da

$$\left(\frac{a_2+tnj}{t}\right)=\left(\frac{a_2}{t}\right)=1$$

ist,

$$\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)}\right)=\left(\frac{a_2+tnj}{a_2 m+b_1 n}\right)=\left(\frac{a_2+tnj}{a_2 m+b_1 n}\right)\left(\frac{m}{a_2 m+b_1 n}\right)=$$

$$=\left(\frac{a_2 m+tmnj}{a_2 m+b_1 n}\right)=\left(\frac{-b_1 n+tmnj}{a_2 m+b_1 n}\right)=\left(\frac{-b_1+(a_1+b_1)j}{a_2 m+b_1 n}\right)=$$

$$=\left(\frac{(a_1+b_1 j)j}{a_2 m+b_1 n}\right);$$

folglich ist

$$\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)}\right)=j^{\frac{(a_2 m+b_1 n)^2-1}{6}}\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2 m+b_1 n}\right). \qquad (4)$$

Ferner ist

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2 m+b_1 n}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{a_2 m+b_1 n-1}{6}}\left(\frac{a_2 m+b_1 n}{a_1+b_1 j}\right). \qquad (5)$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{t}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_2 m+b_1 n}{a_1+b_1 i}\right)=\left(\frac{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)}{a_1+b_1 j}\right)$$

und der Congruenz

$$b_1 \equiv a_1(j-1) \quad (\text{mod. } a_1+b_1 j)$$

ergibt sich

$$\left(\frac{t}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_2 m+b_1 n}{a_1+b_1 j}\right)=\left(\frac{a_1}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{-b_2+(a_2+b_2)j}{a_1+b_1 j}\right)=$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{(a_2+b_2 j)j}{a_1+b_1 j}\right)=\left(\frac{a_1}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{j}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right).$$

Weil nun

$$\left(\frac{t}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{t}{a_1-b_1 j^2}\right)=1$$

und

$$\left(\frac{t}{a_1-b_1 j^2}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{t-1}{6}}\left(\frac{a_1+b_1-b_1 j}{t}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{t-1}{6}} j^{\frac{t^2-1}{6}}$$

ist, so folgt aus dem Vorstehenden

$$\left(\frac{a_2 m+b_1 n}{a_1+b_1 j}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{t-1}{6}} j^{\frac{t^2-1}{6}}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{j}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right)$$

also gemäss der Gleichung (5)

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2 m+b_1 n}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\left(\frac{a_2 m+b_1 n-1}{6}+\frac{t-1}{6}\right)}$$
$$\cdot j^{\frac{t^2-1}{6}}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{j}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right).$$

Nun ist

$$\left(\frac{a_1}{a_1+b_1 j}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{a_1-1}{6}}\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_1}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{a_1-1}{6}} j^{\frac{a_1^2-1}{6}}$$

und

$$\left(\frac{j}{a_1+b_1 j}\right)=j^{\frac{p_1-1}{6}}$$

folglich

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2 m+b_1 n}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\left(\frac{a_2 m+b_1 n-1}{6}+\frac{a_1-1}{6}+\frac{t-1}{6}\right)}$$
$$j^{\frac{a_1^2-1}{6}+\frac{t^2-1}{6}+\frac{p_1-1}{6}}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right). \qquad (6)$$

Aus den Gleichungen (1), (2), (3), (4) und (6) ergibt sich

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)=(-1)^{\varkappa} j^{\lambda}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right), \qquad (7)$$

wobei

$$\lambda = -\frac{a_2^2-1}{6}+\frac{(a_2m+b_1n)^2-1}{6}+\frac{a_1^2-1}{6}+\frac{t^2-1}{6}+\frac{p_1-1}{6}$$

und

$$\varkappa = \frac{p_2-1}{6}\left(\frac{a_2-1}{6}+\frac{a_1a_2+b_1(a_2+b_2)-1}{6}\right)+$$
$$+\frac{p_1-1}{6}\left(\frac{a_1-1}{6}+\frac{a_2m+b_1n-1}{6}+\frac{t-1}{6}\right)$$

gesetzt ist.

Im vorliegenden Falle, wo a_1+b_1j und a_2+b_2j dem ersten Haupttypus angehören, können wir

$$a_1 = 6\alpha_1+1,\quad b_1 = 6\beta_1,\quad a_2 = 6\alpha_2+1 \text{ und } b_2 = 6\beta_2$$

setzen, und es ist dann

$$\frac{p_1-1}{6} \equiv 2\alpha_1+\beta_1 \pmod{6},\qquad \frac{a_1-1}{6} = \alpha_1,\qquad \frac{p_2-1}{6} \equiv \beta_2 \pmod{2},$$
$$\frac{a_2-1}{6} = \alpha_2,\qquad \frac{a_1^2-1}{6} \equiv 2\alpha_1 \pmod{6},\qquad \frac{a_2^2-1}{6} \equiv 2\alpha_2 \pmod{6}$$

und

$$\frac{a_1a_2+b_1(a_2+b_2)-1}{6} \equiv \alpha_1+\alpha_2+\beta_1 \pmod{2}.$$

Setzen wir ferner $t = 6\tau+1$, so ist

$$(6\tau+1)m = a_1+b_1 = 6(\alpha_1+\beta_1)+1 \text{ und } (6\tau+1)n = b_2 = 6\beta_2. \tag{8}$$

Daraus erkennt man, dass $m-1$ und n durch 6 theilbar sein müssen. Wir schreiben daher

$$m = 6\mu+1 \text{ und } n = 6\nu;$$

dann ist

$$\frac{a_2m+b_1n-1}{6} \equiv \alpha_2+\mu \pmod{2} \text{ und}$$

$$\frac{(a_2m+b_1n)^2-1}{6} \equiv 2(\alpha_2+\mu) \pmod{6}.$$

Nun ist nach (8)

$$(6\tau+1)(6\mu+1) = 6(\alpha_1+\beta_1)+1, \text{ also } \mu \equiv \alpha_1+\beta_1-\tau \pmod{6}.$$

Demnach ist

$$\frac{a_2 m+b_1 n-1}{6} \equiv \alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\tau \pmod 2 \text{ und}$$

$$\frac{(a_2 m+b_1 n)^2-1}{6} \equiv 2(\alpha_2+\alpha_1+\beta_1-\tau) \pmod{6}.$$

Weil ferner noch

$$\frac{t-1}{6} = \tau \text{ und } \frac{t^2-1}{6} \equiv 2\tau \pmod{6}$$

ist, so erhält man für $\varkappa$ und λ die Congruenzen

$$\varkappa \equiv \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1\beta_2+\beta_1 \pmod{2} \text{ und } \lambda \equiv 3\beta_1 \pmod{6}.$$

Demzufolge ergibt sich aus (7) die Reciprocitätsgleichung

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1\beta_2}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right) \qquad \text{(II)}$$

3. Ist $a_1+b_1 j$ eine zweigliederige Zahl des ersten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten und $a_2+b_2 j$ eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten, so können wir

$$a_1 = 6\alpha_1+1,\ b_1 = 6\beta_1,\ a_2 = 6\alpha_2+1 \text{ und } b_2 = 6\beta_2+3$$

setzen, wobei α_1, β_1, α_2 und β_2 reelle ganze Zahlen sind, und es ist dann sowohl a_2, als auch $a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)$ regulär und primär und ausserdem noch a_2 zu $a_2+b_2 j$ relativ prim. Folglich besteht auch hier die Gleichung (7) der vorstehenden Nummer. Im vorliegenden Falle ist aber

$$\frac{p_2-1}{6} \equiv \alpha_2+\beta_2 \pmod{2} \text{ und } \frac{a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)-1}{6} \equiv$$

$$\equiv \alpha_1+\alpha_2 \pmod{2},$$

und wenn wir dieselbe Bezeichnung beibehalten, wie in der vorausgehenden Nummer, was auch in den folgenden Nummern geschehen soll, so ist

$$(6\tau+1)m = 6(\alpha_1+\beta_1)+1 \text{ und } (6\tau+1)n = 6\beta_2+3. \quad (1)$$

Daraus ersieht man, dass $m-1$ und $n-3$ durch 6 theilbar ist, so dass wir

$$m = 6\mu+1 \text{ und } n = 6\nu+3$$

setzen können. Dann ist

$$\frac{a_2 m+b_1 n-1}{6} \equiv \alpha_2+\beta_1+\mu \,(\text{mod. } 2) \text{ und } \frac{(a_2 m+b_1 n)^2-1}{6} \equiv$$
$$\equiv 2(\alpha_2+\mu)\ (\text{mod. } 6).$$

Nun ist nach (1)

$$(6\tau+1)(6\mu+1) = 6(\alpha_1+\beta_1)+1, \text{ also } \mu \equiv \alpha_1+\beta_1-\tau \ (\text{mod. } 6).$$

Demnach ist

$$\frac{a_2 m+b_1 n-1}{6} \equiv \alpha_1+\alpha_2+\tau \ (\text{mod. } 2) \text{ und } \frac{(a_2 m+b_1 n)^2-1}{6} \equiv$$
$$\equiv 2(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1-\tau)\ (\text{mod. } 6).$$

Aus dem Vorstehenden folgt

$$\varkappa \equiv (\alpha_2+\beta_2)\alpha_1+\beta_1\alpha_2 \ (\text{mod. } 2) \text{ und } \lambda \equiv 3\beta_1 \ (\text{mod. } 6).$$

Demnach lautet die Reciprocitätsgleichung für den vorliegenden Fall

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right). \quad (\text{III})$$

4. Ist $a_1+b_1 j$ eine zweigliederige Zahl des ersten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten und $a_2+b_2 j$ eine Zahl des dritten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten, und setzen wir

$$a_1 = 6\alpha_1+1,\ b_1 = 6\beta_1,\ a_2 = 6\alpha_2+4 \text{ und } b_2 = 6\beta_2+3,$$

so ist

$$a_1-b_1 j^2 = a_1+b_1-b_1 j = 6(\alpha_1+\beta_1)+1-6\beta_1 j$$

eine zweigliederige Zahl des ersten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten und

$$a_2-b_2 j^2 = a_2+b_2-b_2 j = 6(\alpha_2+\beta_2+1)+1+\{-6(\beta_2+1)+3\}j$$

eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten. Es ist somit zufolge der Gleichung (III)

$$\left(\frac{a_1-b_1 j^2}{a_2-b_2 j^2}\right) = (-1)^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}\left(\frac{a_2-b_2 j^2}{a_1-b_1 j^2}\right). \tag{1}$$

Nun ist sowohl

$$\left(\frac{a_1-b_1 j^2}{a_2-b_2 j^2}\right)\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right) = 1$$

als auch

$$\left(\frac{a_2-b_2 j^2}{a_1-b_1 j^2}\right)\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right) = 1;$$

denn ist m eine reguläre Zahl und n eine beliebige zu m theilerfremde Zahl unseres Systems und bedeuten m' und n' die Conjugirten zu m und n, so ist stets

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m'}\right) = 1. \tag{2}$$

Demgemäss folgt aus (1) die Reciprocitätsgleichung

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right). \tag{IV}$$

5. Bedeutet $a_1+b_1 j$ eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten und macht man dieselbe Voraussetzung auch bezüglich $a_2+b_2 j$, so kann man

$$a_1 = 6\alpha_1+1,\ b_1 = 6\beta_1+3,\ a_2 = 6\alpha_2+1 \text{ und } b_2 = 6\beta_2+3$$

setzen. Daraus erkennt man, dass a_2 und $a_1 a_2+b_1(a_2+b_2)$ wieder zwei reguläre primäre Zahlen sind. Auch ist zufolge der gemachten Voraussetzungen a_2 zu $a_2+b_2 j$ relativ prim. Somit bleibt die Gleichung (7) der Nummer 2 auch für diesen Fall bestehen. Hier ist aber

$$\frac{p_1-1}{6}\equiv 5\alpha_1+\beta_1+2 \pmod{6},\ \frac{a_1-1}{6}=\alpha_1,\ \frac{a_1^2-1}{6}\equiv 2\alpha_1 \pmod{6},$$

$$\frac{p_2-1}{6}\equiv \alpha_2+\beta_2 \pmod{2},\ \frac{a_2-1}{6}=\alpha_2,\ \frac{a_2^2-1}{6}\equiv 2\alpha_2 \pmod{6}$$

und

$$\frac{a_1a_2+b_1(a_2+b_2)-1}{6}\equiv \alpha_1+\beta_2 \pmod{2}.$$

Ferner ist

$$(6\tau+1)m=6(\alpha_1+\beta_1)+4 \text{ und } (6\tau+1)n=6\beta_2+3, \tag{1}$$

d. h. es ist $m-4$ und $n-3$ durch 6 theilbar, so dass wir

$$m=6\mu+4 \text{ und } n=6\nu+3$$

setzen können. Daraus ergibt sich

$$\frac{a_2m+b_1n-1}{6}\equiv \mu+\beta_1+\nu \pmod{2} \text{ und } \frac{(a_2m+b_1n)^2-1}{6}\equiv$$
$$\equiv 2(\alpha_2+\mu+2) \pmod{6}.$$

Zufolge (1) ist

$$(6\tau+1)(6\mu+4)=6(\alpha_1+\beta_1)+4 \text{ und } (6\tau+1)(6\nu+3)=6\beta_2+3$$

also

$$\mu\equiv\alpha_1+\beta_1-4\tau \pmod{6} \text{ und } \nu\equiv\beta_2-3\tau \pmod{6},$$

so dass wir

$$\frac{a_2m+b_1n-1}{6}\equiv \alpha_1+\beta_2+\tau \pmod{2} \text{ und } \frac{(a_2m+b_1n)^2-1}{6}\equiv$$
$$\equiv 2(\alpha_2+\alpha_1+\beta_1-4\tau+2) \pmod{6}$$

erhalten. Somit bestehen bezüglich $\varkappa$ und λ die Congruenzen

$$\varkappa\equiv\alpha_2+\beta_2+\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2 \pmod{2} \text{ und } \lambda\equiv 3(\alpha_1+\beta_1) \pmod{6}$$

und es ist daher

$$\left(\frac{a_1+b_1j}{a_2+b_2j}\right)=(-1)^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2}\left(\frac{a_2+b_2j}{a_1+b_1j}\right). \tag{V}$$

6. Sind $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ zwei Zahlen des dritten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten, so haben ihre Coordinaten die Formen

$$a_1 = 6\alpha_1+4,\ b_1 = 6\beta_1+3,\ a_2 = 6\alpha_2+4 \text{ und } b_2 = 6\beta_2+3.$$

Die Conjugirten zu $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ sind zwei Zahlen des zweiten Haupttypus mit ebenfalls zueinander theilerfremden Coordinaten und es ist

$$a_1-b_1 j^2 = a_1+b_1-b_1 j = 6(\alpha_1+\beta_1+1)+1+\{-6(\beta_1+1)+3\}j$$

und

$$a_2-b_2 j^2 = a_2+b_2-b_2 j = 6(\alpha_2+\beta_2+1)+1+\{-6(\beta_2+1)+3\}j.$$

Es besteht daher zwischen den Zahlen $a_1-b_1 j^2$ und $a_2-b_2 j^2$ wieder die soeben abgeleitete Reciprocitätsgleichung (V), wobei jedoch zu beachten ist, dass man für den gegenwärtigen Fall $\alpha_1+\beta_1+1$, $-(\beta_1+1)$, $\alpha_2+\beta_2+1$ und $-(\beta_2+1)$ statt α_1, β_1, a_2 und β_2 in (V) der Reihe nach zu setzen hat. Auf diese Weise gelangt man zu der Gleichung

$$\left(\frac{a_1-b_1 j^2}{a_2-b_2 j^2}\right) = (-1)^{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}\left(\frac{a_2-b_2 j^2}{a_1-b_1 j^2}\right).$$

Daher ist zufolge der Gleichung (2) der Nummer 4 auch

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right). \qquad \text{(VI)}$$

7. Ist $a_1+b_1 j$ eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten und $a_2+b_2 j$ eine ebensolche Zahl des dritten Haupttypus, so ist

$$a_1 = 6\alpha_1+1,\ b_1 = 6\beta_1+3,\ a_2 = 6\alpha_2+4 \text{ und } b_2 = 6\beta_2+3,$$

und die zu $a_2+b_2 j$ Conjugirte

$$a_2-b_2 j^2 = a_2+b_2-b_2 j = 6(\alpha_2+\beta_2+1)+1+\{-6(\beta_2+1)+3\}j$$

ist eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zueinander theilerfremden Coordinaten. Somit ist nach Gleichung (V)

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2-b_2 j^2}\right) = (-1)^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2}\left(\frac{a_2-b_2 j^2}{a_1+b_1 j}\right). \qquad (1)$$

Nun ist, wenn p_2 die Norm von $a_2+b_2 j$ bedeutet,

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{p_2}\right)=\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2-b_2 j^2}\right),$$

$$\left(\frac{p_2}{a_1+b_1 j}\right)=\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_2-b_2 j^2}{a_1+b_1 j}\right),$$

und demnach erhält man aus (1)

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)\left(\frac{p_2}{a_1+b_1 j}\right)=(-1)^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_1+b_1 j}{p_2}\right).$$

Bezeichnen wir noch mit p_1 die Norm von $a_1+b_1 j$, so ist zufolge der Gleichung (I)

$$\left(\frac{p_2}{a_1+b_1 j}\right)=(-1)^{\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{p_2-1}{6}}\left(\frac{a_1+b_1 j}{p_2}\right)$$

und daher

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)=(-1)^{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2+\frac{p_1-1}{6}\cdot\frac{p_2-1}{6}}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right). \quad (2)$$

Im vorliegenden Falle ist nun

$$\frac{p_1-1}{6}\equiv\alpha_1+\beta_1 \ (\mathrm{mod.}\ 2) \ \text{ und } \ \frac{p_2-1}{6}\equiv\alpha_2 \ (\mathrm{mod.}\ 2);$$

folglich ergibt sich aus (2) die Reciprocitätsgleichung

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)=(-1)^{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1\beta_2+\alpha_2}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right) \qquad \text{(VII)}$$

8. In den vorausgehenden Nummern haben wir alle möglichen Fälle der Reciprocität zweier zweigliederigen Zahlen mit zueinander theilerfremden Coordinaten untersucht und dabei sechs Reciprocitätsgleichungen (II bis VII) aufgestellt, entsprechend den sechs Combinationen, welche die möglichen Haupttypen zweier regulärer Zahlen zulassen. Diese sechs Gleichungen lassen sich nun, wie wir zeigen werden, durch eine einzige Gleichung ersetzen. Um diese letztere Gleichung aufzufinden, legen wir uns das folgende Schema an:

Exponenten von -1	Haupttypus der Zahl			Rest modulo 2 der Zahl								
	a_1+b_1j	a_2+b_2j	$A+Bj$	a_1	b_1	a_1+b_1+1	a_2	b_2	a_2+b_2+1	A	B	$A+B$
$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+\beta_1\beta_2$	1.	1.	1.	1	0	0	1	0	0	1	0	1
$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+\alpha_1\alpha_2+\beta_1$	1.	2.	2.	1	0	0	1	1	1	1	1	0
$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2$	1.	3.	3.	1	0	0	0	1	0	0	1	1
$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2$	2.	2.	3.	1	1	1	1	1	1	0	1	1
$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+\alpha_1\alpha_2$	3.	3.	2.	0	1	0	0	1	0	1	1	0
$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+\beta_1\beta_2+\alpha_2$	2.	3.	1.	1	1	1	0	1	0	1	0	1

Die erste Spalte dieses Schemas enthält den Exponenten von -1 aus derjenigen von den sechs Reciprocitätsgleichungen (II bis VII), welche den in derselben Zeile stehenden Haupttypen der Zahlen a_1+b_1j und a_2+b_2j entspricht. Die über der vierten Spalte stehende Zahl $A+Bj$ bedeutet das Product aus den Zahlen a_1+b_1j und a_2+b_2j. Alles Übrige ist in dem Schema selbst ersichtlich gemacht.

Das vorstehende Schema sagt uns nun Folgendes:

Der Ausdruck $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$ kommt im Exponenten der den Zahlen a_1+b_1j und a_2+b_2j entsprechenden Reciprocitätsgleichung vor, wenn $A+Bj$ dem ersten oder zweiten, nicht aber, wenn $A+Bj$ dem dritten Haupttypus angehört. Nach der drittletzten Spalte ist nun dann und nur dann

$$A\equiv 0 \pmod{2},$$

wenn $A+Bj$ dem dritten Haupttypus angehört. Wir können daher in die Exponenten aller sechs Reciprocitätsgleichungen den Ausdruck $A(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$ einsetzen. Das Product $\beta_1\beta_2$ kommt überall vor, ausser wo $A+Bj$ dem zweiten Haupttypus angehört. Wir können daher gemäss der letzten Spalte unseres Schemas in allen Exponenten das Glied $(A+B)\beta_1\beta_2$ anbringen.

Das Glied $\alpha_1\alpha_2$ steht in allen Fällen, wo $A+Bj$ nicht dem ersten Haupttypus angehört. Es genügt daher überall das Glied $B\alpha_1\alpha_2$ zufolge der Angaben der anderletzten Spalte. Das Glied β_1 steht überall dort, wo $a_2+b_2 j$ dem zweiten und $a_1+b_1 j$ nicht dem dritten Haupttypus angehört; denn würde man in der sechsten Reciprocitätsgleichung (VII) auch $a_1+b_1 j$ mit $a_2+b_2 j$ vertauschen, d. h. würde man die Annahme machen, dass $a_1+b_1 j$ dem dritten und $a_2+b_2 j$ dem zweiten Haupttypus angehören solle, so würde in dem Exponenten der entsprechend umgeformten Reciprocitätsgleichung (VII) das Glied β_1 doch nicht auftreten; es hätte nämlich in diesem Falle der Exponent die Gestalt

$$\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\beta_1\beta_2+\alpha_1.$$

Wir können daher nach den Angaben der achten und zehnten Spalte für alle Fälle in den Exponenten das Glied

$$(a_2+b_2+1)a_1\beta_1$$

schreiben.

Durch ähnliche Betrachtungen erhält man noch die Glieder

$$(a_1+b_1+1)a_2\beta_2,\ (a_2+b_2+1)b_1\alpha_1 \text{ und } (a_1+b_1+1)b_2\alpha_2.$$

Auf diese Weise gelangen wir zu der Gleichung

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)=$$
$$=(-1)^{A(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+B\alpha_1\alpha_2+(A+B)\beta_1\beta_2+(a_1+b_1+1)(a_2\beta_2+b_2\alpha_2)+(a_2+b_2+1)(a_1\beta_1+b_1\alpha_1)}.$$
$$\cdot\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right). \qquad \text{(VIII)}$$

Diese Gleichung ersetzt die sechs Gleichungen (II bis VII) vollkommen und geht, wie man sich leicht überzeugen kann, in den einzelnen Fällen in jene Gleichungen über.

Der Exponent der Gleichung (VIII) ändert sich nicht, wenn man in demselben den Index 1 mit dem Index 2 vertauscht, er ist also in Bezug auf die Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ vollkommen symmetrisch gebildet. Aber es bleibt auch die ganze Gleichung ihrem Wesen nach ungeändert, wenn man darin die Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ mit einander vertauscht. Man kann daher sagen, dass die ganze Gleichung (VIII) in Bezug auf die beiden Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ symmetrisch gebaut sei; denn die scheinbare Unsymmetrie, welche noch darin liegt, dass auf der linken Seite $\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)$ allein steht, während auf der rechten Seite $\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right)$ noch mit einem Coefficienten behaftet erscheint, wird dem Wesen nach dadurch behoben, dass dieser Coefficient nur den Werth $+1$ oder den Werlh -1 hat.

Der Haupttypus, welchem das Product

$$A+Bj = (a_1+b_1 j)(a_2+b_2 j)$$

angehört, ist bekannt, sobald man die Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ kennt; denn bezüglich des Haupttypus eines Productes bestehen, wie die vorstehende Tabelle zeigt, folgende Sätze:

1. Das Product einer Zahl des ersten Haupttypus mit einer Zahl irgendeines Haupttypus gehört dem Haupttypus der letzteren an.

2. Das Product zweier Zahlen des zweiten Haupttypus ist eine Zahl des dritten Haupttypus.

3. Das Product zweier Zahlen des dritten Haupttypus ist eine Zahl des zweiten Haupttypus.

4. Das Product aus einer Zahl des zweiten und einer Zahl des dritten Haupttypus ist eine Zahl des ersten Haupttypus.

Zufolge dieser Sätze kann man den Haupttypus der Zahl $A+Bj$ in jedem speciellen Falle zum voraus, d. h. ohne die Zahl $A+Bj$ selbst zu bilden, bestimmen, und dann weiss man auch, ob die Zahlen A und B gerade oder ungerade sind. Da es nun für den Exponenten von -1 in der Reciprocitätsgleichung (VIII) nur darauf ankommt, ob die Zahlen A und B gerade oder ungerade seien, so ist es zur Bestimmung dieses Exponenten durchaus nicht nothwendig, die Zahl $A+Bj$ oder ihre Coordinaten A und B selbst zu bilden, weil uns die Haupttypen der Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ schon diejenige Eigenschaft von A und B erkennen lassen, welche wir zu wissen brauchen.

9. Die Gleichung (VIII) gilt auch für den Fall, dass die eine der Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ reell ist, während die andere eine beliebige reguläre primäre zweigliederige und zu der ersteren theilerfremde Zahl ist, deren Coordinaten nicht zueinander theilerfremd zu sein brauchen. Die Gleichung (VIII) geht nämlich in diesem Falle in die Gleichung (I) über, was wir jetzt zeigen wollen. Ist $a_1+b_1 j = \underset{\sim}{Q}$ eine reelle reguläre primäre Zahl, so hat man

$$a_1 = Q \equiv 1 \text{ (mod. 2)},\; \alpha_1 \equiv \frac{\underset{\sim}{Q}-1}{6},\; b_1 = \beta_1 = 0,$$
$$A = \underset{\sim}{Q}a_2 \equiv a_2 \text{ (mod. 2) und } B = \underset{\sim}{Q}b_2 \equiv b_2 \text{ (mod. 2)}$$

und es reducirt sich der Exponent der Gleichung (VIII) für diesen Fall auf den Ausdruck

$$\frac{\underset{\sim}{Q}-1}{6}(a_2\beta_2+b_2\alpha_2). \tag{1}$$

Setzen wir

$$a_2 = 6\alpha_2+3\rho_2+1 \text{ und } b_2 = 6\beta_2+3\sigma_2,$$

so haben ρ_2 und σ_2 nur die Werthe 0 oder 1, und es ist

$$a_2\beta_2+b_2\alpha_2 \equiv \rho_2\beta_2+\beta_2+\sigma_2\alpha_2 \text{ (mod. 2)}. \tag{2}$$

Bezeichnen wir ferner mit P die Norm von $a_2+b_2 j$, so ist

$$P = a_2^2+b_2^2+a_2b_2 = (6\alpha_2+3\rho_2+1)^2+(6\beta_2+3\sigma_2)^2+ \\ +(6\alpha_2+3\rho_2+1)(6\beta_2+3\sigma_2)$$

und daraus findet man, wenn man berücksichtigt, dass stets

$$\rho_2^2 = \rho_2,\; \sigma_2^2 = \sigma_2 \text{ und } \rho_2\sigma_2 = \rho_2$$

ist,

$$P \equiv 6(\rho_2\beta_2+\beta_2+\sigma_2\alpha_2)+1 \text{ (mod. 12)},$$

also

$$\frac{P-1}{6} \equiv \rho_2\beta_2+\beta_2+\sigma_2\alpha_2 \text{ (mod. 2)}. \tag{3}$$

Daher ist zufolge (2) auch

$$a_2\beta_2+b_2\alpha_2 \equiv \frac{P-1}{6} \text{ (mod. 2)},$$

und man kann demnach den Ausdruck (1) im Exponenten der Reciprocitätsgleichung durch das Product

$$\frac{\underset{\sim}{Q}-1}{6}\cdot\frac{P-1}{6}$$

ersetzen. Wir erhalten daher, wenn wir noch $a_2+b_2 j = M$ setzen, aus (VIII) im vorliegenden Falle die Gleichung

$$\left(\frac{\underset{\sim}{Q}}{M}\right) = (-1)^{\frac{\underset{\sim}{Q}-1}{6}\cdot\frac{P-1}{6}}\left(\frac{M}{\underset{\sim}{Q}}\right),$$

d. i. die Gleichung (I).

Auch für den Fall, dass sowohl $a_1+b_1 j$, als auch $a_2+b_2 j$ eine reelle reguläre primäre Zahl vorstellt, bleibt die Gleichung (VIII) bestehen. Denn in diesem Falle ist

$$B = b_1 = \beta_1 = b_2 = \beta_2 = 0,$$

so dass der Exponent in (VIII) verschwindet und der Coefficient auf der rechten Seite dieser Gleichung den Werth $+1$ erhält, was in der That richtig ist, weil das charakteristische Zeichen einer reellen Zahl bezüglich einer jeden reellen regulären und zu der ersteren theilerfremden Zahl den Werth 1 hat und daher zwischen reellen regulären Zahlen immer vollständige bicubische Reciprocität besteht.

10. Ein Fall der Reciprocität ist bei unseren bisherigen Untersuchungen noch unberücksichtigt geblieben. Wir haben nämlich bei der Annahme, dass $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ zwei zweigliederige reguläre Zahlen vorstellen sollen, stets noch die Bedingung daran geknüpft, dass sowohl a_1 zu b_1, als auch a_2 zu b_2 relativ prim sei, und nur, wenn die eine der Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ reell war, durfte die andere Coordinaten besitzen, welche nicht zueinander theilerfremd waren. Nun lässt sich aber zeigen, dass die Gleichung (VIII) ganz allgemein für zwei beliebige reguläre primäre und zueinander theilerfremde Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ richtig ist. Um dieses zu zeigen, brauchen wir nur den Beweis zu erbringen, dass die Gleichung (VIII), falls dieselbe für zwei reguläre primäre Zahlen $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ besteht, auch noch für die Zahlen

$$a'+b'j = \underset{\sim}{Q}(a_1+b_1 j) \text{ und } a_2+b_2 j,$$

wobei Q eine reguläre primäre reelle Zahl bedeutet, bestehen bleibt. Setzen wir also

$$A(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+B\alpha_1\alpha_2+(A+B)\beta_1\beta_2+(a_1+b_1+1)(a_2\beta_2+b_2\alpha_2)+ \\ +(a_2+b_2+1)(a_1\beta_1+b_1\alpha_1) = \varkappa,$$

$$a' = 6\alpha'+3\rho'+1,\quad b' = 6\beta'+3\sigma',\quad (a'+b'j)(a_2+b_2 j) = A'+B'j$$

und

$$A'(\alpha'\beta_2+\alpha_2\beta')+B'\alpha'\alpha_2+(A'+B')\beta'\beta_2+(a'+b'+1)(a_2\beta_2+b_2\alpha_2)+ \\ +(a_2+b_2+1)(a'\beta'+b'\alpha') = \varkappa',$$

so haben wir zu beweisen. dass neben der Gleichung

$$\left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\varkappa}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right) \tag{1}$$

stets auch die Gleichung

$$\left(\frac{a'+b'j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\varkappa'}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a'+b'j}\right) \tag{2}$$

besteht.

Bezeichnen wir die Norm von $a_2+b_2 j$ mit P, so ist zufolge der Gleichungen (1) und (I)

$$\left(\frac{a'+b'j}{a_2+b_2 j}\right) = \left(\frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j}\right)\left(\frac{Q}{a_2+b_2 j}\right) = \\ = (-1)^{\varkappa+\frac{Q-1}{6}\cdot\frac{P-1}{6}}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a_1+b_1 j}\right)\left(\frac{a_2+b_2 j}{Q}\right)$$

also

$$\left(\frac{a'+b'j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\varkappa+\frac{Q-1}{6}\cdot\frac{P-1}{6}}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a'+b'j}\right).$$

Setzt man noch $\frac{Q-1}{6} = m$, so folgt daraus unter Berücksichtigung der Congruenz (3) der vorigen Nummer

$$\left(\frac{a'+b'j}{a_2+b_2 j}\right) = (-1)^{\varkappa+m(\rho_2\beta_2+\beta_2+\sigma_2\alpha_2)}\left(\frac{a_2+b_2 j}{a'+bj}\right). \tag{3}$$

Nun ist

$$A' = QA \equiv A \pmod{2},\ \ B' = QB \equiv B \pmod{2},$$
$$a' = Qa_1 \equiv a_1 \pmod{2} \text{ und } b' = Qb_1 \equiv b_1 \pmod{2}.$$

Setzen wir ferner noch

$$a_1 = 6\alpha_1 + 3\rho_1 + 1 \text{ und } b_1 = 6\beta_1 + 3\sigma_1,$$

so erhalten wir

$$a' = 6\{m(6\alpha_1 + 3\rho_1 + 1) + \alpha_1\} + 3\rho_1 + 1,$$
$$b' = 6\{m(6\beta_1 + 3\sigma_1) + \beta_1\} + 3\sigma_1,$$
$$\alpha' = m(6\alpha_1 + 3\rho_1 + 1) + \alpha_1 \equiv \rho_1 m + m + \alpha_1 \pmod{2} \text{ und}$$
$$\beta' = m(6\beta_1 + 3\sigma_1) + \beta_1 \equiv \sigma_1 m + \beta_1 \pmod{2}.$$

Es ist demnach

$$\begin{aligned}\varkappa' \equiv A\{(\rho_1 m + m + \alpha_1)\beta_2 + \alpha_2(\sigma_1 m + \beta_1)\} + B(\rho_1 m + m + \alpha_1)\alpha_2 + \\ + (A+B)(\sigma_1 m + \beta_1)\beta_2 + (a_1 + b_1 + 1)(a_2\beta_2 + b_2\alpha_2) + \\ + (a_2 + b_2 + 1)\{a_1(\sigma_1 m + \beta_1) + b_1(\rho_1 m + m + \alpha_1)\} \pmod{2},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\varkappa' \equiv \varkappa + m\{A(\rho_1 + 1)\beta_2 + A\sigma_1\alpha_2 + B(\rho_1 + 1)\alpha_2 + (A+B)\sigma_1\beta_2 + \\ + (a_2 + b_2 + 1)(\sigma_1 a_1 + \rho_1 b_1 + b_1)\} \pmod{2} \qquad (4)\end{aligned}$$

Da

$$A + Bj = (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j)$$

ist, so ist

$$A = a_1 a_2 - b_1 b_2 \text{ und } B = a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2,$$

und daraus folgt

$$A \equiv \rho_1\rho_2 + \sigma_1\sigma_2 + \rho_1 + \rho_2 + 1 \pmod{2}$$

und

$$B \equiv \rho_1\sigma_2 + \rho_2\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_2 \pmod{2}$$

weil

$$a_1 \equiv \rho_1 + 1 \pmod{2},\ \ b_1 \equiv \sigma_1 \pmod{2},\ \ a_2 \equiv \rho_2 + 1 \pmod{2}$$

und

$$b_2 \equiv \sigma_2 \pmod{2}$$

ist.

Zufolge dieser Congruenzen und der Gleichungen

$$\rho_1^2 = \rho_1, \; \sigma_1^2 = \sigma_1 \; \text{ und } \; \rho_1\sigma_1 = \rho_1$$

ergibt sich aus (4) die Congruenz

$$\varkappa' \equiv \varkappa + m(\rho_2\beta_2 + \beta_2 + \sigma_2\alpha_2) \pmod{2}.$$

Wir erhalten daher aus der Gleichung (3) die Gleichung (2), und es besteht somit neben der Gleichung (1) stets auch die Gleichung (2). Demnach ist die Gleichung (VIII) für alle möglichen Fälle der bicubischen Reciprocität giltig und stellt daher das bicubische Reciprocitätsgesetz in seiner allgemeinsten Form dar.

11. Für zwei einander conjugirte Zahlen $a+bj$ und $a-bj^2 = a+b-bj$ erhält man aus (VIII) leicht die Gleichung

$$\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+bj}{a-bj^2}\right),$$

d. h. zwischen zwei einander conjugirten, regulären primären Zahlen besteht vollständige Reciprocität. Natürlich muss in diesem Falle a zu b relativ prim sein, weil sonst die Zahlen $a+bj$ und $a-bj^2$ einen gemeinsamen Theiler hätten.

Das charakteristische Zeichen einer Zahl bezüglich ihrer Conjugirten kann man übrigens auch direct bestimmen, und zwar auf folgende Weise:

1. Gehört $a+bj$ dem ersten Haupttypus an, so ist

$$a = 6\alpha+1, \; b = 6\beta, \; a-b = 6(\alpha-\beta)+1,$$

also $a-b$ eine reguläre primäre reelle Zahl. Es ist daher

$$\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+b-bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{(a-b)\,j}{a+bj}\right) = j^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{a-b}{a+bj}\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-b-1}{6}}\, j^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{a+bj}{a-b}\right),$$

wobei p die Norm von $a+bj$ bedeutet. Nun ist

$$\left(\frac{a+bj}{a-b}\right) = \left(\frac{b(1+j)}{a-b}\right) = \left(\frac{1+j}{a-b}\right) = j^{\frac{a-b-1}{6}}$$

folglich

$$\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-b-1}{6}}\, j^{\frac{p-1}{6}+\frac{a-b-1}{6}} \tag{1}$$

Im vorliegenden Falle ist nun

$$\frac{p-1}{6} \equiv 2\alpha+\beta = 2\,\frac{a-1}{6}+\frac{b}{6} \pmod{6},$$

und man erhält daher aus (1)

$$\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{b}{6}\,\frac{a-1}{6}+\frac{a-b-1}{6}} \tag{2}$$

2. Gehört $a+bj$ dem dritten Haupttypus an, so ist

$$a = 6\alpha+4,\ b = 6\beta+3,\ a-b = 6(\alpha-\beta)+1$$

also $a-b$ wieder eine reguläre primäre reelle Zahl, und daher besteht wieder die Gleichung (1). Hier ist

$$\frac{p-1}{6} \equiv 5\alpha+4\beta \pmod{6} \text{ und } \frac{a-b-1}{6} = \alpha-\beta,$$

folglich nach (1)

$$\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta+\alpha\beta}.$$

Dafür kann man auch

$$\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = (-1)^{\left[\frac{a}{6}\right]+\left[\frac{b}{6}\right]+\left[\frac{a}{6}\right]\left[\frac{b}{6}\right]} \tag{3}$$

schreiben, wenn allgemein $[A]$ die grösste in A enthaltene ganze Zahl bedeutet. Auf dieselbe Form kann man auch die Gleichung (2) bringen, so dass sowohl für eine Zahl $a+bj$ des ersten Haupttypus, als auch für eine solche des dritten Haupttypus die Gleichung (3) besteht.

3. Gehört $a+bj$ dem zweiten Haupttypus an, so ist

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta+3.$$

In diesem Falle gehört $a-bj^2 = a+b-bj$ zum dritten Haupttypus, und wir haben zufolge der Gleichung (3)

$$\left(\frac{a+bj}{a-bj^2}\right) = (-1)^{\left[\frac{a+b}{6}\right]+\left[\frac{-b}{6}\right]+\left[\frac{a+b}{6}\right]\left[\frac{-b}{6}\right]}$$

Nun ist

$$\left[\frac{a+b}{6}\right] = \alpha+\beta = \left[\frac{a}{6}\right]+\left[\frac{b}{6}\right];$$

$$\left[\frac{-b}{6}\right] = \left[\frac{-(6\beta+3)}{6}\right] = -(\beta+1) = -\left[\frac{b}{6}\right]-1,$$

somit

$$\left(\frac{a+bj}{a-bj^2}\right) = (-1)^{\left[\frac{a}{6}\right]\left[\frac{b}{6}\right]+1}$$

und weil

$$\left(\frac{a+bj}{a-bj^2}\right)\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = 1$$

ist, so muss demnach auch

$$\left(\frac{a-bj^2}{a+bj}\right) = (-1)^{\left[\frac{a}{6}\right]\left[\frac{b}{6}\right]+1}$$

sein. Damit haben wir das charakteristische Zeichen einer regulären primären Zahl bezüglich ihrer Conjugirten für alle möglichen Fälle bestimmt.

12. Aus der Gleichung (VIII) lässt sich sehr einfach noch das cubische Reciprocitätsgesetz zwischen zwei regulären primären Zahlen ableiten. Sind a_1+b_1j und a_2+b_2j zwei reguläre primäre und zueinander theilerfremde Zahlen und bezeichnen wir mit $\left[\frac{n}{m}\right]$ allgemein den cubischen Charakter der Zahl n bezüglich der Zahl m, so ist stets

$$\left[\frac{a_1+b_1j}{a_2+b_2j}\right] = \left(\frac{a_1+b_1j}{a_2+b_2j}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left[\frac{a_2+b_2j}{a_1+b_1j}\right] = \left(\frac{a_2+b_2j}{a_1+b_1j}\right)^2$$

also zufolge der Gleichung (VIII)

$$\left[\frac{a_1+b_1j}{a_2+b_2j}\right] = \left[\frac{a_2+b_2j}{a_1+b_1j}\right].$$

Diese Gleichung bleibt auch bestehen, wenn man, wie es in der Theorie der cubischen Reste gebräuchlich ist, statt j die primitive dritte Einheitswurzel

$$J = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

als Grundeinheit wählt; denn ist

$$a_1+b_1 j = A_1+B_1 J \text{ und } a_2+b_2 j = A_2+B_2 J,$$

so sind neben $a_1+b_1 j$ und $a_2+b_2 j$ auch die Zahlen $A_1+B_1 J$ und $A_1+B_2 J$ regulär und primär und zueinander theilerfremd und umgekehrt, wobei die Ausdrücke »regulär« und »primär« für die Zahlen $A+BJ$ dieselbe Bedeutung, wie für die Zahlen $a+bj$ haben, und es sind die Zahlen $A+BJ$ von den Zahlen $a+bj$ nur der Form nach verschieden.

Es ist also auch

$$\left[\frac{A_1+B_1 J}{A_2+B_2 J}\right] = \left[\frac{A_2+B_2 J}{A_1+B_1 J}\right],$$

d. h. zwischen zwei regulären primären und zueinander theilerfremden Zahlen besteht vollständige cubische Reciprocität.*)

*) In meiner in den Sitzungsber. Bd. C, Abth. II veröffentlichten Abhandlung: »Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze«, S. 1339, Zeile 8 von unten, soll es statt $\left(\frac{1+j}{a+bj^2}\right)$ heissen: $\left(\frac{1+j}{a-bj^2}\right)$.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 101_2a

Autor(en)/Author(s): Gmeiner Josef Anton

Artikel/Article: Das allgemeine bicubische Reciprocitätsgesetz. 562-584