Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik

Dr. **Jos. Finger.**

(**Vorgelegt in der Sitzung am 12. Mai 1892.**)

Die vorliegende Abhandlung, welche zum grossen Theile den Zweck verfolgt, die von Darboux[1] gefundenen geometrischen Resultate astatischer Probleme zu ergänzen und zu erweitern, soll als Einleitung dienen zu einer Reihe von Untersuchungen über den Kräftepol eines beliebigen auf ein starres Punktsystem einwirkenden Kräftesystems, mit welchen Untersuchungen sich der Verfasser jahrelang eingehend beschäftigt hat und die demnächst zur Publication gelangen sollen. —

Führt man vom Anfangspunkte O eines unveränderlichen und als rechtwinklig vorausgesetzten Axensystems xyz eine Normale n zu irgend einer Berührungsebene der Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung

$$a_x . x^2 + a_y . y^2 + a_z . z^2 + 2 b_x . yz + 2 b_y . zx + 2 b_z . xy = c, \qquad .(1)$$

so bestehen für den Fusspunkt $\xi\eta\zeta$ dieser Normalen $n = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, wofern xyz die Coordinaten des Berührungspunktes und r den zugehörigen Radius der Fläche (1) bezeichnen, folgende Gleichungen:

---

[1] Mémoire sur l'equilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes appliquées en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change de position dans l'espace (Mém. de la société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, t. II (2me série, 2me cahier).

$$a_x . x + b_z . y + b_y . z = c\xi \quad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$$
$$b_z . x + a_y . y + b_x . z = c\eta \quad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$$
$$b_y . x + b_x . y + a_z . z = c\zeta \quad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$$

Löst man diese drei Gleichungen nach xyz auf und bezeichnet man die den einzelnen Gliedern der symmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & b_z & b_y \\ b_z & a_y & b_x \\ b_y & b_x & a_z \end{vmatrix} = A \qquad (2)$$

adjungirten Subdeterminanten durch die gleichlautenden grossen Buchstaben $A_x B_z B_y$ u. s. w., so findet man

$$\left.\begin{aligned} A . x &= (A_x\xi + B_z\eta + B_y\zeta)c \quad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \\ A . y &= (B_z\xi + A_y\eta + B_x\zeta)c \quad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \\ A . z &= (B_y\xi + B_x\eta + A_z\zeta)c \quad (\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \end{aligned}\right\} \qquad .(3)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\xi\eta\zeta$ und addirt dieselben, so ergibt sich, da die Normale n zur Berührungsebene senkrecht steht, sonach $(x-\xi)\xi + (y-\eta)\eta + (z-\zeta)\zeta = 0$ oder $x\xi + y\eta + z\zeta = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ist, für den geometrischen Ort der Fusspunkte $\xi\eta\zeta$ aller dieser Normalen folgende Mittelpunktsfläche vierter Ordnung:

$$A(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 =$$
$$= (A_x\xi^2 + A_y\eta^2 + A_z\zeta^2 + 2B_x\eta\zeta + 2B_y\zeta\xi + 2B_z\xi\eta) . c. \qquad .(4)$$

Der Entstehungsweise der Fläche (4) zufolge sind die drei zu einander senkrechten Hauptschnittsebenen der Fläche (1) zugleich auch Symmetrieebenen der Fläche (4) und die drei orthogonalen Hauptaxen der Fläche (1) zugleich auch Symmetrieaxen der Fläche (4).

Diejenige Fläche nun, die in Bezug auf den Mittelpunkt O als Pol zur Fläche (4) radial reciprok ist, für welche also, wenn xyz nunmehr die Coordinaten des zu $\xi\eta\zeta$ reciproken Punktes und R den mit n gleichgerichteten Radius bedeuten, $R . n = 1$, daher

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z} = \frac{n}{R} = n^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

ist, hat zufolge (3) die Gleichung

$$A_x . x^2 + A_y y^2 + A_z z^2 + 2 B_x yz + 2 B_y zx + 2 B_z xy = \frac{A}{c} \quad ..(5)$$

Da die Coefficienten $A_x A_y$. in der Gleichung dieser Fläche (5) die zu den Coefficienten $a_x a_y \ldots$ in der Gleichung (1) adjungirten Subdeterminanten der Determinante (2) sind, so sei diese Fläche (5) in der Folge als die zur Fläche (1) adjungirte Fläche (Reciprocalfläche in Bezug auf den Mittelpunkt) bezeichnet.

Dieselbe ist, wie aus (5) hervorgeht, gleichfalls eine Fläche zweiter Ordnung, und zwar ist dieselbe, wie aus ihrer oben erörterten Entstehungsweise sofort ersichtlich ist, mit der Fläche (1) coaxial, sie ist ferner eine Fläche derselben Gattung und ihre Halbaxen sind den Halbaxen der Fläche (1) reciprok.

Umgekehrt ist, wie aus dieser Entwicklung sofort erhellt, die Fläche (1) die zur Fläche (5) adjungirte Fläche, was sich übrigens mit Zuhilfenahme gewisser Sätze der Determinantentheorie auch direct aus der Form der Gleichungen (5) und (1) nachweisen lässt.

Es ist nämlich die aus den Coefficienten $A_x A_y$. der Gleichung (5) gebildete Determinante bekanntlich gleich dem Quadrate A^2 der Determinante (2) und die den Coefficienten $A_x A_y A_z B_x B_y B_z$ adjungirten neuerlichen Unterdeterminanten sind Aa_x, Aa_y, Aa_z, Ab_x, Ab_y, Ab_z. Bildet man sonach in derselben Weise, wie aus der Form der Gleichung (1) jene der Gleichung (5) entsteht, aus der letzteren eine neue Gleichung, so lautet dieselbe:

$$Aa_x x^2 + Aa_y y^2 + Aa_z . z^2 + 2 Ab_x yz + 2 Ab_y zx + 2 Ab_z xy = A^2 : \frac{A}{c}$$

und ist sonach mit (1) identisch.

Der geometrische Ort der Fusspunkte jener Normalen N, die vom Mittelpunkte auf die Berührungsebenen der Fläche (5) geführt werden, ist die zu (1) radial reciproke Fläche

$$a_x \xi^2 + a_y \eta^2 + a_z \zeta^2 + 2 b_x \eta\zeta + 2 b_y \zeta\xi + 2 b_z \xi\eta = c(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2. \quad \ldots(6)$$

Es bestehen stets für die dem Radius r der Fläche (1) entsprechende Normale n jener Berührungsebene, deren Berührungspunkt der Endpunkt des Radius r ist, d. i. den Radius n der Fläche (4), ferner für jenen Radius R der adjungirten Fläche (5), welcher mit n gleichgerichtet ist, und für die diesem Radius R zugehörige und, wie sich leicht zeigen lässt, mit r gleichgerichtete Normale N dieser Fläche (5), d. i. den Radius N der Fläche (6) die einfache Beziehung

$$R.n = r.N = 1. \qquad .(7)$$

Sind uvw die Ebenencoordinaten, bezogen auf dasselbe Axensystem, also $ux+vy+wz-1=0$ die Gleichung der Berührungsebene der Fläche (1), welche Gleichung auch, da $\frac{\xi}{n}, \frac{\eta}{n}, \frac{\zeta}{n}$ die Richtungscosinus der Normalen n dieser Ebene sind, mit $\frac{\xi}{n}x+\frac{\eta}{n}y+\frac{\zeta}{n}z-n=0$ identisch sein muss, so lehrt die Identität der beiden letzten Gleichungen, dass

$$\frac{u}{\xi} = \frac{v}{\eta} = \frac{w}{\zeta} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

ist.

Es lauten sonach zufolge (3) die Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} Ax &= (A_x u + B_z v + B_y w).c \\ Ay &= (B_z u + A_y v + B_x w).c \\ Az &= (B_y u + B_x v + A_z w)\ c \end{aligned}\right\} \qquad .(8)$$

Da nun stets $ux+vy+wz=1$ ist, so ergibt die Multiplication dieser letzten Gleichung mit A nach vorgenommener Substitution aus (8) als Gleichung der Fläche (1) in Ebenencoordinaten [also als Tangentialgleichung der Fläche (1)]

$$A_x u^2 + A_y v^2 + A_z w^2 + 2B_x vw + 2B_y wu + 2B_z uv = \frac{A}{c}, \quad \ldots(1')$$

d. i. eine Gleichung von ähnlicher Form wie die Gleichung der Fläche (5) in Punktcoordinaten.

Auf dieselbe Weise, wie aus (1) die identische Gleichung (1′) abgeleitet wurde, lässt sich für die Fläche (5) die Gleichung in Ebenencoordinaten aus (5) ableiten in der mit (1) übereinstimmenden Form

$$a_x u^2 + a_y v^2 + a_z w^2 + 2b_x vw + 2b_y wu + 2b_z uv = c. \quad \ldots(5')$$

Vor dem Übergange zu anderen Flächen zweiter Ordnung empfiehlt es sich, gewisse Beziehungen zwischen den auf das rechtwinklige Axensystem xyz und dessen Anfangspunkt O bezogenen Coordinaten der Eckpunkte eines Triëders $OM_1M_2M_3$ und seines Polartriëders zu deduciren.

Wenn die beliebig im Raume gelegenen Eckpunkte $M_1M_2M_3$ eine derartige relative Lage haben, so dass von jener Seite der Ebene OM_1M_2, auf welcher M_3 gelegen ist, die kürzeste Drehung von OM_1 nach OM_2 als eine positive erscheint, also der Sinn dieser Drehung übereinstimmt mit jenem der — von einem Punkte der positiven z-Axe aus betrachteten — kürzesten Drehung von der positiven x- nach der positiven y-Axe, so ist die aus den Coordinaten $(a_{11}a_{12}a_{13})$, $(a_{21}a_{22}a_{23})$, $(a_{31}a_{32}a_{33})$ dieser drei Punkte M_1, M_2, M_3 gebildete Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad .(9)$$

nothwendigerweise positiv, und zwar bestimmt dieselbe das sechsfache Volum V des Tetraëders $OM_1M_2M_3$, dessen Seitenkanten $\overline{OM_1} = R_1$, $\overline{OM_2} = R_2$, $\overline{OM_3} = R_3$ sind. Entspricht dagegen die relative Lage der Punkte $M_1M_2M_3$ nicht der obigen Bedingung, so ist die Determinante Δ negativ und das Tetraëdervolum durch: $-\frac{1}{6}\Delta$ bestimmt.

Sind nun $N_1N_2N_3$ die von $M_1M_2M_3$ auf die Gegenflächen des Triëders gefällten Höhen und $(a_1b_1c_1)$, $(a_2b_2c_2)$, $(a_3b_3c_3)$ die Richtungscosinus dieser von diesen Gegenflächen nach den Eckpunkten $M_1M_2M_3$ gerichteten Lothe $N_1N_2N_3$, so ist, wofern die zu (9) adjungirten Subdeterminanten durch die entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnet werden,

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{A_{11}} = \frac{b_1}{A_{12}} = \frac{c_1}{A_{13}} = \frac{1}{R_2R_3 \sin(R_2R_3)} = \frac{N_1}{\Delta} \\ \frac{a_2}{A_{21}} = \frac{b_2}{A_{22}} = \frac{c_2}{A_{23}} = \frac{1}{R_3R_1 \sin(R_3R_1)} = \frac{N_2}{\Delta} \\ \frac{a_3}{A_{31}} = \frac{b_3}{A_{32}} = \frac{c_3}{A_{33}} = \frac{1}{R_1R_2 \sin(R_1R_2)} = \frac{N_3}{\Delta} \end{aligned}\right\} \quad ..(10)$$

Führt man nun von O die mit $N_1 N_2 N_3$ gleichgerichteten Kanten $\overline{Om_1} = r_1 = \frac{1}{N_1}$ $\overline{Om_2} = r_2 = \frac{1}{N_2}$, $\overline{OM_3} = r_3 = \frac{1}{N_3}$, so erhält man ein Polartriëder $\overline{Om_1 m_2 m_3}$, das als ein dem ursprünglichen Triëder adjungirtes Triëder bezeichnet sei. Die Coordinaten der Eckpunkte $m_1 m_2 m_3$ sind zufolge (10)

$$\left(\frac{A_{11}}{\Delta}, \frac{A_{12}}{\Delta}, \frac{A_{13}}{\Delta}\right), \left(\frac{A_{21}}{\Delta}, \frac{A_{22}}{\Delta}, \frac{A_{23}}{\Delta}\right), \left(\frac{A_{31}}{\Delta}, \frac{A_{32}}{\Delta}, \frac{A_{33}}{\Delta}\right).$$

Sonach ist die aus diesen Coordinaten gebildete Determinante, d. i. das 6fache Volum v des adjungirten Tetraëders $\overline{Om_1 m_2 m_3}$ dem reciproken Werthe $\frac{1}{\Delta}$ der Determinante (9) gleich oder demselben entgegengesetzt gleich, je nachdem Δ positiv oder negativ ist. Die von $m_1 m_2 m_3$ auf die Gegenflächen des Tetraëders v geführten Höhen $n_1 n_2 n_3$ sind mit $R_1 R_2 R_3$ gleichgerichtet, und zwar besteht, da die Subdeterminanten der aus den Coordinaten von $m_1 m_2 m_3$ gebildeten Determinante die Werthe $\frac{\Delta . a_{11}}{\Delta^2} = \frac{a_{11}}{\Delta}$, $\frac{\Delta . a_{12}}{\Delta^2} = \frac{a_{12}}{\Delta}$ u. s. w. haben, für die Richtungscosinus $(A_1 B_1 C_1)$ der gegen m_1 gerichteten Normalen n_1 eine der ersten Gleichung in (10) analoge Relation, in welcher nur die letztgenannten Subdeterminanten statt $A_{11} A_{12} A_{13}$ einzusetzen sind und im letzten Gliede der Gleichung (10) N_1 durch n_1 und Δ durch $\frac{1}{\Delta}$ zu ersetzen ist, so dass

$$\frac{A_1}{a_{11}} = \frac{B_1}{a_{12}} = \frac{C_1}{a_{13}} = n_1$$

wird, woraus sofort erhellt, nicht nur, dass n_1 mit R_1 gleichgerichtet ist, sondern auch, dass $n_1 = \frac{1}{R_1}$ und analog $n_2 = \frac{1}{R_2}$, $n_3 = \frac{1}{R_3}$ ist.

Das aus v in gleicher Weise, wie v aus V entstanden ist, gebildete polare Tetraëder ist offenbar das ursprüngliche.

Jenes Ellipsoid nun, dessen Mittelpunkt 0 und dessen conjugirte Halbmesser mit den Höhen $N_1 N_2 N_3$ des ursprünglichen Tetraëders V, also auch mit den Kanten $r_1 r_2 r_3$ des adjungirten Tetraëders v gleichgerichtet und den letzteren proportional sind, hat in Bezug auf die mit diesen Kanten gleichgerichteten schiefwinkligen Axen XYZ die Gleichung

$$\frac{X^2}{r_1^2}+\frac{Y^2}{r_2^2}+\frac{Z^2}{r_3^2}=C^2, \qquad .(11)$$

wo C irgend einen als positiv angenommenen constanten Proportionalitätsfactor bedeutet.

Nun ist aber

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1X+a_2Y+a_3Z \\ y &= b_1X+b_2Y+b_3Z \\ z &= c_1X+c_2Y+c_3Z \end{aligned}\right\}$$

Setzt man in diese Gleichungen die Werthe aus (10) ein und bestimmt dann aus denselben XYZ, so findet man

$$\begin{aligned} N_1X &= \frac{X}{r_1} = a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ N_2Y &= \frac{Y}{r_2} = a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ N_3Z &= \frac{Z}{r_3} = a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{aligned}$$

Demnach nimmt die Gleichung (11) des Ellipsoids die Form an

$$\begin{aligned} (a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)^2+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)^2+ \\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)^2 = C^2 \qquad .(12) \end{aligned}$$

Um dieses Ellipsoid mit der Fläche (1) zu identificiren, setzen wir $c = C^2$ und

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2 & b_x &= a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33} \\ a_y &= a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2 & b_y &= a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31} \\ a_z &= a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2 & b_z &= a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Demgemäss besteht zwischen der durch (2) bestimmten Determinante A und der Determinante Δ, die durch (9) bestimmt ist, die Beziehung $A = \Delta^2$.

Ferner ergeben sich für die früher betrachteten Subdeterminanten $A_x A_y \ldots$ den Gleichungen (13) entsprechend folgende Werthe

$$\left.\begin{aligned}
A_x &= a_y a_z - b_x^2 = A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 \\
A_y &= a_z a_x - b_y^2 = A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2 \\
A_z &= a_x a_y - b_z^2 = A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2 \\
B_x &= b_y b_z - b_x a_x = A_{12} A_{13} + A_{22} A_{23} + A_{32} A_{33} \\
B_y &= b_z b_x - b_y a_y = A_{13} A_{11} + A_{23} A_{21} + A_{33} A_{31} \\
B_z &= b_x b_y - b_z a_z = A_{11} A_{12} + A_{21} A_{22} + A_{31} A_{32}
\end{aligned}\right\} \quad .(14)$$

Sind $a^2 b^2 c^2$ die reciproken Quadrate der Halbaxen des Ellipsoids (12), so ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned}
C^2[a^2+b^2+c^2] &= a_x + a_y + a_z = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 + \\
&\quad + a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \\
C^4[b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2] &= A_x + A_y + A_z = A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 + \\
&\quad + A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2 + A_{13}^2 + A_{23}^2 + A_{33}^2 \\
C^6 a^2 b^2 c^2 &= A = \Delta^2.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(15)$$

Substituirt man, um die Gleichung des dem Ellipsoid (12) adjungirten Ellipsoids zu erhalten, die Werthe (14) in die Gleichung (5), und setzt entsprechend $c = C^2$, so erhält die Gleichung dieses der Fläche (12) coaxialen und ihr adjungirten Ellipsoids, dessen Halbaxen $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{b^2}$ und $\sqrt{c^2}$ sind, die der Gleichung (12) analoge Form

$$\begin{aligned}
&(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z)^2 + (A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z)^2 + \\
&\qquad + (A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z)^2 = \frac{\Delta^2}{C^2} \quad .(16)
\end{aligned}$$

Die Kanten $R_1 R_2 R_3$ des ursprünglichen Triëders V sind mit drei conjugirten Radien des letzteren Ellipsoids (16) gleichgerichtet und diesen proportional, da, wenn man diese Kanten $R_1 R_2 R_3$ zu den Axen XYZ eines Axensystems wählt, die Transformationsgleichungen bestehen

$$x = \frac{a_{11}}{R_1} X + \frac{a_{21}}{R_2} Y + \frac{a_{31}}{R_3} Z$$

$$y = \frac{a_{12}}{R_1} X + \frac{a_{22}}{R_2} Y + \frac{a_{32}}{R_3} Z$$

$$z = \frac{a_{13}}{R_1} X + \frac{a_{23}}{R_2} Y + \frac{a_{33}}{R_3} Z$$

woraus folgt, dass

$$\Delta \cdot \frac{X}{R_1} = A_{11} x + A_{12} y + A_{13} z$$

$$\Delta \cdot \frac{Y}{R_2} = A_{21} x + A_{22} y + A_{23} z$$

$$\Delta \cdot \frac{Z}{R_3} = A_{31} x + A_{32} y + A_{33} z$$

ist, wonach für das Ellipsoid (16) auch die Gleichung besteht:

$$\frac{X^2}{R_1^2} + \frac{Y^2}{R_2^2} + \frac{Z^2}{R_3^2} = \frac{1}{C^2} \qquad .(17)$$

Demgemäss sind, wenn $C = 1$ ist, die durch die Endpunkte $M_1 M_2 M_3$ der Kanten $R_1 R_2 R_3$ des Triëders V parallel zu den Gegenflächen desselben gelegten Ebenen, deren Abstände von 0 den Höhen $N_1 N_2 N_3$ gleich sind, Berührungsebenen des Ellipsoids (16), wie auch dann die durch die Eckpunkte $m_1 m_2 m_3$ des Triëders v parallel zu dessen Gegenflächen gelegte Ebenen, deren Abstände von 0 $n_1 n_2 n_3$ sind, das coaxiale Ellipsoid (12) berühren. Setzt man demgemäss das ursprüngliche Triëder $\overline{OM_1 M_2 M_3}$ mit den Kanten $\overline{OM_1} = R_1$, $\overline{OM_2} = R_2$, $\overline{OM_3} = R_3$ und den Kantenwinkeln $(R_2 R_3)$, $(R_3 R_1)$, $(R_1 R_2)$ als ein unveränderliches (starres) voraus, so ist auch die Form und Grösse der coaxialen Ellipsoide (16) und (12) eine unveränderliche, nur ist die Lage derselben von der Lage dieses Triëders abhängig, indem die relative Lage dieser Ellipsoide zu jener des Triëders stets dieselbe bleibt.

Die dem Ellipsoid (16), beziehungsweise (12) entsprechende radial reciproke Fläche hat, wie sich durch Substitution der Werthe (14), beziehungsweise (13) in (4), beziehungsweise (6) ergibt, die Gleichung

$$(A_{11}\xi+A_{12}\eta+A_{13}\zeta)^2+(A_{21}\xi+A_{22}\eta+A_{23}\zeta)^2+$$
$$+(A_{31}\xi+A_{32}\eta+A_{33}\zeta)^2=\frac{\Delta^2}{C^2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2,$$

beziehungsweise

$$(a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta)^2+(a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta)^2+(a_{31}\xi+a_{32}\eta+a_{33}\zeta)^2=$$
$$=C^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2.$$

Die Gleichung des Ellipsoids (12), beziehungsweise (16) in Ebenencoordinaten uvw ergibt sich durch dieselben Substitutionen in die Gleichung (1'), beziehungsweise (5') und es lautet demgemäss die Tangentialgleichung der Fläche (12), beziehungsweise (16)

$$(A_{11}u+A_{12}v+A_{13}w)^2+(A_{21}u+A_{22}v+A_{23}w)^2+$$
$$+(A_{31}u+A_{32}v+A_{33}w)^2=\frac{\Delta^2}{C^2},$$

beziehungsweise

$$(a_{11}u+a_{12}v+a_{13}w)^2+(a_{21}u+a_{22}v+a_{23}w)^2+$$
$$+(a_{31}u+a_{32}v+a_{33}w)^2=C^2$$

Es seien $\alpha'_x\alpha'_y\alpha'_z$ die Richtungscosinus irgend einer Richtung ξ' der Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ des Ellipsoids (12) [also auch jene der Halbaxe $\sqrt{a^2}$ des Ellipsoids (16)], so dass für einen der in dieser Halbaxe gelegenen Scheitel $x=\frac{1}{a}\alpha'_x$, $y=\frac{1}{a}\alpha'_y$, $z=\frac{1}{a}\alpha'_z$ ist. Da die Summe der durch C^2 dividirten Quadrate der eingeklammerten Ausdrücke in (12) der Einheit gleich ist, so kann man diese durch C dividirten Ausdrücke nach Einsetzung der letzten Werthe einzeln genommen den Richtungscosinus $\alpha_x\alpha_y\alpha_z$ einer bestimmten Richtung ξ gleichsetzen. Es ist sonach

$$\frac{\alpha_x}{a_{11}\alpha'_x+a_{12}\alpha'_y+a_{13}\alpha'_z}=\frac{\alpha_y}{a_{21}\alpha'_x+a_{22}\alpha'_y+a_{23}\alpha'_z}=$$
$$=\frac{\alpha_z}{a_{31}\alpha'_x+a_{32}\alpha'_y+a_{33}\alpha'_z}=\frac{1}{Ca} \quad .(18)$$

Da ferner die Richtung ξ' der Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ des Ellipsoids (12) die Richtung der Normale im oberwähnten Scheitelpunkte haben muss, also die Richtungscosinus $\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z$ den nach xyz genommenen partiellen Differentialquotienten des linken Theiles der Gleichung (12) proportional sein müssen, so ergibt sich bei Beachtung der Werthe (18) von $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ die Relation

$$\frac{\alpha'_x}{a_{11}\alpha_x + a_{21}\alpha_y + a_{31}\alpha_z} = \frac{\alpha'_y}{a_{12}\alpha_x + a_{22}\alpha_y + a_{32}\alpha_z} =$$

$$= \frac{\alpha'_z}{a_{13}\alpha_x + a_{23}\alpha_y + a_{33}\alpha_z} = \frac{1}{Ca}. \qquad .(19)$$

Die zuletzt angedeutete Gleichheit der drei ersten Verhältnisse mit $\frac{1}{Ca}$ ergibt sich, wenn man Vorder- und Nachglied der drei ersten Verhältnisse einzeln mit $\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z$ multiplicirt und das diesen Verhältnissen gleiche Verhältniss der Summe der Vorder- zur Summe der Nachglieder mit Rücksichtnahme auf (18) bildet.

Da, wie für die Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$, auch ähnliche Gleichungen aus gleichen Gründen auch für die beiden anderen Halbaxen $\sqrt{\frac{1}{b^2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{c^2}}$ des Ellipsoids (12) giltig sein müssen, so erhält man den Gleichungen (18) und (19) analoge Gleichungen, wenn man a durch b, beziehungsweise c und gleichzeitig alle α und α' entsprechend durch β und β', beziehungsweise γ und γ' ersetzt, wofern $(\beta'_x \beta'_y \beta'_z)$, beziehungsweise $(\gamma'_x \gamma'_y \gamma'_z)$ die Richtungscosinus der Richtungen η', beziehungsweise ζ' der zwei anderen Halbaxen und $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, beziehungsweise $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die in analoger Weise wie in (18) zu bestimmenden Richtungscosinus zweier neuer Richtungen η, beziehungsweise ζ bedeuten.

Die drei orthogonalen Richtungen $(\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z)$, $(\beta'_x \beta'_y \beta'_z)$ und $(\gamma'_x \gamma'_y \gamma'_z)$ seien derart gewählt, dass die aus diesen neun Richtungscosinus gebildete Determinante gleich 1, also das aus diesen Richtungen gebildete Axensystem mit dem ursprünglichen Coordinatenaxensystem xyz congruent ist.

Da nun die Gleichungen (18) und (19) sich nur dadurch unterscheiden, dass $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ durch $(\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z)$ und umgekehrt ersetzt und die zwei Indices der einzelnen Glieder der Determinante (9) permutirt sind und da die Gleichung (19) das nothwendige und hinreichende Kennzeichen dafür ist, dass ξ' die Richtung einer

Halbaxe des Ellipsoids (12) ist, so folgt in nothwendiger Weise aus (18), dass auch ξ die Richtung einer Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ und in analoger Weise $(\beta_x \beta_y \beta_z)$, beziehungsweise $(\gamma_x \gamma_y \gamma_z)$ die Richtungscosinus der Richtungen η und ζ der beiden andern Halbaxen $\sqrt{\frac{1}{b^2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{c^2}}$ jenes Ellipsoids sind, dessen Gleichung sich aus (12) durch Permutation der Indices ergibt, nämlich

$$(a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z)^2+(a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z)^2+ \\ +(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)^2 = C^2. \qquad (20)$$

Es sei dieses Ellipsoid als das dem Ellipsoid (12) conjungirte Ellipsoid bezeichnet. Die Halbaxen desselben sind jenen des Ellipsoids (12) an Grösse gleich, also die conjungirten Ellipsoide sind, wenn auch im Allgemeinen anders gelagert, so doch einander congruent, wie sich auch schon daraus ergibt, dass für das Ellipsoid (20), wenn man dasselbe auf die Form (1) bringt, $c = C^2$ und

$$\left.\begin{array}{ll} a_x = a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 & b_x = a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33} \\ a_y = a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 & b_y = a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13} \\ a_z = a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2 & b_z = a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23} \end{array}\right\} \qquad (21)$$

ist, und sich demnach für $a_x+a_y+a_z$, $A_x+A_y+A_z$ und A, daher auch für a^2, b^2, c^2 die mit (15) gleichlautenden Gleichungen ergeben.

Aus den Gleichungen (18) und den diesen analogen, auf b und c sich beziehenden Gleichungen ersieht man sofort, dass

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{C^3abc} = \frac{\Delta}{C^3abc}$$

ist, wo das Quadrat des letzten Productes zufolge (15) gleich 1 ist. Soll also auch die ersterwähnte Determinante den Werth $+1$ haben, so müssen die bisher unbestimmt gelassenen Qualitätszeichen von a, b, c so gewählt werden, dass das Product abc mit Δ gleichbezeichnet, also

$$abc = \frac{\Delta}{C^3} \text{ ist.} \qquad ..(22)$$

Es ist zu bemerken, dass die Lage des dem Ellipsoid (12) congruenten Ellipsoides (20) von der Lage des als starr vorausgesetzten Triëders $OM_1M_2M_3$ unabhängig ist; es haben nämlich, da $(a_{11}a_{12}a_{13})$, $(a_{21}a_{22}a_{23})$, $(a_{31}a_{32}a_{33})$ die Coordinaten der Endpunkte der Kanten $\overline{OM_1} = R_1$, $\overline{OM_2} = R_2$, $\overline{OM_3} = R_3$ sind, die Coefficienten in der auf die Form

$$a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2 + 2b_x yz + 2b_y zx + 2b_z xy = C^2$$

gebrachten Gleichung des Ellipsoids (20) — den Gleichungen (21) zufolge — folgende bloss von der Gestalt dieses Tetraëders abhängige Werthe

$$\left.\begin{aligned} & a_x = R_1^2,\; a_y = R_2^2,\; a_z = R_3^2 \\ & b_x = R_2R_3\cos(R_2R_3),\; b_y = R_3R_1\cos(R_3R_1), \\ & \qquad\qquad b_z = R_1R_2\cos(R_1R_2) \\ & A_x = a_y a_z - b_x^2 = R_2^2R_3^2\sin^2(R_2R_3), \\ & \qquad A_y = R_3^2R_1^2\sin^2(R_3R_1),\; A_z = R_1^2R_2^2\sin^2(R_1R_2) \end{aligned}\right\} \qquad .(23)$$

sonach ist auch, wenn man die drei im Punkte 0 zusammenstossenden Grenzflächen jenes Parallepipeds, dessen Kanten $R_1R_2R_3$ sind, und dessen Volum $\Delta = \pm 6V$ ist, durch $F_1F_2F_3$ bezeichnet, zufolge (15)

$$\begin{aligned} C^2(a^2+b^2+c^2) &= R_1^2+R_2^2+R_3^2, \\ C^4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) &= F_1^2+F_2^2+F_3^2, \\ C^3.abc &= \Delta. \end{aligned}$$

Wie sich mit Zugrundelegung der Beziehungen (23) aus den Kantenlängen $R_1R_2R_3$ und den Kantenwinkeln (R_2R_3), (R_3R_1), (R_1R_2) das Ellipsoid (20) construiren lässt, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Für die unveränderliche relative Lage der Kanten $R_1R_2R_3$ des Triëders $OM_1M_2M_3$ gegen die Axen $\xi'\eta'\zeta'$ des Ellipsoids (12), beziehungsweise (16) ergeben sich unmittelbar aus (18) und den analogen Gleichungen folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\cos(\xi' R_1)}{a\alpha_x}=\frac{\cos(\eta' R_1)}{b\beta_x}=\frac{\cos(\zeta' R_1)}{c\gamma_x}=\frac{C}{R_1}\\ \frac{\cos(\xi' R_2)}{a\alpha_y}=\frac{\cos(\eta' R_2)}{b\beta_y}=\frac{\cos(\xi' R_2)}{c\gamma_y}=\frac{C}{R_2}\\ \frac{\cos(\xi' R_3)}{a\alpha_z}=\frac{\cos(\eta' R_3)}{b\beta_z}=\frac{\cos(\zeta' R_3)}{c\gamma_z}=\frac{C}{R_3}\end{array}\right\} \quad .(24)$$

Auch die ursprünglichen Coordinaten $a_{11} \ldots a_{33}$ der Eckpunkte $M_1 M_2 M_3$ des Triëders $OM_1 M_2 M_3$, also die Glieder der Determinante (9), die den Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung bildete, lassen sich durch die Grössen und Richtungscosinus der Halbaxen der beiden conjungirten Ellipsoide (12) und (20) mittels folgender aus (18) und (19) und den analogen Gleichungen leicht deducirbaren Beziehungen ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}=C.[a\alpha_x\alpha'_x+b\beta_x\beta'_x+c\gamma_x\gamma'_x]\\ a_{12}=C.[a\alpha_x\alpha'_y+b\beta_x\beta'_y+c\gamma_x\gamma'_y]\\ a_{13}=C.[a\alpha_x\alpha'_z+b\beta_x\beta'_z+c\gamma_x\gamma'_z]\\ a_{21}=C.(a\alpha_y\alpha'_x+b\beta_y\beta'_x+c\gamma_y\gamma'_x)\\ a_{22}=C.(a\alpha_y\alpha'_y+b\beta_y\beta'_y+c\gamma_y\gamma'_y)\\ a_{23}=C.(a\alpha_y\alpha'_z+b\beta_y\beta'_z+c\gamma_y\gamma'_z)\\ a_{31}=C.(a\alpha_z\alpha'_x+b\beta_z\beta'_x+c\gamma_z\gamma'_x)\\ a_{32}=C.(a\alpha_z\alpha'_y+b\beta_z\beta'_y+c\gamma_z\gamma'_y)\\ a_{33}=C.(a\alpha_z\alpha'_z+b\beta_z\beta'_z+c\gamma_z\gamma'_z)\end{array}\right\} \quad .(25)$$

Es möge schliesslich jene mit dem Ellipsoid (20) coaxiale Fläche zweiter Ordnung in Betracht gezogen werden, deren Halbaxen den Quadratwurzeln der Halbaxen des Ellipsoids (20) gleich sind, also jene Fläche, deren auf die Hauptaxen $\xi\eta\zeta$ bezogene Gleichung

$$a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2=\pm 1=k \quad .(26)$$

ist, und diese Fläche möge kürzehalber die dem zugehörigen Ellipsoid (20) subjungirte Fläche benannt sein. Ihre Gleichung in Bezug auf das ursprüngliche Axensystem xyz hat, wenn die Determinante (9) symmetrisch, also $a_{12}=a_{21}$, $a_{23}=a_{32}$, $a_{31}=a_{13}$ ist, die Form

$$a_{11}x^2+a^2_{2}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=kC, \quad .(27)$$

wo $k = \pm 1$ ist, wie aus nachfolgender Betrachtung hervorgeht:

Da $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$ und $a_{31} = a_{13}$ ist, so sind die Ellipsoide (12) und (20) identisch, sonach die Richtung $(\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z)$ der Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ des Ellipsoids (12) mit der Richtung $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ der Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ des Ellipsoids (20) übereinstimmend oder ihr entgegengesetzt, daher

$$\frac{\alpha'_x}{\alpha_x} = \frac{\alpha'_y}{\alpha_y} = \frac{\alpha'_z}{\alpha_z} = \pm 1. \qquad (28)$$

Beachtet man dies, so drückt die Relation (18) oder (19) abgesehen vom letzten Gliede $\frac{1}{Ca}$ bekanntlich das nothwendige und hinreichende Kennzeichen aus, dass $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$, beziehungsweise $(\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z)$ die Richtung einer Axe der Fläche (27) ist. Ferner ist, wenn A die Länge dieser Halbaxe bedeutet, wie unmittelbar aus (28), (19) und (27) hervorgeht,

$$1 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = \pm[\alpha'_x \alpha_x + \alpha'_y \alpha_y + \alpha'_z \alpha_z] =$$
$$= \pm \frac{1}{Ca} [a_{11} \alpha_x + a_{22} \alpha_y^2 + a_{33} \alpha_z^2 + 2 a_{23} \alpha_y \alpha_z + 2 a_{31} \alpha_z \alpha_x +$$
$$+ 2 a_{12} \alpha_x \alpha_y] = \pm \frac{kC}{A^2 Ca} = \frac{1}{A^2 a},$$

also $A^2 = \frac{1}{a}$ und ebenso bestehen für die beiden anderen Halbaxen B und C der Fläche (27) die Gleichungen

$$B^2 = \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad C^2 = \frac{1}{c}$$

Mit Hilfe der subjungirten Fläche (26) lässt sich nun leicht die für manche Untersuchungen der Astatik und der Elasticitätstheorie wichtige Lage jener Strecke p bestimmen, deren Projectionen $q_x p_y p_z$ auf die Coordinatenaxen durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p_x &= a_{11} \rho_x + a_{21} \rho_y + a_{31} \rho_y \\ p_y &= a_{12} \rho_x + a_{22} \rho_y + a_{32} \rho_z \\ p_z &= a_{13} \rho_y + a_{23} \rho_y + a_{33} \rho_z \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

bestimmt ist, wo $\rho_x \rho_y \rho_z$ die Richtungscosinus einer gegebenen Richtung r in Bezug auf die Axen xyz bedeuten.

Zunächst sind nämlich die Richtungscosinus $\rho_\xi \rho_\eta \rho_\zeta$ dieser Richtung in Bezug auf die Hauptaxen $\xi\eta\zeta$ der Fläche (26) oder (20) bestimmbar aus

$$\left.\begin{aligned} &= \alpha_x \rho_x + \alpha_y \rho_y + \alpha_z \rho_z \\ \rho_\eta &= \beta_x \rho_x + \beta_y \rho_y + \rho_z \rho_z \\ &= \gamma_x \rho_x + \gamma_y \rho_y + \gamma_z \rho_z \end{aligned}\right\} \qquad .(30)$$

und wenn r den in dieser Richtung $(\rho_\xi \rho_\eta \rho_\zeta)$ gelegenen Radius der subjungirten Fläche (26) und wenn ferner $(\delta_\xi \delta_\eta \delta_\zeta)$ die Richtungscosinus des vom Mittelpunkte dieser Fläche aus auf die dem Endpunkte dieses Radius r zugehörige Berührungsebene dieser Fläche geführten Lothes d bedeuten, so ist zufolge der Gleichung der Fläche (26)

$$\begin{aligned} &= k a \rho_\xi r^2 \cos(rd) \\ \delta_\eta &= k b \rho_\eta r^2 \cos(rd) \\ &= k c \rho_\zeta r^2 \cos(rd) \end{aligned}$$

wo $0 < (rd) < \frac{\pi}{2}$ und k entweder $+1$ oder -1 ist, je nachdem $a\rho_\xi^2 + b\rho_\eta^2 + c\rho_\zeta^2$ positiv oder negativ ist, d. h. der reelle Radius r der Fläche $a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 = 1$ oder der Fläche $a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 = -1$ angehört.

Dreht man nun das Ellipsoid (20) in seine conjungirte Lage, welcher die Gleichung (12) entspricht, so dass dadurch auch die Hauptaxen $\xi\eta\zeta$ des ersteren Ellipsoids und der subjungirten Fläche (26) durch diese Drehung in die Hauptaxen $\xi'\eta'\zeta'$ des Ellipsoids (12) überführt werden, so erhält durch diese Drehung die frühere Normale d eine solche Lage d', welche gegen die Axen $\xi'\eta'\zeta'$ ebenso geneigt ist, wie d gegen $\xi\eta\zeta$, so dass $\delta'_{\xi'} = \delta_\xi$, $\delta_{\eta'} = \delta_\eta$, $\delta'_{\zeta'} = \delta_\zeta$, also die Richtungscosinus $\delta'_x \delta'_y \delta'_z$ von d' gegen xyz gegeben sind durch $\delta'_x = \delta_\xi . \alpha'_x + \delta_\eta . \beta'_x + \delta_\zeta . \gamma'_x$ u. s. w. Substituirt man für $\delta_\xi \delta_\eta \delta_\zeta$ die früher erhaltenen Werthe, so findet man bei Berücksichtigung der Gleichungen (30) und (18) oder (19)

$$\left.\begin{aligned}
&= k\,\frac{r^2}{C}\cos(rd)[a_{11}\rho_x+a_{21}\rho_y+a_{31}\rho_z]\\
&= k\,\frac{r^2}{C}\cos(rd)[a_{12}\rho_x+a_{22}\rho_y+a_{32}\rho_z]\\
&= k\,\frac{r^2}{C}\cos(rd)[a_{13}\rho_x+a_{23}\rho_y+a_{33}\rho_z]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(31)$$

Aus (29) und (31) ersieht man, dass die Strecke $k.p$ die Richtung der Normalen d' hat und dass ferner

$$p = \frac{C}{r^2\cos(rd)} \qquad .(32)$$

ist. Es bedarf nicht erst hervorgehoben zu werden, dass zwar nicht die Richtung, jedoch die Grösse von p auch zufolge (29) und (20) durch die Länge

$$\rho = \frac{C}{p} = r^2\cos(rd) \qquad .(33)$$

desjenigen Radius des Ellipsoids (20) bestimmt ist, der die Richtung $(\rho_x\rho_y\rho_z)$ hat.

Die oberwähnte Drehung, durch welche das Ellipsoid (20) in die Lage des ihm conjungirten Ellipsoids (12) überführt und mit demselben zur Deckung gebracht wird, muss, wofern diese Drehung von der Amplitude θ im positiven Sinne auf kürzestem Wege, so dass also $0<\theta<\pi$ ist, erfolgen soll, um eine Rotationsaxe stattfinden, deren Richtungscosinus $\Phi_x\Phi_y\Phi_z$ sind, wo

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\,[1-(\alpha_x\alpha'_x+\alpha_y\alpha'_y+\alpha_z\alpha'_z+\beta_x\beta'_x+\beta_y\beta'_y+\beta_z\beta'_z+\gamma_x\gamma'_x+\gamma_y\gamma'_y+\gamma_z\gamma'_z)]$$

$$\frac{\Phi_x}{\alpha_y\alpha'_z-\alpha_z\alpha'_y+\beta_y\beta'_z-\beta_z\beta'_y+\gamma_y\gamma'_z-\gamma_z\gamma'_y} =$$

$$= \frac{\Phi_y}{\alpha_z\alpha'_x-\alpha_x\alpha'_z+\beta_z\beta'_x-\beta_x\beta'_z+\gamma_z\gamma'_x-\gamma_x\gamma'_z} =$$

$$= \frac{\Phi_z}{\alpha_x\alpha'_y-\alpha_y\alpha'_x+\beta_x\beta'_y-\beta_y\beta'_x+\gamma_x\gamma'_y-\gamma_y\gamma'_x} = \frac{1}{2\sin\theta}$$

Es sei schliesslich nur noch bemerkt, dass, wie dies unmittelbar aus der Gleichung des Ellipsoids (20) und aus den Werthen (31) und (33) ersichtlich ist, für die Richtungscosinus

$\nu_x \nu_y \nu_z$ der nach der äusseren Seite der Fläche (20) gerichteten Normalen ν im Endpunkte des Radius ρ dieser Fläche die den Gleichungen (29) analogen Relationen bestehen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{kC}{\rho\cos(\rho\nu)}\cdot\nu_x &= a_{11}\delta'_x+a_{12}\delta'_y+a_{13}\delta'_z\\ \frac{kC}{\rho\cos(\rho\nu)}\cdot\nu_y &= a_{21}\delta'_x+a_{22}\delta'_y+a_{23}\delta'_z\\ \frac{kC}{\rho\cos(\rho\nu)}\cdot\nu_z &= a_{31}\delta'_x+a_{32}\delta'_y+a_{33}\delta'_z\end{aligned}\right\} \quad .(34)$$

Bei der Anwendung dieser Untersuchungen auf astatische Probleme haben die massgebenden Glieder der ursprünglichen Determinante (9), die den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen bildete, folgende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned}a_{11} &= \Sigma(xX),\ a_{12} = \Sigma(xY),\ a_{13} = \Sigma(xZ)\\ a_{21} &= \Sigma(yX),\ a_{22} = \Sigma(yY),\ a_{23} = \Sigma(yZ)\\ a_{31} &= \Sigma(zX),\ a_{32} = \Sigma(zY),\ a_{33} = \Sigma(zZ)\end{aligned}\right\} \quad .(35)$$

wo XYZ die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten der im Punkte (xyz) angreifenden Kraft P eines beliebigen, auf ein unveränderliches Punktsystem einwirkenden Kräftesystems bezeichnen.

Durch $R_x R_y R_z$ seien die entsprechenden Componenten der Reductionsresultanten R dieses Kräftesystems bezeichnet, so dass

$$R_x = \Sigma X,\ R_y = \Sigma Y,\ R_z = \Sigma Z \quad .(36)$$

ist.

Reducirt man das Kräftesystem auf diese im Anfangspunkte O des Coordinatensystems angreifende Resultante R und drei Kräftepaare, deren astatische Arme die Länge 1 haben und mit den Coordinatenaxen xyz gleichgerichtet sind, so ist die im Endpunkte eines dieser drei Arme einwirkende Seitenkraft des entsprechenden Kräftepaares bekanntlich durch die entsprechende geometrische Summe $[a_{11}]+[a_{12}]+[a_{13}]$, $[a_{21}]+[a_{22}]+[a_{23}]$, $[a_{31}]+[a_{32}]+[a_{33}]$ bestimmt.

Sind in Übereinstimmung mit (9) und (10) durch R_1, R_2, R_3 diese drei Seitenkräfte, deren astatischer Arm die Richtung der x-, beziehungsweise y-, beziehungsweise z-Axe hat, bezeichnet, so besteht zwischen den durch die Gleichungen (21) bestimmten Grössen und diesen durch die Kanten $R_1 R_2 R_3$ des früher betrachteten Triëders $OM_1 M_2 M_3$ dargestellten Kräften die Beziehungen (23).

Werden nun die Richtungen sämmtlicher Kräfte des Kräftesystems ohne Änderung ihrer Angriffspunkte xyz und ihrer Intensitäten in demselben Sinne um denselben Winkel gedreht, so ändern sich wohl die einzelnen Glieder der Determinante (9), jedoch behalten die Kräfte $R_1 R_2 R_3$ und R ihre Grösse bei, und es ändert sich auch die gegenseitige Lage der Richtungen derselben nicht, so dass den Gleichungen (21) und (23) zufolge auch das Ellipsoid (20), in dessen Gleichung die Constante C die unveränderliche Grösse der Reductionsresultanten R bedeuten möge, d. i. das Ellipsoid

$$\begin{aligned}(a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z)^2+(a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z)^2+\\ +(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)^2 = a_x x^2+a_y y^2+a_z z^2+\\ +2b_x yz+2b_y zx+2b_z xy = R^2,\end{aligned} \quad .(38)$$

keine Änderung erfährt. Es ist dies das von der Lage des Kräftesystems unabhängige und von Darboux eingeführte »astatische Centralellipsoid«[1] des Reductionspunktes O. Mit den Kräfterichtungen dreht sich in dem betrachteten Falle im selben Sinne und um dieselbe Drehaxe nicht nur die Reductionsresultante R, sondern auch das unveränderliche Triëder $\overline{OM_1 M_2 M_3}$, so dass durch dessen jeweilige Lage auch die entsprechende Lage des Kräftesystems genau bestimmt ist. Sollte umgekehrt der Körper, auf welchen die Kräfte einwirken, seine Lage stetig ändern, die Kräfte dagegen ihre Grössen und Richtungen beibehalten, so hat man nur, um diesen Fall auf den früheren zurückzuführen, das bisher als ruhend vorausgesetzte Axensystem xyz mit dem beweglichen Körper in unveränderlicher Verbindung anzunehmen.

---

[1] Wenn auch Darboux in der Gleichung des Centralellipsoids $C=1$ annimmt, so empfiehlt es sich aus Gründen, die späterhin ersichtlich werden, $C=R$ zu setzen.

Wählt man bei der astatischen Reduction derselben Kräfte auf die Reductionsresultante R und auf drei Kräftepaare mit zueinander senkrechten astatischen Armen von der Länge 1 diese Arme nicht in den Axen xyz, sondern parallel zu drei beliebigen anderen senkrechten Axen lmn, die sich in demselben Reductionspunkte O schneiden und deren Richtungscosinus $(\lambda_x \lambda_y \lambda_z)$, $(\mu_x \mu_y \mu_z)$, $(\nu_x \nu_y \nu_z)$ sind, so haben bekanntlich[1] die in den Endpunkten dieser Arme wirkenden Seitenkräfte $P_l P_m P_n$ der drei Kräftepaare folgende zu xyz parallele Componenten $[u_{11} u_{12} u_{13}]$, $[u_{21} u_{22} u_{23}]$, $[u_{31} u_{32} u_{33}]$: Es sind die Componenten von P_l

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= a_{11}\lambda_x + a_{21}\lambda_y + a_{31}\lambda_z \\ u_{12} &= a_{12}\lambda_x + a_{22}\lambda_y + a_{32}\lambda_z \\ u_{13} &= a_{13}\lambda_x + a_{23}\lambda_y + a_{33}\lambda_z \end{aligned}\right\} \quad .(39)$$

Die Componenten $u_{21} u_{22} u_{23}$ der Kraft P_m ergeben sich, wenn in (39) überall μ statt λ und jene der Kraft P_n, wenn ν statt λ gesetzt wird.

Die Grössen dieser drei Kräfte $P_l P_m P_n$ sind bekanntlich, wie dies sofort aus (38) und (39) ersichtlich ist, durch die in den Richtungen lmn gelegenen Radien $\rho_l \rho_m \rho_n$ des Darboux'schen Centralellipsoids (38) bestimmt, und zwar ist

$$R = P_l \rho_l = P_m \rho_m = P_n \rho_n,$$

so dass das Ellipsoid (38) diesbezüglich in der Astatik dieselbe Rolle übernimmt, wie das Trägheitsellipsoid in der Lehre von den Trägheitsmomenten. Schwieriger ist es, auf constructivem Wege die Richtungen dieser Kräfte $P_l P_m P_n$ festzustellen, welchem Zwecke die folgende Betrachtung dienen soll.

Zunächst sei hervorgehoben, dass diese Kräfte gleichgerichtet und proportional sind dreien einander conjugirten Durchmessern des Ellipsoids (16), welches dem zum Centralellipsoid (38) conjungirten Ellipsoid (12) (wofern, was im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll, überall $C = R$ angenommen wird) adjungirt ist. Es ist nämlich die aus

---

[1] Siehe etwa Dr. Wilhelm Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Aufl., II. Bd., S. 245 u. f.

$u_{11} u_{12} \ldots u_{33}$ gebildete Determinante der Determinante Δ in (9) gleich, da sie den Werthen (39) zufolge das Product aus dieser letzteren und der aus den Richtungscosinus $\lambda_x \ldots \nu_z$ gebildeten Determinante, die den Werth 1 hat, gleichkommt. Ferner sind die den Gliedern $u_{11} \ldots u_{33}$ adjungirten Subdeterminanten $U_{11} \ldots U_{33}$, wie leicht zu zeigen ist, durch Gleichungen bestimmt, die sich von den Gleichungen (39) nur dadurch unterscheiden, dass überall U statt u und statt $a_{11} \ldots a_{33}$ die adjungirten Subdeterminanten $A_{11} \ldots A_{33}$ einzusetzen sind. Demgemäss ist für einen beliebigen Punkt (xyz)

$$(U_{11}x+U_{12}y+U_{13}z)^2+(U_{21}x+U_{22}y+U_{23}z)^2+ \\ +(U_{31}x+U_{32}y+U_{33}z)^2=(A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z)^2+ \\ +(A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z)^2+(A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z)^2.$$

Nun zeigt dieselbe Betrachtung, die bei der Ableitung der Gleichung (17) angestellt wurde, wenn man überall $a, A, R_1 R_2 R_3$ durch $u, U, P_l P_m P_n$ ersetzt, dass die drei eingeklammerten Summen der linken Seite der letzten Gleichung einzeln genommen die Bedeutung $\Delta.\frac{X}{P_l}$, $\Delta\cdot\frac{Y}{P_m}$, $\Delta\cdot\frac{Z}{P_n}$ besitzen, wofern die Coordinaten XYZ sich auf ein im Allgemeinen schiefwinkliges Axensystem, dessen Axen die Richtungen der Kräfte $P_l P_m P_n$ haben, beziehen. Demgemäss nimmt die Gleichung des Ellipsoids (16) nunmehr die Form

$$\frac{X^2}{P_l^2}+\frac{Y^2}{P_m^2}+\frac{Z^2}{P_n^2}=\frac{1}{R^2} \qquad .(40)$$

an, wodurch die obige Behauptung nachgewiesen erscheint.

Dadurch ist auch nachgewiesen, dass das Ellipsoid (16) für eine gegebene Lage des Körpers und des ursprünglichen Kräftesystems von der Wahl des ursprünglich angenommenen Axensystems, für welches in diesem besonderen Falle $P_l = R_1$, $P_m = R_2$, $P_n = R_3$ wird, vollkommen unabhängig ist. Dieselbe Unabhängigkeit besteht demnach auch für das dem Ellipsoid (16) coaxiale und diesem adjungirte Ellipsoid (12). Für das Centralellipsoid (38) ergibt sich diese Unabhängigkeit schon aus dem obangeführten Umstande, dass $R = P_l \rho_l = P_m \rho_m = P_n \rho_n$ ist. Die Richtungen der drei in Betrachtung gezogenen Seitenkräfte

$P_I P_{III}$ und P_{II} kann man, wie aus der Übereinstimmung der Form der Gleichungen (39) und (31) hervorgeht, derart bestimmen, dass man in den Endpunkten LMN derjenigen Radien $r_I r_{III} r_{II}$ der dem Centralellipsoid (20) subjungirten Fläche (26), beziehungsweise (27), welche mit den Axen lmn gleichgerichtet sind, an diese Fläche Berührungsebenen legt, vom Reductionspunkte O die Lothe $d_I d_{III} d_{II}$ zu diesen Ebenen führt und hierauf das Centralellipsoid (38) in seine conjungirte Lage (12) dreht, wodurch dann die Lothe $d_I d_{III} d_{II}$ in die den Kräften $P_I P_{III} P_{II}$ gleich — beziehungsweise (wenn $k = -1$ ist) entgegengesetzt — gerichteten Lagen $d'_I d'_{III} d'_{II}$ gelangen.

Dass es unter allen astatisch äquivalenten Reductionen für eine gegebene Lage des Körpers und des Kräftesystems und für einen gegebenen Reductionspunkt O nur eine gibt, bei welcher die Seitenkräfte $P_I P_{III} P_{II}$ zueinander senkrecht gerichtet sind, ergibt sich schon daraus, dass nach (40) diese Kräfte mit drei conjugirten Diametern des Ellipsoids (16) gleichgerichtet sind, welch' letztere nur dann zueinander senkrecht sind, wenn sie mit den Axen dieser Fläche übereinstimmen. Da nun diese Fläche coaxial ist mit der ihr adjungirten Fläche (12), die hinwiederum conjungirt ist dem Centralellipsoid (38), so ist aus der zuletzt auseinandergesetzten geometrischen Bestimmungsweise der Richtungen der Seitenkräfte $P_I P_{III} P_{II}$ sofort zu entnehmen, dass in diesem besonderen Falle die astatischen Arme die Richtungen der Axen des Centralellipsoids und die zugehörigen Seitenkräfte $P_I P_{III} P_{II}$ die Richtungen der Axen des conjungirten Ellipsoids (12) annehmen müssen. Würde man demnach die Axen des Centralellipsoids für den Punkt O zu Coordinatenaxen wählen, so müssten drei Seitenflächen des zugehörigen, mit dem Axensystem sich ändernden Trieders $OM_1M_2M_3$ mit den gegen einander senkrechten Hauptschnittsebenen des Ellipsoids (12) übereinstimmen. Die drei von O ausgehenden Kanten des Trieders wären in diesem Falle $R_1 = Ra$, $R_2 = Rb$, $R_3 = Rc$, so dass das Volum des Tetraeders $OM_1M_2M_3$ d. i. $\frac{1}{6} R^3abc = \frac{1}{6}\Delta$ denselben Werth behielte, wie bei dem ursprünglichen Tetraeder, ebenso zufolge (15) und (23) die Summe der Quadrate der drei Kanten und der drei durch dieselben begrenzten Seitenflächen.

Mit Hilfe der dem Centralellipsoid (38) des beliebigen Punktes O adjungirten Fläche (die Darboux als »drittes Centralellipsoid« bezeichnet), deren der Gleichung (16) analoge Gleichung

$$(A_{11}x+A_{21}y+A_{31}z)^2+(A_{12}x+A_{22}y+A_{32}z)^2+ \\ +(A_{13}x+A_{23}y+A_{33}z)^2=\frac{\Delta^2}{R^2} \quad .(41)$$

ist, lässt sich auch, wie im Folgenden gezeigt werden soll, die Lage des Centralpunktes des Kräftesystems und die Lage und Länge der Axen des diesem Centralpunkte zugehörigen Centralellipsoids, das als »Hauptcentralellipsoid« bezeichnet sei, bestimmen.

Die Coordinaten $x_0 y_0 z_0$ des Centralpunktes des Kräftesystems, welcher der Mittelpunkt der zur Reductionsresultanten R parallelen Componenten sämmtlicher auf den starren Körper einwirkenden Kräfte ist, sind dieser Erklärung gemäss

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{a_{11}R_x+a_{12}R_y+a_{13}R_z}{R^2} = \frac{R_1 R\cos(R_1 R)}{R^2} \\ y_0 &= \frac{a_{21}R_x+a_{22}R_y+a_{23}R_z}{R^2} = \frac{R_2 R\cos(R_2 R)}{R^2} \\ z_0 &= \frac{a_{31}R_x+a_{32}R_y+a_{33}R_z}{R^2} = \frac{R_3 R\cos(R_3 R)}{R^2} \end{aligned}\right\} \quad .(42)$$

Aus den letzten Werthen ist unmittelbar zu ersehen, dass sich die Lage des Centralpunktes bei der Drehung des Kräftesystems nicht ändert.

Aus (42) folgt

$$\left.\begin{aligned} A_{11}x_0+A_{21}y_0+A_{31}z_0 &= \Delta\cdot\frac{R_x}{R^2} \\ A_{12}x_0+A_{22}y_0+A_{32}z_0 &= \Delta\cdot\frac{R_y}{R^2} \\ A_{13}x_0+A_{23}y_0+A_{33}z_0 &= \Delta\cdot\frac{R_z}{R^2} \end{aligned}\right\} \quad .(43)$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt dieselben, so gelangt man zur Gleichung (41), wodurch nachgewiesen ist, dass der Centralpunkt des Kräftesystems in dem dem

Centralellipsoid des beliebigen Punktes O adjungirten Ellipsoid (41) (dem »dritten Centralellipsoid« Darboux's) gelegen ist.

Die Entfernung des Centralpunktes vom Reductionspunkte O ist, wie die Vergleichung von (42) mit (12) sofort lehrt, gleich dem reciproken Werthe des in die Richtung der Reductionsresultanten R fallenden Radius der dem Centralellipsoid conjungirten Fläche (12).

Die Lage des dem Centralpunkte zugehörigen Radius des Ellipsoids (41) lässt sich auf Grund der Gleichungen (42), die in ihrer Form mit (29) übereinstimmen, den an die letzteren geknüpften früheren Erörterungen gemäss etwa derart bestimmen, dass man an die der Fläche (26) conjungirte Fläche $a\xi'^2+b\eta'^2+c\zeta'^2 = k$, welche der Fläche (12) subjungirt ist, im Endpunkte des mit der Reductionsresultanten R gleichgerichteten Radius eine tangirende Ebene legt, vom Mittelpunkte O eine Normale zu derselben führt und hierauf die Fläche (12) in ihre conjungirte Lage (20), d. h. in die Lage des Centralellipsoids (38) überführt, wodurch diese Normale in die Richtung des gesuchten Radius gelangt.

Bezieht man, um auch die Lage und Grösse der Halbaxen des Hauptcentralellipsoids zu bestimmen, die in gleicher Weise wie in (35) gebildeten Ausdrücke $a'_{11}. \;.a'_{33}$ und ebenso die Coefficienten (21) nach Einführung der Werthe aus (42) auf ein mit dem früheren Axensystem gleichgerichtetes Axensystem $x'y'z'$, dessen Anfangspunkt der Centralpunkt $(x_0 y_0 z_0)$ ist, so wird bei ungeänderter Lage des Körpers und des Kräftesystems

$$\left.\begin{array}{l}
a'_{11} = a_{11}-x_0 R_x,\;\; a'_{21} = a_{21}-y_0 R_x,\;\; a'_{31} = a_{31}-z_0 R_x \\
a'_{12} = a_{12}-x_0 R_y,\;\; a'_{22} = a_{22}-y_0 R_y,\;\; a'_{32} = a_{32}-z_0 R_y \\
a'_{13} = a_{13}-x_0 R_z,\;\; a'_{23} = a_{23}-y_0 R_z,\;\; a'_{33} = a_{33}-z_0 R_z \\
\qquad a'_x = a'^2_{11}+a'^2_{12}+a'^2_{13} = a_x-R^2 x_0^2 \\
\qquad a'_y = a'^2_{21}+a'^2_{22}+a'^2_{23} = a_y-R^2 y_0^2 \\
\qquad a'_z = a'^2_{31}+a'^2_{32}+a'^2_{33} = a_z-R^2 z_0^2 \\
\quad b'_x = a'_{21}a'_{31}+a'_{22}a'_{32}+a'_{23}a'_{33} = b_x-R^2 y_0 z_0 \\
\quad b'_y = a'_{31}a'_{11}+a'_{32}a'_{12}+a'_{33}a'_{13} = b_y-R^2 z_0 x_0 \\
\quad b'_z = a'_{11}a'_{21}+a'_{12}a'_{22}+a'_{13}a'_{23} = b_z-R^2 x_0 y_0
\end{array}\right\} \quad .(44)$$

in welch' letzteren sechs Gleichungen man auch die Werthe von $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ aus (23) substituiren kann.

Bildet man aus den ersten neun Werthen von $a'_{11} \ldots a'_{33}$ die Determinante Δ' oder nach Art der Gleichung (2) aus den letzten sechs Coefficienten $a'_x a'_y \ldots$ die symmetrische Determinante $A' = \Delta'^2$, so ergibt sich $\Delta' = 0$, indem zufolge der Werthe (44) und (42)

$$R^6 . \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} R_y^2 + R_z^2, & -R_x R_y, & -R_x R_z \\ -R_y R_x, & R_z^2 + R_x^2, & -R_y R_z \\ -R_z R_x, & -R_z R_y, & R_x^2 + R_y^2 \end{vmatrix}$$

ist und der letzte Factor den Werth Null hat. Der Umstand, dass $\Delta' = 0$ ist, hat der letzten Gleichung in (15) zufolge den Sinn, dass einer der drei reciproken Werthe der Halbaxen des Hauptcentralellipsoids den Werth Null hat, also dass das Hauptcentralellipsoid, wie dies bekannt ist, in eine elliptische Cylinderfläche degenerirt. Sind a_0^2 und b_0^2 die reciproken Werthe der Quadrate der beiden anderen Halbaxen, d. i. der Halbaxen des elliptischen Hauptschnittes dieser Cylinderfläche, so ist zufolge (15), (44) und (23)

$$R^2(a_0^2 + b_0^2) = a'_x + a'_y + a'_z = a_x + a_y + a_z - R^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) =$$
$$= R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R^2[x_0^2 + y_0^2 + z_0^2],$$

also auch

$$a_0^2 + b_0^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2). \qquad (45)$$

Für die den Gliedern $a'_{11} \ldots a'_{33}$ in der Determinante Δ' adjungirten Subdeterminanten ergeben sich aus (44) bei Berücksichtigung von (42) folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A'_{11}}{R_x} &= \frac{A'_{12}}{R_y} = \frac{A'_{13}}{R_z} = \frac{A_{11} R_x + A_{12} R_y + A_{13} R_z}{R^2} \\ \frac{A'_{21}}{R_x} &= \frac{A'_{22}}{R_y} = \frac{A'_{23}}{R_z} = \frac{A_{21} R_x + A_{22} R_y + A_{23} R_z}{R^2} \\ \frac{A'_{31}}{R_x} &= \frac{A'_{32}}{R} = \frac{A'_{33}}{R_z} = \frac{A_{31} R_x + A_{32} R_y + A_{33} R_z}{R^2} \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

welche Gleichungen — nebenbei bemerkt — lehren, dass alle drei durch die geometrischen Summen

$$[a'_{11}]+[a'_{12}]+[a'_{13}],\ [a'_{21}+a'_{22}+a'_{23}],\ [a'_{31}+a'_{32}+a'_{33}]$$

bestimmten Kräfte $R'_1 R'_2 R'_3$ zur Reductionsresultanten R senkrecht stehen.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich weiterhin:

$$\left.\begin{aligned}
A'_x &= A'^2_{11}+A'^2_{12}+A'^2_{13} = \left[A_{11}\frac{R_x}{R}+A_{12}\frac{R_y}{R}+A_{13}\frac{R_z}{R}\right]^2\\
A'_y &= A'^2_{21}+A'^2_{22}+A'^2_{23} = \left[A_{21}\frac{R_x}{R}+A_{22}\frac{R_y}{R}+A_{23}\frac{R_z}{R}\right]^2\\
A'_z &= A'^2_{31}+A'^2_{32}+A'^2_{33} = \left[A_{31}\frac{R_x}{R}+A_{32}\frac{R_y}{R}+A_{33}\frac{R_z}{R}\right]^2
\end{aligned}\right\} \quad .(47)$$

Nun ist analog der mittleren Gleichung (15), da $c_0 = 0$ ist,

$$R^4 . a_0^2 b_0^2 = A'_x + A'_y + A'_z, \quad ..(48)$$

daher, wenn man den mit der Reductionsresultanten R gleichgerichteten Radius der zu (41) conjungirten Fläche, deren Gleichung (16) ist, durch ρ_R bezeichnet, so ist den letzten Gleichungen und der Gleichung (16) entsprechend

$$R^4 . a_0^2 b_0^2 = \frac{1}{\rho_R^2}\,\frac{\Delta^2}{R^2},$$

also zufolge (22)

$$a_0^2 b_0^2 = \frac{\Delta^2}{R^6 . \rho_R^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{\rho_R^2}. \quad .(49)$$

Es lässt sich übrigens dieses Product $a_0^2 b_0^2$ auch sowohl mit Hilfe des Centralellipsoids (38), als auch mit Hilfe des diesem adjungirten Ellipsoids (41) in einfacher Weise bestimmen.

Für die Richtungscosinus $\lambda\mu\nu$ der im Centralpunkte $x_0 y_0 z_0$ zu der letzteren Fläche (41) geführten Normalen N_0 ergeben sich nämlich aus (41) bei Beachtung der Gleichungen (43) folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{A_{11}R_x+A_{12}R_y+A_{13}R_z} = \frac{\mu}{A_{21}R_x+A_{22}R_y+A_{23}R_z} =\\
&= \frac{\nu}{A_{31}R_x+A_{32}R_y+A_{33}R_z} = \frac{\lambda x_0+\mu y_0+\nu z_0}{\Delta}
\end{aligned}\right\} \quad ..(50)$$

Da nun $\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$ ist, so lässt sich aus diesen Gleichungen bei Beachtung von (47) folgern, dass

$$R^2[A'_x+A'_y+A'_z] = \frac{\Delta^2}{(\lambda x_0+\mu y_0+\nu z_0)^2}.$$

Ist sonach $R_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$ der Radius des Centralpunktes im Ellipsoid (41), so ist der früheren Gleichung (48) und der letzten Gleichung gemäss

$$a_0^2 b_0^2 = \frac{\Delta^2}{R^5 . R_0^2 \cos^2(R_0 N_0)} = \frac{a^2b^2c^2}{R_0^2 \cos^2(R_0 N_0)}, \qquad .(51)$$

also auch $\rho_R = R_0 \cos(R_0 N_0)$. Da ferner der mit der Normalen N_0 gleichgerichtete Radius des Centralellipsoids (38) zufolge der anfänglichen Betrachtungen zu $R_0 \cos(R_0 N_0)$ reciprok ist, so ist durch (51) auch die Beziehung des Productes $a_0 b_0$ zum Centralellipsoid bestimmt.

Um nun darzuthun, dass auch die Lage der Hauptaxen des Hauptcentralellipsoids mit der dem Centralellipsoid (38) des beliebigen Punktes O adjungirten Ellipsoid (41) in einfacher Beziehung steht, seien die Axen des Centralellipsoids des Punktes O der Einfachheit halber zu Coordinatenaxen gewählt, so dass demgemäss

$$b_x = b_y = b_z = 0 \quad \text{und} \quad a_x = R^2a^2,\ a_y = R^2b^2,\ a_z = R^2c^2$$

ist.

Die Gleichung des Ellipsoids (41) nimmt dann die Form an

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \ldots(52)$$

Die Gleichung des Hauptcentralellipsoids in Bezug auf mit xyz gleichgerichtete Axen $x'y'z'$, deren Anfangspunkt der Centralpunkt ist, lautet übereinstimmend mit (38)

$$a'_x x'^2 + a'_y y'^2 + a'_z z'^2 + 2b'_x . y'z' + 2b'_y . z'x' + 2b'_z . x'y' = R^2, \quad \ldots(53)$$

wo $a'_x \ldots b'_z$ die aus (44) bekannten Werthe haben. Für die unendliche Hauptaxe der Fläche (53), d. i. für die Axe dieser cylindrischen Fläche ist demnach, wenn $\lambda\mu\nu$ deren Richtungscosinus sind,

$$a'_x\lambda + b'_z\mu + b'_y\nu = 0$$
$$b'_z\lambda + a'_y\mu + b'_x\nu = 0$$
$$b'_y\lambda + b'_x\nu + a'_z\nu = 0$$

sonach, wenn man die Werthe aus (44) einsetzt und $b_x = b_y = b_z = 0$ und $a_x = R^2a^2$, $a_y = R^2b^2$ und $a_z = R^2c^2$ setzt,

$$\frac{a^2\lambda}{x_0} = \frac{b^2\mu}{y_0} = \frac{c^2\nu}{} = \lambda x_0 + \mu y_0 + \nu z_0. \qquad .(54)$$

Diese Gleichung charakterisirt aber die Normale der Fläche (52), wodurch nachgewiesen ist, dass die geometrische Axe der dem Centralpunkte entsprechenden Hauptcentralcylinderfläche im Centralpunkte normal steht zu jenem Ellipsoid, welches dem Centralellipsoid des beliebigen Punktes O adjungirt ist, dass demnach die Centralebene des Kräftesystems, d. i. die auf der unendlichen Axe dieser Cylinderfläche im Centralpunkte senkrecht stehende Ebene dieses adjungirte Ellipsoid (41) im Centralpunkte tangirt.

Die Richtungen der beiden anderen in der Centralebene gelegenen Halbaxen $\sqrt{1:a_0^2}$ und $\sqrt{1:b_0^2}$ stimmen überein mit den Richtungen der Tangenten der Hauptschnitte dieses Ellipsoids (41), beziehungsweise (52), wie aus folgender Untersuchung hervorgeht.

Bekanntlich ist, wenn $\alpha\beta\gamma$ die Richtungscosinus dieser Tangenten für den Centralpunkt $x_0\,y_0\,z_0$ bezeichnen, der Gleichung (52) gemäss

$$\alpha\;\frac{x_0}{1-ua^2} = \beta\;\frac{y_0}{1-ub^2} = \gamma\;\frac{z_0}{1-uc^2} =$$
$$= (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)\left[\frac{x_0^2}{1-ua^2} + \frac{y_0^2}{1-ub^2} + \frac{z_0^2}{1-uc^2}\right], \qquad .(55)$$

wo u einen der beiden, jedenfalls reellen und positiven Wurzelwerthe der bezüglich u quadratischen Gleichung

$$\frac{x_0^2}{a^2(1-ua^2)} + \frac{y_0^2}{b^2(1-ub^2)} + \frac{z_0^2}{c^2(1-uc^2)} = 0 \quad \ldots(56)$$

bedeutet und der irgend einem dieser beiden Wurzelwerthe entsprechende Hauptkrümmungshalbmesser ρ des Hauptschnittes ist dann bestimmbar aus

$$\frac{1}{\rho} = u \,.\left[\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad .(57)$$

Durch Subtraction der Gleichungen (52) und (56) ergibt sich

$$\frac{x_0^2}{1-u a^2}+\frac{y_0^2}{1-u b^2}+\frac{z_0^2}{1-u c^2} = -\frac{1}{u} \qquad .(58)$$

Sonach ist, wenn $p = x_0\alpha + y_0\beta + z_0\gamma$ die Projection des Radius R_0 des Centralpunktes auf die entsprechende Tangente des Hauptschnittes bedeutet, zufolge (55)

$$\alpha = -up\frac{x_0}{1-u a^2},\ \beta = -up\frac{y_0}{1-u b^2},\ \gamma = -up\frac{z_0}{1-u c^2} \qquad \ldots(59)$$

Diesen Werthen entsprechend ist, da in den Gleichungen (44) $a_x = R^2a^2$, $a_y = R^2b^2$, $a_z = R^2c^2$ und $b_x = b_y = b_z = 0$ zu setzen ist, bei Beachtung von (58)

$$\frac{a'_x\alpha + b'_z\beta + b'_y\gamma}{\alpha} = \frac{b'_z\alpha + a'_y\beta + b'_x\gamma}{\beta} = \frac{b'_y\alpha + b'_x\beta + a'_z\gamma}{\gamma} = \frac{R^2}{u}.$$

Diese für die Hauptaxen der Fläche (53) charakteristische Gleichung lehrt, dass in der That die den beiden aus (56) bestimmbaren Werthen von u entsprechenden Richtungscosinus $\alpha\beta\gamma$ der Gleichungen (59) den Richtungen der beiden Halbaxen $\sqrt{\frac{1}{a_0^2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{b_0^2}}$ des Hauptcentralellipsoids (53) zukommen. Zugleich ersieht man aus der letzten Gleichung, dass $u_1 = \frac{1}{a_0^2}$ und $u_2 = \frac{1}{b_0^2}$ die beiden Wurzelwerthe der Gleichung (56) sein müssen. In der That führt auch die Auflösung dieser Gleichung zu den früheren Relationen (45) und (51), wobei zu beachten ist, dass, wenn N_0, wie früher, die im Centralpunkte $x_0y_0z_0$ zur Fläche (52) geführte Normale bedeutet

$$R_0 \cos(R_0N_0) = \left|\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

Der Gleichung (57) zufolge ist auch, wenn und ρ_b die entsprechenden Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte des Ellipsoids (41), beziehungsweise (52) für den Centralpunkt bedeuten,

$$\left.\begin{aligned} a_0^2 &= \rho_a \, . R_0 \cos (R_0 N_0) \\ b_0^2 &= \rho_b \, . R_0 \cos (R_0 N_0) \end{aligned}\right\} \quad .(60)$$

wodurch eine neue Beziehung zwischen den reciproken Halbaxen $a_0 b_0$ des Hauptcentralellipsoids und der Fläche (41) bestimmt ist.

Es sei in Kürze noch bemerkt, dass durch die gefundenen Werthe von $u_1 = \frac{1}{a_0^2}$ und $u_2 = \frac{1}{b_0^2}$, welche der quadratischen Gleichung (56) für den Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche (41), beziehungsweise (52) Genüge leisten, zwei Flächen, nämlich ein einflächiges und ein zweiflächiges Hyperboloid bestimmt sind, deren Gleichungen übereinstimmend mit (58) lauten

$$\frac{x^2}{a^2 - \frac{1}{u}} + \frac{y^2}{b^2 - \frac{1}{u}} + \frac{z^2}{c^2 - \frac{1}{u}} = 1.$$

Diese beiden Flächen $\frac{x^2}{a^2 - a_0^2} + \frac{y^2}{b^2 - a_0^2} + \frac{z^2}{c^2 - a_0^2} = 1$ und $\frac{x^2}{a^2 - b_0^2} + \frac{y^2}{b^2 - b_0^2} + \frac{z^2}{c^2 - b_0^2} = 1$ sind mit (52) homofocal und die Normalen dieser beiden Flächen sind gleichfalls mit den in der Centralebene gelegenen Axen des Hauptcentralellipsoids gleichgerichtet, wie dies leicht nachzuweisen ist.

Die Gleichung der Centralebene in Bezug auf das ursprüngliche beliebig gewählte Axensystem, dessen Anfangspunkt 0 ist, ist, da diese Ebene den Centralpunkt $x_0 y_0 z_0$ enthält und ihre Normale durch die Richtungscosinus $\lambda \mu \nu$ bestimmt ist, $(x - x_0)\lambda + (y - y_0)\mu + (z - z_0)\nu = 0$, somit zufolge (50)

$$\begin{aligned} x(A_{11} R_x + A_{12} R_y + A_{13} R_z) + y(A_{21} R_x + A_{22} R_y + A_{23} R_z) + \\ + z(A_{31} R_x + A_{32} R_y + A_{33} R_z) = \Delta \end{aligned}$$

oder, was dasselbe besagt,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & \\ R_x & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ R_y & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ R_z & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad .(61)$$

Dies ist zugleich die Gleichung der zum Hauptcentralellipsoid adjungirten Fläche, da die Halbaxen adjungirter Flächen gleichgerichtet und reciprok sind. Übrigens ersieht man dies auch aus der Gleichung (41), wenn man in derselben die Grössen $A_{mn}xyz\Delta$ durch $A'_{mn}x'y'z'\Delta'$ ersetzt, und beachtet, dass $\Delta' = 0$, $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$ ist, wo für $x_0 y_0 z_0$ die Werthe aus (42) und für A'_{mn} die Werthe aus (46) einzusetzen sind.

Für die der Centralebene (61) conjungirte Fläche, deren Gleichung die Form

$$(A'_{11}x' + A'_{12}y' + A'_{13}z')^2 + (A'_{21}x' + A'_{22}y' + A'_{23}z')^2 + \\ + (A'_{31}x' + A'_{32}y' + A'_{33}z') = \frac{\Delta'}{R^2} = 0$$

hat, findet man, wenn man die Werthe aus (46) substituirt, die Gleichung $R_x x' + R_y y' + R_z z' = 0$, welche lehrt, dass diese Fläche mit der im Centralpunkte $x_0 y_0 z_0$ zur Reductionsresultanten normalen Ebene identisch ist. Setzt man abermals $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$ und setzt die Werthe aus (42) ein, so erhält die Gleichung dieser Fläche die Form

$$(R_x x + R_y y + R_z z) R^2 = a_{11} R_x^2 + a_{22} R_y^2 + a_{33} R_z^2 + \\ + (a_{23} + a_{32}) R_y R_z + (a_{31} + a_{13}) R_z R_x + (a_{12} + a_{21}) R_x R_y. \qquad .(62)$$

Wie aus der gleich zu Anfang erörterten Entstehungsweise des dem Centralellipsoid des Punktes O conjungirten Ellipsoids (12) hervorgeht, ist das letztere bloss von dem ursprünglichen Triëder $OM_1 M_2 M_3$ abhängig und hat zu demselben eine unveränderliche relative Lage, so dass, wenn bei der Drehung des Kräftesystems sich dieses Triëder nach Früherem im selben Sinne und um denselben Rotationswinkel dreht, sich auch das Ellipsoid (12) in gleichem Sinne, und zwar mit dem Kräftesystem um eine gleichgerichtete Axe dreht, und dass durch die jeweilige Lage dieses Ellipsoids auch die entsprechende Lage, die das Kräftesystem bei dieser Drehung annimmt, mitbestimmt ist.

Soll nun das Kräftesystem bei dieser Drehung in eine Lage gelangen, bei welcher sich die Kräfte auf eine im Punkte O angreifende resultirende Einzelkraft reduciren lassen, so muss, wenn sich die durch (35) bestimmten Glieder der ursprünglichen Determinante Δ auf diese Lage des Kräftesystems, die, wenn $R=0$ ist, zu einer Gleichgewichtslage wird, beziehen, bekanntlich $a_{23}=a_{32}$, $a_{31}=a_{13}$ und $a_{12}=a_{21}$ sein, so dass in diesem Falle die Determinante (9) zu einer symmetrischen wird und die dem Centralellipsoid (20) subjungirte Fläche die Form der Gleichung (27) annimmt. Es müssen dann die conjungirten Flächen (12) und (20) identisch sein und wenn die drei Halbaxen $\sqrt{\frac{1}{a^2}}, \sqrt{\frac{1}{b^2}}, \sqrt{\frac{1}{c^2}}$ dieser Flächen voneinander verschieden sind, die Axen $\xi'\eta'\zeta'$ der einen Fläche mit den Axen $\xi\eta\zeta$ der zweiten Fläche gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sein. Kurz, es muss dann, wie übrigens auch aus (18) und (19) zu ersehen ist, wenn $K_1 K_2 K_3$ die Bedeutung von $+1$ oder -1 haben,

$$K_1=\frac{\alpha'_x}{\alpha_x}=\frac{\alpha'_y}{\alpha_y}=\frac{\alpha'_z}{\alpha_z},\quad K_2=\frac{\beta'_x}{\beta_x}=\frac{\beta'_y}{\beta_y}=\frac{\beta'_z}{\beta_z},\quad K_3=\frac{\alpha'_z}{\alpha_z}=\frac{\beta'_z}{\beta_z}=\frac{\gamma'_z}{\gamma_z}$$

sein. Da nun sowohl die aus den Richtungscosinus $\alpha_x \ldots \gamma_z$, als auch aus $\alpha'_x \ldots \gamma'_z$ gebildete Determinante den Werth $+1$ haben muss, so muss auch $K_1 K_2 K_3 = 1$ sein, d. h. es muss einer von folgenden vier Fällen eintreten: $K_1=1$, $K_2=1$, $K_3=1$ oder $K_1=1$, $K_2=-1$, $K_3=-1$ oder $K_1=-1$, $K_2=-1$, $K_3=1$ oder schliesslich $K_1=-1$, $K_2=1$, $K_3=-1$. Es gibt demnach, wie dies bekannt ist, wenn a^2, b^2, c^2 voneinander verschieden sind, nur vier Lagen des Kräftesystems von der besagten Eigenschaft.

Es braucht nicht erst auseinandergesetzt zu werden, wie beträchtlich sich infolge der Identität der conjungirten Flächen die früher betrachteten Constructionsregeln und Formeln in diesem Falle vereinfachen. Überhaupt empfiehlt es sich, in diesem besonderen Falle statt aller der bisher in Betrachtung gezogenen Flächen bloss die dem Centralellipsoid subjungirte Fläche (27) allein der Betrachtung zu Grunde zu legen (wie dies der Verfasser schon in einer früheren Abhandlung für die Anwendung dieser Fläche für den besonderen Fall, dass $a_{11} \ldots a_{33}$ die Spannungscomponenten bedeuten, auf Probleme der Elasticitätstheorie[1] vorgeschlagen hat). Soll nun bei der Drehung des Kräftesystems um irgend eine Drehaxe der Reductionspunkt O für diese Drehung als »Mittelpunkt der Kräfte« fungiren, sollen also die Kräfte sich stets bei dieser Drehung auf eine in O angreifende Resultante R reduciren lassen, beziehungsweise soll, wenn $R = 0$ ist, das ursprünglich vorhandene Gleichgewicht bei dieser Drehung andauern, so muss die frühere Bedingung der Coincidenz des mit dem Kräftesystem zugleich rotirenden conjungirten Ellipsoids (12) mit dem ruhenden Ellipsoid (20) während dieser Drehung stetig bestehen, was nur dann möglich ist, wenn das Centralellipsoid (20) ein Rotationsellipsoid ist und die Drehung um die geometrische Axe dieses Ellipsoids stattfindet. Eine solche Axe nennt Möbius[2] bekanntlich eine »Axe des Gleichgewichtes«. Es ist jedoch hervorzuheben, dass, wenn auch die Gleichheit zweier Halbaxen des Centralellipsoids für die Existenz einer Gleichgewichtsaxe nothwendig ist, dieselbe keinesfalls, wie dies hie und da[3] behauptet wird, hiefür hinreichend ist; denn die Gleichheit zweier Halbaxen des Centralellipsoids (38) setzt bloss voraus, dass

$$(a_y - a_z) b_y b_z - b_x (b_z^2 - b_y^2) = (a_z - a_x) b_z b_x - b_y (b_x^2 - b_z^2) = \\ = (a_x - a_y) b_x b_y - b_z (b_y^2 - b_x^2) = 0 \qquad .(63)$$

ist, so dass zufolge der, wie man sich leicht überzeugen kann, in dem besonderen Falle der Gleichheit von $a_{23} = a_{32}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$ identischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a_y - a_z) b_y b_z - b_x (b_z^2 - b_y^2) &= \\ = -[(a_{22} - a_{33}) a_{31} a_{12} - a_{23} (a_{12}^2 - a_{31}^2)] &. \nabla \\ (a_z - a_x) b_z b_x - b_y (b_x^2 - b_z^2) &= \\ = -[(a_{33} - a_{11}) a_{12} a_{23} - a_{31} (a_{23}^2 - a_{12}^2)] &\ \nabla \\ (a_x - a_y) b_x b_y - b_z (b_y^2 - b_x^2) &= \\ = -[(a_{11} - a_{22}) a_{23} a_{31} - a_{12} (a_{31}^2 - a_{32}^2)] &. \nabla \end{aligned}\right\} \qquad .(64)$$

Finger, »Über die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche«. Diese Sitzungsber., Bd. LXXXIII, Jahrg. 1881.

Lehrbuch der Statik von August Ferd. Möbius, I. Theil, S. 248 u. f. Leipzig 1837.

[3] Siehe z. B. Theorie der Bewegung und der Kräfte, von Dr. Wilhelm Schell, II. Bd., S. 250 und S. 255.

die Bedingung (63) erfüllt ist, sowohl wenn die drei innerhalb der eckigen Klammer rechterseits stehenden Factoren sämmtlich verschwinden, d. h. auch die gleichgerichteten Halbaxen der subjungirten Fläche (27) gleich sind, als auch, wenn der letzte Factor ∇ der Gleichung (64), welcher die Bedeutung der Determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} -a_{22}-a_{33}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & -a_{33}-a_{11}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & -a_{11}-a_{22} \end{vmatrix} \quad .(65)$$

hat, verschwindet, d. h. wenn in der auf die einfachste Form (26) gebrachten Gleichung (27) jene zwei der Coefficienten abc, die sich auf die besagten Axen beziehen, entgegengesetzt gleich sind, also einer der Wurzelwerthe der bezüglich μ cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\mu \end{vmatrix} = 0 \quad .(66)$$

den Werth $\mu = a_{11}+a_{22}+a_{33}$ hat, während die beiden anderen Wurzelwerthe $+\sqrt{-(A_{11}+A_{22}+A_{33})}$ und $-\sqrt{-(A_{11}+A_{22}+A_{33})}$ sind [wo der Gleichung (65) zufolge die Beziehung $(a_{11}+a_{22}+a_{33}).(A_{11}+A_{22}+A_{33}) = \Delta$ vorausgesetzt ist). In jedem Falle setzt die Existenz einer Gleichgewichtsaxe bloss das letztere, nämlich das Verschwinden der durch die Gleichung (65) bestimmten Determinante ∇ nothwendigerweise voraus. Es muss nämlich, wie leicht zu ersehen ist, der zur Gleichgewichtsaxe senkrechte Hauptschnitt der subjungirten Fläche (27) eine gleichseitige Hyperbel sein.

Auch die Behauptung, dass, falls das Centralellipsoid in eine Kugelfläche übergehe, alle Mittelpunktsaxen Gleichgewichtsaxen seien (siehe Schell, »Theorie der Bewegung und der Kräfte«, II. Bd., S. 250) ist unrichtig (ausser man würde voraussetzen, dass der Halbmesser dieser Kugelfläche unendlich gross ist), wie dies sofort ersichtlich wird, wenn man alle Glieder der Determinante (9) verschwinden lässt, mit Ausnahme der als gleich vorausgesetzten $a_{11} = a_{22} = a_{33}$. Wohl bestehen aber unendlich viele Gleichgewichtsaxen, die in derselben Ebene gelegen sind, wenn die Fläche (27) ein Rotationshyperboloid ist, welches durch Umdrehung einer gleichseitigen Hyperbel um eine der beiden Axen derselben entsteht, in welchem Falle das Centralellipsoid jedenfalls eine endliche Kugelfläche ist. Es sind nämlich in diesem Falle alle in der Äquatorialebene der Fläche (27) gelegene Mittelpunktsaxen Gleichgewichtsaxen. Es verschwinden dann nicht nur die durch (65) bestimmte Determinante ∇, sondern überdies die drei innerhalb der eckigen Klammern enthaltenen Factoren der Gleichungen (64), was voraussetzt, dass, wenn die Quotienten $\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}$, $\frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}}$ $\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}$ durch uvw und die Hälfte ihrer Summe durch s bezeichnet wird, zwischen den Gliedern der Determinante (9) die Beziehungen stattfinden: $s = u - a_{11} = v - a_{22} = w - a_{33}$. Von den drei Coefficienten abc der Gleichung (26) haben dann zwei den Werth $-\frac{s}{R}$ und die dritte den Werth $\frac{s}{R}$

Wählt man den Centralpunkt Ω zum Reductionspunkt, die Centralebene zur $\xi\eta$-Ebene und die Halbaxen $\sqrt{\frac{1}{a_0^2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{b_0^2}}$ des Hauptcentralellipsoids zur ξ-, beziehungsweise η-Axe, also die Axe dieser Cylinderfläche zur ζ-Axe, so lässt sich in bekannter Weise mit Zuhilfenahme jener drei durch irgend einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ hindurchgelegten homofocalen Flächen, deren Gleichung

$$\frac{\xi^2}{R^2a_0^2-\mu} + \frac{\eta^2}{R^2b_0^2-\mu} - \frac{\zeta^2}{\mu} + \frac{1}{R^2} = 0 \qquad .(67)$$

ist (wo μ irgend einen der drei reellen und positiven Werthe bedeutet, die dieser bezüglich μ cubischen Gleichung für den gegebenen Punkt $\xi\eta\zeta$ genügen), die Lage und Länge der Halbaxen des diesem Punkte zugehörigen astatischen Centralellipsoids durch die Normalen dieser drei Flächen bestimmen.

Um schliesslich auch die Lage und Gestalt des dem beliebigen Punkte O, d. i. dem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ für die gegebene Lage des Kräftesystems zugehörigen und für alle früheren Constructionen massgebenden Trieders $OM_1M_2M_3$, für dessen drei von diesem Punkte ausgehenden Kanten $R_1R_2R_3$ die Glieder der Determinante (9) die orthogonalen Projectionen auf die Axen $\xi\eta\zeta$ sind, zu bestimmen, dazu diene folgende Betrachtung:

Es sei die der gegebenen Lage des Kräftesystems entsprechende Richtung der Reductionsresultanten R, die nach Früherem zur Axe der dem Hauptcentralellipsoid conjungirten Cylinderfläche parallel ist, im entgegengesetzten Sinne genommen zur positiven ζ'-Axe und irgend eine Richtung der Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{a_0^2}}$ dieser Fläche zur positiven Richtung der ξ'-Axe eines neuen orthogonalen Axensystems gewählt, so dass die positive Richtung der η'-Axe, d. i. der Halbaxe $\sqrt{\frac{1}{b_0^2}}$ dadurch genau bestimmt ist, dass von der Seite der positiven ξ'-Axe aus betrachtet die kürzeste Drehung, durch welche die positive ξ'-Axe in die positive Richtung der positiven η'-Axe überführt werden kann, als eine positive Drehung erscheint. Dreht man diese conjungirte Cylinderfläche und hiemit auch das Kräftesystem irgendwie derart, dass durch diese Drehung diese Fläche irgendwie (in einer der vier früher betrachteten möglichen Hauptlagen) mit dem Hauptcentralellipsoid zur Coincidenz gelangt, so gelangen dadurch die früheren positiven Axenrichtungen $\xi'\eta'\zeta'$ in die Lagen der Axen $\xi\eta\zeta$, deren positive Richtungen bisher noch unbestimmt gelassen worden sind, und zwar seien die nunmehrigen Richtungen der Axen $\xi'\eta'\zeta'$ zu den positiven Richtungen der Axen $\xi\eta\zeta$ gewählt. In der nunmehrigen Lage des Kräftesystems reducirt sich dasselbe auf die im Centralpunkte nach der negativen Richtung der Axe ζ angreifende Resultante R, während die stets parallel zu den Axen ξ' beziehungsweise η' wirkenden Seitenkräfte derjenigen Kräftepaare, deren astatischer, der Längeneinheit gleicher Arm die positive Richtung der Axe ξ, beziehungsweise η hat, nunmehr längs der Axen ξ, beziehungsweise η wirken und sich das Gleichgewicht halten. Bildet man für diese Hauptlage des Kräftesystems und für den Centralpunkt als Reductionspunkt in der durch (35) bestimmten Weise die Glieder der Determinante (9), die durch α_{mn} bezeichnet seien, so ist, da $\alpha_x = \beta_y = \gamma_z = 1$ ist und für die betrachtete Hauptlage auch $\alpha'_x = \beta'_y = \gamma'_z = 1$ ist, zufolge (25), wo $C = R$, $a = a_0$, $b = b_0$ zu setzen ist,

$$\alpha_{11} = \Sigma(\xi X) = Ra_0, \ a_{22} = \Sigma(\eta Y) = Rb_0, \qquad .(68)$$

während alle anderen Glieder verschwinden, und zwar auch α_{33}, da $c_0 = 0$ ist. Es sind sonach durch die Qualitätszeichen der Summen $\Sigma(\xi X)$ und $\Sigma(\eta Y)$ für diese Hauptlage auch die Qualitätszeichen von a_0 und b_0 nunmehr bestimmt.

Für die ursprüngliche Lage des Kräftesystems, die der Lage $\xi'\eta'\zeta'$ der Axen der dem Hauptcentralellipsoid conjungirten Cylinderfläche entspricht, ist, da abermals $\alpha_x \quad \beta_y = \gamma_z = 1$ und $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0 = 0$ und $C = R$ zu setzen ist, und wenn die der jetzigen Lage des Kräftesystems nach Art der Gleichungen (35) entsprechenden, auf dieselben Axen $\xi\eta\zeta$ bezüglichen Glieder der Determinante (9) durch $a_{mn}^{(0)}$ bezeichnet werden, zufolge (25)

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}^{(0)} = R a_0 \alpha'_x,\ a_{12}^{(0)} = R a_0 \alpha'_y,\ a_{13}^{(0)} = R a_0 \alpha'_z \\ a_{21}^{(0)} = R b_0 \beta'_x,\ a_{22}^{(0)} = R b_0 \beta'_y,\ a_{23}^{(0)} = R b_0 \beta'_z \\ a_{31}^{(0)} = a_{32}^{(0)} = a_{33}^{(0)} = 0 \text{ und } R_x = -R\gamma'_x,\ R_y = -R\gamma'_y,\ R_z = -R\gamma'_z \end{array}\right\} \quad .(69)$$

Wählt man jedoch nicht den Centralpunkt Ω, sondern, wie dies bisher stets geschehen ist, den beliebigen Punkt O, dessen Coordinaten $\xi\eta\zeta$ sind, zum Reductionspunkt und die durch O parallel zu $\xi\eta\zeta$ gelegten und mit diesen gleichgerichteten Axen als die Axen xyz eines neuen Systems, so ist — den Gleichungen (35), (69), (21) und (23) zufolge — für diese Axen xyz und für dieselbe Lage des Kräftesystems

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} = a_{11}^{(0)} - \xi R_x = R[a_0\alpha'_x + \xi\gamma'_x],\ a_{12} = a_{12}^{(0)} - \xi R_y = R[a_0\alpha'_y + \xi\gamma'_y] \\ a_{13} = a_{13}^{(0)} - \xi R_z = R[a_0\alpha'_z + \xi\gamma'_z] \\ a_{21} = a_{21}^{(0)} - \eta R_x = R[b_0\beta'_x + \eta\gamma'_x],\ a_{22} = a_{22}^{(0)} - \eta R_y = R[b_0\beta'_y + \eta\gamma'_y] \\ a_{23} = a_{23}^{(0)} - \eta R_z = R[b_0\beta'_z + \eta\gamma'_z] \\ a_{31} = a_{31}^{(0)} - \zeta R_x = R.\zeta\gamma'_x,\ a_{32} = a_{33}^{(0)} - \zeta R_y = R.\zeta\gamma'_y, \\ a_{33} = a_{33}^{(0)} - \zeta R_z = R.\zeta\gamma'_z \\ a_x = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = R^2(a_0^2 + \xi^2) = R_1^2, \\ a_y = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = R^2(b_0^2 + \eta^2) = R_2^2, \\ a_z = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = R^2\zeta^2 = R_3^2 \\ b_x = a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = R^2\eta\zeta = R_2R_3 \cos(R_2R_3), \\ b_y = R^2\zeta\xi = R_3R_1 \cos(R_3R_1),\ b_z = R^2\xi\eta = R_1R_2 \cos(R_1R_2) \\ A_x = R^4 b_0^2\zeta^2 = R_2^2R_3^2 \sin^2(R_2R_3),\ A_y = R^4a_0^2\zeta^2 = R_3^2R_1^2 \sin^2(R_3R_1), \\ A_z = R^4(a_0^2b_0^2 + \xi^2b_0^2 + \eta^2a_0^2) = R_1^2R_2^2 \sin^2(R_1R_2) \\ A_{11} = R_2b_0\zeta\alpha'_x,\ A_{12} = R^2b_0\zeta.\alpha'_y,\ A_{13} = R^2b_0\zeta\alpha'_z, \\ \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = R^3.a_0b_0\zeta \end{array}\right\} \ldots (70)$$

Den ersten neun Gleichungen zufolge kann man — abgesehen vom constanten Factor R — das dem willkürlich gewählten Reductionspunkte O und der jeweiligen Lage des Kräftesystems entsprechende Triëder $OM_1 M_2 M_3$, das sich gleichzeitig mit dem Kräftesystem und mit der dem Hauptcentralellipsoid conjungirten Cylinderfläche mitdreht (ohne jedoch, wie dies die obigen, von $\alpha'_x \alpha'_y \alpha'_z \beta'_x$. unabhängigen Werthe von $a_x a_y a_z$ $b_x b_y b_z$ lehren, seine Gestalt zu ändern), auf folgende einfache Art constructiv bestimmen:

Man trage auf der positiven Richtung der Axe ξ' von O aus die Strecke a_0 auf (im Falle eines negativen a_0 auf der negativen Richtung) und füge im Endpunkte parallel zur ζ'-Axe die Abscisse ξ des Punktes O an, wodurch man zum Punkte m_1 gelangt, ebenso füge man an die in der positiven Richtung der Axe η' gelegene Strecke b_0 in der Richtung der Axe ζ' die Ordinate η, wodurch man zum Punkte m_2 gelangt; der dritte Punkt m_3 ist in der ζ'-Axe im Abstande ζ von O gelegen. Dadurch erhält man das Tetraëder $Om_1 m_2 m_3$, dessen Kanten Om_1, Om_2, Om_3 man ohne Änderung ihrer Richtung mit der unveränderlichen Grösse R der Reductionsresultanten zu multipliciren hat, um das gesuchte Triëder $OM_1 M_2 M_3$, dessen Kanten OM_1, OM_2, OM_3 die Längen $R_1 R_2 R_3$ haben, zu erhalten. Für alle Punkte, die in einer zur Centralebene parallelen Ebene gelegen sind, hat ζ, daher auch das Tetraëdervolumen $\frac{1}{6}\Delta = \frac{1}{6} R^3 \; a_0 b_0 \zeta$ einen constanten Werth, für alle Punkte der Centralebene reducirt sich das Tetraëder auf ein Dreieck und das Centralellipsoid für diese Punkte degenerirt, da die Determinante $\Delta = 0$ ist, in eine Cylinderfläche, deren Axe zur Centralebene normal ist.